



Universidad de Cuenca

FACULTAD DE FILOSOFÍA, LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADOS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS

Título de la tesis:

**LABORATORIO EXPERIMENTAL CON TECNOLOGÍA DE REALIDAD
AUMENTADA PARA LA TRANSICIÓN DEL TRAZADO DE ELEMENTOS EN
EL PLANO DE DOS DIMENSIONES A LA ABSTRACCIÓN
TRIDIMENSIONAL EN EL APRENDIZAJE DE ALGEBRA LINEAL”**

Tesis previa a la obtención
del Grado de Magister
en Docencia de las Matemáticas

AUTORA:

ING. VIVIANA JACKELINE MORQUECHO CALLE

DIRECTOR:

ING. RODRIGO EFRAÍN SEMPÉRTEGUI ÁLVARES

Cuenca- Ecuador

2014

RESUMEN

El presente trabajo de investigación busca incrementar el nivel de la inteligencia espacial para la transición de la visión bidimensional a la abstracción tridimensional de elementos geométricos presentes en los problemas matemáticos en los alumnos que cursan la materia de álgebra lineal, mediante la implementación de un laboratorio experimental con la incorporación de la tecnología de realidad aumentada.

Los resultados obtenidos son favorables pues se incrementa el nivel de las habilidades que están involucradas en la inteligencia espacial de los alumnos intervenidos. Se ejecutó un proceso que consta de cinco etapas: Se elabora un análisis metodológico de la materia en el espacio real tridimensional. Como segunda etapa se estructura las guías de laboratorio a ser utilizadas por el alumnado como herramienta de interacción con el sistema de realidad aumentada. La tercera etapa consta del desarrollo del entorno de interacción tecnológica, entre las guías y el software de Realidad Aumentada, para la transición de los trazados bidimensionales tradicionales a la abstracción tridimensional. La cuarta etapa ejecuta el proceso de intervención con los alumnos que cursan la materia aplicando las sesiones de laboratorio. Finalmente se realiza un proceso de diagnóstico comparativo sobre destrezas de la inteligencia espacial.

El proyecto involucra varios productos paralelos: una guía didáctica para el estudio de la materia, un software de realidad aumentada de interacción entre la guía y el alumnado, un modelo propuesto de habilidades espaciales involucradas en la transición de la visión 2D a la abstracción 3D, una propuesta de evaluación de estas habilidades espaciales.

PALABRAS CLAVE (Inteligencia Espacial, Inteligencias Múltiples, Realidad Aumentada, Álgebra Lineal, Guía Didáctica, abstracción tridimensional, abstracción 3D, Evaluación Espacial, Visión Bidimensional)



ABSTRACT

This research aims to increase the level of spatial intelligence for the transition from two-dimensional to three-dimensional view of geometric elements in mathematical problems in students taking linear algebra, by implementing an experimental laboratory with augmented reality technology.

The results are favorable because the level of skills that are involved in spatial intelligence of students undergoing increases. A process that consists of five steps is executed: a methodological analysis of Linear Algebra in the real three-dimensional space is developed. A Teaching Guide for use by students as a tool to interact with the augmented reality system is structured. The third stage consists of the development of technological environment interaction between the guides and the Augmented Reality software for the transition from traditional two-dimensional to three-dimensional abstraction. The fourth stage executes the process of intervention with students taking the subject using the lab sessions. Finally, a comparative diagnostic process on spatial intelligence skills is performed.

The project involves several parallel products: a teaching guide for the study of Linear Algebra, augmented reality software interaction between the guide and the students, a model of spatial abilities involved in the transition from 2D to 3D vision abstraction, a model for evaluating these spatial skills.

KEYWORDS (Space Intelligence Multiple Intelligences , Augmented Reality , Linear Algebra, Teaching Guide, three-dimensional abstraction, abstraction 3D , Spatial Evaluation, Two-Dimensional Vision)

TABLA DE CONTENIDO

1. Índice de Ilustraciones.....	7
2. Índice de Tablas.....	9
Capítulo I. Esquema General De La Investigación	14
1. SELECCIÓN Y JUSTIFICACIÓN DEL TEMA DE INVESTIGACIÓN	15
1.1. CRITERIOS RELACIONADOS CON EL SUJETO.....	15
1.2. CRITERIOS RELACIONADOS CON EL OBJETO	16
2. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN.	17
2.1. GENERAL.....	17
2.2. ESPECÍFICOS	17
3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.	18
4. PLANTEAMIENTO DE LA HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN.....	20
Capítulo II. Marco Teórico Y Estado Del Arte.....	21
1. DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA	22
1.1. PROYECTOS ORIENTADOS A PROBLEMAS.....	22
1.2. ESPACIOS DE TRABAJO EN EL AULA	24
1.3. PROBLEMAS CON LA REPRESENTACIÓN VISUAL.....	25
1.4. COMUNICACIÓN DE RESULTADOS	26
1.5. VISUALIZACIÓN COMO TÉCNICA DE COMPRENSIÓN.....	28
2. PROYECCIONES EN TEXTOS DE MATEMÁTICAS	29
3. ALGEBRA LINEAL.....	30
4. INTELIGENCIAS MÚLTIPLES	32
4.1. INTELIGENCIA ESPACIAL EN EL ESTUDIO DE MATEMÁTICAS	32
4.2. APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE IM A NIVEL UNIVERSITARIO	34
4.3. EVALUACIÓN DE APRENDIZAJE MEDIANTE INTELIGENCIAS MÚLTIPLES	36
4.4. EVALUACIÓN PSICOTÉCNICA DE LA INTELIGENCIA ESPACIAL	37
4.5. EVALUACIÓN DE INTELIGENCIA ESPACIAL COMO INTELIGENCIA MÚLTIPLE	39
5. REALIDAD AUMENTADA.....	43
5.1. DEFINICIÓN.....	43
5.2. APLICACIONES DE RA EN LA EDUCACIÓN.....	44
5.3. HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS PARA REALIDAD AUMENTADA.....	46

Capítulo III Características Metodológicas Para La Construcción De Conceptos Mediante Tics	51
1. SIMULACIÓN COMO MEDIO DE PERCEPCIÓN Y MANIPULACIÓN.....	52
2. TICS EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA – APRENDIZAJE.....	53
3. INTERFACE, VELOCIDAD DE RESPUESTA Y SECUENCIA DE ACTIVIDADES	55
4. INDICADORES DE CALIDAD DE SOFTWARE EDUCATIVO	56
Capítulo IV Propuesta didáctica - experimental para álgebra lineal	58
5. SISTEMA DE EVALUACIÓN BASADA EN IM	59
5.1. INTELIGENCIA ESPACIAL.....	59
5.2. HABILIDADES INVOLUCRADAS	59
5.3. EJERCICIOS DE ESTIMULACIÓN.....	60
5.4. REACTIVOS DE EVALUACIÓN	62
6. SISTEMA DE EVALUACIÓN PSICOTÉCNICO	64
6.1. TIPO DE EJERCICIOS	64
7. SOFTWARE DE REALIDAD AUMENTADA	66
8. GUÍA DIDÁCTICA.....	70
8.1. ORGANIZACIÓN POR SECCIONES	70
8.2. ORGANIZACIÓN DE CADA SECCIÓN.....	70
8.3. EJERCICIOS CON REALIDAD AUMENTADA.....	71
8.4. EJERCICIOS CONCEPTUALES Y DE APLICACIÓN ORIENTADOS A SITUACIONES REALES	71
8.5. INTRODUCCIÓN A NIVELES SUPERIORES.....	73
8.6. TRABAJO EN EL MESO Y MACRO ESPACIO	74
8.7. REPRESENTACIÓN VISUAL.....	76
8.8. COMUNICACIÓN DE RESULTADOS	77
9. DISPOSITIVOS MÓVILES.....	79
9.1. CARACTERÍSTICAS.....	79
9.2. CARACTERÍSTICAS DEL SISTEMA.....	80
10. PERÍODO DE INTERVENCIÓN	80
10.1. HORARIO	80
10.2. SELECCIÓN DEL GRUPO DE CONTROL	81
11. ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	81
11.1. RESUMEN EJECUTIVO.....	81
11.2. DESCRIPCIÓN DE HABILIDADES ESPACIALES	86
11.3. ANÁLISIS DEL DESEMPEÑO POR HABILIDADES	91
11.4. Análisis del primer Grupo de Habilidades Relevantes: C,E y H	93



11.5.	ANÁLISIS DEL SEGUNDO GRUPO DE HABILIDADES IMPORTANTES: B, D, G, E I..	97
11.6.	Resultados por total de Preguntas Correctas.....	102
11.7.	Resultado individual por Preguntas	105
11.8.	COMPARATIVA CON EL GRUPO MONITOR	112
11.9.	NIVEL DE SEGURIDAD O CONFIANZA DE LOS ALUMNOS EN SUS RESPUESTAS	113
11.10.	ANÁLISIS PRUEBA PSICOTÉCNICA.....	115
Conclusiones		118
1.	CONCLUSIONES SOBRE EL ANÁLISIS METODOLÓGICO DE LA MATERIA.....	120
2.	CONCLUSIONES SOBRE LA DEFINICIÓN DE GUÍAS DE ESTUDIO.....	121
3.	CONCLUSIONES SOBRE EL DESARROLLO DEL ENTORNO DE INTERACCIÓN TECNOLÓGICA.	123
4.	CONCLUSIONES SOBRE EL PROCESO DE INTERVENCIÓN CON EL ALUMNADO	124
5.	CONCLUSIONES SOBRE EL PROCESO DE DIAGNÓSTICO DE DESTREZAS	125
6.	CONCLUSIONES SOBRE EL OBJETIVO GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN	127
Recomendaciones y Líneas de Investigación		129
Bibliografía.....		134
Anexos		138
1.	REACTIVOS APLICADOS EN LOS TEST DE EVALUACIÓN INICIAL Y FINAL.....	139
2.	TEST PSICOTÉCNICO DE APTITUDES ESPACIALES	156
3.	GUÍA DIDÁCTICA.....	160
3.1.	PRUEBA #3.....	203
3.2.	PRUEBA# 4.....	204
3.3.	PRUEBA # 5.....	205
4.	INDICADORES DE CALIDAD DE SOFTWARE	206
5.	RECOPILACIÓN FOTOGRÁFICA DEL TALLER EXPERIMENTAL.....	208

1. Índice de Ilustraciones

Ilustración 1: Proyección Cónica de un Cubo	29
Ilustración 2: Proyección Cilíndrica de un Cubo.....	30
Ilustración 3: Objeto Aumentado sobre un libro real (WION)	44
Ilustración 4: Realidad Virtual, se pierde la percepción del entorno real (Creative Commons) 44	
Ilustración 5: Aplicación “Google Sky Map” implementando RA para astronomía (Mobile Google).....	45
Ilustración 6: Uso de LearnAR para Biología (SSAT)	45
Ilustración 7: traducción de texto impreso en tiempo real (Quest Visual).....	46
Ilustración 8: Descripción de reactivos	63
Ilustración 9: Ejemplo I de Rotación.....	64
Ilustración 10: Ejemplo II de Rotación.....	65
Ilustración 11: Ejemplo I de Figuras Idénticas.....	65
Ilustración 12: Ejemplo II de Figuras Idénticas.....	65
Ilustración 13: Ejemplo de Desarrollo de Superficie	66
Ilustración 14: Ejemplo de Completamiento de Superficie.....	66
Ilustración 15: Pantalla Inicial de Aplicación RA en la Tablet Samsung Galaxy.....	67
Ilustración 16: Tabla de Contenidos de la Aplicación RA	68
Ilustración 17: Logotipo de la plataforma y botones de manipulación	69
Ilustración 18: Doble impacto visual.	69
Ilustración 19: Ejercicio Conceptual	72
Ilustración 20: Ejercicio con objeto aumentado sin movimiento	72
Ilustración 21: Ejercicio de Realidad Cotidiana	72
Ilustración 22: Ejercicio con objetos aumentados y movimiento	73
Ilustración 23: Ejercicio Introductorio a Cálculo Vectorial.....	73
Ilustración 24: Ejercicio Introductorio con RA y movimiento	74
Ilustración 25: Trabajo a nivel de meso-espacio	74
Ilustración 26: Manipulación de objeto concreto	75
Ilustración 27: Ejercicio a nivel de macro-espacio	75
Ilustración 28: Representación animada de experiencia a macro espacio.....	76
Ilustración 29: movimiento de las manos para explicar sus pensamientos.....	77
Ilustración 30: Segundos de Abstracción Mental antes de Responder.....	77
Ilustración 31: Proyecto orientado a Inteligencia Visual.....	78
Ilustración 32: Proyecto orientado a Inteligencia Corporal	78
Ilustración 33: Maqueta de Ejes Coordenados	78
Ilustración 34: Representación de Octantes	79
Ilustración 35: Disposición de objetos en los octantes	79
Ilustración 36: Número de habilidades involucradas por pregunta.....	87
Ilustración 37: Total De Puntos Existentes En La Evaluación Por Cada Habilidad	89
Ilustración 38: Distribución de puntos por Habilidad	90
Ilustración 39: Rangos de puntuación de habilidades presentadas Test Inicial.....	91
Ilustración 40: Rangos de puntuación de habilidades presentadas Test Final	92
Ilustración 41: Habilidad C: Constancia perceptual o constancia de forma, tamaño y posición	93
Ilustración 42: Habilidad E “Percepción de relaciones espaciales entre objetos”	94

Ilustración 43: Habilidad H “Rotación Mental”	96
Ilustración 44: Habilidad B “Percepción figura – fondo”	97
Ilustración 45: Habilidad D “Percepción de la posición en el espacio”	99
Ilustración 46: Habilidad G “Memoria visual”	100
Ilustración 47: Habilidad I “Discriminación de gráficas 3d en el plano”	101
Ilustración 48: Calificación del Test Inicial por Preguntas Correctas	103
Ilustración 49:Calificación del Test Final por Preguntas Correctas	104
Ilustración 50: TEST INICIAL - Porcentaje de alumnos que seleccionan la opción correcta por pregunta	105
Ilustración 51: TEST FINAL - Porcentaje de alumnos que seleccionan la opción correcta por pregunta	106
Ilustración 52: Función Comparativa por cada Pregunta.....	107
Ilustración 53: Porcentaje de incremento por pregunta	108
Ilustración 54: Porcentaje de incremento según complejidad	108
Ilustración 55: Comparativa de aciertos por Frecuencia	110
Ilustración 56:Diferencia En La Frecuencia De Aciertos.....	111
Ilustración 57: Comparativa de desempeño con el grupo de control.....	112
Ilustración 58: Nivel De Confianza en Respuestas Correctas - Test Inicial.....	113
Ilustración 59: Resultados Obtenidos por el Grupo Experimental.....	115
Ilustración 60: Resultados Obtenidos por el Grupo de Control.....	116
Ilustración 61: Grupo Experimental	208
Ilustración 62: Implementación del Test de Evaluación	208
Ilustración 63: Uso de Tablets y Guías	209
Ilustración 64: Desarrollo de Test	209
Ilustración 65: Manipulación de Tablets	209
Ilustración 66: Interacción del alumnado.....	208
Ilustración 67: Evaluación del Grupo de Control	208

2. Índice de Tablas

Tabla 1: Saberes Conocer y Hacer del Álgebra Lineal (ICFM Instituto de Ciencias Físicas y Matemáticas).....	32
Tabla 2: Propiedades de los Reactivos	64
Tabla 3: Ponderación de Habilidades por Pregunta	86
Tabla 4: Total De Puntos Existentes En La Evaluación Por Cada Habilidad	88
Tabla 5: Propiedades de Habilidad C: Constancia perceptual o constancia de forma, tamaño y posición	94
Tabla 6: Propiedades de Habilidad E “Percepción de relaciones espaciales entre objetos”	95
Tabla 7: Propiedades Habilidad H “Rotación Mental”	96
Tabla 8: Propiedades de Habilidad B “Percepción figura – fondo”	98
Tabla 9: Propiedades Habilidad D “Percepción de la posición en el espacio”	99
Tabla 10: Propiedades Habilidad G “Memoria visual”	100
Tabla 11: Propiedades de Habilidad I “Discriminación de gráficas 3d en el plano”....	101



Yo, Viviana Jackeline Morquecho Calle, autor de la tesis "LABORATORIO EXPERIMENTAL CON TECNOLOGÍA DE REALIDAD AUMENTADA PARA LA TRANSICIÓN DEL TRAZADO DE ELEMENTOS EN EL PLANO DE DOS DIMENSIONES A LA ABSTRACCIÓN TRIDIMENSIONAL EN EL APRENDIZAJE DE ALGEBRA LINEAL", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autora.

Cuenca, 15 de enero del 2014

Viviana Jackeline Morquecho Calle.
0104221924



Yo, Viviana Jackeline Morquecho Calle, autora de la tesis "LABORATORIO EXPERIMENTAL CON TECNOLOGÍA DE REALIDAD AUMENTADA PARA LA TRANSICIÓN DEL TRAZADO DE ELEMENTOS EN EL PLANO DE DOS DIMENSIONES A LA ABSTRACCIÓN TRIDIMENSIONAL EN EL APRENDIZAJE DE ALGEBRA LINEAL", reconozco y acepto el derecho de la Universidad de Cuenca, en base al Art. 5 literal c) de su Reglamento de Propiedad Intelectual, de publicar este trabajo por cualquier medio conocido o por conocer, al ser este requisito para la obtención de mi título de Magister en Docencia Matemática. El uso que la Universidad de Cuenca hiciere de este trabajo, no implicará afección alguna de mis derechos morales o patrimoniales como autor.

Cuenca, 15 de enero del 2014

Viviana Jackeline Morquecho Calle.
0104221924



DEDICATORIA

“Mami, me ha dado ejemplo de vida con su perseverancia para vencer obstáculos familiares, económicos y de salud, con el único objetivo de expresarnos su incansable amor”

“Papi, aunque ya no esté conmigo su legado sigue latente en mi vida”

A mi esposo Flavio Herrera y a mi hijo Flavio Sebastián quienes son mi apoyo y motivación día tras día.

A mi segundo padre Benito, a mis hermanos y hermanas, a mis sobrinos que por su paciencia han podido comprender que esta etapa requería que no pueda compartir todos los momentos maravillosos con ellos.

A mi familia política que han desbordado su amor y cuidado hacia mi hijo.



AGRADECIMIENTOS

Doy gracias a Dios por regalarme su presencia durante esta etapa de estudio de maestría y por ayudarme con la intervención de varias personas que me han brindado su confianza y apoyo, lo cual me ha permitido culminar con diferentes éxitos este período de mi vida.

Dra. Nelly Gonzales Directora de la Maestría, por haberme brindado la oportunidad de iniciar este camino.

Ing. Rodrigo Sempértegui por su dirección y apoyo en el proyecto de investigación.

Ing. Julio Loja director del ICFM de la UPS por permitirme implementar el proyecto en forma paralela a mis labores docentes.

Ing. Marco Carpio director de la Carrera de Ingeniería Eléctrica UPS, Sede Cuenca

Ing. Natalia Gonzales miembro del consejo de la Carrera que apoyaron la implementación de la investigación experimental en sus alumnos.

Ing. Bertha Tacuri Directora de la Carrera de Sistemas UPS, Sede Cuenca, por facilitarnos los equipos tecnológicos para la ejecución del taller experimental.

Ing. Vladimir Robles Coordinador del Grupo de Investigación de Tecnologías Informáticas, por facilitar los equipos tecnológicos para mi tesis y por permitirme participar en el curso de programación en plataformas Android.

Lcda. Margarita Martínez por su colaboración en la revisión metodológica y conceptual de la guía didáctica.



Capítulo I. Esquema General De La Investigación

1. SELECCIÓN Y JUSTIFICACIÓN DEL TEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. CRITERIOS RELACIONADOS CON EL SUJETO

Los errores son los verdaderos impulsadores al desarrollo. Al finalizar la carrera universitaria para el título de Pre-grado, consideré que realizar un proyecto simple y rápido era la mejor opción. Fue este criterio que ocasionó no poder estar orgullosa del trabajo desarrollado. Esta ideología, muy difundida entre los jóvenes universitarios, provoca perder la oportunidad de generar nuevo conocimiento durante el desarrollo del proyecto de tesis. En la vida profesional, tampoco se presentan estas oportunidades, debido a que las empresas no invierten formalmente en procesos de investigación.

Lo anterior me ha llevado a seleccionar con mucho cuidado el tema de investigación para este nivel de maestría. Son tres aspectos primordiales los que fundamentan mi motivación para el desarrollo del presente proyecto: primero, generar un aporte para el proceso enseñanza-aprendizaje que pueda ser replicado en otros escenarios, segundo, profundizar en los conceptos matemáticos asociados al tema, permitiendo un mejor desempeño en mi vida laboral y tercero, que sea una oportunidad de desarrollo tecnológico e innovador para relacionar mi carrera de informática con la docencia en matemáticas.

El estudio universitario en la carrera de Ingeniería de Sistemas me ha brindado el conocimiento para el uso y desarrollo de tecnologías informáticas. He desempeñado labores en diseño y desarrollo de software lo que me permitirá incursionar en esta rama de realidad aumentada que está surgiendo en nuestro país y utilizarla como instrumento docente.

1.2. CRITERIOS RELACIONADOS CON EL OBJETO

El trabajo de investigación planteado persigue obtener tres aportes puntuales:

1. Un trabajo metodológico que facilite la transición de la visión bidimensional con la que se trabaja en el aula a la abstracción tridimensional de elementos geométricos durante el estudio de álgebra lineal, desarrollando la inteligencia espacial en el alumnado.

Proponer experiencias guiadas para el aprendizaje debería ser costumbre y obligación de todo docente de matemáticas. Mejorar el nivel de calidad en la enseñanza en nuestro país traerá el conocimiento y con él las oportunidades de crecimiento.

2. Una herramienta tecnológica que motive al alumno una participación activa en el proceso de aprendizaje.

El software aprovechará las características de las Tics que colaboren con el proceso metodológico de aprendizaje, entre ellas nombraremos la experimentación, la manipulación y la interacción.

3. Un aporte a la investigación informática con el estudio y uso de una tecnología innovadora.

En nuestro país, en los últimos dos o tres años aproximadamente, se está incursionando fuertemente en una tecnología llamada Realidad Aumentada, la que está muy relacionada con Inteligencia Artificial y Realidad Virtual. Los aportes no llegan al nivel de otros países, es decir, no se está explotando todas sus aplicaciones potenciales.

2. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN.

2.1. GENERAL

Incrementar el nivel de la inteligencia espacial para la transición de la visión bidimensional a la abstracción tridimensional de elementos geométricos presentes en los problemas matemáticos en los alumnos que cursan la materia de álgebra lineal, mediante la implementación de un laboratorio experimental con la incorporación de la tecnología de realidad aumentada.

2.2. ESPECÍFICOS

1. Analizar metodológicamente la materia de álgebra lineal en los contenidos de vectores, rectas y planos en 3D
2. Estructurar guías de laboratorio a ser utilizadas por el alumnado como herramienta de interacción con el sistema de realidad aumentada.
3. Desarrollar el entorno de interacción tecnológica, entre las guías y el software de Realidad Aumentada para la transición de los trazados bidimensional tradicionales a la abstracción tridimensional.
4. Ejecutar un proceso de intervención con los alumnos que cursan la materia de Álgebra Lineal aplicando las sesiones de laboratorio.
5. Realizar un proceso de diagnóstico comparativo sobre destrezas de la inteligencia espacial que están asociadas a la abstracción tridimensional.

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Durante mi desempeño laboral desde el año 2011 en la Universidad Politécnica Salesiana, he trabajado con los alumnos desarrollando la materia de álgebra lineal con un total de seis grupos. Ha transcurrido un periodo de dos años hasta el planteamiento del presente proyecto y he experimentado la dificultad existente cuando se intenta explicar las propiedades de vectores, rectas y planos en R^3 contando con materiales didácticos propios para R^2 tales como el pizarrón de clase y textos. La mayor parte del alumnado presenta dificultad para abstraer la tercera dimensión que se encuentra en las gráficas así como también al requerir manipulación de esta información. Esta situación se repite en casi todos los grupos. Los compañeros docentes se preocupan incluso por las repercusiones posteriores, como por ejemplo, durante el estudio de cálculo vectorial, los alumnos continúan con estas dificultades sin poder plantear los problemas de aplicación.

Existen ciertas herramientas informáticas que permiten el manejo de objetos en tres dimensiones, cuyo uso mejora el nivel de abstracción, sin embargo, estos no permiten la asociación directa de las representaciones del plano con las del espacio, ni mucho menos contamos con uno orientado a los contenidos propios del curso. Lo anterior se refiere a que con determinadas herramientas podemos llegar a un nivel de abstracción con el alumnado debido a que se ve de forma directa las tres dimensiones, sin embargo, cuando el alumno regresa al texto o requiere el realizar representaciones en el cuaderno se le dificulta realizar esta transición.

La aplicabilidad de los contenidos es uno de los aspectos que exigen los alumnos, convirtiéndose en un factor de motivación para la participación activa en el proceso de estudio. Los textos utilizados tienen planteamientos muy algorítmicos o procedimentales, presentando pocos problemas de aplicación. Es por esto que se tiene un pobre rendimiento en la construcción de conceptos, muchos de ellos se limitan a la memorización de los procedimientos de solución.

