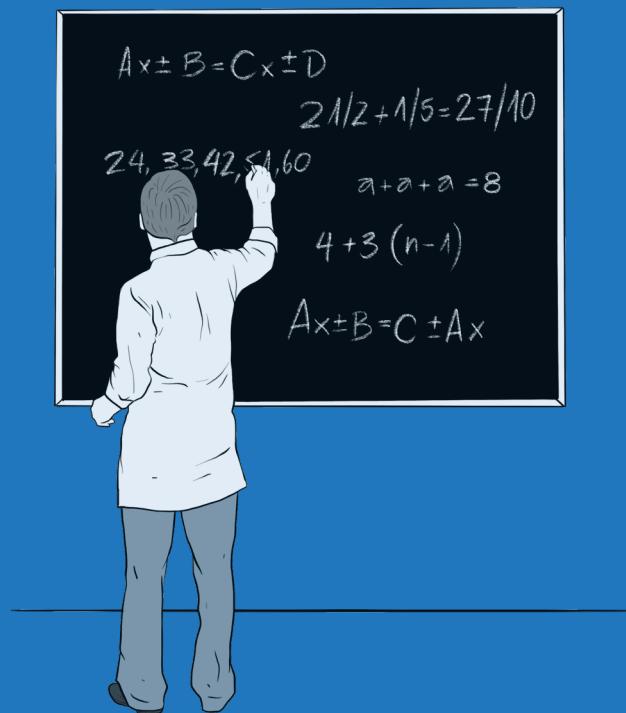


EDITORES: JESÚS G. LUGO-ARMENTA, LUIS R. PINO-FAN,  
MARCEL POCHULU, WALTER F. CASTRO

# ENFOQUE ONTO-SEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INVESTIGACIÓN MATEMÁTICOS:

INVESTIGACIÓN Y DESARROLLOS EN AMÉRICA LATINA



UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS  
EDITORIAL

## DRA. JESÚS G. LUGO-ARMENTA

Doctora en Educación Matemática por la Universidad de Los Lagos. Coordinadora del Seminario Latinoamericano de Colaboración sobre el Enfoque Onto-Semiotico (EOS), miembro de la Sociedad Chilena de Educación Matemática (SOCHIEM) y académica del Departamento de Ciencias Exactas y los Programas de Magíster y de Doctorado en Educación Matemática de la Universidad de Los Lagos.

## DR. LUIS R. PINO-FAN

Doctor en Didáctica de la Matemática, con mención internacional, por la Universidad de Granada, España. Académico Titular de la Universidad de Los Lagos; Director del Departamento de Ciencias Exactas y Director del Doctorado en Educación Matemática de la Universidad de Los Lagos. También es Director de la Sociedad Chilena de Educación Matemática (SOCHIEM).  
<http://www.lrpino-fan.com/>

## DR. MARCEL POCHULU

Profesor de Matemática, Física y Cosmografía, Licenciado en Pedagogía Matemática, Magíster en Docencia Universitaria y Doctor en Didáctica de la Matemática. Profesor Titular de la Universidad Nacional de Villa María (Argentina) en Didáctica de la Matemática y en la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Villa María. Profesor del área de Educación Matemática en carreras de posgrado en diversas universidades de Argentina y Colombia.

## DR. WALTER F. CASTRO GORDILLO

Licenciado en Matemáticas y Física, Matemático, Magíster en Matemáticas por la Universidad del Valle; Magíster en Didáctica de las Matemáticas y Doctor en Didáctica de las Matemáticas, mención Europea, por la Universidad de Granada, España; postdoctorado por la Universidad de Granada y por la Universidad de Barcelona. Profesor Titular de la Universidad de Antioquia, en la Facultad de Educación.





**ENFOQUE ONTO-SEMIÓTICO DEL  
CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN  
MATEMÁTICOS: INVESTIGACIONES Y  
DESARROLLOS EN AMÉRICA LATINA**

Lugo-Armenta, Jesús. Pino-Fan Luis  
Pochulu, Marcel. Castro, Walter  
Enfoque onto-semiótico del conocimiento y la instrucción  
matemáticos: investigaciones y desarrollos en América Latina  
Jesús Lugo-Armenta, Luis Pino-Fan,  
Marcel Pochulu y Walter Castro.  
Osorno: Editorial Universidad de Los Lagos, 2022  
384 p.; 17 x 24 cm cerrado  
RPI: 2022-A-5538 ISBN: 978-956-6043-xx-x  
1. Fringilla Commodo 2. Porta  
3. Inceptos Adipiscing Vehicula 4. Fermentum Purus

Este libro fue aprobado por el Consejo Editorial y un Comité  
Científico Internacional a través de referato.

**ENFOQUE ONTO-SEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y  
LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS: INVESTIGACIONES  
Y DESARROLLOS EN AMÉRICA LATINA**

Primera edición: 2022

© 2022 Jesús Lugo-Armenta, Luis Pino-Fan,  
Marcel Pochulu y Walter Castro  
RPI: 2022-A-5538

© 2022 Editorial Universidad de Los Lagos  
ISBN 978-956-6043-xx-x

editorial@ulagos.cl  
www.editorial.ulagos.cl  
Cochrane 1070, Osorno

Edición: Ricardo Casas Tejeda  
Ilustración de portada: Kiyén Clavería Aguas  
Dirección de arte: Alexis Hernández Escobar

Impreso en Santiago de Chile

# **ENFOQUE ONTO-SEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS: INVESTIGACIONES Y DESARROLLOS EN AMÉRICA LATINA**

## **EDITORES:**

JESÚS G. LUGO-ARMENTA

LUIS R. PINO-FAN

MARCEL POCHULU

WALTER F. CASTRO

## **COMITÉ CIENTÍFICO INTERNACIONAL**

FABIAN ESPINOZA

Universidad Nacional del Nordeste, Argentina

JOSÉ FERNÁNDEZ DA SILVA

Instituto Federal de Minas Gerais, Brasil

YURI MORALES-LÓPEZ

Universidad Nacional Costa Rica, Costa Rica.