El uso de tecnología como soporte para el docente está tomando importancia, pero debemos considerar diferentes aspectos que nos ayudará a tomar conciencia del problema que implica. Podemos encontrar actividades experimentales en software de laboratorios implementados en otros países, es decir, en realidades diferentes. El idioma utilizado es un factor importante para la selección de estos recursos, comercialmente encontraremos herramientas especializadas en idiomas extranjeros. El retraso tecnológico que lamentablemente existe en nuestro país y en general en Latinoamérica provoca que el software que tenemos a disposición no sea innovador. La poca inversión en investigación no permite que docentes, informáticos y electrónicos diseñen y creen herramientas adecuadas a nuestras necesidades.

La implementación de un laboratorio experimental haciendo uso de la Realidad Aumentada, centrada en problemas de aplicación, que brinde soporte al docente para la construcción de los conceptos geométricos y algebraicos en R^3 y genere concientización de la presencia de la matemática en el entorno real del alumno, es la propuesta que presentamos.



4. PLANTEAMIENTO DE LA HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN.

“La implementación de un laboratorio experimental con “realidad aumentada” en el estudio de álgebra lineal, incrementa, en el alumnado, su nivel de inteligencia espacial para una correcta abstracción de objetos en el espacio en base a trazados tradicionales en el plano”.



Capítulo II. Marco Teórico Y Estado Del Arte



1. DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

1.1. PROYECTOS ORIENTADOS A PROBLEMAS

El simple aprendizaje de procedimientos algorítmicos para la resolución de ejercicios matemáticos no genera eficientemente en el alumno la capacidad de razonar sobre el contexto y los datos que se disponen o el camino para encontrar otros. Una propuesta para que surja el proceso de pensar mientras se estudia matemáticas se relaciona con el planteamiento de situaciones reales que requieren la búsqueda de una solución matemática. Un ejemplo claro de lo planteado anteriormente es el que brinda Antoni Villa:

“un niño de 7 años a quien se pregunta: Tienes 10 lápices rojos en tu bolsillo izquierdo y 10 lápices azules en tu bolsillo derecho. ¿Qué edad tienes?. A lo que responde 20 años...” (Vila y Callejo)

Esta situación se evidencia también a nivel universitario al momento de plantear problemas. Los alumnos ejecutan cálculos matemáticos con los datos brindados sin previo análisis de la situación dejando los resultados al azar y memorizando procesos, creyendo que un modelo es totalmente aplicable a toda situación.

Una de las propuestas para el estudio de las matemáticas que más nos ha llamado la atención es la implementada en Roskilde University, Denmark (Kjeldsen y Blomhøj 88) en la cual se planifica el estudio durante cuatro semestres en la siguiente modalidad; la mitad de los créditos de cada semestre se obtiene mediante cursos formales y la

otra mitad se dedican a proyectos orientados a problemas. Los problemas son planteados en el grupo y deben abordar las siguientes temáticas para los tres primeros semestres respectivamente: “aplicación de la ciencia en la tecnología y sociedad”, “interrelación entre las teorías modelos y experimentos en las ciencias” y “meta-aspectos de las matemáticas y las ciencias”. La propuesta busca relacionar a las matemáticas con el resto de las ciencias con el fin de visualizar la aplicación de ellas en el entorno real del alumno. Resaltar su presencia directa o indirecta en diferentes problemáticas permite generar conciencia en el estudiante sobre la importancia de su estudio.

Si bien el plantear un modelo de estudio similar en nuestro entorno requiere de un estudio diferente al que se está tratando, este ejemplo nos permite resaltar la importancia que tiene el incorporar en el proyecto situaciones reales en el que el alumno comprenda el contexto y ejecute acciones sobre el mismo¹. La resolución de problemas de aplicación suele en su mayoría ser obviada por diferentes motivos. Estos “problemas” exigen de ciertas competencias en nuestros estudiantes como el discernimiento de enunciados, clasificación de información en relevante y no relevante, toma y filtrado de datos, entre otros, que son tan importantes para una aplicación de las matemáticas pero son mucho más sensibles de evaluar².

El planteamiento de problemas de matemáticas con la vinculación a otras áreas de estudio permite una mejor comprensión, así como la motivación necesaria para el aprendizaje de los métodos y conceptos involucrados (Kjeldsen y Blomhøj 87). Es parte del rol del docente encontrar aquellos temas que sean del interés de los jóvenes

¹ En el Taller Experimental, los ejercicios con realidad aumentada se han elaborado sobre situaciones comunes en los que implica el uso de matemáticas [\[VER ANEXO: Guía Didáctica-Ejercicios\]](#), así como también, en la sección de “Proyectos a Desarrollar”. [\[VER ANEXO: Guía Didáctica-Proyectos\]](#)

² Los reactivos del sistema de evaluación implementado, han sido desarrollados con riguroso cuidado para individualizar las habilidades espaciales respecto a las respuestas generalizadas [\[VER: Reactivos\]](#). Se realiza un análisis estadístico muy revelador sobre estos dos aspectos. [\[VER: Análisis Estadístico\]](#)

o motivar dicho interés. Lo anterior va en forma contraria a la educación que se brinda tradicionalmente en la mayor parte de escenarios, en los cuales, se prioriza el estudio de conceptos y métodos, presentando casos de aplicación en forma muy simples o sin darles la importancia necesaria, el efecto a conseguir en los estudiantes es la reproducción de procedimientos sin previo análisis. Es importante incorporar entonces, en el estudio de las matemáticas, problemas reales de aplicación que sean contextualizados de tal forma que generen en el alumno la motivación e interés en el estudio. Estos casos deben estar en función a sus carreras y en lo posible convertirse en proyectos interdisciplinarios que permita trabajar incluso con materias de ciclos superiores a los que se esté cursando³. El estudio de las matemáticas se brinda generalmente en los primeros ciclos y las materias de profesionalización se presentan en ciclos posteriores, el alumno tiene en su ser la pregunta ¿Para qué me sirve este estudio? Y con la incorporación de estos proyectos se permitirá responder a dicha pregunta mediante una breve introducción a su futuro desempeño laboral.

1.2. ESPACIOS DE TRABAJO EN EL AULA

Los procesos de visualización y de conceptualización se pueden presentar en diferentes niveles de experimentación a los que se los denomina espacios (Temio 122). El docente debe considerar la existencia de estos y de su correcto uso dentro del aula dependerá los resultados en el proceso de visualización. Se determinan cuatro tipos de espacio: micro-espacio, meso-espacio, macro espacio y cosmo-espacio. La diferencia básica radica en el tamaño referente al observador y las posibilidades de percepción que se experimenta, dependiendo de esta última se generan diferentes concepciones mentales.

³ Ciertos problemas planteados permiten una introducción a materias de niveles superiores como por ejemplo cálculo vectorial [\[VER: Parametrización de Trayectoria\]](#)

Dentro de nuestras aulas lo que más se presenta es el trabajo sobre el meso-espacio por estar al alcance los objetos de trabajo como son materiales didácticos u objetos manipulables. Las experiencias en los alumnos sobre el macro y cosmo espacio se dificultan por cuestiones logísticas, de recursos o simplemente no están al alcance. Por su importancia se requiere de herramientas especializadas como las tecnológicas de reproducción y de simulación que permitan brindar los impactos visuales necesarios generando así momentos de percepción que normalmente el alumno no tendría oportunidad⁴. Como por ejemplo desde lo más sencillo, aportar con videos del universo en los cuales se analice las fuerzas relacionadas a los planetas y otros cuerpos, software matemático que permita la gráfica y simulación de situaciones en las que se analice tasas de cambio relacionadas o software gráfico tridimensional en que se analice características y comportamiento de trayectorias reales de diferentes objetos.

1.3. PROBLEMAS CON LA REPRESENTACIÓN VISUAL

La dificultad para el aprendizaje de las matemáticas es generalizada en los diferentes países, una realidad tan parecida a la nuestra la encontramos en una investigación realizada por un grupo de estudiantes del programa Nas-Bak de la Universidad de Roskilde en Dinamarca, que pretendieron responder a la pregunta ¿Por qué son difíciles las matemáticas? (Kjeldsen y Blomhøj 95). Este tema nace de las diversas reflexiones de los estudiantes que pertenecen a dicho programa, que manifiestan que experimentaron en diferentes momentos dificultades durante su estudio. De este

⁴ Con la Realidad Aumentada se ha desarrollado experiencias a nivel de meso y macro espacio permitiendo generar los impactos visuales de determinadas situaciones en las cuales los alumnos pueden manipular los elementos de posición del objeto para el análisis de los ejercicios. [\[Ver: Ejercicio de aterrizaje de un avión\]](#)

proyecto de investigación rescatamos con énfasis los diferentes resultados sobre los problemas que poseen los estudiantes para relacionar las representaciones visual, algebraica y verbal de los problemas matemáticos. Una de las conclusiones es que varios de los alumnos poseen una representación visual muy limitada o equivocada.

Durante mi desempeño como docente de matemáticas en el “Instituto de Ciencias Físicas y Matemáticas” de la UPS, ha sido muy común escuchar los comentarios de los compañeros docentes sobre la diferencia del desempeño de sus alumnos en la sesión de clase y durante la evaluación. La participación de los alumnos, en las clases guiadas por el docente, evidencia la posible comprensión de conceptos, sin embargo, al someterse a una evaluación en la que no tienen guía alguna, presentan grandes falencias. Se podría adjudicar el problema a diversos factores como la falta de preparación, la baja comprensión de enunciados, la necesidad de mayor práctica y la más importante en nuestro contexto, a que no pueden imaginar la representación real del problema. Surge como posible tema de investigación el analizar la planificación microcurricular y el sistema de evaluación que estamos implementando en el sentido de la importancia que se otorga a la estimulación de una adecuada representación visual en los alumnos frente a los problemas. Es probable que a pesar de que el concepto está adecuadamente comprendido, la falencia de esta competencia sea la que no les permite aprobar la evaluación⁵.

1.4. COMUNICACIÓN DE RESULTADOS

Parte del proceso didáctico para la enseñanza de matemáticas en general son los procesos adecuados de comunicación que permiten la comprensión mutua entre

⁵ Tema ampliado en las recomendaciones de la tesis [\[VER: Recomendaciones\]](#)

docente y alumno. Como docentes no podríamos asumir el entendimiento de un concepto si el alumno no lo comunica de alguna forma. Es lamentable escuchar en algunos profesores frases como “si no me preguntan asumo que todo está comprendido”, a mi parecer, dichas frases se las utiliza hasta cierto punto como justificativo para poder avanzar con los temas incorporados en la planificación. Centrándonos en el tema del presente proyecto, tanto los problemas matemáticos como de otras áreas requieren también, para una comprensión conceptual, la percepción espacial de los objetos involucrados así como de sus características y comportamientos. Se evidencia así la importancia de un proceso de comunicación debido a que si el alumno no transmite su representación visual o mental no se lo podría guiar en el proceso de aprendizaje.

Mediante la incorporación de diversas técnicas y herramientas en el proceso de aprendizaje, podemos motivar la percepción del espacio en la mente del alumno. La comprensión de los resultados generados en él requiere de procesos de comunicación, deberá tener las competencias necesarias para transmitir su percepción de dichos espacios, sin embargo, esta capacidad de comunicar requiere que se “reflejen las propiedades tridimensionales de los objetos” (Temio 126), es decir, para comunicar se requiere materializar la imagen mental que posee tanto el alumno como el docente.

Para trabajar con los estudiantes sobre sus procesos de comunicación de características tridimensionales se requiere abordar entre otras estrategias el dibujo en

perspectiva, la descripción verbal de escenarios, la visualización y la abstracción mental⁶.

1.5. VISUALIZACIÓN COMO TÉCNICA DE COMPRENSIÓN

A la visualización o imágenes mentales se la reconoce como una herramienta de gran utilidad para la comprensión de conceptos, "... es la materia prima de la creatividad. Las imágenes de imaginación son una fuente de solución de problemas" (Temio 132) . Se debe tener cuidado de no tomarla como una herramienta conductual, debido a que en nuestro proyecto debemos utilizarla como una herramienta generadora de nuevas preguntas que permitan anticipar resultados a cambios en el comportamiento o estructura del objeto al sufrir alguna intervención.

Ángeles Lara (132) explica las regiones del cerebro involucradas en las habilidades que son de interés para el proyecto. Nuestro objetivo es desarrollar la abstracción espacial tridimensional, sin embargo, estamos utilizando el estudio de matemáticas como un medio por el cual obtendremos nuestro objetivo. Las características como el pensamiento lógico y matemático están controladas por el hemisferio izquierdo del ser humano mientras que el derecho controla el pensamiento visual y no lineal. "La visualización es una experiencia, no tiene nada que ver con el pensamiento lógico y racional. Pero también es cierto que esta experiencia puede utilizarse para la resolución de problemas de tipo espacial, sustituyéndose por una percepción externa" (Temio 133). Al lograr que el alumno se concentre en un problema y pueda visualizar

⁶ Durante el proceso de intervención con el alumnado han sido consideradas estas actividades de comunicación con la ayuda de los recursos tecnológicos como la captura de pantalla y trazado sobre ella y la sustentación de los "Proyectos a Desarrollar"

los objetos involucrados y el entorno estaremos involucrando las dos regiones del cerebro para obtener aprendizaje.

2. PROYECCIONES EN TEXTOS DE MATEMÁTICAS

Los objetos tridimensionales involucrados en los problemas matemáticos deben ser representados en los textos que son bidimensionales. Para lograr plasmar un objeto sobre el plano y que mantenga sus características tridimensionales se utiliza la Geometría Descriptiva(Esteve 32). En los textos se puede identificar diferentes tipos de proyecciones de este sistema científico como la cónica y la cilíndrica ortogonal.

Para trazar un objeto con proyección cónica se utiliza un punto de fuga con el cual las aristas paralelas convergen hacia éste. Mientras más se acercan al foco se aparenta una reducción de tamaño, la comparación entre objetos se lo debe realizar con el concepto de proporcionalidad (Milicich 2). La proyección cilíndrica se realiza con el cruce de perpendiculares sobre planos que forman ángulos rectos(Esteve 32).

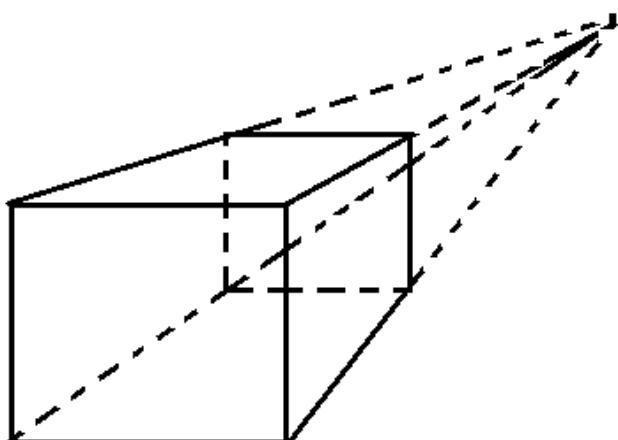


Ilustración 1: Proyección Cónica de un Cubo

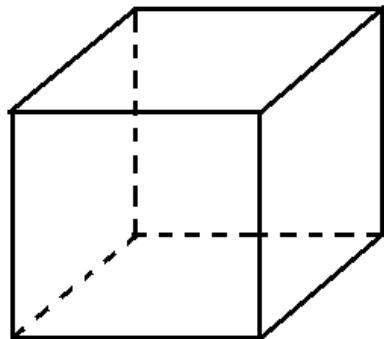


Ilustración 2: Proyección Cilíndrica de un Cubo

En los textos de Álgebra Lineal revisados se ha encontrado prioritariamente el segundo tipo de proyección. Sin embargo cuando se utiliza software tridimensional lo que generalmente se observa es la proyección cónica. El software utiliza esta proyección debido a que es la más aproximada a la visión natural del ser humano. La dificultad se presenta cuando el alumno observe un objeto mediante software y luego lo observe en el texto y no pueda asociar las similitudes e identificar que es el mismo objeto. Existirán alumnos que sí posean la habilidad de superar esta situación pero podría surgir el problema cuando se le pida graficar en el plano un objeto. Estas habilidades involucradas en las dos situaciones anteriores las que el proyecto de investigación busca identificar y mejorar para una adecuada transición de la gráfica bidimensional a la abstracción mental tridimensional.

3. ALGEBRA LINEAL

La materia de Álgebra Lineal se presta para implementar el proceso de intervención para el desarrollo de habilidades espaciales en los alumnos, debido a que nos introduce hacia el estudio de los vectores, rectas y planos en el espacio. El ICFM de la Universidad Politécnica Salesiana ha realizado un estudio sobre los saberes conocer y

hacer que están involucrados en la materia. A continuación se presentan aquellos que corresponden a los capítulos a ser abordados en el proyecto⁷.

SABER CONOCER	SABER HACER
VECTORES EN R2 Y R3.	
Introducción geométrica al estudio de los vectores.	Resolver problemas simples en geometría usando vectores
Norma de un vector Algebra vectorial	Resolver problemas simples usando forma de componentes (por ejemplo en mecánica)
Producto punto Proyecciones Aplicaciones	Definir el producto escalar de dos vectores y usarlo en una simple aplicación Comprender la interpretación geométrica del producto escalar
Producto cruz Propiedades algebraicas Aplicaciones	Comprender la interpretación geométrica del vector producto Definir el vector producto de dos vectores y usarlo en una simple aplicación Comprender la interpretación geométrica del triple producto escalar
RECTAS EN EL ESPACIO	
La ecuación paramétrica, vectorial y simétrica de una recta. Gráfica de una recta - 2 puntos. El ángulo entre dos rectas La condición de paralelismo de dos rectas. La condición de perpendicularidad de dos rectas. Intersección de 2 rectas. Posición relativa de 2 rectas. Distancia de un punto a una recta	Reconocer y usar la ecuación estándar de la ecuación de una línea recta en 3D Encontrar el ángulo entre dos líneas rectas Encontrar dónde dos líneas rectas se interceptan Determinar la posición relativa de 2 rectas (si son paralelas, perpendiculares, se cortan o se cruzan). Determinar la distancia de un punto a una recta. Graficar una recta.

⁷ Esta tabla será reorganizada acorde a la distribución de la Guía Didáctica elaborada [\[VER: Saberes Involucrados\]](#)

PLANOS	
<p>La ecuación de un plano en forma vectorial y en forma general.</p> <p>Ecuación de un plano, que pasa por tres puntos.</p> <p>Grafica de un plano.</p> <p>El ángulo entre dos planos.</p> <p>La condición de paralelismo de dos planos.</p> <p>La condición de perpendicularidad de dos planos.</p> <p>Intersección de 2 planos.</p> <p>La distancia del punto al plano.</p>	<p>Reconocer y usar la ecuación estándar de un plano</p> <p>Hallar la ecuación de un plano.</p> <p>Graficar un plano.</p> <p>Encontrar la intersección entre una línea y un plano</p> <p>Encontrar el ángulo entre una línea y un plano, entre dos planos.</p> <p>Calcular la distancia entre dos líneas, una línea y un plano, dos planos.</p> <p>Calcular la distancia entre dos puntos, un punto y una línea, un punto y un plano.</p> <p>Determinar la posición relativa de 2 planos (si son paralelos, perpendiculares, se cortan: hallar la ecuación de la recta de intersección)</p>

Tabla 1: Saberes Conocer y Hacer del Álgebra Lineal (ICFM Instituto de Ciencias Físicas y Matemáticas)

4. INTELIGENCIAS MÚLTIPLES

4.1. INTELIGENCIA ESPACIAL EN EL ESTUDIO DE MATEMÁTICAS

El autor de la teoría de Inteligencias (IM) es Múltiples es Howard Gardner, en sus obras plantea que no existe una inteligencia única sino varias de ellas, inicialmente plantea la presencia de siete inteligencias (corporal, lógica-matemática, lingüística, intra-personal, extra-personal, espacial y musical), posteriormente se han incorporado nuevas inteligencias con el sustento teórico correspondiente, incluso el mismo autor afirma que no podrá existir una lista estandarizada y universal de las inteligencias del ser humano. Sustenta que la valoración de estas inteligencias va de forma contraria al tradicional test de IQ que generaliza el nivel de inteligencia. Según Gardner este tipo de pruebas valoran prioritariamente la capacidad lingüística y lógica de las personas

sin atender al potencial de asimilación hacia nueva información o de resolución de nuevos problemas.(Gardner 30)

Las inteligencias múltiples permiten al ser humano desempeñarse a su propia manera en todas las áreas de la vida cotidiana siendo una de ellas la parte académica. Los resultados de todos los esfuerzos de enseñanza se verán influenciados por la forma en que los alumnos tengan desarrollado una u otra de sus inteligencias e incluso por la capacidad que posea el docente para discriminar y valorar cada una de ellas. Centrándonos en el proyecto nos interesa mucho aquellas que están íntimamente relacionadas con el estudio de la matemática y en la lectura de varias investigaciones se concluye que todas están involucradas en diferente escala.

La primera que evidentemente se toma en consideración es la inteligencia lógico-matemática, que es la capacidad del ser humano de trabajar con números, relaciones y patrones. Esta inteligencia surge con la confrontación de la persona con los objetos del mundo real al organizarlos, ordenarlos y analizar las acciones que se pueden realizar sobre ellos y el comportamiento de ellos frente a nuestras acciones (Gardner 108). De Las conclusiones realizadas por Barriettos Elsa en un estudio sobre las IM, estilos de aprendizaje y el nivel de rendimiento académico en alumnos a nivel universitario, se puede observar que esta inteligencia está asociada en un alto porcentaje con las inteligencias inter-personal, intrapersonal y corporal (Barrientos 19). La inteligencia lingüística permite utilizar la palabra oral o escrita para manifestar sus ideas. Esta sin duda es indispensable en el proceso de aprendizaje e incluso de aplicación práctica de las matemáticas, si un matemático tiene que sustentar su trabajo ante personas que no poseen desarrollada la capacidad para comprender un conjunto de números y enunciados, tiene que ser capaz de realizar una traducción

comprendible, caso contrario, y varios nos sentiremos identificados con esto, no obtendremos los resultados esperados. Sin alejarnos mucho de nuestras aulas, se requiere la capacidad de comunicación comprendible entre docente y alumno para progresar en este proceso. La inteligencia Espacial sin duda es una de las que permiten la abstracción de los objetos en las mentes para una mejor comprensión y manipulación. Como la lógica-matemática nace de la aproximación y experimentación con los objetos reales, llega un momento en el desarrollo del ser humano cuando no es necesario tenerlos en frente de forma física (Gardner 110), se puede realizar las mismas acciones visualizándolas en nuestra mente.

Los problemas planteados para la resolución matemática, así como en otras áreas, requieren que el alumno plasme una imagen mental distinguiendo sus elementos estáticos y logre manipular sus elementos dinámicos (Gardner 41), se denominan capacidades de percepción y manipulación. Esta segunda actividad es la que presenta mayor dificultad tanto para el alumno cuando aprende como para el docente cuando no dispone de herramientas adecuadas. Es decir, al contar con utilitarios como la pizarra para graficar en dos dimensiones, resulta complicado distinguir en el espacio líneas, ángulos, aristas, superficies, ubicación de puntos, etc.

4.2. APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE IM A NIVEL UNIVERSITARIO

Son varios los proyectos que se han encontrado durante el proceso de investigación en los que se interviene en el proceso de enseñanza-aprendizaje que busca desarrollar las IM, Un alto porcentaje de los trabajos encontrados apuntan hacia edades bajas en donde los niños están desarrollando sus inteligencias hasta cierto punto de forma natural. Los procesos de intervención apuntan a que las desarrollen de

una forma adecuada o complementaria. En este escenario existen menor cantidad de estos procesos a nivel universitario. De aquellos que existen se comparten los resultados y conclusiones pero generalmente no las actividades concretas que realizan.

Existen dos autores cuyas investigaciones nos otorgan la certeza que el proceso planteado de intervención será posible y con grandes expectativas en los resultados. La primera concluye que las diversas inteligencias no tienen que ver en gran medida por la constitución fisiológica de la persona si no por la cultura en la que se desarrolla (Vincent, Ross y Williams 49). En nuestro contexto si bien nuestros alumnos presentan diversos problemas en la representación espacial no tienen ninguna restricción a nivel genético para aprender a desarrollarla.

Una segunda investigación afirma que las inteligencias pueden fortalecerse en cualquier momento (Medellín, Arroyave y Lega 84). Nos permite inferir que podemos realizar procesos de intervención en nuestros alumnos universitarios para motivar el desarrollo de su inteligencia espacial muy importante para el desempeño eficiente de su aprendizaje y en el desarrollo de su carrera profesional.

Con lo anterior se genera una pregunta orientada a un estudio adicional, no incluido en el presente proyecto, sobre las inteligencias que se están priorizando en nuestra cultura. Es una pregunta abierta para futuras investigaciones que nos permitan conocer el entorno en el que desarrollamos nuestra labor docente y plantee líneas de acción para mejorar el desempeño de nuestros alumnos.

4.3. EVALUACIÓN DE APRENDIZAJE MEDIANTE INTELIGENCIAS MÚLTIPLES

Una de las opciones para evaluar las capacidades de los alumnos son las muy difundidas pruebas psicométricas, el uso de estos tipos de test que miden habilidades cognoscitivas se generalizaron en la década de los cincuenta permitiendo valorar el desempeño de las personas en ámbitos laborales y educativos(Waldegg 4), estas pruebas a pesar de tener fuertes críticas sobre el soporte metodológico pueden ser consideradas como una aproximación válida. Según Gardner estas pruebas miden básicamente la inteligencia lógico-matemática y lingüística de las personas dejando otras habilidades sin priorizar(Gardner 28). En el país se están difundiendo la aplicación de estas pruebas psicotécnicas debido a los exámenes de ingreso a las universidades e incluso para los programas de becas a nivel de estudios de postgrado. Existen diferentes tipos de test que miden habilidades de lógica-matemática, verbal y espacial, aunque existen algunos especializados para determinadas áreas⁸.