YOCELYN PARRA URREA

Universidad de San Sebastián, Chile

WILSON GORDILLO THIRIAT

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia

SILVIA IBARRA OLMO

Universidad de Sonora, México

NORMA V. RUBIO GOYCOCHEA

Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú



UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

EDITORIAL



# ÍNDICE

PRÓLOGO.....15

## CAPÍTULO 1

Estudio de la tabla estadística en la educación básica chilena .....	17
Study of the statistical table in chilean basic education .....	17
1. Introducción.....	19
2. Antecedentes.....	21
2.1. Complejidad semiótica de la tabla estadística .....	21
2.2. Investigación sobre comprensión de la tabla estadística .....	22
2.3. Investigación en libros de texto sobre la tabla estadística.	24
3. Marco teórico .....	25
4. Planificación de la investigación.....	27
5. Avance de resultados en la propuesta de investigación .....	29
5.1. Metodología .....	29
5.2. Resultados.....	30
6. Reflexiones finales.....	34
Agradecimientos .....	35
Referencias.....	35
ANEXO. Muestra de libros analizados .....	39

## CAPÍTULO 2

Procesos matemáticos en la práctica argumentativa mediante el uso de la geometría dinámica .....	41
Mathematical processes in practice argumentative using dynamic geometry .....	41
1.1. La Geometría Dinámica como medio para la generación de argumentos .....	44
2. Contexto de la problemática .....	45
3. Herramientas teóricas metodológicas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) .....	46
4. Consideraciones metodológicas .....	49

4.1. Organización didáctica de las actividades propuestas.....	50
4.2. Descripción general de la propuesta de actividades.....	51
5. Análisis y resultados .....	52
5.1. Procesos matemáticos identificados en la práctica argumentativa .....	54
5.2. Configuraciones ontosemióticas en el estudio de las isometrías en el plano.....	56
6. Conclusiones y reflexiones finales .....	58
Referencias .....	59

### CAPÍTULO 3

Análisis didáctico de lecciones de libros de texto sobre proporcionalidad basado en el enfoque ontosemiótico.	
Implicaciones para la formación de profesores.....	63
Didactic analysis of textbook lessons on proportionality based on the ontosemiotic approach.	
Implications for teacher training .....	63
1. Introducción y antecedentes.....	65
2. Problemática, preguntas y objetivos de investigación .....	66
3. Marco Teórico.....	68
4. Metodología .....	68
5. Avances del proyecto de investigación, análisis y resultados .	69
6. Reflexiones Finales .....	77
Agradecimientos .....	79
Referencias .....	79

### CAPÍTULO 4

Análisis del currículo chileno en educación básica entorno división como isomorfismo de medida.....	85
Analysis of the chilean curriculum in basic education environment division as isomorphism of measure.....	85
1. Antecedentes .....	87
1.1. Introducción .....	87
1.2. Estudio Histórico – documental de la noción de división.	87
1.3. Desde la época más remota a la actualidad.....	87
1.4. Dificultades en la enseñanza de la división .....	90
1.5. Estudios con estudiantes sobrelos problemas de División	92
2. Contexto de la problemática.....	94
2.1. Problema de investigación .....	95

2.2. Objetivo.....	96
2.3. Metodología.....	96
3. Análisis de la noción de división en 5º básico, según el eos....	97
3.1. Análisis epistémico del programa de estudio de 5º básico .	97
3.2. Configuración epistémica para los libros de texto.....	100
3.3. Discusión y propuesta.....	105
Agradecimientos .....	107
Referencias.....	107

## CAPÍTULO 5

Caracterización de los niveles de algebrización en las prácticas matemáticas de un libro de educación básica chilena.....	109
Characterisation of the levels of algebraization in mathematical practices of a primary education textbook.....	109
1. Antecedentes .....	111
2. Niveles de algebrización onto-semióticos .....	113
3. Metodología.....	115
3.1. Contexto del estudio.....	115
3.1.1. Matemática para sexto básico .....	117
3.2. Análisis de las prácticas matemáticas .....	117
4. Resultados.....	119
4.1. Nivel o de algebrización: objetos y procesos matemáticos identificados .....	119
4.2. Prácticas en niveles proto-algebraicos .....	120
4.3. Nivel consolidado de algebrización: objetos y procesos matemáticos identificados .....	123
5. Reflexiones finales .....	124
Agradecimientos .....	127
Referencias.....	127

## CAPÍTULO 6

Uso del constructo idoneidad didáctica del enfoque onto-semiótico en el diseño de una tarea de matemáticas en educación secundaria obligatoria: el caso de la enseñanza de la geometría .....	133
Using the didactic suitability construct of onto-semiotic approach to design a math task at secondary school: the case of geometry.....	133
1. Antecedentes .....	135

1.1. La idoneidad didáctica.....	135
2. Propuesta.....	138
3. Análisis y discusión .....	143
4. Conclusión.....	150
Agradecimientos .....	151
Referencias.....	151

## CAPÍTULO 7

Creación de problemas de optimización por estudiantes universitarios: un análisis mediante mapas híbridos .....	153
Creation of optimization problems by university students: an analysis using hybrid maps .....	153
1. Antecedentes .....	155
1.1. Estudios acerca de la enseñanza y aprendizaje de la optimización en Cálculo Diferencial .....	156
1.2. Tratamiento matemático de la optimización en libros de texto .....	158
2. Contexto de la problemática .....	162
3. Metodología.....	163
4. Análisis, discusión y propuesta .....	167
Agradecimientos .....	168
Referencias.....	169

## CAPÍTULO 8

Situaciones didácticas para el estudio de la trigonometría en el décimo grado .....	171
Didactic situations for the study of trigonometry in the tenth grade .....	171
1. Introducción.....	173
2. Aspectos de la enseñanza y el desarrollo de la trigonometría en el contexto escolar .....	175
3. La formación didáctico-matemática, el eos y la representación semiótica.....	176
4. Procesos de deducción y representación de proposiciones matemáticas .....	180
4.1. Situación didáctica.....	182
4.2 Situación didáctica .....	184
4.3 Situación didáctica.....	187