El artículo sobre la aplicación de la teoría de Inteligencias Múltiples (Vincent, Ross y Williams 49) implica una experiencia a nivel Universitario. Los autores resaltan el pensamiento de Gardner sobre la importancia de abordar todas las inteligencias de la persona permitiendo este proceso de intervención mejorar los procesos del alumno en aquellas áreas en las cuales tienen dificultades⁹. No se puede evaluar de forma tradicional, mediante pruebas escritas en donde prima la inteligencia "lingüística", se requieren diferentes evaluaciones. Esto permite resaltar la importancia que tiene que el alumno pueda expresar su comprensión sobre un tema de diferentes formas de

⁸ El proyecto aplica también una evaluación psicométrica [\[VER: Test Psicotécnico de Habilidades espaciales\]](#) comparativa entre los alumnos intervenidos y los del grupo de monitoreo para medir los resultados que obtienen respectivamente [\[VER: Resultados Psicotécnicos\]](#).

⁹ El proyecto se concentra en las habilidades espaciales, para lo cual se ha generado un esquema de evaluación acorde a nuestras necesidades. [\[VER: Reactivos de Evaluación\]](#)

acuerdo a sus inteligencias desarrolladas, para esto el docente debería estar en la predisposición de aceptar las diferentes formas de expresión, a su vez, esto se convierte en un reto porque deberá estar capacitado para validar estas expresiones y poder retroalimentar con observaciones. La retroalimentación efectiva se convierte en la acción que cierra el ciclo de aprendizaje y es el punto de transición para el siguiente.

Un ejemplo de la implementación de una clase mediante inteligencias múltiples planteado por Bruce Campbell incluye “la lectura acerca de los conceptos (lingüística), uso de diagramas (espacial), análisis de la secuencia del proceso (lógico-matemática), dramatización del proceso o manipulación de tarjetas (corporal-kinestésico), creación de una canción acerca del tema (musical), trabajo en grupos (interpersonal) y realizar una actividad reflexiva (intrapersonal)” (Vincent, Ross y Williams 57). Como se dijo anteriormente el docente estará listo para validar los aspectos conceptuales independientemente de la forma de expresión. Una de las limitantes de aplicación es el factor tiempo que estará siempre en contra en los programas de estudio generalizados.

4.4. EVALUACIÓN PSICOTÉCNICA DE LA INTELIGENCIA ESPACIAL

Para el proceso de intervención a ser desarrollado, el paso considerado como el más importante es la selección de las herramientas de evaluación de la inteligencia espacial en los alumnos. Con una adecuada selección de ésta se reflejarán los resultados más próximos a la realidad, es por ello que se ha buscado herramientas disponibles para ser aplicadas. Gardner plantea que la evaluación espacial resulta de mayor complejidad comparada con otras como la lingüística debido a que el número de estudios es menor que los existentes para aquellas.

Como se expuso en secciones anteriores existen pruebas de aptitudes espaciales que las miden desde el punto de vista de la neuropsicología denominadas pruebas psicotécnicas. Estas se encuentran generalmente como parte de un test generalizado, por lo que se requiere recopilar un conjunto de preguntas de varios de ellos para estructurar uno que sea aplicable al proyecto. Este se ha subdividido en cuatro secciones las cuales son:

- Rotación de figuras
- Figuras Idénticas
- Desarrollo de superficie
- Completamiento de superficies

Al ser analizados los reactivos podemos realizar algunas observaciones. Primero que si bien miden ciertas características de las capacidades de interpretación espacial o visual, se pueden considerarlas incompletas cuando el objetivo del proyecto es fundamentar la investigación sobre la teoría de inteligencias múltiples que es mucho más amplia en su contenido. Como segunda observación tenemos que solamente la sección de completamiento de superficie se relaciona con la tercera dimensión, con ellas no podríamos ser concluyentes sobre la transición del trazado de 2D a la abstracción 3D en los alumnos. La tercera y última observación será que por ser estandarizadas las pruebas psicotécnicas en la actualidad será utilizada como medición del posible rendimiento de los alumnos ante ellas¹⁰.

¹⁰ El proceso de intervención aplica la prueba psicotécnica tanto al grupo de trabajo como al de control para comparación del rendimiento de ellos ante la misma [\[VER Análisis Psicotécnico\]](#)

4.5. EVALUACIÓN DE INTELIGENCIA ESPACIAL COMO INTELIGENCIA MÚLTIPLE

Lara en su obra, (Temio 128) realiza un análisis de diferentes propuestas de evaluación de la Inteligencia espacial que se encuentran apegadas a la teoría de IM. Un aporte muy relevante de este estudio es la clasificación de ocho habilidades relacionadas con la visualización espacial presentes en los diferentes tipos de ejercicios que se pueden encontrar. Estas habilidades son consideradas, con excepción de la primera, en el proyecto como eje transversal presente en los reactivos a ser aplicados¹¹. Se excluye a la primera debido a que se realizarán pruebas de papel y lápiz y no podrían ser implementadas. A continuación se plasma los conceptos de las habilidades resumidos en esta obra (Temio 128).

- **Coordinación viso-motora.**- capacidad de la persona para coordinar la visión con el movimiento corporal.
- **Percepción figura – fondo.**- capacidad de distinguir una figura separada del fondo, se distingue formas huecas.
- **Constancia perceptual o constancia de forma, tamaño y posición.**- distinción de propiedades de objetos como tamaño, textura y forma a pesar de variar el punto de visión o de rotación.
- **Percepción de la posición en el espacio.**- Relacionar objetos con el observador a pesar de existir rotación, traslación o simetría.
- **Percepción de relaciones espaciales entre objetos.**- distinguir relaciones espaciales como distancia o ubicación entre ellos

¹¹ Los reactivos desarrollados poseen una ponderación de las habilidades requeridas para su desarrollo.
[\[VER: Reactivos\]](#)

- **Discriminación visual.**- Distinguir similitudes y diferencia entre objetos
- **Memoria visual.**- Recordar propiedades de objetos y relacionar sus características con otros.
- **Rotación Mental.**- distinguir imágenes mentales en movimiento.

Consideramos en nuestro proyecto la incorporación de tres habilidades adicionales requeridas para el estudio de matemáticas y en forma específica para Álgebra Lineal.

- **Discriminación de gráficas 3d en el plano.**- Identificación de perspectivas
- **Uso de un Sistema de referencia.**- Distinción de ubicación y distancia desde un punto de referencia.
- **Identificación de trayectorias.**- Distinguir el movimiento y dirección del mismo de objetos concretos

Un ejemplo muy detallado de aplicación directa de pruebas apegadas a la teoría de IM y que busca valorar la inteligencia espacial fue desarrollada por Elvers Medellin (Medellín, Arroyave y Lega 83) , esta prueba piloto está orientada a niños de 6 a 12 años en la que se ha categorización las diferentes pruebas en tres grupos:

- Pruebas de papel y lápiz,
- Pruebas de manipulación de objetos
- Pruebas de campo.

De esta investigación se puede tomar las pruebas realizadas de la primera categoría manteniendo el sustento teórico, sin embargo, no se podrían utilizar los mismos ejercicios debido al rango de edades al que está destinado. Se considera que las otras

dos categorías no nos serán de gran apoyo cuando se trata de medir la interpretación tridimensional de los alumnos cuando se confrontan a expresiones en dos dimensiones, esto es, requerimos que la evaluación sea de lápiz y papel para medir esta capacidad desarrollada.

Otro ejemplo de ejercicios muy interesantes lo tenemos disponible en una colección para la estimulación de habilidades de la inteligencia denominada PROGRESINT,(Hernanz y Sánchez) la cual es orientada para diferentes edades. Los tomos 1, 12 y 19 abordan las habilidades espaciales y están dirigidos a niños desde la etapa preescolar hasta adolescentes de bachillerato. Esta colección presenta ejercicios en el ámbito tridimensional muy útiles conceptualmente al proyecto pero nuevamente no podríamos utilizarlos tal como están debido a que nuestros alumnos están en edades universitarias.

Entre los ejercicios concretos de aplicación que proponen diferentes autores, se describen una gran recopilación que serán considerados en diferente grado para la elaboración de los reactivos de evaluación de la inteligencia espacial (Gardner),(Hernanz y Sánchez),(Medellín, Arroyave y Lega), (Temio):

- Selección de figuras idénticas
- Reconocer figuras con rotación
- Describir una escena o evento sin estar presente
- Reconocer figuras traslapadas
- Reconocer patrones de puntos
- Imaginar un lugar desde un punto de observación

- Reconocer formas geométricas con líneas en relieve
- Disposición de figuras con perspectiva
- Posición en el Espacio (distancia/proximidad)
- Figura en Espejo
- Dobles de Hoja (simetrías)
- Relaciones Espaciales
- Orientación Topológica-Geográfica

En esta etapa se ha buscado propuestas de evaluación orientadas a jóvenes de nivel universitario, lo cual ha sido difícil, no se ha encontrado muchos trabajos investigativos y de los que existen no se cuenta con las herramientas concretas destinadas hacia este objetivo. Se ha optado por combinar la serie de actividades detalladas anteriormente ajustando a los objetivos y a las edades del grupo del proceso de intervención que nos permitan obtener los resultados más reales posibles. Se concluye que en nuestro contexto se posee escaso material para la estimulación de la inteligencia espacial a nivel universitario, el proyecto se convierte en una propuesta en la que se compartirá todos los recursos elaborados y se recomendará como una futura línea de investigación¹².

¹² Se desarrolla la idea en la sección de recomendaciones [\[VER: recomendaciones\]](#)

5. REALIDAD AUMENTADA

5.1. DEFINICIÓN

Tecnología existente hace ya varios años pero de gran difusión aproximadamente desde el año 2012 en nuestro país debido a la creciente incorporación de teléfonos inteligentes con conexión a Internet(WION). Se utiliza en diversos ámbitos incluyendo la educación, la podemos definir como “el conjunto de dispositivos que añaden información virtual a la información física ya existente... no sustituyendo la realidad física, sino que sobreimprime los datos” (Bayonet, Patiño y Willmore) . Es decir, mediante una cámara digital ya sea de una PC, Teléfonos Inteligentes o Tablets se puede visualizar el video de nuestro entorno real (edificios, paisajes, documentos impresos, personas, etc.). y el software de RA procesa estas imágenes utilizando reconocimiento de patrones previamente establecidos y cuando los localiza determina información como texto, imágenes 3d o video para ser visualizada de forma sobreimpresa al video real. Otro mecanismo que utiliza las aplicaciones de RA es el GPS de los dispositivos para determinar la ubicación cercana de lugares de interés sobreimprimiendo indicadores de información.

La realidad aumentada se diferencia de la realidad virtual en que en la primera se superponen objetos virtuales al entorno real de la persona. En cambio en la realidad virtual es la persona que se sumerge a un entorno artificial perdiendo contacto con su realidad (Pérez).

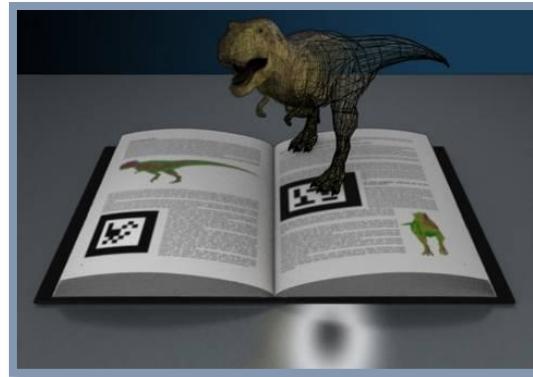


Ilustración 3: Objeto Aumentado sobre un libro real (WION)



Ilustración 4: Realidad Virtual, se pierde la percepción del entorno real(Creative Commons)

5.2. APLICACIONES DE RA EN LA EDUCACIÓN

La RA es considerada como una tecnología aún innovadora en el país por lo que muchas personas no han tenido contacto con ella todavía. Se considera necesario compartir algunos ejemplos para la comprensión de las aplicaciones de esta tecnología en el ámbito de la educación.

- Google Sky Map.- La empresa Google ha desarrollado la aplicación en mayo del 2009. (Research Google), con el uso de teléfonos inteligentes Android permite utilizar la cámara para enfocar hacia el firmamento y la aplicación de RA reconocerá las constelaciones, estrellas y otros cuerpos celestes brindando información adicional al usuario.



Ilustración 5: Aplicación “Google Sky Map” implementando RA para astronomía (Mobile Google)

- LearnAR.- Las empresas SSAT y realsmart disponen de diez aplicaciones gratuitas para el aprendizaje de ciertos temas en Biología, Química, Física, Matemáticas, entre otros (SSAT), mediante marcadores QR se utiliza el software en el portal web el cual accede a la cámara del computador para poder generar la experiencia RA.

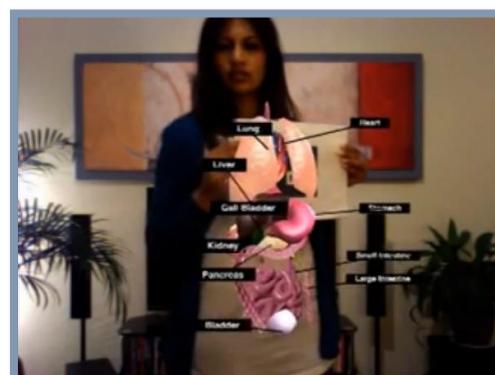


Ilustración 6: Uso de LearnAR para Biología (SSAT)

- Word Lens.- Con la combinación de reconocimiento de texto permite realizar traducciones en tiempo real al enfocar la cámara del dispositivo hacia un texto impreso y la aplicación RA colocará la traducción como información sobrepuerta. (Quest Visual)

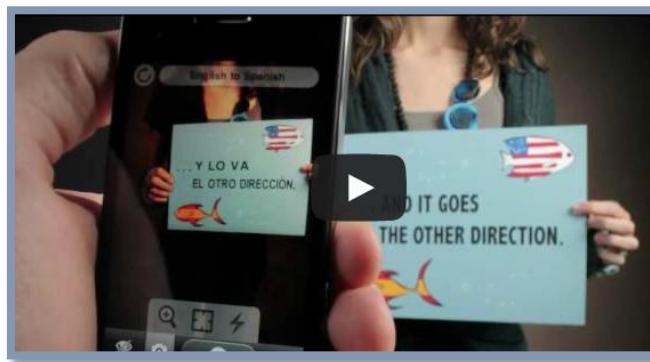


Ilustración 7: traducción de texto impreso en tiempo real(Quest Visual)

5.3. HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS PARA REALIDAD AUMENTADA

Los requerimientos básicos para el desarrollo de aplicaciones con esta tecnología son de bajo costo. Para hardware se puede utilizar computadores de características estándares y una cámara web, en cuanto a software, en los últimos años se han creado programas de código abierto que permiten la interacción, la detección de patrones, la creación de animaciones 3D y la superposición de objetos 3D en el video en tiempo real.

Existen diversas aplicaciones de software disponibles, ya sean de distribución libre o de paga, que permiten a los usuarios crear sus propias experiencias en RA, estas van desde muy complicadas que requieren conocimientos de programación hasta aplicaciones muy intuitivas que no requieren mayores habilidades informáticas. Si bien con el uso de estas últimas se pensaría que se pierde muchas características valiosas,

existen aplicaciones muy buenas que permiten incluso interactuar con objetos virtuales.

Para la elaboración del proyecto hemos experimentado con algunas aplicaciones encontrando diferentes ventajas y desventajas que nos ha permitido realizar una elección como la óptima para nuestras necesidades.

ARToolKit fue nuestra primera aproximación a la tecnología de RA en el año 2012. Aplicación de distribución libre con gran difusión ya que la hemos encontrado referenciada durante toda nuestra investigación en diferentes proyectos consultados. Se realizaron pruebas con la herramienta y cumple con la expectativa de crear proyectos completos con marcas QR. La consideramos fácil de utilizar, se selecciona la marca y el objeto tridimensional a ser visualizado. Hasta ese momento permitía generar proyectos web para compartir los recursos. Las animaciones 3D soportadas son en el formato obj. Para este software se requiere de PCs con la aplicación completa instalada y con cámara digital. Durante las prueba teníamos problemas con el reconocimiento de las marcas pues el enfoque debía ser totalmente adecuado y en momentos no se reconocían, atribuimos esto a la calidad de resolución de la cámara instalada. Los laboratorios de cómputo disponibles para nuestro proyecto no poseen las cámaras lo que obliga a su adquisición. Además, nos interesaba una tecnología que nos permita el reconocimiento de imágenes más detalladas y no las marcas QR.

Una capacitación profesional en el 2013 sobre programación de dispositivos Android en la Universidad Politécnica Salesiana (Robles) permitió detectar diferentes ventajas y reconocer a esta tecnología como una mejor opción para el proyecto: La resolución

de las cámaras de dispositivos inteligentes permite el mejor reconocimiento de imágenes, los GPS instalados permiten no solamente depender de la detección de patrones, la disposición de tablets en la universidad permitirá la implementación del proceso de intervención con los alumnos sin incurrir en gastos adicionales, la familiaridad del uso de estos dispositivos en los alumnos, la facilidad de enfocar la cámara a regiones específicas sin necesidad de estabilizar el texto como ocurre con las cámaras de PCs. Por todos estos beneficios se investigó sobre tecnologías que permitan implementar RA en estos dispositivos.

Vuforia.- Es una plataforma desarrollada por Qualcomm Technologies, Inc. Se la considera como una poderosa plataforma que permite el reconocimiento de imágenes para generar experiencias de realidad aumentada, es compatible con muchos dispositivos móviles pero la primera restricción para el proyecto es la programación en lenguaje C requerida, la cual no es del dominio del programador involucrado y se prefirió buscar otra herramienta relacionada con un lenguaje diferente(Qualcomm Technologies, Inc).

Wikitude.- Posee un SDK (Kit de Desarrollo de Software) que permite la creación de aplicaciones RA para programadores expertos en el lenguaje Java. También dispone de un estudio en línea en donde no se requiere conocimientos informáticos para generar experiencias aumentadas. Al probar esta herramienta aparece un problema con el dispositivo Samsung Galaxi Tab que utilizamos, pues la posición de la cámara era incorrecta, es decir, la imagen que naturalmente es vertical se visualizaba en el dispositivo de forma horizontal. Este problema persiste tanto en el “estudio en línea” como con el SDK. La investigación sobre esta situación nos llevó a conocer que era por compatibilidad y que una actualización de software estaría disponible



posteriormente. Otro inconveniente es el costo mensual de la suscripción al estudio, las pruebas se realizaron debido a que está abierto por un período de prueba. Aunque existen estas desventajas consideramos una excelente herramienta de RA pero que no es la adecuada para el proyecto(Wikitude GmbH).

Metaio.- brinda a los desarrolladores un SDK para java que permite el desarrollo de sus propias aplicaciones tanto para teléfonos inteligentes Android como para iOS que es el sistema operativo de Microsoft para dispositivos móviles. También permite exportar las aplicaciones para ordenadores Mac o PC (Metaio). Durante las pruebas no se presentaron problemas con el dispositivo Android del que se dispone. Entre las ventajas se puede indicar que permite el reconocimiento de imágenes reales, es decir, no solamente marcar QR. Permite incorporar como elementos aumentados objetos 3D estáticos y dinámicos, imágenes 2D y videos con transparencia. Otorga una licencia de libre distribución con el acceso total a las funcionalidades pero con la presencia del logo de Metaio, aunque existe la posibilidad de comprar la licencia pro para quienes les interese no mostrar este logotipo en cada una de sus aplicaciones. En este caso se ha optado por la licencia libre para el proyecto.

Dispone de una herramienta denominada Metaio Creator que permite realizar experiencias de RA de forma muy fácil e intuitiva, destinado para aquellos que no poseen conocimientos de programación. En cambio el SDK permite al desarrollador mayor versatilidad en las capacidades de la herramienta. Para el proyecto se ha decidido trabajar con el SDK Metaio.



Ciertas características experimentadas con el desarrollo de la aplicación es que permite el reconocimiento de varios patrones en la misma aplicación e incluso puede exponer varios objetos aumentados en paralelo, esto causa también el consumo de recursos y se vuelve más lenta la aplicación. El control de las animaciones de los objetos 3D con el touch de la pantalla es muy interesante así como también el permitir cambiar la posición de los objetos aumentados.

Los formatos para objetos 3D permitidos por metaio son obj, fdx y md2 (Metaio). Obj se caracteriza por ser muy livianos sus archivos pero sirve para objetos estáticos, soporta diferentes texturas y materiales, en cambio los otros incorporan animaciones en los objetos. Los archivos fdx requieren de un programa adicional para descomprimir y obtener los documentos requeridos por el SDK Metaio.



Capítulo III Características Metodológicas Para La Construcción De Conceptos Mediante Tics



1. SIMULACIÓN COMO MEDIO DE PERCEPCIÓN Y MANIPULACIÓN

El desarrollo de las capacidades de visualización espacial en cualquiera de los espacios de trabajo estudiados en el capítulo anterior, requiere tanto del nivel de percepción sobre la realidad que posea el alumno así como también de la manipulación de los objetos dentro de dicha realidad. Se planteó también que las actividades experimentales en el aula generalmente se realizan a nivel del meso-espacio, sin embargo, la tecnología nos permite brindar la percepción de situaciones reales en el macro y cosmo-espacio mediante la simulación, permitiendo el cambio de patrones para experimentar resultados, esto sería la manipulación de objetos. La percepción y manipulación sin la tecnología sería muy difícil de implementar en nuestros procesos educativos.

La simulación tecnológica se la puede definir como "... el proceso de diseñar y desarrollar un modelo computarizado de un sistema o proceso y conducir experimentos con este modelo con el propósito de entender el comportamiento del sistema o evaluar varias estrategias con las cuales se puede operar el sistema" Robert E. Shannon (Coss) o también como "... una técnica numérica para realizar experimentos en una computadora digital. Estos experimentos involucran ciertos tipos de modelos matemáticos y lógicos que describen el comportamiento de sistemas de negocios, económicos, sociales, biológicos, físicos o químicos a través de largos períodos de tiempo" H. Maisel y G. Gnugnoli. (Coss). Las dos definiciones en conjunto nos permiten utilizar a la simulación tecnológica como herramienta didáctica de percepción y manipulación en cualquiera de las áreas de aprendizaje.

La Realidad Aumentada es una poderosa tecnología para elaborar procesos de simulación muy utilizados en el ámbito educativo. Al permitir el reconocimiento de patrones de objetos específicos o el determinar lugares predefinidos y sobre ellos incorporar nueva información le convierte en una de las herramientas educativas con mayor potencial. Hasta este momento de investigación, en el país se la ha destinado prioritariamente en el área de turismo. Por su innovación en nuestro medio se requiere de la unión de diferentes profesionales quienes mediante procesos de investigación permitan aprovechar de mejor manera sus características.

2. TICS EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA – APRENDIZAJE

La tecnología educativa se la puede definir como la intermediaria entre los conocimientos que surgen de las ciencias de la educación y su aplicación para resolver problemas de aprendizaje. Para este proceso de intermediación se requiere también de generación de conocimiento. El trabajo desarrollado se convierte en una labor de investigación tan importante como la investigación científica. Denominemos puentes a estas aplicaciones intermedias. La tecnología educativa puede generar puentes a partir de diferentes posiciones teóricas entre ellas el constructivismo. Es por ello que el profesor frente a una herramienta tecnológica deberá identificar rigurosamente las características de la misma para la implementación del paradigma educativo deseado (Santos Moreno)

El principio básico de la teoría constructivista (Hernández) es que el aprendizaje humano se construye. Que la mente humana elabora nuevos conocimientos a partir de anteriores. Un supuesto también básico es que las personas aprenden cuando pueden controlar su aprendizaje y que tienen conciencia de este control. De acuerdo a las

investigaciones de los últimos años, se considera al computador como un apropiado medio creativo que apoya al aprendizaje constructivista. Una característica del profesor es de motivar a sus alumnos a usar el ordenador para actividades escolares (Pensar de nuevo org). Existen diferentes aplicaciones informáticas en este sentido entre las cuales se caracterizan las wikis, los blogs y las redes sociales (Hernández). Permiten al alumno exponerse a un entorno mucho más amplio y acceder de forma ilimitada a conocimientos. De estas herramientas lo que provocan es que el alumno pase del rol de consumistas al rol de productores de información.

Los puentes tecnológicos permiten el control sobre el aprendizaje para la construcción de nuevo conocimiento. Brinda al ser humano la capacidad de crear, compartir y dominar dicho conocimiento (Hernández). La tecnología ha impactado sobre el proceso de enseñanza tanto en su naturaleza como en los roles que desempeñan el profesor y alumno.

Varios autores destacan que las características de las Tics son un fuerte soporte para el aprendizaje. Entre ellas tenemos:

- interacción del alumno con realidades totalmente diversas
- digitalización de información para su rápida distribución
- manipulación de ambientes controlados para experimentación
- generación y facilidad de acceso
- comunicación entre comunidades de estudio.

3. INTERFACE, VELOCIDAD DE RESPUESTA Y SECUENCIA DE ACTIVIDADES

Una de las características de las TICs es su interacción, esto significa comunicación entre el ordenador y el usuario. En cualquier situación, no solo con el software, cuando la comunicación es deficiente la comprensión también lo será. En nuestro caso, si la interacción entre la interface y los usuarios no se realiza con calidad, las valoraciones del aprendizaje no podrán ser totalmente realistas, porque el estudiante puede haber entendido el concepto pero no se comunica adecuadamente con el ordenador.