5. Reflexiones finales .....	189
Referencias.....	190

## CAPÍTULO 9

Nueva mirada para analizar las conexiones desde dos lentes teóricos: la teoría ampliada de las conexiones matemáticas y el enfoque ontosemiótico .....	193
New view for analyzing connections from two theoretical lenses: the extended theory of mathematical connections and the onto-semiotic approach.....	193
1. Introducción y antecedentes.....	195
1.1. Contexto de la problemática de investigación .....	195
2. Marco Teórico .....	197
2.1. Las conexiones matemáticas en Educación Matemática ...	197
2.2. Enfoque Ontosemiótico .....	200
3. Metodología .....	202
4. Análisis y Resultados .....	203
4.1. Primer resultado: Teoría Ampliada de las Conexiones Matemáticas (TAC) .....	203
4.2. Segundo resultado: “Networking of theories” entre la TAC y el EOS .....	208
4.2.1. Complementariedades entre la TAC y el EOS .....	210
4.2.2. Análisis con la TAC .....	212
4.2.3. Análisis con el EOS .....	213
5. Reflexiones finales .....	215
Referencias.....	215

## CAPÍTULO 10

El desarrollo de la reflexión sobre la práctica en la formación de profesores de matemáticas: una mirada desde el lesson study y los criterios de idoneidad didáctica .....	221
The development of the reflection on the practice in the training of mathematics teachers a look from the lesson study and the didactical suitability criteria .....	221
1. Introducción.....	223
2. Marco Teórico.....	224
2.1. La metodología <i>Lesson Study</i> (LS) .....	224

2.2. Tipos de análisis didácticos propuesto por el eos e Idoneidad Didáctica.....	225
3. Metodología.....	228
3.1. Fases seguidas para el estudio del constructo CID .....	228
3.2. Fases seguidas para las experiencias de LS.....	229
3.3. Fase final .....	232
4. Resultados.....	232
5. Consideraciones finales .....	237
Reconocimiento .....	238
Referencias.....	238

## CAPÍTULO 11

Representaciones semióticas de objetos matemáticos y asignación de sentidos en situaciones de tratamiento.	
El caso de profesores de matemáticas .....	243
Semiotic representations of mathematical objects and assignment of senses in treatment situations.	
The case of math teachers .....	243
1. Introducción .....	245
2. Antecedentes de investigación .....	246
3. Marco teórico .....	250
4. Metodología .....	253
5. Análisis y resultados.....	255
5. Consideraciones finales .....	262
6. Referencias.....	266

## CAPÍTULO 12

Análisis de tareas de matemática que se proponen en una formación continua de profesores cuando las TIC se establecen como recurso prioritario: un estudio de caso .....	269
Analysis of mathematics tasks that are proposed in a continuous training of teachers when ict is established as a priority resource: a case study .....	269
1. Contexto de la problemática.....	271
2. Antecedentes .....	271
3. Cuestiones metodológicas .....	273
4. Análisis y discusión .....	279
5. A modo de cierre .....	286
Referencias .....	287

## CAPÍTULO 13

Análisis de la práctica de un profesor en la enseñanza de derivadas para ingeniería en el Perú.....	289
Analysis of the professor's practice in the teaching of derivatives for engineering in Peru.....	289
1. Antecedentes .....	291
2. Objetivo de Investigación.....	292
3. Marco Teórico.....	292
4. Metodología .....	294
5. Resultados: Estudio de caso del profesor B .....	296
6. Conclusiones .....	303
Reconocimiento .....	308
Referencias.....	309

## CAPÍTULO 14

Estado de la cuestión con relación al conocimiento didáctico-matemático en modelación matemática con el uso de las TIC .....	311
The state of research into didactic-mathematical knowledge and modeling with the use of ict .....	311
1. Antecedentes .....	313
2. Metodología.....	326
3. Conclusiones .....	327
Referencias.....	328

## CAPÍTULO 15

La complejidad de los objetos matemáticos en la formación inicial de docentes .....	335
The complexity of mathematical objects in the initial training of teachers .....	335
1. Introducción.....	337
2. Objetivo de investigación .....	338
3. Marco Teórico.....	338
4. Metodología .....	346
5. Resultados.....	348
6. Conclusiones .....	350
7. Reflexiones Finales .....	350
Reconocimiento .....	351
Referencias.....	351

## CAPÍTULO 16

Secuencia didáctica para el desarrollo de habilidades propias del pensamiento algebraico.....	355
Didactic sequence for the development of algebraic thinking skills.....	355
1. Antecedentes .....	357
2. Problemática .....	358
3. Marco Teórico.....	359
4. Elementos metodológicos .....	359
5. Secuencias didácticas y elementos para el diseño .....	360
6. Análisis a priori.....	369
7. Análisis a posteriori de los Niveles de Algebrización detectados en la implementación .....	372
8. Consideraciones Finales.....	376
Referencias.....	376

## PRÓLOGO

En el marco del *Seminario Latinoamericano de Colaboración sobre el Enfoque Ontosemiótico* (eos) se celebró, del 24 al 7 de noviembre de 2020, las Primeras Jornadas de Estudiantes de Postgrado en Matemática Educativa que utilizan los desarrollos teóricos y metodológicos del eos. La presente publicación incluye los resúmenes extensos de los 16 trabajos que se presentaron.

Comienzo este prólogo felicitando a los promotores de este evento por la iniciativa, así como a los estudiantes, tutores y directores de las tesis por la decisión de adoptar las herramientas del eos para plantear sus proyectos de investigación.

Sin duda la organización de este tipo de eventos es un dispositivo crucial para configurar y hacer avanzar la comunidad académica comprometida con el desarrollo y aplicación de un sistema teórico inclusivo como es el eos. Este marco teórico se viene desarrollando desde hace más de 25 años y, como se refleja en la gran cantidad de publicaciones disponibles en internet (<http://enfoqueontosemiotico.ugr.es>), está teniendo un cierto impacto a nivel internacional. Sin embargo, es fundamental atraer a jóvenes investigadores que se involucren en el estudio, comprensión y aplicación de las nuevas herramientas conceptuales y estrategias metodológicas que propone el eos, las cuales entran en competición y diálogo con otras teorías.

Este libro es una muestra significativa de las posibilidades que ofrece el eos para el planteamiento de problemas de investigación en matemática educativa y su abordaje con herramientas teóricas pertinentes. Así, el lector encontrará avances en proyectos de tesis doctorales y maestría sobre análisis de libros de texto y del currí-

culo; diseño de situaciones y tareas; uso de las TIC; modelación matemática; formación de profesores. Los contenidos matemáticos sobre los que se centran las investigaciones refieren a estadística, geometría, trigonometría, cálculo (la derivada), álgebra, aritmética (división y proporcionalidad). El nivel educativo incluye la educación primaria, secundaria, bachillerato, formación inicial y continua de profesores, así como la formación matemática de ingenieros. En cuanto a las herramientas del EOS se aplican la noción pragmática de significado, configuraciones de objetos y procesos, configuraciones cognitivas, funciones semióticas; la noción de idoneidad didáctica y su uso como apoyo para la práctica reflexiva, así como el modelo de conocimientos didáctico-matemáticos para la formación inicial y continuada de los profesores de matemáticas. No faltan incluso algunos trabajos que abordan el problema de la comparación y articulación del EOS con otras teorías, como son los campos conceptuales y el modelo de las conexiones matemáticas extendidas.

Espero que este libro, reflejo del trabajo realizado en las Primeras Jornadas de Estudiantes de Posgrado en el marco del *Seminario Latinoamericano de Colaboración sobre el Enfoque Ontosemiótico* sea el primero de una serie de eventos similares en años sucesivos.

JUAN D. GODINO  
Universidad de Granada

## **CAPÍTULO 15**

# **LA COMPLEJIDAD DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS EN LA FORMACIÓN INICIAL DE DOCENTES**

## **THE COMPLEXITY OF MATHEMATICAL OB- JECTS IN THE INITIAL TRAINING OF TEACHERS**

EULALIA CALLE<sup>1</sup>, ADRIANA BREDA<sup>2</sup>, VICENÇ FONT<sup>2</sup>

eulalia.calle@cuenca.edu.ec, adriana.breda@ub.edu, vfont@ub.edu

<sup>1</sup>UNIVERSIDAD DE CUENCA, <sup>2</sup>UNIVERSIDAD DE BARCELONA

### **Resumen**

El objetivo es el desarrollo de la competencia en análisis de la idoneidad didáctica, correspondiente al componente muestra representativa de la complejidad del objeto matemático, en programas de formación de profesores de matemáticas de Ecuador. Por una parte, es una Investigación cualitativa que describe el uso competente de dicho componente y; por otra parte, tiene un componente de desarrollo al elaborar recursos didácticos para conseguirlo. Se diseñaron tareas y se analizaron las producciones de los participantes a partir de categorías a priori (los diferentes significados del objeto matemático implicado) mediante un análisis de contenido para inferir el significado parcial usado. El principal resultado es que los participantes asumen la importancia de considerar la plurisignificación de los objetos matemáticos en el proceso de ins-

trucción; sin embargo, tienen dificultades para diseñar tareas que impliquen el uso de una diversidad de significados.

**Palabras Claves:** *formación de profesores de matemáticas, reflexión sobre la práctica docente, idoneidad didáctica, complejidad de objetos matemáticos.*

## Abstract

*The objective is the development of competence in the analysis of didactic suitability, corresponding to the representative sample component of the complexity of the mathematical object, in training programs for mathematics teachers in Ecuador. It is a qualitative research that describes the competent use of said component and, on the other hand, it has a development component when developing didactic resources to achieve it. Tasks were designed and the productions of the participants were analyzed from a priori categories (the different meanings of the mathematical object involved) through a content analysis to infer the partial meaning used. The main result is that participants assume the importance of considering the multiple meaning of mathematical objects in the instructional process; nevertheless, they have difficulty designing tasks that involve the use of a variety of meanings.*

**Keywords:** *training of mathematics teachers, reflection on teaching practice, didactic suitability, complexity of mathematical objects.*

## 1. INTRODUCCIÓN

El Ministerio de Educación del Ecuador, con la intención de avanzar hacia la excelencia académica, viene implementando políticas educativas que buscan conseguir una educación primaria universal, erradicar el hambre y la pobreza, corregir las desigualdades de género (Cortez, 2014), cuya consecución depende en buena medida de la educación de la sociedad en general. Con esta finalidad, a partir del 2010, se ha reformado la educación general básica (EGB) y el bachillerato general unificado (BGU) introduciendo el modelo de formación de destrezas con criterios de desempeño. Esta reforma no ha obtenido los resultados positivos esperados (según lo conocido hasta ahora), por lo que es necesario continuar profundizando en la mejora de la formación inicial, así como de la formación continua de los profesores que imparten las matemáticas en el Ecuador, en particular fomentando el desarrollo de la reflexión sobre la práctica docente.

Con relación a la reflexión sobre la práctica docente, y luego de un recorrido bibliográfico de investigaciones realizadas acerca de la formación del profesor de matemáticas en el Ecuador, se puede afirmar que muy pocas, a diferencia de lo que ha pasado en otros países, se refieren al desarrollo de la reflexión, ya que las investigaciones existentes se han centrado en la metodología de enseñanza y en desarrollo de material concreto y aplicaciones de software, como propuestas para mejorar la educación matemática (Bernal, et al, 2019).

Por otra parte, la investigación internacional sobre el conocimiento y las competencias del profesorado de matemáticas ha evidenciado que los profesores tienen dificultades para interpretar aspectos epistémicos de las tareas y para identificar su potencial educativo; en el caso de Ecuador, la revisión de la literatura muestra que son necesarias investigaciones sobre esta temática.

El proyecto de tesis que se presenta se sitúa en esta línea de investigar sobre la reflexión del profesor sobre su práctica en un aspecto muy concreto: la reflexión del profesor ecuatoriano sobre la importancia de tener en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos (entendida como pluralidad de significados) en los procesos de instrucción.

## **2. OBJETIVO DE INVESTIGACIÓN**

El *objetivo general* de la investigación es desarrollar el diseño y la implementación de recursos formativos que promuevan la realización de análisis valorativos de procesos de instrucción por parte de los profesores (en formación o en servicio) utilizando la herramienta criterios de idoneidad didáctica e investigar cómo se desarrolla la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en estos dispositivos. En particular, se hace énfasis en la enseñanza y aprendizaje del uso del componente *representatividad de la complejidad del objeto matemático* del criterio de idoneidad epistémica. Este objetivo general se concreta en seis objetivos específicos:

## **3. MARCO TEÓRICO**

La revisión de la literatura señala la importancia de la reflexión del profesor y la necesidad de potenciarla (Korthagen, 2010). En esta línea, una agenda emergente de investigación en el campo de la educación matemática está relacionada con la importancia de reflexionar de manera profesional acerca de la práctica docente, pasando a ser un objetivo importante en la formación de profesores, y más aún, una competencia clave para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza. La constatación de la relevancia que tiene la reflexión sobre la práctica ha llevado al diseño e implementación de propuestas didácticas que favorezcan su desarrollo (Coles, 2014; Ponte, 2011; Star y Strickland, 2008).