Las opciones disponibles para el usuario deberán estar muy claras, es decir, su organización debe ser fácil e intuitiva. Al momento de que el usuario seleccione una de dichas opciones la velocidad de respuesta también es un factor importante. El alumno podrá esperar un intervalo largo de tiempo tan solo si lo que espera ver es demasiado interesante para él, en cambio si carece de motivación y la velocidad de respuesta no es adecuada se genera distracción durante el desarrollo de la actividad.

Las aplicaciones informáticas permiten al usuario tomar el control de las actividades, es decir, es quien decide la secuencia, la velocidad, lo que mira y lo que no (Medina). El proyecto respeta esta característica, aunque la parte teórica evidentemente debe tener una secuencia establecida debido a unos conceptos son prerrequisitos de otros, se plantean las actividades de tal forma que se permita al alumno seleccionar la que va a desarrollar.

4. INDICADORES DE CALIDAD DE SOFTWARE EDUCATIVO

El proyecto requiere de dos objetos concretos para su implementación: el texto guía que es nuestro instrumento en 2D y el software que incorpora la abstracción tridimensional sobre los problemas de matemáticas abordados. La etapa de análisis y diseño deben estar alineados con normativas que permitan un producto de calidad. Existen diversos estándares como la “Norma ISO/IEC 9126: 2001” o el “Bohem-1978” para la calidad de software (Olsina 14-15). También se puede dar uso de planteamientos de evaluación específicos para Software Educativo como el desarrollado por el Área de Evaluación de la Universidad EAFIT, Colombia (Gonzalez) o las normas del proyecto de la Universidad de Carabobo, Venezuela (Medina).

La metodología de desarrollo de software permite implementar un modelo mixto dependiendo de los requerimientos del mismo (Medina). Para el proyecto se ha realizado un intenso análisis de los requerimientos de los diferentes estándares y se ha compilado un conjunto de normas adecuadas a nuestra realidad. Estas especificaciones corresponde tanto al texto guía como a la implementación informática pues consideramos que la guía es el medio de interacción con el software. .

Después de analizar los modelos disponibles se tienen varias observaciones¹³, Ely Medina orienta la normativa sobre tres perspectivas: literaria, pedagógica y de expresión escrita. La parte orientada a la pedagogía nos interesa para mantener presente el objetivo primordial del proyecto que es la intervención pedagógica sobre un grupo de estudiantes. Gonzales también divide el modelo en tres partes: el software como objeto material, como objeto pedagógico y el programa en su uso concreto. Los

¹³ La especificación de la normativa a seguir se encuentra en la sección de anexos. [VER: Normativa]



tres niveles son muy aplicables a nuestra realidad y con mayor relevancia la tercera pues nos permitirá una evaluación posterior, es decir, cuando se esté utilizando el sistema. Las otras normativas nos ayudarán a establecer criterios de calidad para el software como tal en sus etapas de análisis, diseño e implementación.



Capítulo IV Propuesta didáctica - experimental para álgebra lineal

5. SISTEMA DE EVALUACIÓN BASADA EN IM

5.1. INTELIGENCIA ESPACIAL

El objetivo es mejorar el nivel de inteligencia espacial en los alumnos mediante el uso de realidad aumentada, para esto primero se definen las habilidades que son características de esta inteligencia y los ejercicios de estimulación adecuados. Se plasman los reactivos utilizados en las evaluaciones inicial y final con la asociación respectiva al tipo de ejercicio y las habilidades involucradas. Es importante comprender que una habilidad puede ser relevante o no en un ejercicio por lo que se ha ponderado su importancia en una escala de 0, 1 y 2.

5.2. HABILIDADES INVOLUCRADAS

Son diez las habilidades espaciales consideradas en el estudio, las que se etiquetaron de la siguiente manera¹⁴:

- A. Coordinación viso-motora
- B. Percepción figura – fondo.-
- C. Constancia perceptual o constancia de forma, tamaño y posición
- D. Percepción de la posición en el espacio.-
- E. Percepción de relaciones espaciales entre objetos
- F. Discriminación visual
- G. Memoria visual.-
- H. Rotación Mental.-

¹⁴ Para ampliar el sustento teórico referirse al capítulo II [\[VER: Evaluación por IM\]](#)

- I. Discriminación de gráficas 3d en el plano
- J. Uso de un Sistema de referencia
- K. Identificación de trayectorias

5.3. EJERCICIOS DE ESTIMULACIÓN

Las habilidades involucradas en la inteligencia espacial pueden ser estimuladas con diversos ejercicios. Un solo ejercicio puede requerir de varias habilidades en diferentes grados de relevancia. Es importante realizar la siguiente clasificación es transparente para el alumno, es decir, en ninguna parte se coloca el tipo de ejercicio involucrado ni las habilidades asociadas. Los ejercicios de la guía junto con la tecnología implementada se prestan para estimular las habilidades pero es el rol del docente ir presentándolas a los alumnos. Es de gran importancia que el docente tenga muy claro los objetivos del taller y conozca las habilidades y ejercicios que puede desarrollar con los alumnos, pues aquí está la clave de una adecuada reproducción de esta experiencia en otros escenarios.

- **Selección de figuras idénticas.**- Existe ejercicios con la asociación del marcador en perspectiva y vistas laterales o superior, también se puede realizar con la identificación de elementos del marcador 2D con los correspondientes objetos en 3D.
- **Reconocer figuras con rotación.**- Primordialmente con la RA al sobreponer el escenario de 3D sobre el marcador el alumno como primer ejercicio será rotar el objeto de RA hasta tenerlo con la vista indicada en el marcador. Es

importante que el docente supervise para generar estas rotaciones adecuadamente.

- **Describir una escena o evento sin estar presente.-** Se involucra al comportamiento de los objetos, se puede estimar cambios de trayectoria o variar puntos de observación y que los alumnos propongan los resultados que se podrían generar. Es importante el reconocimiento de las orientaciones básicas como izquierda, derecha, al frente, atrás, sobre, abajo, etc.
- **Reconocer figuras traslapadas.-** la representación de varios objetos en un mismo marcador permite reconocer la representación adecuada para aquellas aristas que no son visibles al observador e identificar cuales pertenecen a cada una.
- **Imaginar un lugar desde un punto de observación.-** se lo realiza mediante la ubicación del sistema de referencia en diferentes puntos del escenario 3D, la distribución de los objetos respecto a los ejes y planos coordinados será la forma de realizar este ejercicio.
- **Disposición de figuras con perspectiva.-** Se deberá resaltar la comparación entre el marcador 2D y el escenario 3D para reconocer la representación de la perspectiva que se está realizando.
- **Posición en el Espacio (distancia/proximidad).-** Con los escenarios 3D y con la información de los marcadores se podrá estimar distancias y las coordenadas de posición de los objetos.
- **Relaciones Espaciales.-** Se debe asociar la representación del marcador, el sistema de referencia utilizado y el escenario 3D para establecer las relaciones espaciales entre los objetos.



Cada ejercicio de la guía podría involucrar diferentes ejercicios de estimulación, por tal razón, este material no es recomendable para un estudio autónomo, se aconseja que sea guiado para promover adecuadamente las experiencias en los alumnos. Se la considera también una ventaja debido a que cada profesor tiene la flexibilidad de adecuar a sus necesidades cada sesión¹⁵.

5.4. REACTIVOS DE EVALUACIÓN

Los reactivos se han desarrollado con el formato indicado en el que se puede distinguir:

- a) Número de pregunta
- b) Test inicial o final al que pertenece
- c) Identificador único del reactivo
- d) Tipo de ejercicio de estimulación
- e) Nivel de complejidad
- f) Ponderación de habilidades espaciales involucradas
- g) Enunciado del reactivo
- h) Opciones de respuesta para la selección
- i) Respuesta correcta del reactivo

¹⁵ Para mayor detalle referirse a Recomendaciones [VER: Recomendación]

(a) (b) PREGUNTA #11 INICIAL

Identificador:	#R019 (c)	Tipo de Reactivo:	Punto De Observación (d)	Complejidad: alta (e)								
Habilidad involucrada												
A B C D E F G H I J												
Ponderación: NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2) 1 0 2 2 2 0 1 2 2 0 (f)												
Enunciado												
Dada la siguiente distribución de objetos, seleccione la representación correcta en un sistema 3D tal que su origen es la persona y el eje x positivo está en dirección hacia el objeto "G"												
Opciones: <table border="1" style="width: 100%;"> <tr> <td>Opción A</td> <td>Opción B</td> <td>Opción C</td> <td>Opción D (h)</td> </tr> <tr> <td> </td> <td> </td> <td> </td> <td> </td> </tr> </table>					Opción A	Opción B	Opción C	Opción D (h)				
Opción A	Opción B	Opción C	Opción D (h)									
Verdadero (i)												

Ilustración 8: Descripción de reactivos

Se han desarrollado un total de 30 reactivos para su aplicación en el proceso de evaluación inicial y final de las habilidades espaciales, en la tabla siguiente se presenta un resumen de los reactivos con las propiedades de tipo o complejidad, así como también el test en el que fue incluido¹⁶.

	Test Inicial	Test Final	TIPO DE REACTIVO	COMPLEJIDAD
1	R001	R002	Figuras Traslapadas	media
2	R003	R004	Figuras Traslapadas	alta
3	R005	R006	Simetría	Baja
4	R008	R009	Simetría	Alta
5	R010	R011	Punto de observación	media

¹⁶ Los reactivos completos se los puede encontrar en la sección de anexos. [\[VER: reactivos\]](#)

6	R012	R015	Punto de observación	media
7	R013	R014	Disposición de figuras con perspectiva	Alta
8	R021	R016	Identificar perspectivas	media
9	R017	R018	Identificar perspectivas	Alta
10	R019	R020	Punto De Observación	Alta
11	R022	R023	Describir una escena o evento sin estar presente	Alta
12	R024	R025	Relaciones espaciales	media
13	R026	R027	Relaciones espaciales	baja
14	R028	R029	Describir trayectorias	baja
15	R030	R031	Describir trayectorias	media

Tabla 2: Propiedades de los Reactivos

6. SISTEMA DE EVALUACIÓN PSICOTÉCNICO

6.1. TIPO DE EJERCICIOS

Se aplicaron en el test cinco ejercicios de cada una de las cuatro categorías existentes, a continuación se describe un ejemplo del tipo de ejercicio¹⁷.

- **Rotación de figuras**

¿Cuál es la figura distinta a la del modelo?:

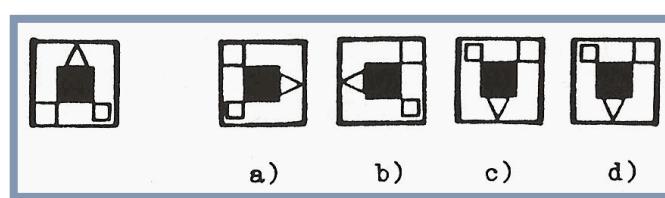


Ilustración 9: Ejemplo I de Rotación

¹⁷ Para el test completo referirse a los anexos [\[VER: Test Psicotécnico\]](#)

¿Cuáles son las figuras iguales al modelo?

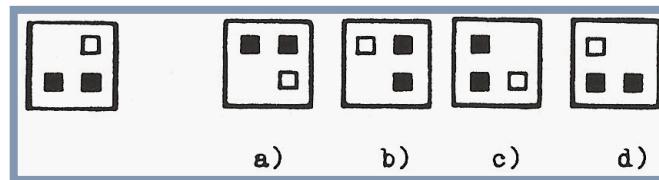


Ilustración 10: Ejemplo II de Rotación

- **Figuras Idénticas**

¿Cuál es la figura idéntica a la modelo?

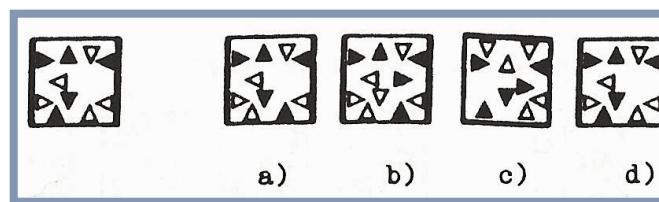


Ilustración 11: Ejemplo I de Figuras Idénticas

¿Qué figura es el negativo de la propuesta?

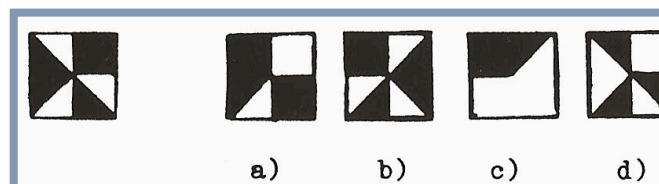


Ilustración 12: Ejemplo II de Figuras Idénticas

- **Desarrollo de superficie**

¿Qué construcción surgirá de este desarrollo?

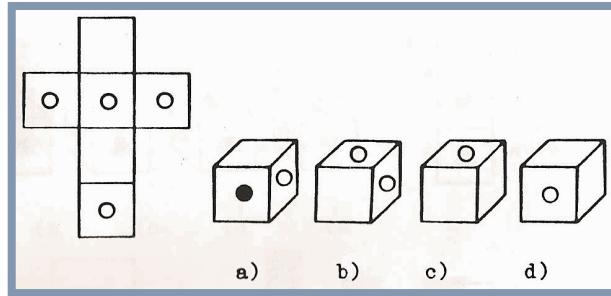


Ilustración 13: Ejemplo de Desarrollo de Superficie

- **Completamiento de superficies**

Con tres trozos de la derecha se puede armar la figura de la izquierda, identifique el trozo que sobra.

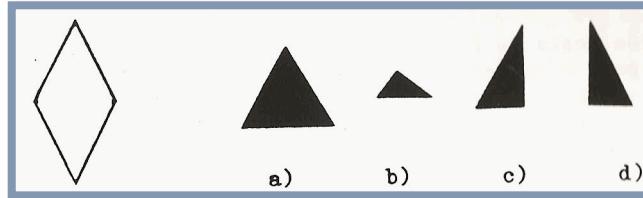


Ilustración 14: Ejemplo de Completamiento de Superficie

Solamente la tercera categoría me permite uso de elementos con la tercera dimensión. Al no encontrar uno especializado en características tridimensionales se utiliza este test para evaluar el nivel de desempeño ante las pruebas estandarizadas que se utilizan en la actualidad¹⁸.

7. SOFTWARE DE REALIDAD AUMENTADA

La aplicación de RA para el laboratorio experimental está disponible para tablets con sistema operativo Android. La línea gráfica utilizada para su interface es totalmente

¹⁸ Para el sustento teórico referirse al capítulo II [\[VER: Evaluación Psicotécnica\]](#)

propia del proyecto de investigación. La navegabilidad se ha procurado que sea lo más sencillo y eficiente para compensar el tiempo que sí toma cargar los recursos antes de iniciar la aplicación. A continuación se visualiza algunas impresiones de la pantalla del dispositivo.

La pantalla inicial de la aplicación, posee los datos del proyecto de investigación y autor. El logotipo representa las siete inteligencias que inicialmente planteó Gardner en su teoría de IM.

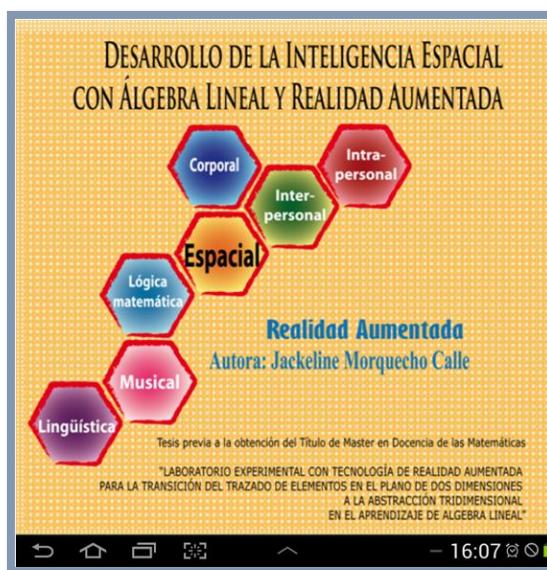


Ilustración 15: Pantalla Inicial de Aplicación RA en la Tablet Samsung Galaxy

Al presionar la pantalla táctil se dirige inmediatamente a la tabla de contenidos. El alumno deberá seleccionar la sección de estudio para acceder al reconocimiento de patrones. La accesibilidad es un factor importante en una aplicación de software por lo que esta ventana posee el título de la aplicación como cabecera, a continuación una cinta de ubicación en la que se informa en todo momento la ruta de navegación en la que se encuentra el usuario y los íconos de acceso a las secciones de estudio. La aplicación consta de nueve secciones que corresponden a la distribución de la guía.

En cada sección se puede pulsar el ícono de “RA” para acceder al reconocimiento de patrones o al ícono de “?” para acceder a la ayuda conceptual.

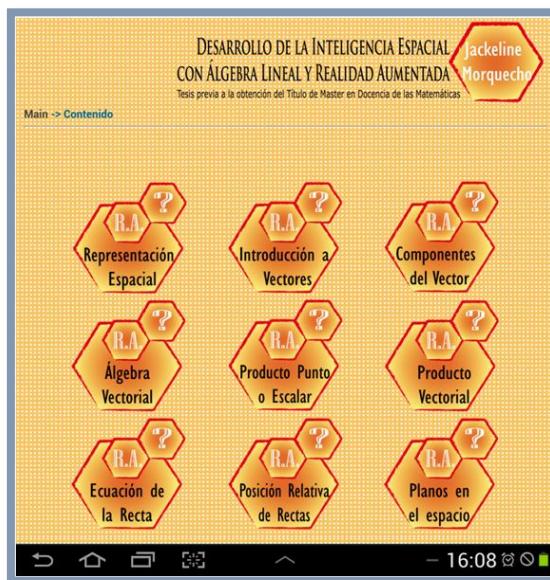


Ilustración 16: Tabla de Contenidos de la Aplicación RA

La plataforma Metaio que se utilizó para desarrollar el software es de libre distribución con la característica de que se debe observar su logotipo en el momento de cargar los objetos 3D, para no tener dicho logotipo se podría adquirir una licencia especial.

El software accede a la cámara de la tablet con el que se enfocará a la guía didáctica en la sección que se ha seleccionado. Existen cuatro botones de navegabilidad: el primero es para salir del modo cámara y retornar a pantallas anteriores y los tres siguientes son destinados para la manipulación de objetos. Estos botones de manipulación permiten al usuario realizar rotaciones en cada uno de los tres ejes indicados.



Ilustración 17: Logotipo de la plataforma y botones de manipulación

El software de RA permite aumentar objetos a los marcadores existentes en la guía didáctica permitiendo al alumno manipular la posición y rotación. En la tablet se visualiza al mismo tiempo el marcador de 2D y el objeto 3D. Este doble impacto visual genera en el alumno la asociación de las dos representaciones. Recordando el sustento teórico, la guía tiene una proyección cilíndrica mientras que el software permite una proyección cónica.

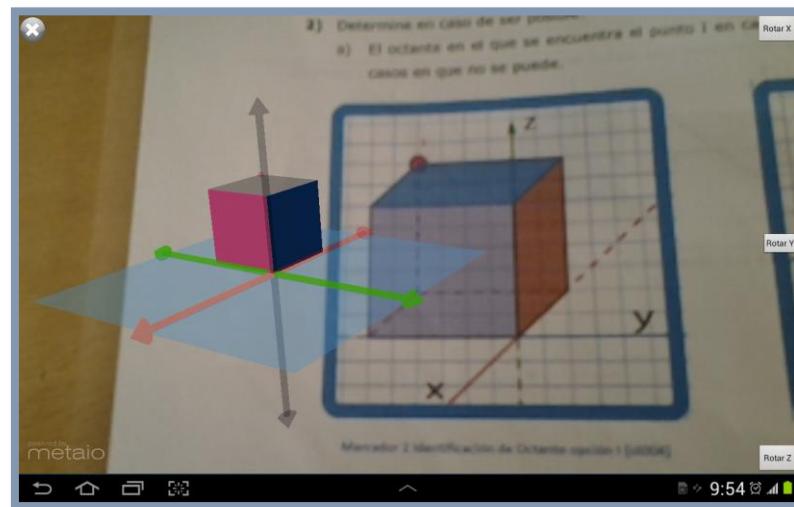


Ilustración 18: Doble impacto visual.

8. GUÍA DIDÁCTICA

8.1. ORGANIZACIÓN POR SECCIONES

Los saberes involucrados se han organizado en las siguientes secciones:

- REPRESENTACIÓN ESPACIAL
- INTRODUCCIÓN A VECTORES
- COMPONENTES DEL VECTOR
- ÁLGEBRA VECTORIAL
- PRODUCTO PUNTO O ESCALAR
- PRODUCTO VECTORIAL
- FORMAS DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA
- POSICIÓN RELATIVA DE LAS RECTAS
- PLANOS EN EL ESPACIO

8.2. ORGANIZACIÓN DE CADA SECCIÓN

En cada una de las secciones podremos encontrar los siguientes recursos:

Marco conceptual.- Es una recopilación conceptual del tema abordado en la sección.

Actividades con Realidad Aumentada.- Son los ejercicios concretos de Álgebra Lineal, posee un marcador para la interacción con la aplicación de RA y una secuencia de instrucciones propuesta para el desarrollo del mismo. Este punto presenta la flexibilidad del proyecto para la reproducción de la experiencia en otros escenarios, el



docente puede proponer modificaciones en dicha secuencia para obtener los resultados apuntados de acuerdo a la evaluación inicial de sus alumnos.

Ejercicios Autónomos.- Es un conjunto de ejercicios tradicionales para el aprendizaje del Álgebra Lineal.

Proyectos a Desarrollar.- Es una propuesta de ejercicios orientados a diferentes tipos de inteligencias. Esto se basa en la necesidad de que los alumnos comuniquen su comprensión de diferentes maneras de acuerdo a sus habilidades desarrolladas. El docente deberá estar en la predisposición de evaluar y retroalimentar este tipo de expresiones¹⁹.

8.3. EJERCICIOS CON REALIDAD AUMENTADA

Cada sección poseen ejercicios de interacción con la aplicación de realidad aumentada, basta con seleccionar

8.4. EJERCICIOS CONCEPTUALES Y DE APLICACIÓN ORIENTADOS A SITUACIONES REALES

Se ha planteado ejercicios conceptuales en los que busca la comprensión de los contenidos de la materia de Álgebra Lineal. También se ha establecido ejercicios de aplicación procurando que aborden situaciones cotidianas. Las siguientes ilustraciones ejemplifican lo expuesto.

¹⁹ Para el detalle conceptual referirse al capítulo II [\[VER: Comunicación de Resultados\]](#)

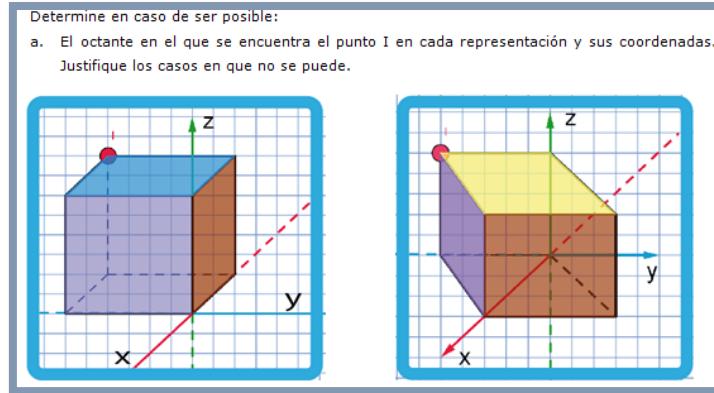


Ilustración 19: Ejercicio Conceptual

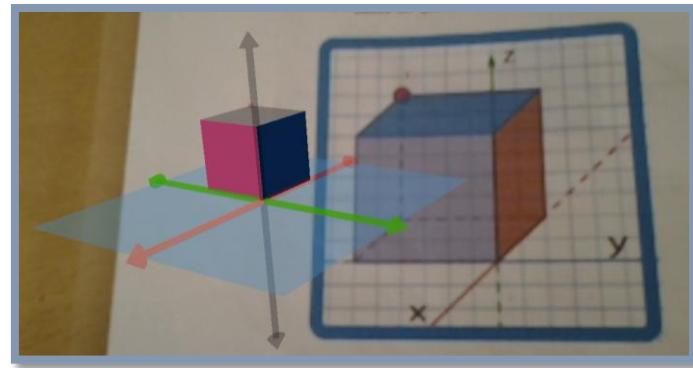


Ilustración 20: Ejercicio con objeto aumentado sin movimiento

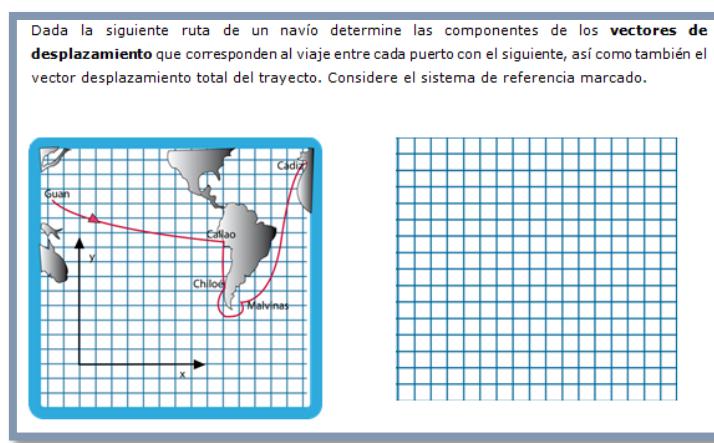


Ilustración 21: Ejercicio de Realidad Cotidiana

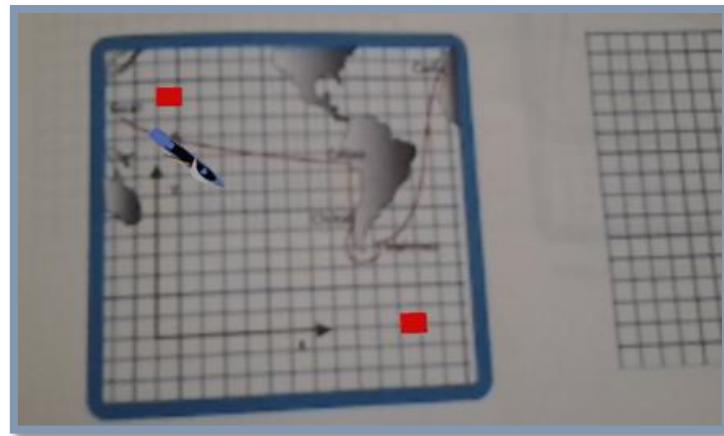


Ilustración 22: Ejercicio con objetos aumentados y movimiento

8.5. INTRODUCCIÓN A NIVELES SUPERIORES

Sin introducirse mucho en conceptos de materias de niveles superiores, se puede iniciar al alumno a la comprensión de ciertos conceptos que los aplicará posteriormente. Esto es un beneficio para el estudiante pues tiene una primera aproximación a aplicaciones más complejas. Se han planteado ejercicios que permiten trabajar por ejemplo con cálculo vectorial:

En una exhibición de aviones se realiza la acrobacia descrita en la figura. Si $\vec{a} = <0, 500, 50>$ y $\vec{b} = <0, -500, 100>$ son los vectores de posición del avión a los 3 y 7 s respectivamente.