Entre los enfoques teóricos que se han centrado en desarrollar herramientas y promover métodos de investigación sobre la reflexión del profesor (Gellert, Becerra y Chapman, 2013), hay que resaltar, entre otros, la investigación – acción (Eliot, 1993) que plantea una ayuda al maestro para profundizar la comprensión de su problema en una situación inicial; la práctica reflexiva (Schön, 1983) que da importancia a la reflexión sobre la acción; el Lesson Study como metodología de trabajo grupal para la reflexión (Hart, Alston y Murata, 2011); y las investigaciones sobre la competencia mirar con sentido profesional (Mason, 2002), en los cuales se trata de promover la reflexión del profesor sobre la acción, de manera individual o colectiva, identificando factores que afectan los procesos de instrucción y, así, tomar decisiones basadas en ella.

### **3.1. LA REFLEXIÓN SOBRE LA PRÁCTICA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES Y LOS CRITERIOS DE IDONEIDAD EN EL MODELO CCDM**

En el modelo teórico de competencias y conocimientos de profesor de matemáticas (CCDM).

(Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017), basado en constructos del Enfoque Ontosemiótico (eos) (Godino, Batanero y Font, 2007; 2019) se considera que las dos competencias clave son la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica, siendo el núcleo fundamental de esta última (Breda, Pino-Fan y Font, 2017) diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de idoneidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora. Esta competencia está formada por diferentes subcompetencias: 1) subcompetencia de análisis de la actividad matemática; 2) subcompetencia de análisis y gestión de la interacción y de su

efecto sobre el aprendizaje de los estudiantes; 3) subcompetencia de análisis de normas y metanormas; y 4) subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción. En este trabajo nos centraremos en esta última subcompetencia, en concreto en uno de sus componentes.

La subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción hace hincapié en el análisis de idoneidad didáctica. Dicha noción (Breda, Font y Pino-Fan, 2018) es una respuesta parcial de la problemática: ¿Qué criterios se deben utilizar para diseñar una secuencia de tareas, que permitan evaluar y desarrollar la competencia matemática de los alumnos y qué cambios se deben realizar en su rediseño para mejorar el desarrollo de esta competencia? Esta noción se descompone en los siguientes criterios parciales de idoneidad didáctica (Font, Planas y Godino, 2010): *Idoneidad Epistémica*, para valorar si las matemáticas que están siendo enseñadas son “buenas matemáticas”; *Idoneidad Cognitiva*, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de aquello que los alumnos saben, y después del proceso, si los aprendizajes adquiridos están cerca de aquello que se pretendía enseñar; *Idoneidad Interaccional*, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos; *Idoneidad Mediacional*, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción; *Idoneidad Emocional*, para valorar la implicación (intereses, motivaciones,...) de los alumnos durante el proceso de instrucción; *Idoneidad Ecológica*, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional. En particular, la idoneidad epistémica se refiere al grado de representatividad e interconexión de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de

referencia. En Breda, Pino-Fan y Font (2017) se aporta un sistema de componentes e indicadores para cada criterio que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, que está pensado para un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa.

La necesidad y utilidad de estos criterios se da en dos momentos del proceso de instrucción: primero para guiarlos (los criterios de idoneidad son principios que orientan “cómo se deben hacer las cosas”) y, segundo, para valorar sus implementaciones (los criterios sirven para valorar el proceso de instrucción efectivamente implementado).

La operatividad de los criterios de idoneidad exige definir un conjunto de componentes e indicadores observables, que permitan valorar el grado de idoneidad de cada uno de los criterios. Por ejemplo, todos seguramente estaremos de acuerdo en que es necesario implementar unas “buenas” matemáticas, pero podemos entender cosas muy diferentes por ello. Para algunos criterios, los descriptores son relativamente fáciles de consensuar (por ejemplo, para el criterio de idoneidad de medios), para otros, como es el caso de la idoneidad epistémica es más difícil. En Breda y Lima (2016), Seckel (2016), Breda, Pino-Fan y Font (2017) y Breda et al (2021), se aporta un sistema de indicadores que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, que está pensado para un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa. A continuación, se reproducen los componentes e indicadores del criterio de idoneidad epistémica (Breda y Lima, 2016, p. 80):

Tabla 1. Componentes e indicadores de la idoneidad epistémica

Componentes	Indicadores
Errores	No se observan prácticas que se consideren incorrectas desde el punto de vista matemático.
Ambigüedades	No se observan ambigüedades que puedan llevar a la confusión a los alumnos; definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen; adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen, uso controlado de metáforas, etc.
Riqueza de procesos	La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.).
Representatividad de la complejidad del objeto matemático	<p>Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar contemplada en el currículo.</p> <p>Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar.</p> <p>Para uno o varios significados parciales, muestra representativa de problemas.</p> <p>Para uno o varios significados parciales, uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...), tratamientos y conversiones entre los mismos.</p>

### 3.2. IDONEIDAD EPISTÉMICA Y COMPLEJIDAD DEL OBJETO MATEMÁTICO

Tanto los componentes como los indicadores de los criterios de idoneidad didáctica se han elaborado considerando los principios y los resultados de la investigación en el área de Didáctica de las Matemáticas. En particular, para la idoneidad epistémica se ha tenido en cuenta un principio fundamental del Enfoque Onto Semiótico que, con los matices propios de cada enfoque, es (o puede ser) asumido por otros enfoques teóricos del área. Nos referimos al principio que se puede formular de la siguiente manera: los objetos matemáticos emergen de las prácticas, lo cual conlleva su complejidad (Font, Godino y Gallardo, 2013). De este principio se deriva un componente (representatividad de la complejidad del

objeto matemático) cuyo objetivo es que se tenga en cuenta, dentro de lo posible, dicha complejidad en el diseño y rediseño de las secuencias didácticas.

Este componente tiene su origen en la manera pragmática de cómo se entiende el significado de un objeto matemático en el EOS. Desde un punto de vista pragmático, el significado de un objeto matemático se entiende como el conjunto de prácticas en la que dicho objeto interviene de una manera determinante. Es decir, supone disponer de prácticas con respecto al campo de experiencia que el objeto abarca. Cuando se define el significado de un objeto matemático en términos de prácticas, tal como se propone en el pragmatismo, resulta que el significado de un objeto matemático queda ligado a otros significados y a otros objetos, puesto que en las prácticas interviene dicho objeto conjuntamente con otros objetos matemáticos. Este hecho, permite distinguir dos términos que resultan difíciles de diferenciar, nos referimos a los términos sentido y significado. En efecto, puesto que el objeto se puede relacionar con unos u otros objetos según el contexto, el tipo de notación, etc., para dar lugar a diferentes prácticas, podemos entender el sentido como un significado parcial, esto es, como un subconjunto (sentido) del sistema de prácticas en las que el objeto es determinante (significado).

El significado de un objeto matemático entendido como sistema de prácticas se puede parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas que son utilizadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de notación produciendo un determinado sentido. Cada contexto ayuda a generar sentido (permite generar un subconjunto de prácticas), pero no genera todos los sentidos.

Un objeto matemático, que se ha originado como un emergente del sistema de prácticas que permite resolver un determinado campo de problemas, con el paso del tiempo queda enmarcado en

diferentes programas de investigación. Cada nuevo programa de investigación permite resolver nuevos tipos de problemas, aplicar nuevos procedimientos, relacionar el objeto (y por tanto definir) de una manera diferente, utilizar nuevas representaciones, etc. De esta manera, con el paso del tiempo aparecen nuevos subconjuntos de prácticas (sentidos) que amplían el significado del objeto.

Según Font, Godino y Gallardo (2013), de acuerdo con el punto de vista pragmatista, para analizar un texto matemático y, más en general, la actividad matemática, sea profesional o escolar, es necesario contemplar como mínimo los siguientes elementos: 1) notaciones, representaciones (lenguaje), 2) situaciones-problema 3) definiciones, 4) procedimientos, técnicas, 5) proposiciones, propiedades, teoremas, etc., y 6) argumentos. Estos seis tipos de elementos (llamados objetos primarios en el EOS) se articulan formando configuraciones de objetos llamadas epistémicas, y se pueden entender como un contexto intra matemático. Se trata de una herramienta que puede ser útil para describir la complejidad de los objetos matemáticos y de las prácticas de las cuales emergen. En el EOS, la introducción de la dualidad unitaria-sistémica permite reformular la visión “ingenua” de que “hay un mismo objeto matemático con distintas representaciones”. Lo que hay es un sistema complejo de prácticas, que permiten resolver problemas, en las que el objeto matemático en cuestión no aparece directamente, lo que si aparece son representaciones del objeto, diferentes definiciones, proposiciones y propiedades del objeto, procedimientos que se le aplican y argumentos acerca del objeto (configuraciones de objetos primarios). Dicho de otra manera, a lo largo de la historia se han ido generando diferentes configuraciones epistémicas para el estudio del objeto en cuestión, algunas de las cuales han servido para generalizar a las preexistentes.

Desde esta perspectiva, un criterio de idoneidad de un proceso de instrucción para un objeto matemático es que el conjunto de prácticas implementadas sea un conjunto lo más representativo posible del sistema de prácticas que son el significado del objeto. Dicho en términos de contextos, hay que presentar a los alumnos una muestra de contextos intra matemáticos representativa, una muestra de contextos que permita construir una muestra representativa de los diferentes sentidos del objeto. Por otra parte, una vez seleccionada una muestra representativa de contextos intra matemáticos, hay que seleccionar los contextos extra matemáticos que permiten hacer emergir las configuraciones epistémicas en las que se concretan dichos contextos intra matemáticos.

### **3.3. LA REFLEXIÓN SOBRE LA COMPLEJIDAD DEL OBJETO MATEMÁTICO EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES**

En diferentes procesos de formación de profesores de matemáticas de España, México, Brasil, Ecuador, Chile, Panamá, Costa Rica, Venezuela y Argentina (Ramos, 2006; Ferreres y Vanegas, 2015; Pochulu, Font y Rodríguez, 2016; Breda y Lima, 2016; Seckel, 2016; Breda, Pino-Fan y Font, 2017; Morales-López y Font, 2019), se han realizado un conjunto de investigaciones que tienen como finalidad investigar el uso del constructo criterios de idoneidad didáctica, propuestos por el EOS (Godino, Batanero y Font, 2007; Breda, Font y Lima, 2015; Breda, Font y Pino-Fan, 2018), como herramienta para organizar la reflexión del profesor a su práctica, cuando esta reflexión está orientada hacia la valoración y mejora de la práctica, con el objetivo de desarrollar en los profesores la subcompetencia de análisis de la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción.

Estas investigaciones han puesto de manifiesto los siguientes aspectos: 1) aunque no se incorpore explícitamente la enseñanza de los componentes e indicadores de los criterios de idoneidad di-

dáctica, algunos de ellos, y en particular el componente <<muestra representativa de la complejidad del objeto matemático>>, están presentes de manera implícita cuando los profesores o futuros profesores hacen valoraciones de propuestas didácticas (suyas o de otros) (Breda y Lima, 2016; Breda, Pino-Fan y Font, 2017). 2) Incorporar el componente <<muestra representativa de la complejidad del objeto matemático>> para valorar la idoneidad epistémica de un proceso de instrucción, no es tarea fácil, ni para los formadores ni para sus alumnos (futuros profesores o profesores en servicio), pero se puede enseñar como parte del proceso de formación del profesorado. En estos dispositivos formativos, se hace hincapié en la necesidad de realizar un estudio preliminar orientado a la reconstrucción de un significado global del objeto matemático que se quiere enseñar para poder ser conscientes de su complejidad.

#### **4. METODOLOGÍA**

La investigación es primordialmente cualitativa, puesto que el interés es primero describir, sobre todo, el desarrollo de un aspecto parcial de la competencia de los futuros profesores (analizar y valorar la idoneidad de procesos de instrucción). Tiene además un componente de desarrollo ya que, por un lado, se proporciona conocimiento detallado acerca del estado actual de la formación de profesores de secundaria (en formación y en servicio) en Ecuador y, por otro lado, se elabora recursos didácticos específicos para mejorar la formación de estos profesores.