- Determine el vector de "velocidad media" correspondiente a este intervalo de tiempo. (Si \vec{d} es el vector de desplazamiento de un objeto, el vector de "velocidad media" se determina con la relación $\vec{v} = \frac{\vec{d}}{t} = \frac{1}{t} \vec{d}$). Fuente conceptual(Canarias)
- Grafique los vectores de desplazamiento y de velocidad

Ilustración 23: Ejercicio Introductorio a Cálculo Vectorial

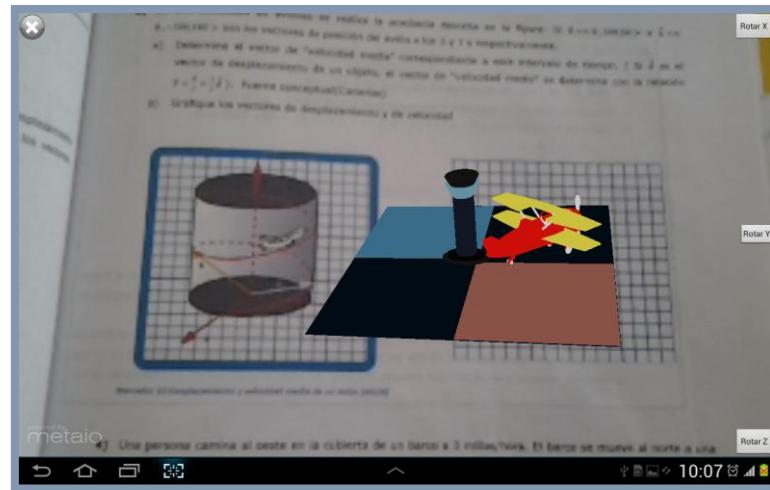


Ilustración 24: Ejercicio Introductorio con RA y movimiento

8.6. TRABAJO EN EL MESO Y MACRO ESPACIO

El alumnado, al trabajar con los dispositivos Android, está manipulando este objeto e interactuando con el sistema mediante el mismo. Por las dimensiones de la Tableta se trata de un objeto concreto por lo que se está trabajando a nivel de meso-espacio.



Ilustración 25: Trabajo a nivel de meso-espacio

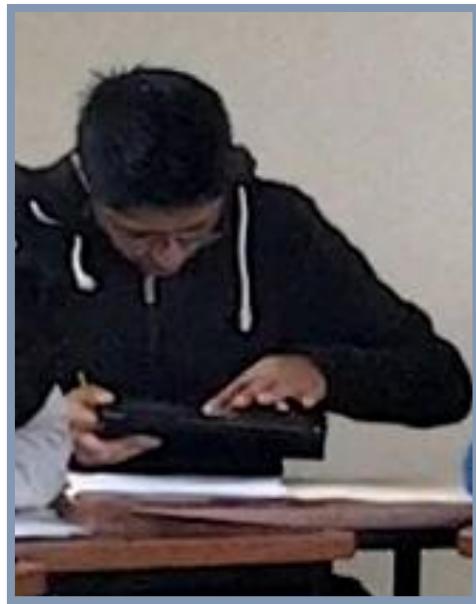


Ilustración 26: Manipulación de objeto concreto

Los escenarios implementados en RA con características tridimensionales permiten representar situaciones a gran escala, el alumnado manipula estos objetos por lo que se permiten experiencias a nivel de macro-espacio.

4. Se ha determinado un sistema coordenado con el eje y paralelo a la pista de aterrizaje y con el origen en la base de la torre de control.
- Bosqueje algunos vectores que representen la posición del avión a medida de que va aterrizando.
 - Determine los octantes en los que se encuentran cada vector bosquejado.
 - Grafeque el vector que represente la posición más cercana del avión a la base de la torre.

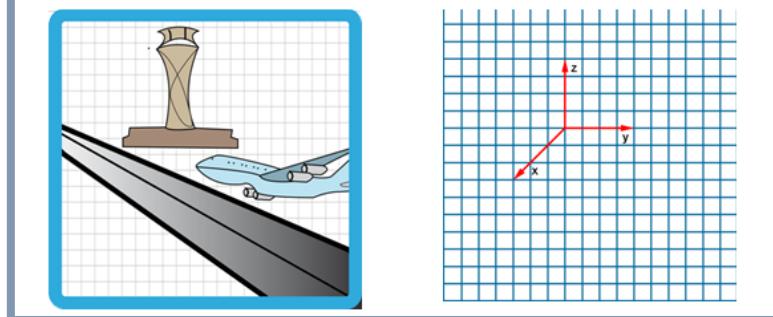


Ilustración 27: Ejercicio a nivel de macro-espacio

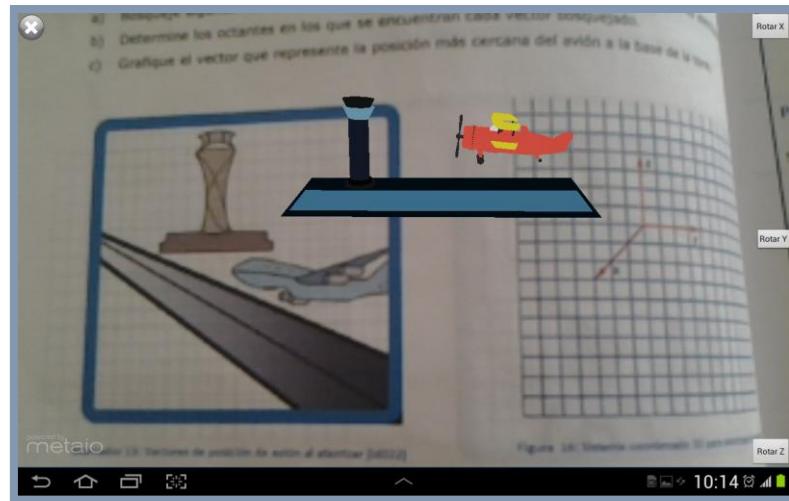


Ilustración 28: Representación animada de experiencia a macro espacio

8.7. REPRESENTACIÓN VISUAL

La dificultad para el alumno de comprender las gráficas en el plano y abstraer mentalmente las características tridimensionales, puede deberse al desconocimiento de la perspectiva que se está utilizando. Aparentemente esto sería algo trivial pero se considera de gran importancia para la investigación establecer desde un inicio con los alumnos la diferencia que encontrarán entre el texto guía y la aplicación con Realidad Aumentada. En el texto guía se utiliza la perspectiva cilíndrica tanto en los “marcadores” como en los ejercicios a realizar pero el software por sus características tridimensionales estimula visualmente al estudiante con la perspectiva cónica que es una representación más real comparada con la visión natural del ser humano. Se busca con esto que el alumno realice una adecuada representación en el plano de lo que observa en el espacio.

8.8. COMUNICACIÓN DE RESULTADOS

El aprendizaje conceptual puede ser alcanzado por los alumnos pero, el comunicar estos resultados se convierte en una situación también de análisis riguroso²⁰. El docente deberá ser muy observador a las expresiones realizadas que denotan una comprensión a nivel espacial, una de ellas son los ademanes de los alumnos al momento de explicar algo, es una forma de expresar el pensamiento.



Ilustración 29: movimiento de las manos para explicar sus pensamientos



Ilustración 30: Segundos de Abstracción Mental antes de Responder

Se ha planteado un ejemplo de cortos proyectos a desarrollar de los cuales se debe permitir seleccionar al estudiante con el que tenga mayor afinidad. Todos permitirán

²⁰ Para profundización del tema referirse al capítulo II [\[VER: Comunicación de Resultados\]](#)

aplicar los conceptos pero están orientados a diferentes habilidades del alumno como por ejemplo aquellos que son más lógicos podrán utilizar software, otros que tienen desarrollada la inteligencia corporal podrán experimentar con el movimiento de objetos, personas y el suyo propio, otros que posean se asocien con la inteligencia visual podrán realizar maquetas, etc.

Escriba en forma simétrica los casos particulares de las siguientes rectas y elabore una maqueta que represente su posición en el espacio

a.
$$\begin{cases} x = 8k - 5 \\ y = 2 \\ z = -9k + 4 \end{cases}$$

Ilustración 31: Proyecto orientado a Inteligencia Visual

Registre en video varias situaciones en los que se presente el caminar de dos personas en diferentes direcciones, determine los vectores de desplazamiento y el ángulo de separación en cada caso.

Ilustración 32: Proyecto orientado a Inteligencia Corporal



Ilustración 33: Maqueta de Ejes Coordenados

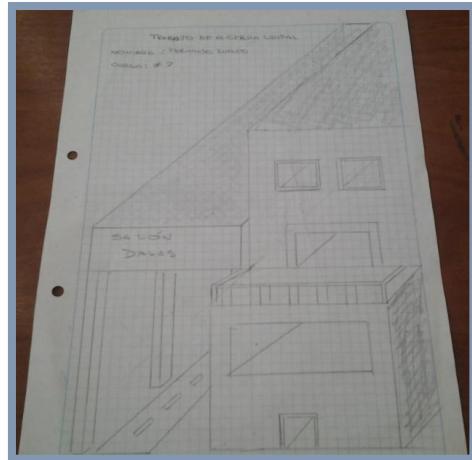


Ilustración 34: Representación de Octantes

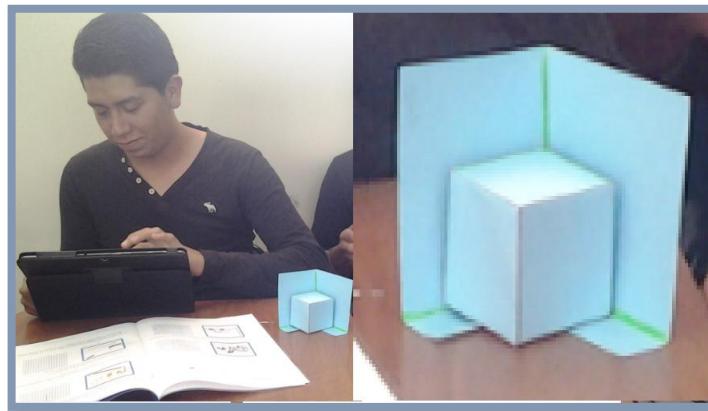


Ilustración 35: Disposición de objetos en los octantes

9. DISPOSITIVOS MÓVILES

9.1. CARACTERÍSTICAS

La carrera de Sistemas pone a disposición un total de 17 Tablets para el desarrollo del Taller de Álgebra Lineal con las siguientes características.

- Marca Samsung Galaxy Tab 2
- Modelo es GT_P5100
- Sistema Operativo Android 4.0.3

- 11 GB de Almacenamiento
- Pantalla de 15 pulgadas

9.2. CARACTERÍSTICAS DEL SISTEMA

La aplicación de RA se denomina como “RA Inteligencia Espacial” desarrollada con la plataforma de Realidad Aumentada “Metaio” con licencia libre, utiliza lenguaje java para la programación y la interacción se realiza con páginas web. Requiere un espacio de disco de 447MB para su instalación y requiere acceso a:

- Ubicación GPS del móvil
- Comunicación por Red
- Herramientas de programación
- Almacenamiento
- Controles de Hardware

10. PERÍODO DE INTERVENCIÓN

10.1. HORARIO

El Taller con los alumnos se realizó por el lapso de dos semanas del 9 al 19 de diciembre con una carga de dos horas diarias, se desarrolló dentro de las instalaciones de la Universidad Politécnica Salesiana con el apoyo tanto de la Dirección de Carrera como de la Dirección del Instituto de Ciencias Físicas y Matemáticas.

10.2. SELECCIÓN DEL GRUPO DE CONTROL

Para la selección del grupo de monitoreo o control se ha seleccionado de aquellos que cumplan similares características que el de experimentación obteniendo lo siguiente:

- Pertenecientes a la misma carrera
- Toman la materia en horario similar, el de control de 9:00 a 11:00 y el de experimentación de 11:00 a 13:00. Se puede considerar una desventaja el horario del este último grupo pues está fuera de la franja horaria para el estudio de matemáticas establecida en la UPS.
- Sea un curso con mayoritariamente alumnos de primera matrícula
- Una cantidad de alumnos similar, el de control posee 20 alumnos mientras que el de experimentación 27.
- Contenidos abordados iguales (esto se debe a los contenidos unificados por el ICFM)

11. ANÁLISIS DE RESULTADOS

11.1. RESUMEN EJECUTIVO

Descripción De Habilidades Espaciales

- Se demuestra la pertinencia de cada una de las preguntas en cuanto a su presencia en los test de evaluación de habilidades espaciales.
- Las preguntas poseen una distribución equilibrada de habilidades involucradas lo que permite que la evaluación no dependa de un número reducido de ellas.

- El test inicial y final aplicados contienen los mismos parámetros de medición lo que permite realizar una comparativa final.
- El nivel de dificultad no depende directamente del número de habilidades involucradas.
- Al grupo de habilidades C, E y H se lo considera de las habilidades relevantes para la Inteligencia Espacial.
- Al grupo de habilidades B, D, G, e I se lo considera de las habilidades importantes para la Inteligencia Espacial.
- Al grupo de habilidades A, F y J se lo considera de las habilidades no relevantes para un proceso de desarrollo de la Inteligencia Espacial.
- Para futuros procesos de intervención se debería prestar atención al tercer grupo para su inclusión o no dentro del estudio para priorizar a los dos primeros grupos.

Análisis del desempeño por habilidades

- Se denota que 93% de alumnos se trasladan a rangos superiores de puntuación de sus habilidades espaciales.
- De los anteriores el 15% ingresan a los tres rangos superiores de habilidades desarrolladas.
- Aunque un 7% se mantiene en un rango inferior, este rango es superior al presentado en el test inicial, es decir, pasa del rango 30-39 al rango de 50-59 puntos.
- La concentración mayoritaria de alumnos pasa de rangos centrales hacia rangos centrales y superiores de puntuación de habilidades.

Análisis del primer Grupo de Habilidades Relevantes: C,E y H

- El alumnado presenta un incremento muy importante en las tres habilidades consideradas como relevantes en la inteligencia espacial.
- En las tres habilidades la distribución se recorre un intervalo hacia la derecha.
- Existe incremento de la frecuencia de alumnos en los niveles superiores.

Análisis del segundo Grupo de Habilidades Importantes: B, D, G, e I

- El alumnado presenta un incremento muy importante en las cuatro habilidades consideradas como importantes en la inteligencia espacial.
- En las cuatro habilidades se incrementa considerablemente la frecuencia de alumnos en los niveles superiores.

Resultados por total de Preguntas Correctas

- El rango de calificaciones aumenta en el test final, el límite superior se incrementa en un punto y el límite inferior mejora con dos puntos.
- El número de alumnos pertenecientes al grupo de mejores puntuados se incrementa en el test final.
- El intervalo de calificaciones con mayor frecuencia en los dos test mantienen a quince alumnos, tanto el límite superior como el inferior mejoran en un punto.

Resultado individual por Preguntas

- Se denota mejor rendimiento de los alumnos en la mayoría de preguntas
- Son cuatro preguntas en las que se presenta descenso en el rendimiento.
- Se detecta los motivos para dos de las cuatro preguntas que existe disminución en el rendimiento.
- Las preguntas que presentan un pequeño incremento pertenecen al grupo de mayor frecuencia y los que presentan un alto incremento pertenecen al grupo de menor frecuencia de aciertos, lo consideramos como una situación positiva para la investigación.
- La disminución en las cuatro preguntas no afectaron al rendimiento general que es de superación del alumnado
- Las preguntas con mayor disminución de aciertos están justificadas en las, por lo tanto pueden no ser consideradas quedando once preguntas con mejor rendimiento de un total de 13 que representa el 85% de preguntas.

Comparativa Con El Grupo Monitor

- El grupo de control presenta un menor rendimiento en la evaluación final a pesar de poseer similares características que el de experimentación.
- Es importante buscar los motivos de tan bajo rendimiento del grupo de control, quizá sean externo al proceso de evaluación.

Nivel De Seguridad O Confianza De Los Alumnos En Sus Respuestas

- El nivel de confianza de los alumnos en sus respuestas se ve incrementado notablemente.
- Las preguntas 7 y 15 no argumentan su respuesta y se ven relacionadas con la dificultad de la misma, debido a que existen pocos aciertos en dichas preguntas.

Análisis prueba psicotécnica

- El rendimiento ante un test psicotécnico de habilidades espaciales estandarizado es mejor en el grupo experimental comparado con el grupo de control.
- El grupo experimental presenta un mayor porcentaje de aprobación del test sobre el 70% de puntaje del mismo.
- El grupo experimental tiene un pequeño porcentaje de no aprobación del test bajo el 50% de puntaje del mismo.

11.2. DESCRIPCIÓN DE HABILIDADES ESPACIALES

PREGUNTA	Ponderación de Habilidades por Pregunta										Número de habilidades involucradas	Nivel de dificultad
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J		
1	0	0	1	2	2	0	0	2	2	0	5	media
2	0	0	1	2	2	0	2	2	2	0	6	alta
3	0	2	1	1	2	0	1	0	1	0	6	baja
4	2	2	1	1	2	0	1	0	1	1	8	alta
5	0	1	2	0	1	0	1	2	2	0	6	media
6	1	1	2	0	1	0	2	2	2	0	7	media
7	1	2	0	0	2	1	2	1	0	0	6	alta
8	0	0	2	1	2	0	0	2	2	0	5	media
9	0	0	2	1	2	0	2	2	2	0	6	alta
10	1	0	2	2	2	0	1	2	2	0	7	Alta
11	0	2	2	2	0	0	2	0	1	0	5	Alta
12	0	1	2	2	2	0	2	1	0	2	7	media
13	0	2	2	2	1	0	1	1	0	0	6	baja
14	0	2	0	1	1	0	0	2	0	2	5	baja
15	0	2	2	0	2	1	0	1	0	2	6	media
Puntos por habilidad	5	17	22	17	24	2	17	20	17	7	148	

Tabla 3: Ponderación de Habilidades por Pregunta

Observaciones:

- El test inicial y final consta cada uno de 15 preguntas
- Existen diez habilidades evaluadas por el test
- En cada pregunta se involucra un mínimo de cinco habilidades diferentes

- En cada pregunta las habilidades están calificadas los puntos: 0="No Requerida", 1= "Requerida" y 2="Indispensable"
- El test consta de 148 puntos de habilidades
- Las habilidades más puntuadas son la C, E y H

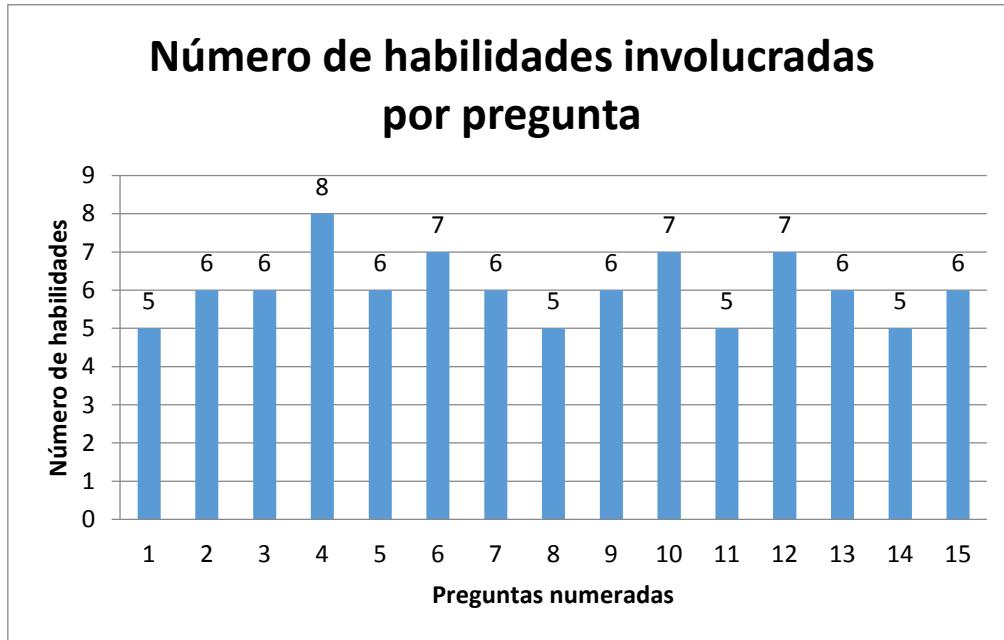


Ilustración 36: Número de habilidades involucradas por pregunta

Observaciones:

- Cada pregunta involucra un mínimo de cinco habilidades y un máximo de ocho
- Ninguna pregunta involucra el total de habilidades
- Ninguna pregunta está desvinculada de las habilidades evaluadas
- El grupo de preguntas {4,6,10,12} vinculan cada una entre 7 y 8 habilidades, al observar la tabla “Ponderación de Habilidades por Pregunta” este grupo de preguntas corresponden a un nivel de dificultad entre medio y alto.

- El grupo de preguntas {1,8,11,14} vinculan cada una cinco habilidades. Con la tabla “Ponderación de Habilidades por Pregunta” se asocia al grupo de preguntas con los tres tipos de dificultades baja, media y alta.

Conclusiones:

- Se demuestra la pertinencia de cada una de las preguntas en cuanto a su presencia en los test de evaluación de habilidades espaciales
- Las preguntas poseen una distribución equilibrada de habilidades involucradas lo que permite que la evaluación no dependa de un número reducido de ellas.
- El test inicial y final aplicados contienen los mismos parámetros de medición lo que permite realizar una comparativa final.
- El nivel de dificultad no depende directamente del número de habilidades involucradas.