Tabla 2. *Participantes de la investigación* (Fuente: Autores)

<b>Formación Inicial: Futuros Profesores de Matemáticas</b>	
<b>Participantes</b>	Estudiantes de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física. Universidad de Cuenca.
<b>Formación Continua: Profesores de Matemáticas en Ejercicio</b>	
<b>Participantes</b>	95 profesores de matemáticas de instituciones públicas y privadas, de diferentes provincias y ciudades del Ecuador. Trabajan en niveles de Educación General Básica superior (EGBS) y el Bachillerato General Unificado (BGU).
<b>Programa</b>	Máster en Formación Continua y Profesionalización Docente: Curso de dos años dividido en tres bloques: a) Bloque general (15 créditos ECTS); b) Bloque específico (21 créditos ECTS) y c) Bloque de Practicum y Trabajos de Fin de Máster (TFM) (24 créditos ECTS).
<b>Asignatura Abordada</b>	Innovación e Investigación sobre la Propia Práctica. Objetivos: Presentar propuesta de innovación y herramientas de valoración de la calidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que permitan al profesor, la mejora de su propia práctica. Pretendía además hacer una iniciación a la investigación en Didáctica de las Matemáticas y a la difusión de sus resultados.

Se trata de diseñar e implementar ciclos formativos que en el sentido amplio son considerados experimentos del desarrollo de las competencias y conocimientos del profesor. Es un tipo de dispositivo que estudia el desarrollo profesional del profesor en formación o en servicio, y se fundamentan en los principios de los experimentos de enseñanza (Cobb *et al.*, 2003), lo que significa que un equipo de investigadores estudia el desarrollo del profesor a la vez que lo promueve como parte de un ciclo continuo de análisis e intervención. En este caso, dado que se pretende enseñar a los profesores participantes la importancia de tener en cuenta, para la enseñanza y aprendizaje de un determinado objeto matemático, una muestra representativa de los diferentes significados de dicho objeto en el diseño, valoración y rediseño de secuencias de tareas, el proceso de instrucción se diseñó teniendo en cuenta el siguiente principio:

para poder usar este componente en la valoración y rediseño de secuencias de tareas, el profesor, como mínimo, debe conocer los diferentes significados del objeto matemático a enseñar (significado holístico) y sus conexiones, debe conocer cuáles de estos significados están incluidos en el currículum y debe poder seleccionar y/o crear tareas en las que se tenga que usar un determinado significado del objeto matemático que se pretende enseñar.

Las muestras son intencionales ya que el dispositivo formativo se ha implementado con profesores de secundaria en un máster de Formación de Profesores de Secundaria de Matemáticas de Ecuador y con futuros profesores de una Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Cuenca, si bien la muestra no es estadísticamente representativa, puede ofrecer información relevante para la formación de profesores en el Ecuador.

Se diseñaron tareas específicas y se analizaron las producciones de los participantes con categorías a priori (tipos de significados del objeto matemático implicado) mediante un análisis de contenido para inferir el significado parcial usado; después se realizó una triangulación de expertos.

## **5. RESULTADOS**

En esta sección presentamos algunos de los resultados obtenidos, los cuales se han difundido por medio de diversas publicaciones. Un primer resultado de la reflexión sobre la complejidad de los objetos matemáticos en la formación inicial de profesores documentado en Calle y Breda (2019) es que, como resultado de la experiencia realizada, los estudiantes en formación docente, son conscientes de que, para mejorar el aprendizaje de las matemáticas, es necesario tener en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos, entendida como las diferentes formas de comprender los significados y su aplicación en la resolución de problemas.

Un segundo resultado de la reflexión didáctica en la formación inicial de docentes sobre la complejidad de las nociones de combinatoria (Calle, Parra y Paucar, 2020) es que los participantes tienen dificultades para realizar el análisis de la actividad matemática, en particular sus comentarios sobre las dificultades que tuvieron muestran unos análisis poco detallados.

Un tercer resultado sobre los conocimientos de futuros profesores sobre los diferentes significados del objeto matemático media aritmética (Calle, Breda y Sala, 2020) es que es importante fomentar la reflexión de los futuros profesores sobre los diferentes significados de un objeto matemático, porque la presentación de una muestra representativa de esta variedad de significados permite que los estudiantes resuelven una variedad de problemas matemáticos adicionales.

Un cuarto resultado sobre qué significado atribuyen a la media aritmética profesores de matemáticas en ejercicio (Calle, Breda y Font, 2020a), es que, tener en cuenta el componente representatividad de la complejidad del objeto matemático, es elemento importante para su formación, pues, para el profesor, conocer una muestra representativa de significados de un objeto matemático, le permite trabajar con una diversidad de problemas, facilitando que los alumnos construyan una red de significados parciales, conectados entre sí, que les permita desarrollar la competencia matemática que les posibilita resolver diferentes tipos de problemas.

Un quinto resultado sobre los significados de las medidas de tendencia central contemplados por Profesores de Matemáticas en sus Trabajos de Fin de Máster (Calle, Breda y Font, 2020b), es que los profesores están de acuerdo en la importancia de considerar los diferentes significados de los objetos matemáticos en su proceso de enseñanza. Sin embargo, no saben cómo diseñar tareas con problemas de aplicación que respondan a esta diversidad de significados.

## **6. CONCLUSIONES**

Los resultados obtenidos, tanto en formación inicial como continua, muestran que los participantes, a pesar de las dificultades que tuvieron, consideran interesante la reflexión sobre la complejidad de los objetos matemáticos y su relación con el desarrollo de la competencia matemática de los alumnos. Por otra parte, los participantes presentaron, en las tareas que diseñaron, diferentes significados de los objetos matemáticos, tanto intra como extra matemáticos, enfatizando en la importancia de tener en cuenta su complejidad, manifestando que los diferentes significados se deben ir presentando de forma gradual a los alumnos.