Puntaje total en el test de cada Habilidad											
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	TOTAL DE PUNTOS	
5	17	22	17	24	2	17	20	17	7	148	

Tabla 4: Total De Puntos Existentes En La Evaluación Por Cada Habilidad

Observaciones:

- Existe un total de 148 puntos en habilidades
- Las habilidades tienen una presencia diferente en el test

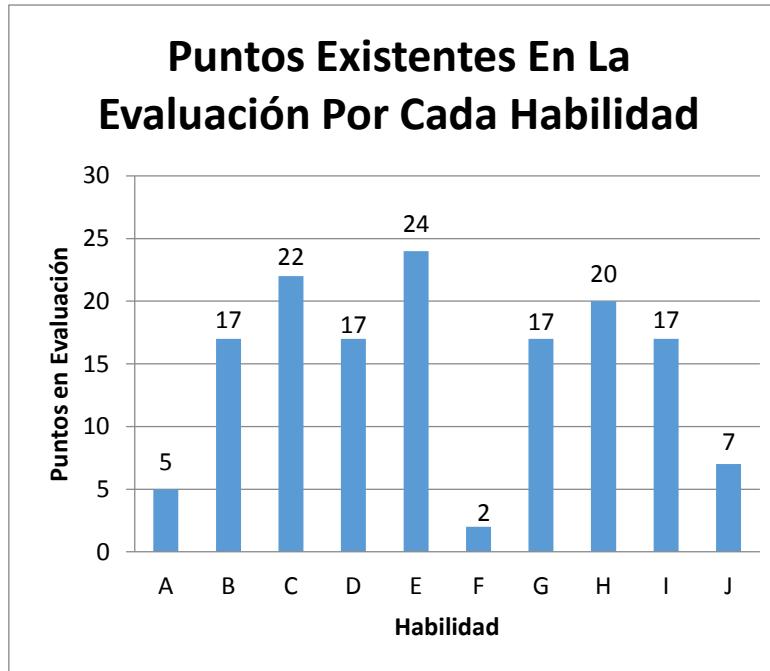


Ilustración 37: Total De Puntos Existentes En La Evaluación Por Cada Habilidad

Observaciones:

- Se distingue tres grupos de habilidades de acuerdo a su presencia en el test.
- El primer grupo está conformado por las habilidades C, E y H
- El segundo grupo está conformado por las habilidades B, D, G, e I
- El tercer grupo está conformado por las habilidades A, F y J

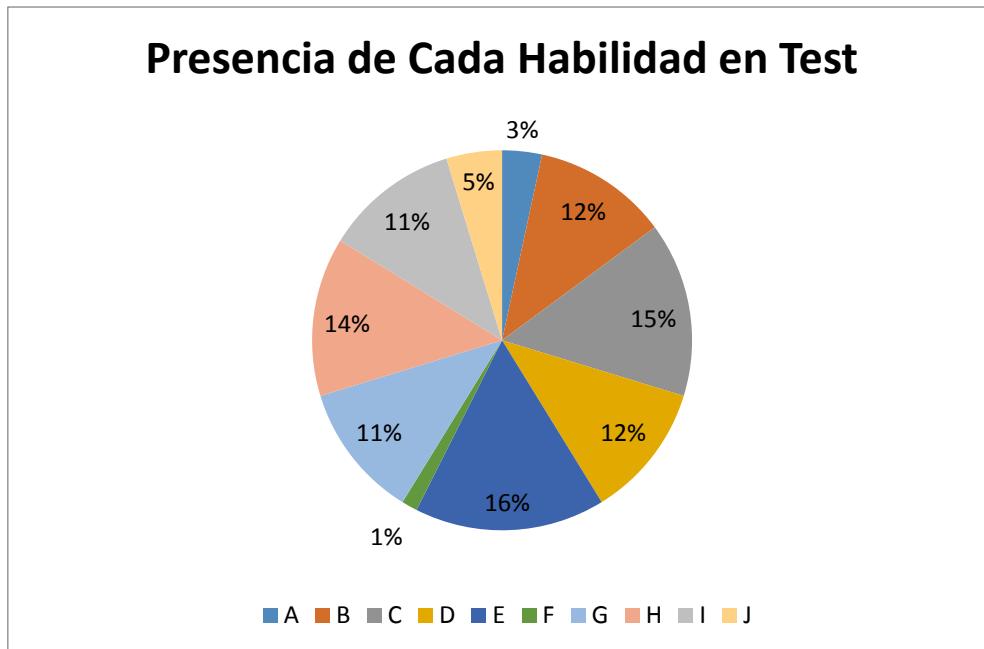


Ilustración 38: Distribución de puntos por Habilidad

Observaciones:

- Las habilidades A, F y J poseen la menor presencia de puntos en el test

Conclusiones:

- Al primer grupo se lo considera de las habilidades relevantes para la Inteligencia Espacial
- Al segundo grupo se lo considera de las habilidades importantes para la Inteligencia Espacial
- Al tercer grupo se lo considera de las habilidades no relevantes para un proceso de desarrollo de la Inteligencia Espacial
- Para futuros procesos de intervención se debería prestar atención al tercer grupo para su inclusión o no dentro del estudio para priorizar a los dos primeros grupos.

11.3. ANÁLISIS DEL DESEMPEÑO POR HABILIDADES

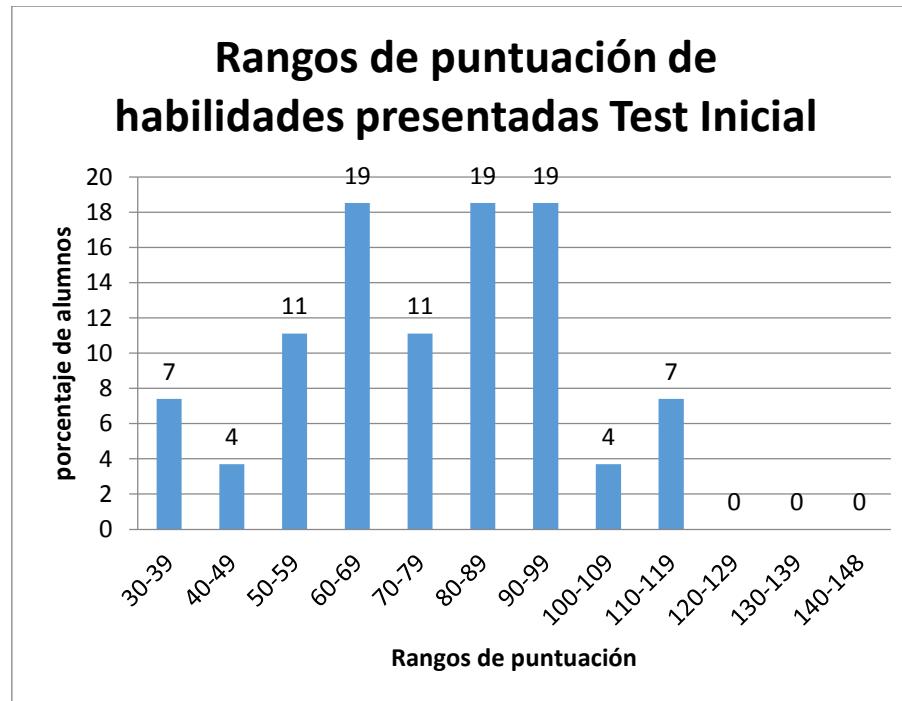


Ilustración 39: Rangos de puntuación de habilidades presentadas Test Inicial

Observaciones:

- El test puntuá las habilidades espaciales sobre 148 puntos
- El 68% de alumnos se concentran en rangos centrales de la puntuación de habilidades esto es entre 60 a 100 puntos
- Existe un 7% de alumnos con un el rango más bajo entre 30-39 puntos e igual porcentaje en el rango más alto de 110-119 puntos.
- El 100% de alumnos presentan alguna puntuación en habilidades espaciales.
- No hay presencia de alumnos que puntúen en los tres rangos superiores.

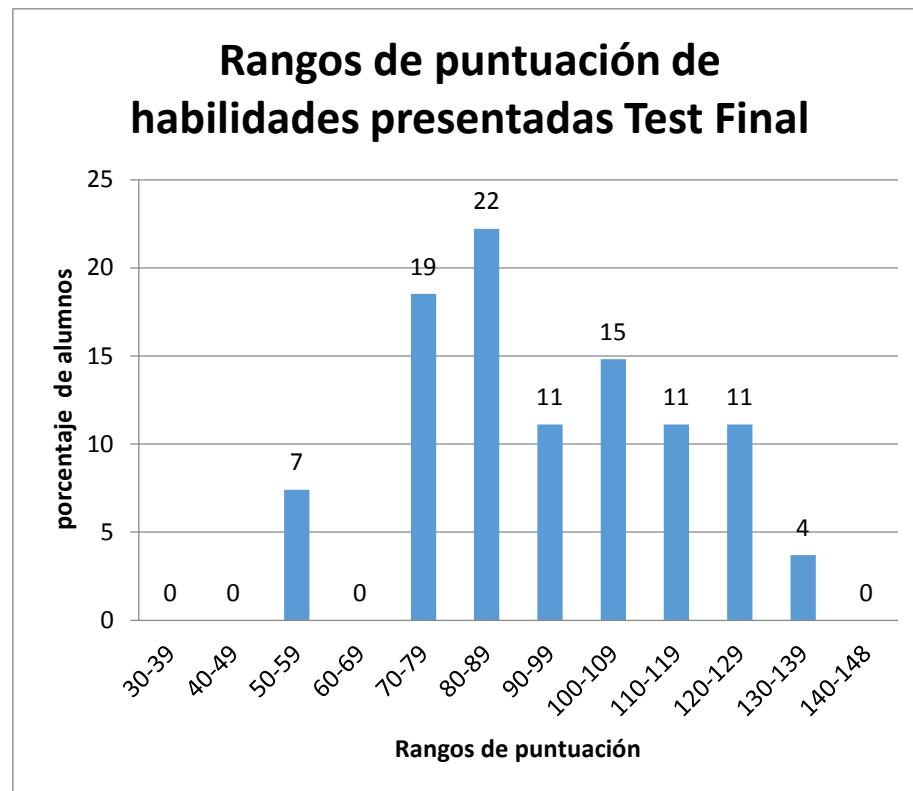


Ilustración 40: Rangos de puntuación de habilidades presentadas Test Final

Observaciones:

- El test puntuá las habilidades espaciales sobre 148 puntos
- El 89% de alumnos se concentran en rangos centrales y altos de la puntuación de habilidades esto es entre 70 a 130 puntos
- Existe un 7% de alumnos con un el rango más bajo entre 50-59 puntos y un 4% en el rango más alto de 130-139 puntos.
- El 100% de alumnos presentan alguna puntuación en habilidades espaciales.
- No hay presencia de alumnos que puntúen en el último rango superior.

Conclusiones:

- Se denota que 93% de alumnos se trasladan a rangos superiores de puntuación de sus habilidades espaciales
- De los anteriores el 15% ingresan a los tres rangos superiores de habilidades desarrolladas.
- Aunque un 7% se mantiene en un rango inferior, este rango es superior al presentado en el test inicial, es decir, pasa del rango 30-39 al rango de 50-59 puntos.
- La concentración mayoritaria de alumnos pasa de rangos centrales hacia rangos centrales y superiores de puntuación de habilidades.

11.4. Análisis del primer Grupo de Habilidades Relevantes: C,E y H

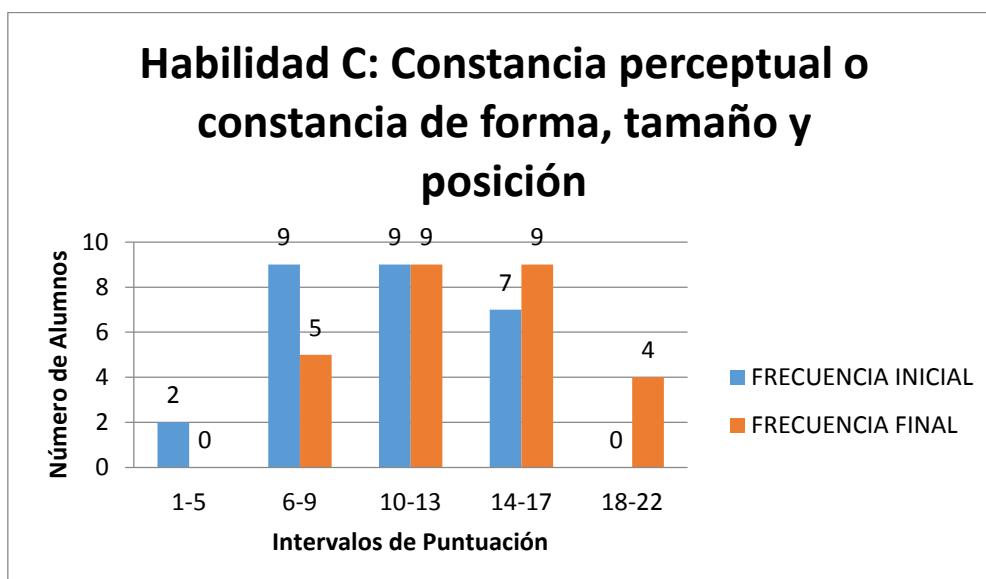


Ilustración 41: Habilidad C: Constancia perceptual o constancia de forma, tamaño y posición

PUNTOS EXISTENTES	Intervalos de Puntuación					Total de Alumnos que presentan la Habilidad
	1-5	6-9	10-13	14-17	18-22	
FRECUENCIA INICIAL	2	9	9	7	0	27
FRECUENCIA FINAL	0	5	9	9	4	27

Tabla 5: Propiedades de Habilidad C: Constancia perceptual o constancia de forma, tamaño y posición

Observaciones:

- El test asigna 22 puntos a la habilidad
- Todos los alumnos presentan puntuación en esta categoría
- Se divide en cinco intervalos los puntos disponibles
- En el test inicial y final la mayor frecuencia de alumnos se concentra en los tres intervalos intermedios.
- Los resultados finales avanzan un nivel hacia la derecha.
- Los niveles cuarto y quinto demuestran incremento en la cantidad de alumnos pertenecientes a ellos.

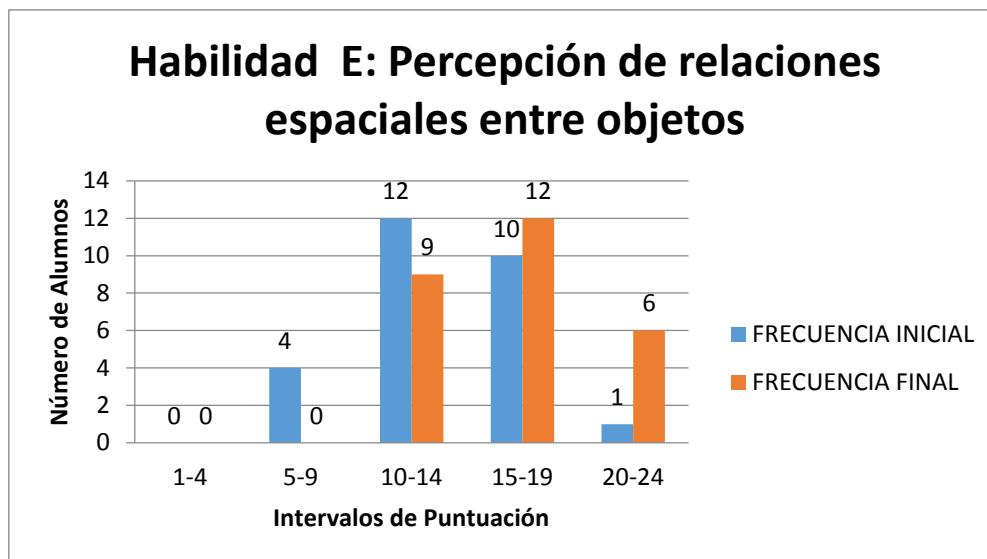


Ilustración 42: Habilidad E “Percepción de relaciones espaciales entre objetos”

PUNTOS EXISTENTES	Intervalos de Puntuación					Total de Alumnos que presentan la Habilidad	
	24	1-4	5-9	10-14	15-19		
FRECUENCIA INICIAL	0	4		12	10	1	27
FRECUENCIA FINAL	0	0		9	12	6	27

Tabla 6: Propiedades de Habilidad E “Percepción de relaciones espaciales entre objetos”

Observaciones:

- El test asigna 24 puntos a la habilidad
- Todos los alumnos presentan puntuación en esta categoría
- Se divide en cinco intervalos los puntos disponibles
- En el test inicial y final la mayor frecuencia de alumnos se concentra en los intervalos tercero y cuarto.
- El límite inferior de los resultados finales avanzan un nivel hacia la derecha y el superior incrementa su frecuencia.
- Los niveles cuarto y quinto demuestran incremento en la cantidad de alumnos pertenecientes a ellos.

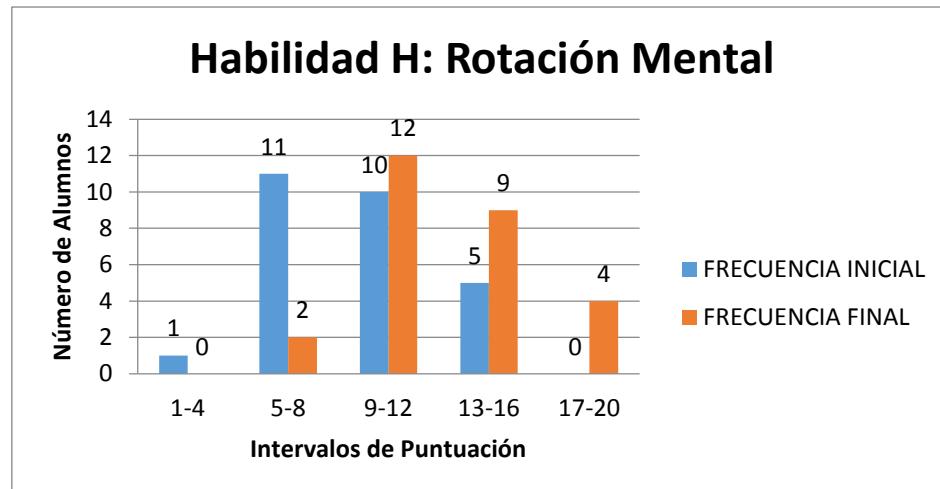


Ilustración 43: Habilidad H “Rotación Mental”

PUNTOS EXISTENTES	Intervalos de Puntuación					Total de Alumnos que presentan la Habilidad
	20	1-4	5-8	9-12	13-16	
FRECUENCIA INICIAL		1	11	10	5	0
FRECUENCIA FINAL		0	2	12	9	4

Tabla 7: Propiedades Habilidad H “Rotación Mental”

Observaciones:

- El test asigna 20 puntos a la habilidad
- Todos los alumnos presentan puntuación en esta categoría
- Se divide en cinco intervalos los puntos disponibles
- En el test inicial la mayor frecuencia de alumnos se concentra en los intervalos segundo y tercero, mientras que en el final se concentran en el tercero y cuarto.
- Los resultados finales avanzan un nivel hacia la derecha.

- Los niveles tercero, cuarto y quinto demuestran incremento en la cantidad de alumnos pertenecientes a ellos.
- Alumnos ingresan al intervalo superior en el test final

Conclusiones

- El alumnado presenta un incremento muy importante en las tres habilidades consideradas como relevantes en la inteligencia espacial²¹.
- En las tres habilidades la distribución se recorre un intervalo hacia la derecha.
- Existe incremento de la frecuencia de alumnos en los niveles superiores.

11.5. ANÁLISIS DEL SEGUNDO GRUPO DE HABILIDADES IMPORTANTES: B, D, G, E I

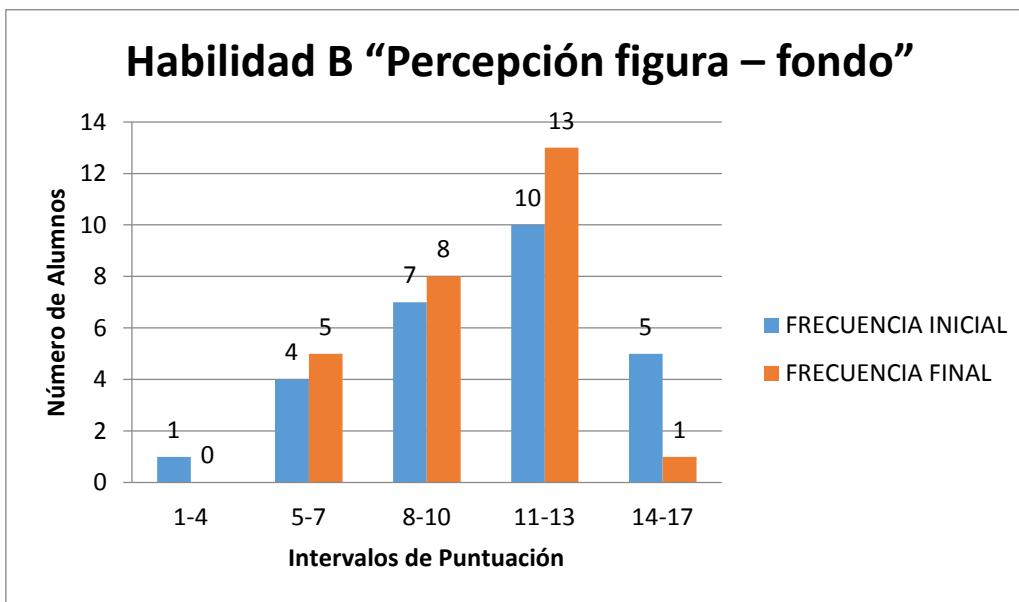


Ilustración 44: Habilidad B “Percepción figura – fondo”

²¹ La clasificación se detalla en las observaciones [de la Ilustración “Puntos Existentes En La Evaluación Por Cada Habilidad”](#)

PUNTOS EXISTENTES	Intervalos de Puntuación					Total de Alumnos que presentan la Habilidad
	1-4	5-7	8-10	11-13	14-17	
FRECUENCIA INICIAL	1	4	7	10	5	27
FRECUENCIA FINAL	0	5	8	13	1	27

Tabla 8: Propiedades de Habilidad B “Percepción figura – fondo”

Observaciones:

- El test asigna 17 puntos a la habilidad
- Todos los alumnos presentan puntuación en esta categoría
- Se divide en cinco intervalos los puntos disponibles
- En el test inicial y final la mayor frecuencia de alumnos se concentra en los tres intervalos intermedios.
- El límite inferior de los resultados finales avanzan un nivel hacia la derecha y el superior desciende su frecuencia.
- Los tres niveles intermedios incrementan en la cantidad de alumnos pertenecientes a ellos.

Habilidad D “Percepción de la posición en el espacio”

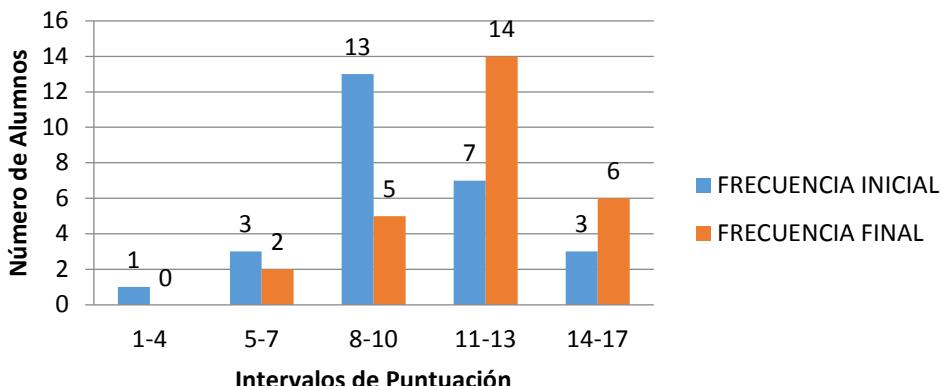


Ilustración 45: Habilidad D “Percepción de la posición en el espacio”

PUNTOS EXISTENTES	Intervalos de Puntuación					Total de Alumnos que presentan la Habilidad
	1-4	5-7	8-10	11-13	14-17	
17	1	3	13	7	3	27
FRECUENCIA INICIAL	1	3	13	7	3	27
FRECUENCIA FINAL	0	2	5	14	6	27

Tabla 9: Propiedades Habilidad D “Percepción de la posición en el espacio”

Observaciones:

- El test asigna 17 puntos a la habilidad
- Todos los alumnos presentan puntuación en esta categoría
- Se divide en cinco intervalos los puntos disponibles
- En el test inicial la mayor frecuencia de alumnos se concentra en los intervalos tercero y cuarto mientras que en final se encuentra en los niveles cuarto y quinto.

- El límite inferior y el superior de los resultados finales avanzan un nivel hacia la derecha.
- Los niveles cuarto y quinto incrementan en la cantidad de alumnos pertenecientes a ellos.

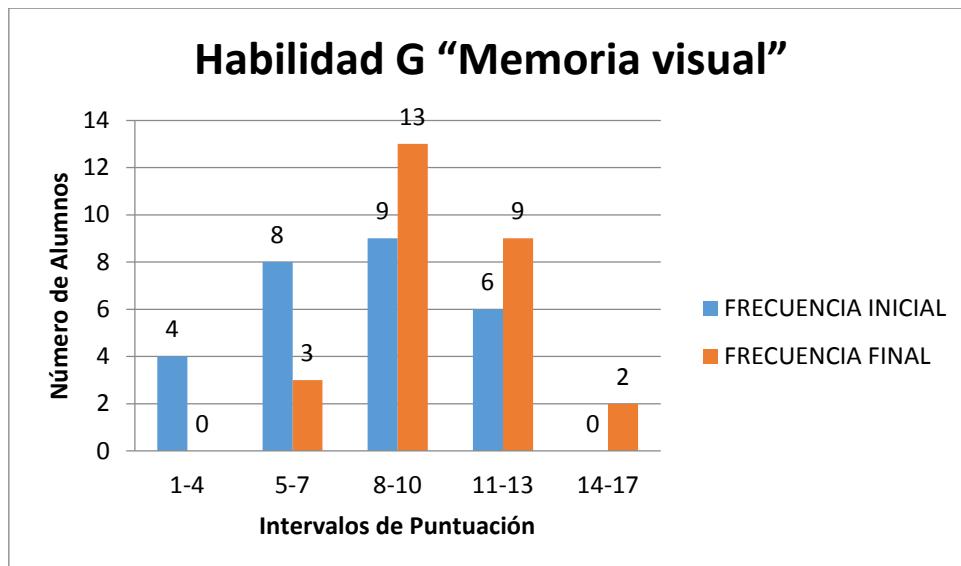


Ilustración 46: Habilidad G “Memoria visual”

PUNTOS EXISTENTES	Intervalos de Puntuación					Total de Alumnos que presentan la Habilidad
	1-4	5-7	8-10	11-13	14-17	
17	4	8	9	6	0	27
FRECUENCIA INICIAL						
FRECUENCIA FINAL	0	3	13	9	2	27

Tabla 10: Propiedades Habilidad G “Memoria visual”

Observaciones:

- El test asigna 17 puntos a la habilidad
- Todos los alumnos presentan puntuación en esta categoría
- Se divide en cinco intervalos los puntos disponibles

- En el test inicial la mayor frecuencia de alumnos se concentra en los intervalos intermedios segundo, tercero y cuarto mientras que en final se encuentra en los niveles tercero y cuarto.
- El límite inferior y el superior de los resultados finales avanzan un nivel hacia la derecha.
- Los niveles tres y cuatro incrementan en la cantidad de alumnos pertenecientes a ellos.

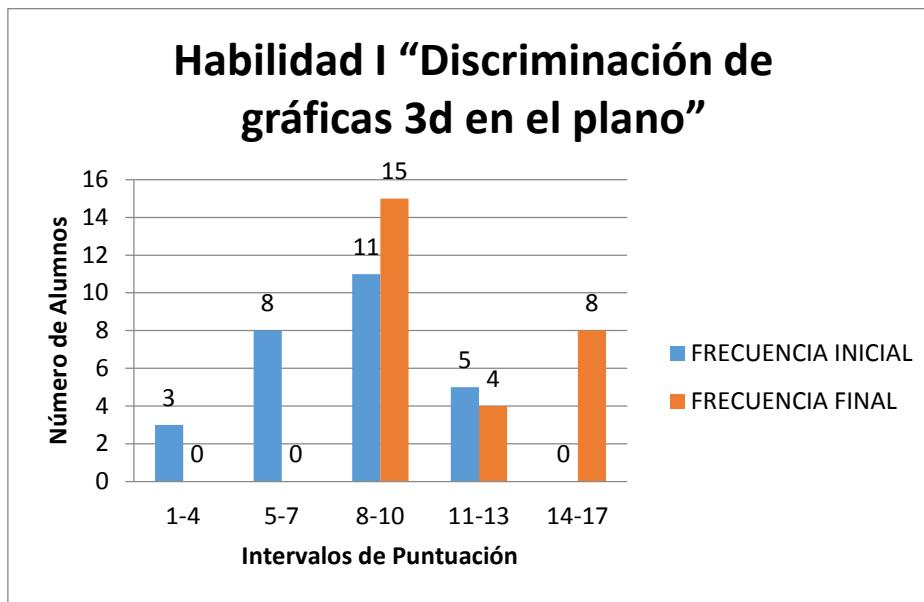


Ilustración 47: Habilidad I “Discriminación de gráficas 3d en el plano”

PUNTOS EXISTENTES	Intervalos de Puntuación						Total de Alumnos que presentan la Habilidad
	17	1-4	5-7	8-10	11-13	14-17	
FRECUENCIA INICIAL	3	8	11	5	0		27
FRECUENCIA FINAL	0	0	15	4	8		27

Tabla 11: Propiedades de Habilidad I “Discriminación de gráficas 3d en el plano”

Observaciones:

- El test asigna 17 puntos a la habilidad
- Todos los alumnos presentan puntuación en esta categoría
- Se divide en cinco intervalos los puntos disponibles
- En el test inicial la mayor frecuencia de alumnos se concentra en los intervalos segundo y tercero mientras que en final se encuentra en los niveles tercero y quinto.
- El límite inferior de los resultados finales avanza dos niveles hacia la derecha mientras que el límite superior uno hacia la derecha.
- Los niveles tres y cinco incrementan en la cantidad de alumnos pertenecientes a ellos.

Conclusiones

- El alumnado presenta un incremento muy importante en las cuatro habilidades consideradas como importantes en la inteligencia espacial²².
- En las cuatro habilidades se incrementa considerablemente la frecuencia de alumnos en los niveles superiores.

11.6. Resultados por total de Preguntas Correctas

²² La clasificación se detalla en las observaciones [de la Ilustración “Puntos Existentes En La Evaluación Por Cada Habilidad”](#)

Test Inicial Por total de Preguntas Correctas

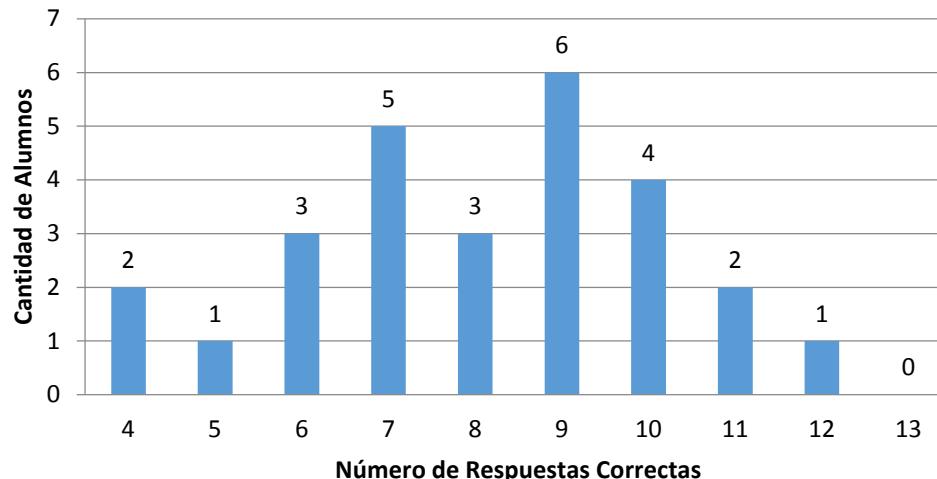


Ilustración 48: Calificación del Test Inicial por Preguntas Correctas

Observaciones:

- El rango general de calificación del grupo por pregunta correcta está entre 4 a 12 sobre un total de 15 preguntas.
- La calificación con mayor frecuencia es de 9/15 con seis alumnos, le sigue el de 7/15 con cinco alumnos y como tercer lugar el de 10/15 con cuatro alumnos. Corresponden un total de 15 alumnos que pertenecen a este grupo.
- Las calificaciones más altas son de 10/15 con 4 alumnos, de 11/15 con 2 alumnos y de 12/15 con un alumno. Dando un total de siete alumnos que pertenecen a este grupo.

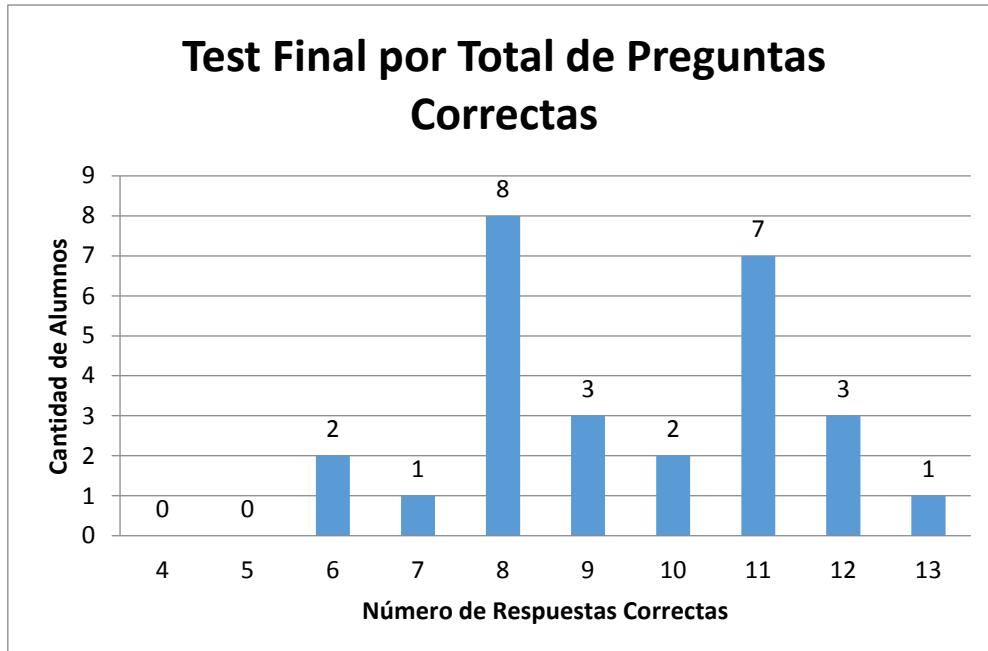


Ilustración 49: Calificación del Test Final por Preguntas Correctas

Observaciones:

- El rango general de calificación del grupo por pregunta correcta está entre 6 a 13 sobre un total de 15 preguntas.
- La calificación con mayor frecuencia es de 8/15 con ocho alumnos y le sigue el de 11/15 con siete alumnos. Corresponde a un total de 15 alumnos que pertenecen a este grupo.
- Las calificaciones más altas son de 11/15 con 7 alumnos, de 12/15 con 3 alumnos y de 13/15 con un alumno. Dando un total de once alumnos que pertenecen a este grupo.

Conclusiones:

- El rango de calificaciones aumenta en el test final, el límite superior se incrementa en un punto y el límite inferior mejora con dos puntos.

- El número de alumnos pertenecientes al grupo de mejores puntuados se incrementa en el test final.
- El intervalo de calificaciones con mayor frecuencia en los dos test mantienen a quince alumnos, tanto el límite superior como el inferior mejoran en un punto.

11.7. Resultado individual por Preguntas

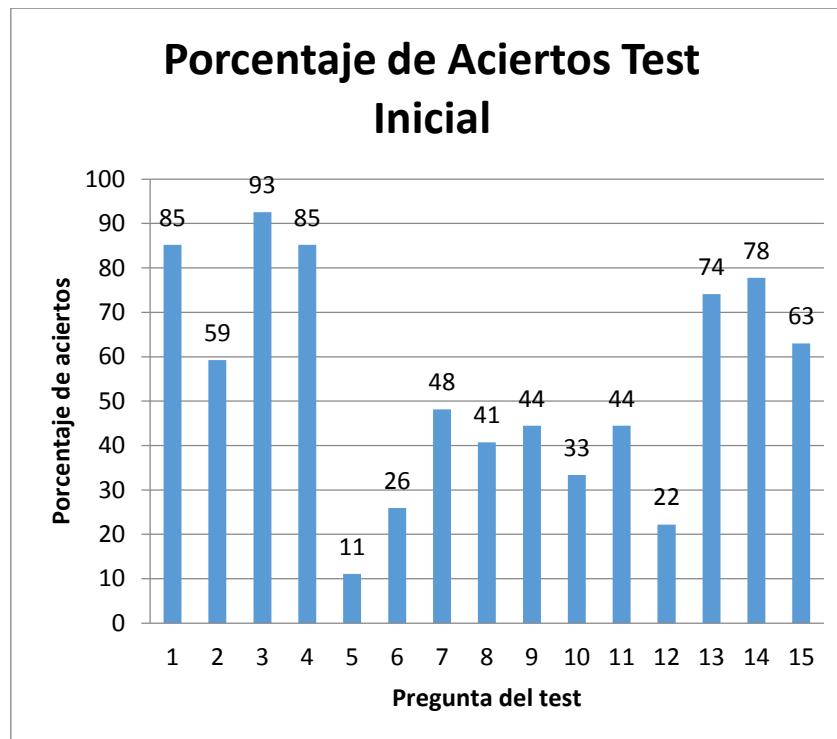


Ilustración 50: TEST INICIAL - Porcentaje de alumnos que seleccionan la opción correcta por pregunta

Observaciones:

- Se evidencia dos grupos separados de preguntas el primero con 7 preguntas sobre el 50% de aciertos quedando las 8 restantes con bajo nivel de aprobación.
- Existe apenas siete preguntas que aprueban la mayoría

- Las preguntas cinco, seis y doce poseen el menor rendimiento, con la tabla “Ponderación de Habilidades por Pregunta” son de complejidad media y poseen 8, 11 y 12 puntos de habilidades respectivamente
- Ninguna pregunta llega al 100% de aprobación, la pregunta 3 llega máximo al 93% de aprobación.

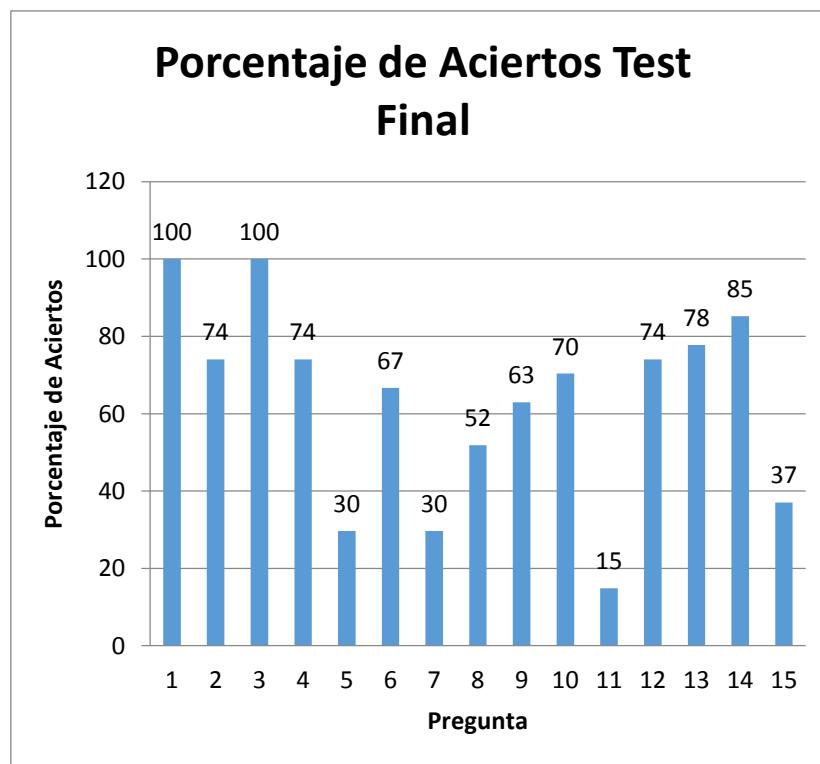


Ilustración 51: TEST FINAL - Porcentaje de alumnos que seleccionan la opción correcta por pregunta

Observaciones:

- Se evidencia dos grupos separados de preguntas el primero con 11 preguntas sobre el 50% de aciertos quedando las 4 restantes con bajo nivel de aprobación.
- Existe 11 preguntas que aprueban la mayoría

- La pregunta once poseen el menor rendimiento, con la tabla "Ponderación de Habilidades por Pregunta" es de complejidad alta y poseen 9 puntos de habilidades
- Dos pregunta llegan al 100% de aprobación

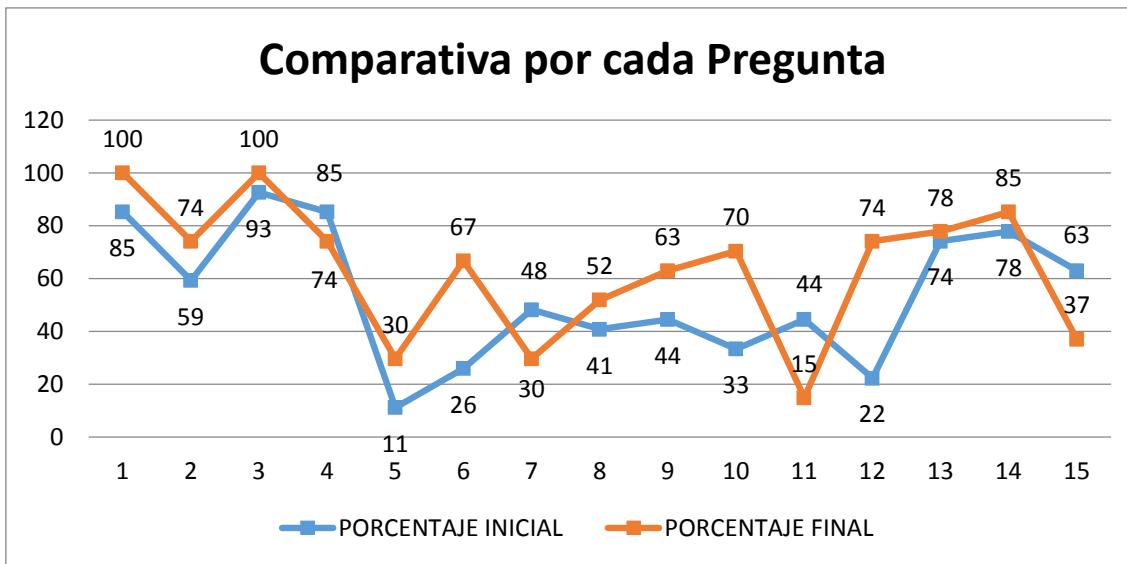


Ilustración 52: Función Comparativa por cada Pregunta

Observaciones

- En once preguntas se manifiesta un incremento del rendimiento
- En cuatro preguntas se nota un descenso en el rendimiento
- En las preguntas 6,10 y 12 presenta un mayor incremento.
- Por la ilustración "Porcentaje de Aciertos Test Inicial" la pregunta 6 y 12 pertenecían al grupo de menor rendimiento

Conclusiones:

- Se denota mejor rendimiento de los alumnos en la mayoría de preguntas
- Son casos puntuales en los que se presenta descenso y deberán ser analizadas las causas.

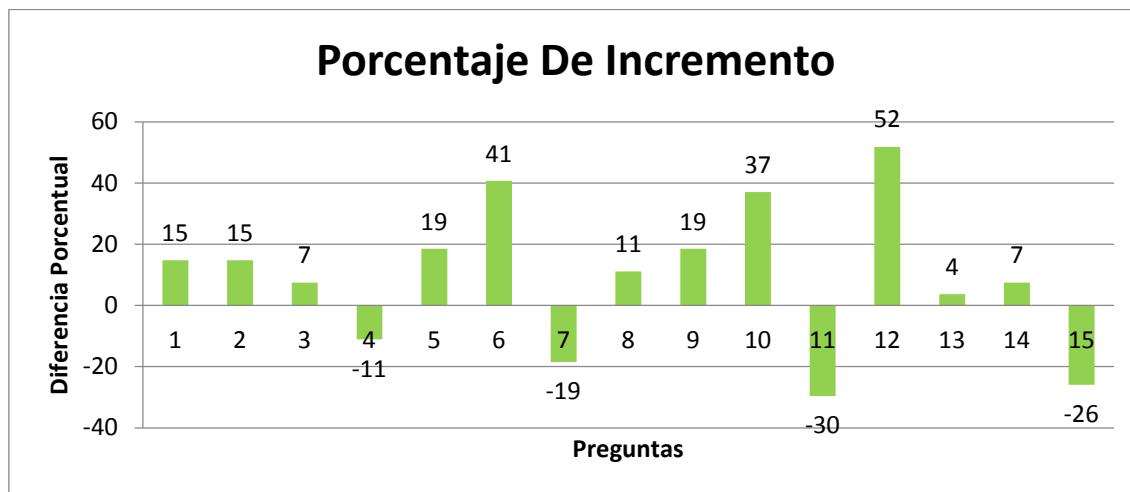


Ilustración 53: Porcentaje de incremento por pregunta

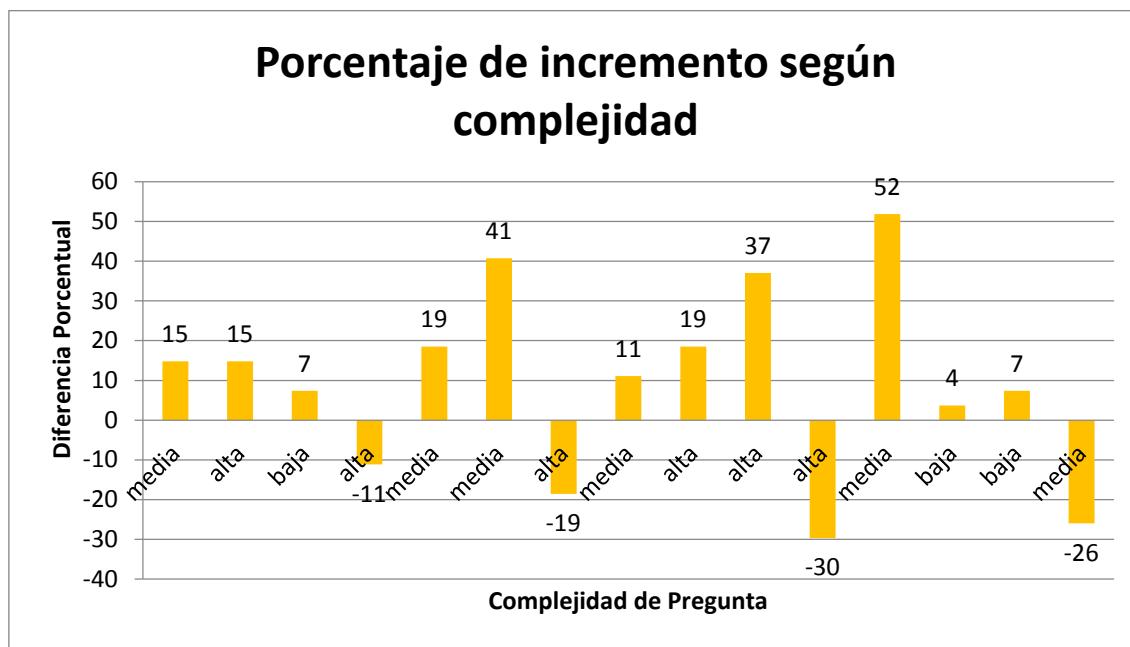


Ilustración 54: Porcentaje de incremento según complejidad

Observaciones:

- 11 de las 15 preguntas presenta un incremento de aciertos
- Las preguntas 6 y 12 presentan un mayor incremento, estas pertenecían al grupo de menor rendimiento en el test Inicial, dirigirse a "Porcentaje de Aciertos Test Inicial"
- Las preguntas 3,13 y 14 que presentan un bajo incremento presentan un alto nivel de rendimiento en Test Inicial, dirigirse a "Porcentaje de Aciertos Test Inicial"
- Las preguntas 4,7,11,15 presentan un descenso en la capacidad de respuesta de los alumnos
- La 4, 7 y 11 se consideran de complejidad alta
- La pregunta 15 existe una interpretación errónea en el reactivos que puede ser el causante para la disminución del rendimiento.
- Para la pregunta once se incluye una relación de posición diagonal, es decir, se ha trabajado solo horizontales o verticales pero no diagonales, podría ser la razón para la disminución del rendimiento.

Conclusiones

- Se detecta los motivos para dos de las cuatro preguntas que existe disminución en el rendimiento.
- Las que presentan un pequeño incremento pertenecen al grupo de mayor frecuencia y los que presentan un alto incremento pertenecen al grupo de

menor frecuencia de aciertos, lo consideramos como una situación positiva para la investigación.

- La disminución en estas cuatro preguntas no afectaron al rendimiento general que es de superación del alumnado, dirigirse a “Test Final por Total de Preguntas Correctas”

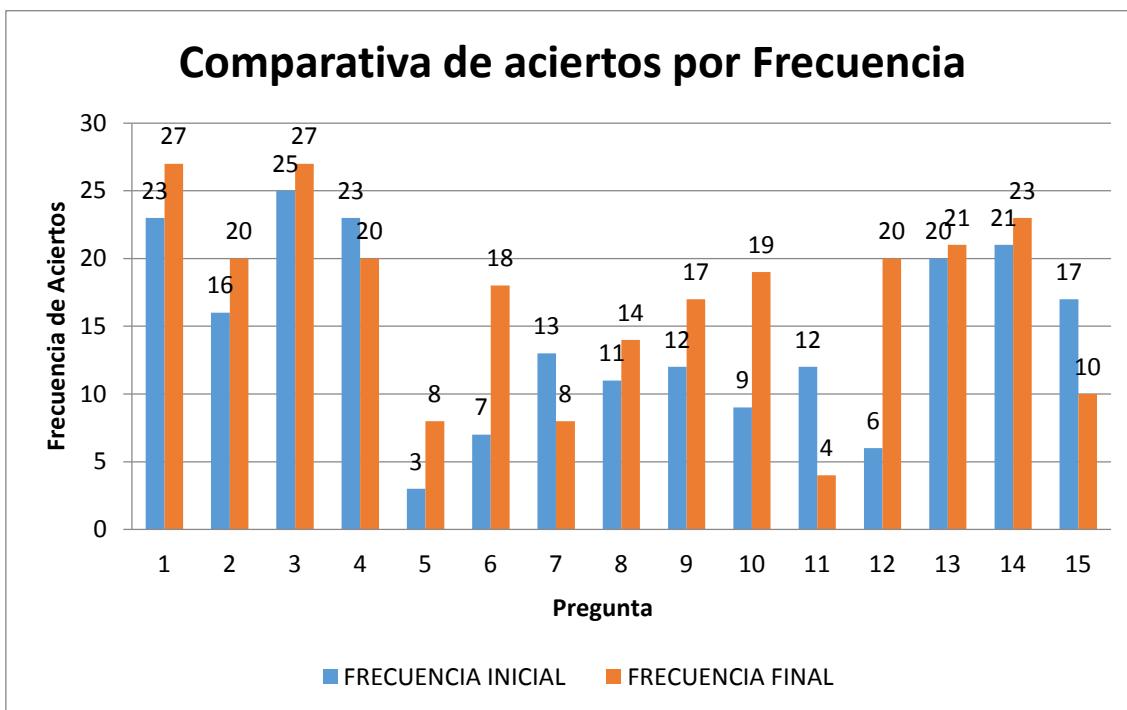


Ilustración 55: Comparativa de aciertos por Frecuencia

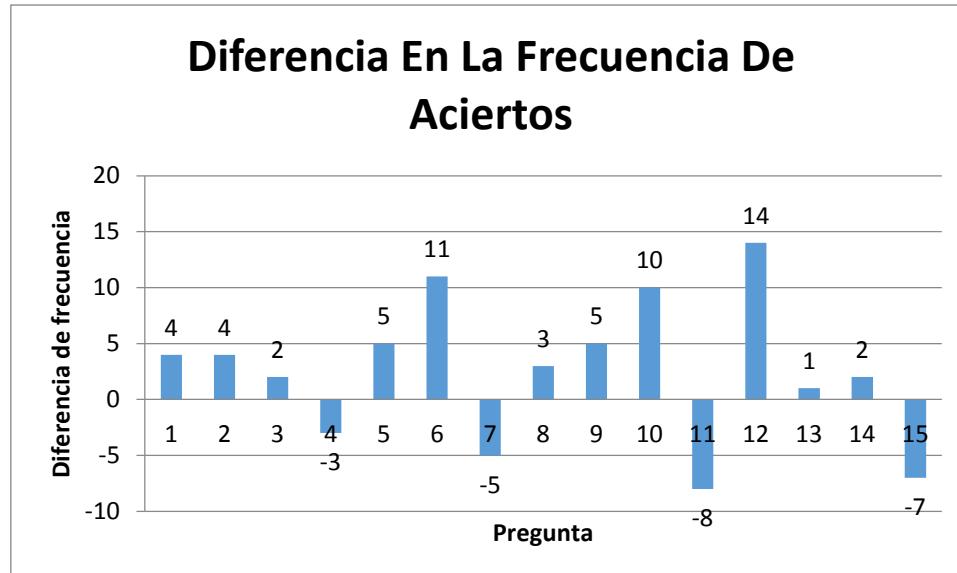


Ilustración 56:Diferencia En La Frecuencia De Aciertos

Observaciones:

- En las preguntas 4 y 7 que disminuye el rendimiento son apenas tres y cinco personas del total de 27 que presentan este problema, que corresponde al 11% y 19% respectivamente, dirigirse a “Porcentaje De Incremento”
- Las preguntas 11 y 15 que presentan una mayor frecuencia de descenso corresponde a 8 y 7 personas con una equivalencia porcentual de 30% y 26% respectivamente, dirigirse a “Porcentaje De Incremento”

Conclusiones

- Las preguntas con mayor disminución de aciertos están justificadas en las Observaciones de “Porcentaje de incremento según complejidad” Por lo tanto pueden no ser consideradas quedando once preguntas con mejor rendimiento de un total de 13 que representa el 85% de preguntas.