Las dificultades observadas en los profesores ecuatorianos en su reflexión sobre la complejidad de los objetos matemáticos, es un resultado coherente con la investigación sobre la formación de los profesores en la región andina (Yamamoto y Malaspina, 2018) y, también, con la investigación internacional sobre el conocimiento y las competencias del profesorado de matemáticas, la cual ha evidenciado que los profesores tienen dificultades para interpretar aspectos epistémicos de las tareas y para identificar su potencial educativo (Stahnke, Schueler y Roesken-Winter, 2016).

## **7. REFLEXIONES FINALES**

En los diferentes trabajos que se han realizado hasta la fecha, se ha presentado una situación muy similar y es que el incorporar el componente «muestra representativa de la complejidad del objeto matemático» para valorar la idoneidad epistémica de un proceso de enseñanza y aprendizaje, no es tarea fácil, ni para los formadores ni para sus alumnos (futuros profesores o profesores en servicio), pero se puede enseñar como parte del proceso de formación del profesorado.

## RECONOCIMIENTO

Trabajo desarrollado en el marco del proyecto de investigación en formación de profesorado: PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

## REFERENCIAS

- Bernal, J., Calle, E., Mora, M., y Guachún, F. (2019). Investigación en Educación Matemática, en Ecuador y la Región: Caso Universidad de Cuenca. En D. Aguilar, M. Cobos, L. Claudio, E. Campozano (Eds), *La Investigación Educativa en un Mundo en Constante Transformación* (pp. 53-65). Cuenca: ASEFIE.
- Breda, A., Font, V., y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, 32(60), 255-278.
- Breda, A., y Lima, V. M. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT*, 5(1), 74-103.
- Breda, A., Pino-Fan, L., y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 13(6), 1893-1918.
- Breda, A., Seckel, M. J., Farsani, D., Silva, J. F., y Calle, E. (2021). Teaching and learning of mathematics and criteria for its improvement from the perspective of future teachers: a view from the Ontosemiotic Approach. *Mathematics Teaching Research Journal*, 13(1), 31-51.
- Calle, E., y Breda, A. (2019). Reflexión sobre la complejidad de los objetos matemáticos en la formación inicial de profesores. En Daniel Aguilar, Martha Cobos, Luis Claudio Cortés, Enma Campozano (Eds), *La Investigación Educativa en un Mundo en Constante Transformación* (pp. 29-50). Cuenca: ASEFIE

- Calle, E. C., Breda, A., y Font, V. (2020a). ¿Qué significado atribuyen a la media aritmética profesores de matemáticas en ejercicio? *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 33(1), 643-652.
- Calle, E., Breda, A., y Font, V. (2020b). Significados de las medidas de tendencia central contemplados por profesores de matemática en sus trabajos de fin de máster. En 5 *Encuentro Internacional en Educación Matemática* (pp. 457-462). Barranquilla. Colombia: Universidad del Atlántico.
- Calle, E., Breda, A. y Sala, G. (2020). Conhecimento de Futuros Professores sobre os Diferentes Significados do Objeto Matemático Média Aritmética. En XIV *Seminário Sul\_Mato\_Grossense de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 177-186). Rio Grande del Sur. Brasil: Universidade de Mato Grosso do Sul.
- Calle, E., Parra, E., y Paucar, P. (2020). Reflexión didáctica en formación inicial de docentes sobre la complejidad de las nociones de combinatoria. En IV *Coloquio Binacional sobre la Enseñanza de la Matemática* (pp. 33-50). Cuenca, Ecuador: Universidad de Cuenca.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13.
- Coles, A. (2014). Mathematics teachers learning with video: the role, for the didactic, of a heightened listening. *ZDM*, 46(2), 267-278.
- Cortez, D. (2014). *Genealogía del sumak kawsay y el buen vivir en Ecuador: un balance. Post-Crecimiento y Buen Vivir. Propuestas globales para la construcción de sociedades equitativas y sustentables*. Friedrich-Ebert-Stiftung (FES): Quito.
- Elliott, J. (1993). El cambio educativo desde la investigación-acción. Ediciones Morata.
- Ferreres, S., y Vanegas, Y. (2015). Uso de criterios de calidad en la reflexión sobre la práctica de los futuros profesores de secundaria de matemáticas. *Procedia*, 196, 219-225.

- Font, V., Godino, J. D., y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97–124.
- Font, V., Planas, N., y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105.
- Gellert, U., Becerra, R., y Chapman, O. (2013). Research methods in mathematics teacher education. En K. M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (v. 27, pp. 327-360). Nueva York, NY: Springer-Verlag.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1), 127-135.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2019). The Onto-semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 37-42.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90-113.
- Hart, L. C., Alston, A., y Murata, A. (2011). Lesson study research and practice in mathematics education. *The Netherlands*: Springer.
- Korthagen, F. (2010). La práctica, la teoría y la persona en la formación del profesorado. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado* 68(24), 83-101.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. Londres: Routledge-Falmer.
- Morales-López, Y., y Font, V. (2019). Evaluation by a teacher of the suitability of her mathematics class. *Educação e Pesquisa*, 45, e189468.
- Morales-Maure, L., Durán-González, R., Pérez-Maya, C., y Bustamante, M. (2019). Hallazgos en la formación de profesores para la enseñanza

- de la matemática desde la idoneidad didáctica. Experiencia en cinco regiones educativas de Panamá. *Inclusiones*, 6(2), 142-162.
- Pochulu, M., Font, V., y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime*, 19(1), 71-98.
- Ponte, J. P. (2011). Using video episodes to reflect on the role of the teacher in mathematical discussions. En *Constructing Knowledge for Teaching Secondary Mathematics* (pp. 249-261). Springer, Boston, MA.
- Ramos, A. B. (2006). Objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado y cambios institucionales. el caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales. Tesis doctoral no publicada. Universitat de Barcelona.
- Schon, D. A. (1983). *The reflective practitioner: how professionals think in action* (p. 1983). New York: Basic Books.
- Seckel M. J. (2016). Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática. Tesis doctoral no publicada. Universitat de Barcelona.
- Stahnke, R; Schueler, S., y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM*, 48(1), 1-27.
- Star, J., y Strickland, S. (2008). Learning to observe: Using video to improve pre-service mathematics teachers' ability to notice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(2), 107-125.
- Yamamoto, Y., y Malaspina, U. (2018). *Mathematics Teacher Education in the Andean Region and Paraguay: A Comparative Analysis of Issues and Challenges*. Cham: Springer.