11.8. COMPARATIVA CON EL GRUPO MONITOR

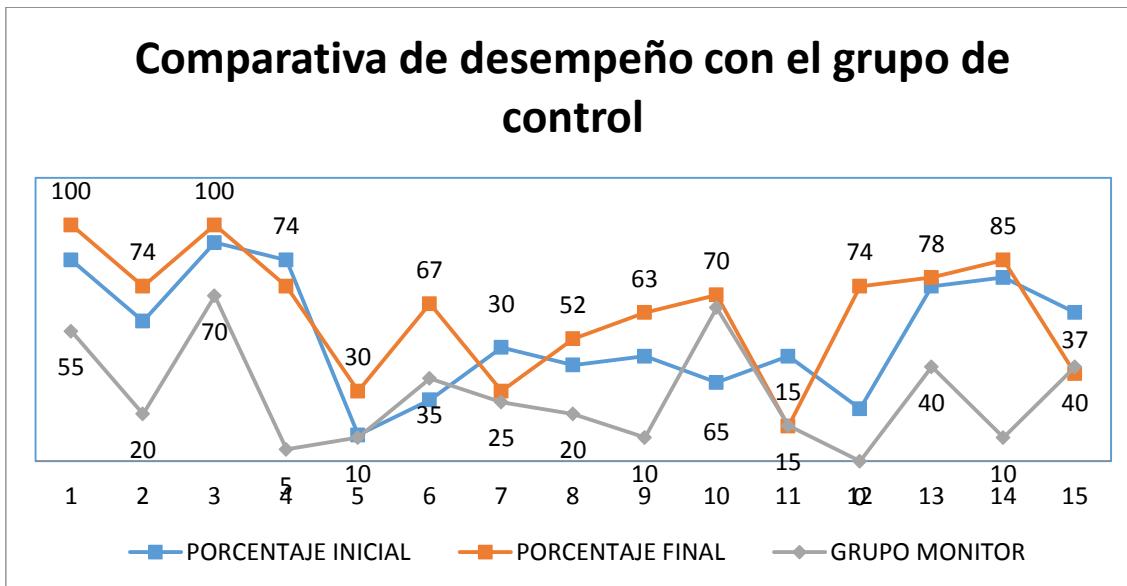


Ilustración 57: Comparativa de desempeño con el grupo de control

Observaciones:

- El objetivo es verificar la complejidad del test final
- El grupo de control se ubica por debajo incluso del test inicial del grupo de experimentación
- En ninguna pregunta mejora el nivel de rendimiento

Conclusiones:

- El grupo de control presenta un menor rendimiento en la evaluación final a pesar de poseer similares características que el de experimentación, dirigirse a “Selección del Grupo de Control”
- Es importante buscar los motivos de tan bajo rendimiento del grupo de control, quizá sean externo al proceso de evaluación.

11.9. NIVEL DE SEGURIDAD O CONFIANZA DE LOS ALUMNOS EN SUS RESPUESTAS

El análisis corresponde a la seguridad que posee el alumno en sus respuestas. Se analizan solamente de aquellos que marcaron correctamente y las posibilidades son: que están muy seguros de su respuesta, casi seguro porque existe alguna duda o el alumno no argumenta. Esta información es posible porque en la aplicación del test se solicitó que establecieran su nivel de confianza en cada pregunta.

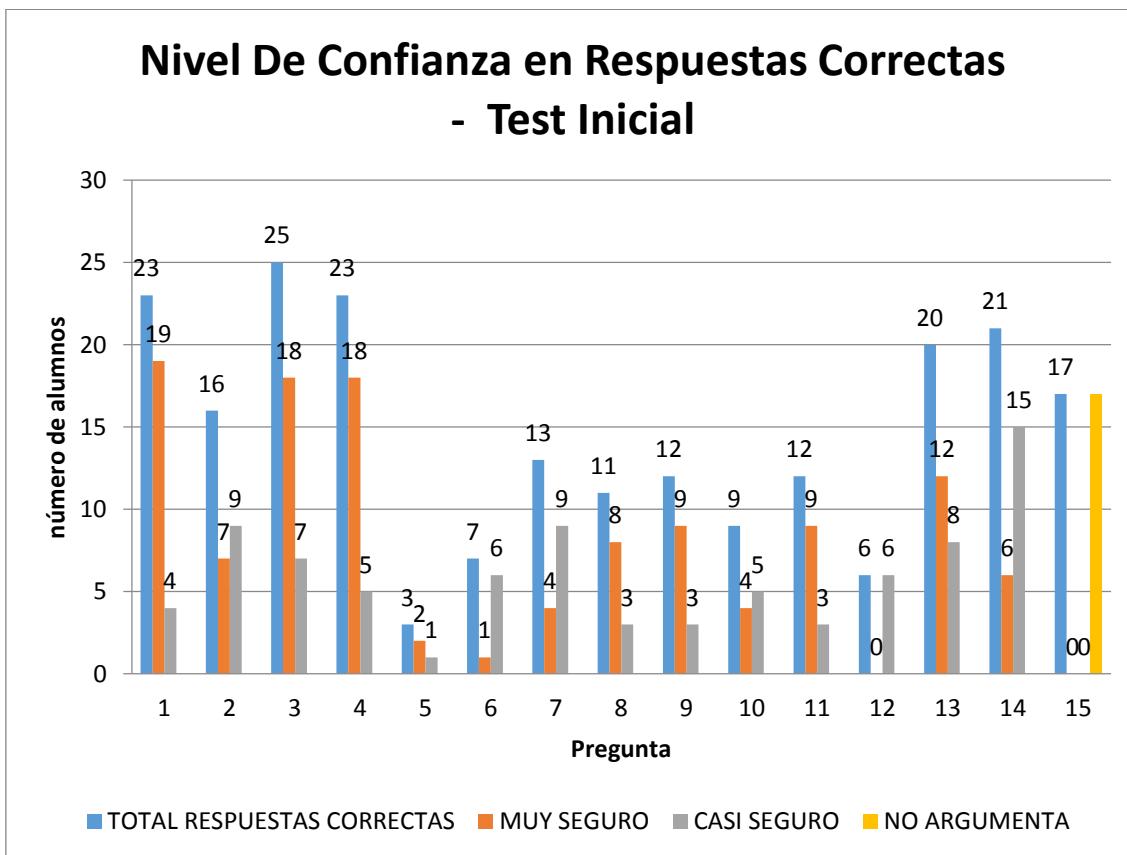


Ilustración 58: Nivel De Confianza en Respuestas Correctas - Test Inicial

Observaciones:

- En seis preguntas de las 15 los alumnos están mayoritariamente “casi Seguros” de sus respuestas
- En la pregunta 15 no argumentan la respuesta.
- En ocho preguntas de las 15 los alumnos están mayoritariamente “muy Seguros” de sus respuestas

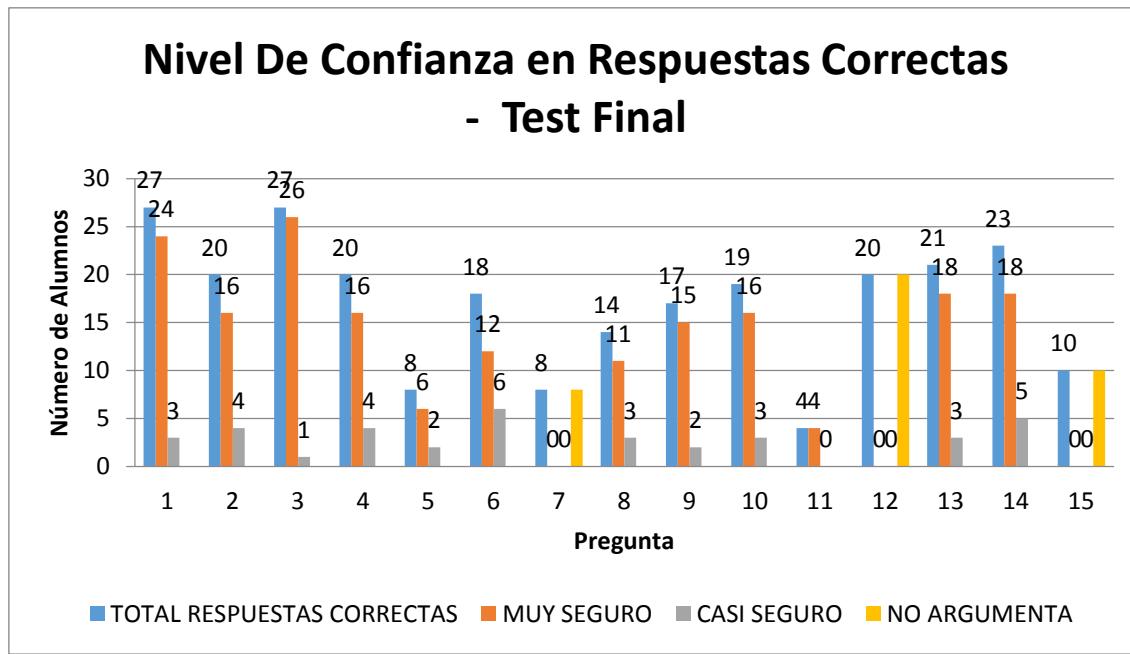


Ilustración 59: Nivel De Confianza en Respuestas Correctas - Test Final

Observaciones:

- En ninguna pregunta de las 15 los alumnos están mayoritariamente “casi Seguros” de sus respuestas
- En doce preguntas de las 15 los alumnos están mayoritariamente “muy Seguros” de sus respuestas

- En la pregunta 7,12 y 15 no argumentan la respuesta.

Conclusiones:

- El nivel de confianza de los alumnos en sus respuestas se ve incrementado notablemente.
- Las preguntas 7 y 15 no argumentan su respuesta y se ven relacionadas con la dificultad de la misma, debido a que existen pocos aciertos en dichas preguntas.

11.10. ANÁLISIS PRUEBA PSICOTÉCNICA

El test psicotécnico consta de 30 preguntas aplicadas al final del periodo de intervención tanto al grupo experimental como al de control para comparar el rendimiento ante el mismo.

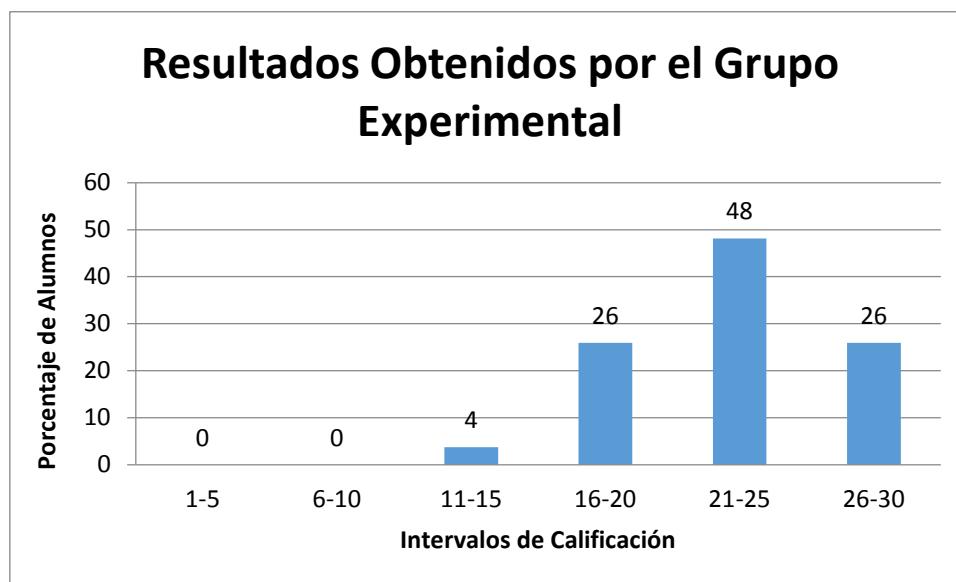


Ilustración 60: Resultados Obtenidos por el Grupo Experimental

Observaciones:

- El 74% de alumnado aprueba el test con un rendimiento igual o mayor al 70% del mismo, es decir, el equivalente a una nota igual o superior a 21
- Un 4% de alumnos están bajo la mitad del rendimiento de la prueba, es decir bajo 15 puntos que corresponde al 50% del total.
- El mayor porcentaje de alumnos se ubica en un rango de 21-25 puntos
- El 26% de alumnos están en una situación intermedia con un puntaje de 16-20 puntos que corresponden al 53% hasta 69% de puntaje total de la prueba

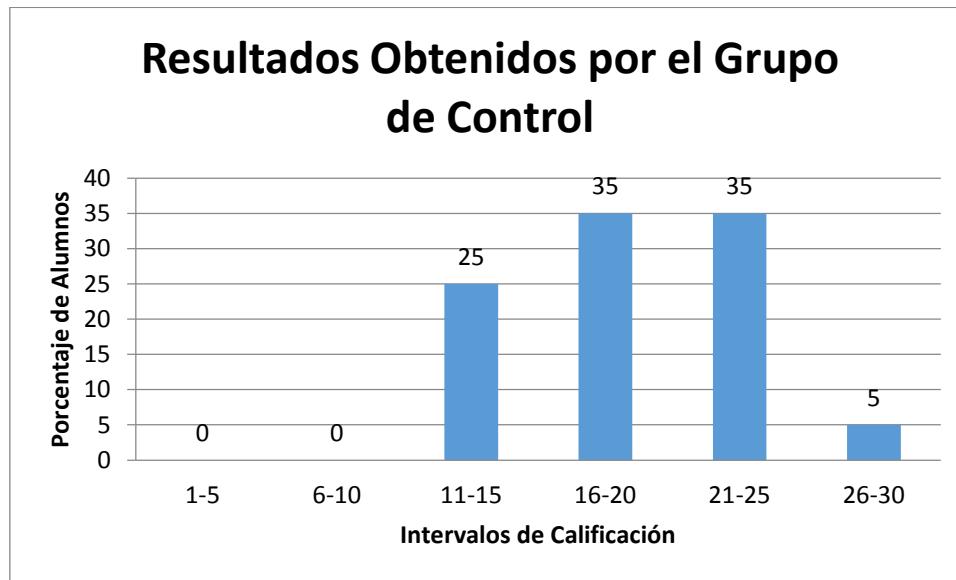


Ilustración 61: Resultados Obtenidos por el Grupo de Control

Observaciones:

- El 40% de alumnado aprueba el test con un rendimiento igual o mayor al 70% del mismo, es decir, el equivalente a una nota igual o superior a 21
- Un 25% de alumnos están bajo la mitad del rendimiento de la prueba, es decir bajo 15 puntos que corresponde al 50% del total.

- El mayor porcentaje de alumnos se ubica en los rangos de 16-20 y de 21-25 puntos con un 35% de alumnado en cada uno
- Un 35% de alumnos están en una situación intermedia con un puntaje de 16-20 puntos que corresponden al 53% hasta 69% de puntaje total de la prueba

Conclusiones:

- El rendimiento ante un test psicotécnico de habilidades espaciales estandarizado es mejor en el grupo experimental comparado con el grupo de control.
- El grupo experimental presenta un mayor porcentaje de aprobación del test sobre el 70% de puntaje del mismo.
- El grupo experimental tiene un pequeño porcentaje de no aprobación del test bajo el 50% de puntaje del mismo.
-



Conclusiones



Como introducción a este capítulo se recordará el objetivo general y los objetivos específicos planteados al inicio del proyecto para posteriormente realizar un breve análisis de cada uno de ellos.

El objetivo General consiste en “Incrementar el nivel de la inteligencia espacial para la transición de la visión bidimensional a la abstracción tridimensional de elementos geométricos presentes en los problemas matemáticos en los alumnos que cursan la materia de álgebra lineal, mediante la implementación de un laboratorio experimental con la incorporación de la tecnología de realidad aumentada”.

Los objetivos específicos son:

1. Analizar metodológicamente la materia de álgebra lineal en los contenidos de vectores, rectas y planos en 3D
2. Estructurar guías de laboratorio a ser utilizadas por el alumnado como herramienta de interacción con el sistema de realidad aumentada.
3. Desarrollar el entorno de interacción tecnológica, entre las guías y el software de Realidad Aumentada para la transición de los trazados bidimensional tradicionales a la abstracción tridimensional.
4. Ejecutar un proceso de intervención con los alumnos que cursan la materia de Álgebra Lineal aplicando las sesiones de laboratorio.
5. Realizar un proceso de diagnóstico comparativo sobre destrezas de la inteligencia espacial que están asociadas a la abstracción tridimensional.

1. CONCLUSIONES SOBRE EL ANÁLISIS METODOLÓGICO DE LA MATERIA

Se recopila el material que se ha implementado en la materia de Álgebra Lineal en el Instituto de Ciencias Físicas y Matemáticas (ICFM) de la Universidad Politécnica Salesiana en el período #42 que corresponde a febrero-julio del 2013. El mismo está constituido de guías de estudio, evaluaciones de las unidades y planificación microcurricular. Se concluye que es de fácil acceso y que se dispone de un muy organizado material que permitió iniciar fácilmente la etapa de definición de guías de estudio.

Se dispone de una organizada y detallada tabla de “Saber Hacer Y Conocer”, que se encuentra en la planificación elaborada por el ICFM, sobre la cual se estructuran las guías de estudio. Se concluye que el material didáctico sigue una línea clara y bien definida que cubre perfectamente los contenidos que son abordados en un curso de Álgebra Lineal en los capítulos correspondientes a vectores, rectas y planos en tres dimensiones.

La tabla de saberes abordada se la considera amplia y generalizada que brinda escalabilidad al proyecto, es decir, puede repetirse la experiencia en otros contextos de estudio universitario permitiendo retroalimentarse en cada oportunidad validando la propuesta. Esta aplicación en otros escenarios convierte en una posibilidad latente de que el material elaborado se convierta en el futuro en un producto validado para su distribución.

Al analizar los contenidos del curso y el sustento teórico se observa que los temas en sí permiten el planteamiento de diferentes ejercicios que permitan entrenar la inteligencia espacial, por lo que se concluye que la materia se presta para la implementación de procesos de intervención orientados a las habilidades espaciales de los alumnos.

Se analizan las evaluaciones recopiladas y se observa que se orientan al desarrollo algorítmico de ejercicios. El trabajo realizado demuestra que se pueden incluir pequeños proyectos orientados a las inteligencias diversas de los alumnos como un medio de comunicación, para que sean desarrollados en poco tiempo y sean incorporados como un instrumento de evaluación de comprensión de enunciados. Se requiere que el docente esté capacitado y dispuesto para retroalimentar a los alumnos sobre los conceptos puntuales dentro de las diferentes formas de expresión.

El proceso de “Estudio del módulo de Álgebra Lineal” se ha sujetado al modelo planteado en el “Marco Lógico” y en el “Esquema Lógico Básico” presentado en el anteproyecto de la investigación por lo que se concluye el cumplimiento del 100% de las acciones correspondientes a esta etapa.

2. CONCLUSIONES SOBRE LA DEFINICIÓN DE GUÍAS DE ESTUDIO.

Los ejercicios incorporados para que sean desarrollados con el recurso de Realidad Aumentada, abordan situaciones comunes del entorno real del alumnado, que implica el uso de matemáticas, lo cual motiva al alumno durante el proceso de aprendizaje y

permite dar el sentido de aplicabilidad de las matemáticas que tanto es buscado por ellos.

Se plantean en cada sección de la guía “Proyectos a Desarrollar” que respetan la teoría de inteligencias múltiples que es el sustento del trabajo actual. Al brindar en esta sección una gama de pequeños proyectos que apoyen a la construcción de los conceptos pero que están orientados a diferentes habilidades, se consigue que el alumnado se sienta identificado con los mismos y sea la comunicación de resultados más efectiva.

Se organiza la tabla de saberes hacer y conocer que se dispone en grupos más pequeños denominados secciones permitiendo estructurar la guía de estudio y consecuentemente el taller con actividades en mayor detalle y orientar a temas específicos. Con esta estructura dividida se profundiza cada tema con ejemplos prácticos y de simulación que permitan concentración del alumno en el entrenamiento de habilidades espaciales sin distracción en la acumulación de conceptos.

Se incorporan problemas que permiten una introducción a materias de niveles superiores como por ejemplo cálculo vectorial. Con el nivel de conocimiento que poseen los alumnos se les guía a la ejecución de tareas a su alcance que corresponden a ejercicios introductorios de conceptos que serán abordados posteriormente, esto permite al alumno romper obstáculos mentales sobre la dificultad de las matemáticas así como la importancia del estudio de conceptos actuales para su posterior aplicación, esto último se refiere a generar conciencia del encadenamiento de conceptos.

El proceso de “Desarrollo de las guías de Laboratorio” se ha sujetado al modelo planteado en el “Marco Lógico” y en el “Esquema Lógico Básico” presentado en el anteproyecto de la investigación por lo que se concluye el cumplimiento del 100% de las acciones correspondientes a esta etapa.

3. CONCLUSIONES SOBRE EL DESARROLLO DEL ENTORNO DE INTERACCIÓN TECNOLÓGICA.

La manipulación de las Tablets por parte de los alumnos permiten calificar a las actividades realizadas en el nivel de meso espacio, mientras que los ejercicios implementados con la tecnología de Realidad Aumentada generan experiencias a nivel de macro espacio.

Los impactos visuales de determinadas situaciones en las cuales los alumnos pueden manipular los elementos de posición del objeto para el análisis de los ejercicios permiten generar experiencias de simulación.

La implementación de Realidad Aumentada en dispositivos tan poderosos como las Tablets exige al docente estar capacitado en el uso de las mismas. Comprender las utilidades adicionales que vienen instaladas permitirá enseñar su uso a aquellos alumnos que aún no han experimentado con teléfonos inteligentes y supervisar el uso por parte de los alumnos experimentados.

Se han encontrado varias herramientas para el desarrollo de experiencias de realidad aumentada con diferentes características: tecnologías soportadas, tipos de licencia para su uso, tipo de marcas a reconocer, objetos a ser aumentados, etc. lo que permite a docentes sin mayor experiencia en programación incorporar en sus clases actividades con dicha tecnología.

El proceso de “Desarrollo del Entorno de Interacción con Realidad Aumentada” se ha sujetado al modelo planteado en el “Marco Lógico” y en el “Esquema Lógico Básico” presentado en el anteproyecto de la investigación por lo que se concluye el cumplimiento del 100% de las acciones correspondientes a esta etapa.

4. CONCLUSIONES SOBRE EL PROCESO DE INTERVENCIÓN CON EL ALUMNADO

La inclusión de las actividades que respetan las diferentes inteligencias permitió cierto grado de libertad en los alumnos en el momento de comunicar su comprensión sobre los conceptos. La simple acción de poseer una gama de ejercicios con similar objetivo pero con el uso de diversos materiales o formas de presentar los resultados (videos, secuencia de fotos, informes técnicos, tabulación de experimentos, maquetas, etc.) genera la identificación consciente o inconscientemente de los alumnos con aquel que seleccionaron, el cual resulta ser el que apunta a sus habilidades desarrolladas.

Las características tecnológicas de las Tablets como la captura de pantalla y edición de imágenes se convierten en herramientas poderosas de comunicación de resultados debido a que los alumnos las utilizan para bosquejar sus ideas logrando la

comprensión de los conceptos y permiten al docente comprender lo que intentan decir con lenguaje verbal.

La “Ejecución del Proceso de Intervención” se ha sujetado al modelo planteado en el “Marco Lógico” y en el “Esquema Lógico Básico” presentado en el anteproyecto de la investigación por lo que se concluye el cumplimiento del 100% de las acciones correspondientes a esta etapa.

5. CONCLUSIONES SOBRE EL PROCESO DE DIAGNÓSTICO DE DESTREZAS

Con el proceso de investigación documental se concluye que no se dispone de un test estandarizado que evalúe las habilidades específicas de la inteligencia espacial requeridas para el reconocimiento en 2D y la abstracción tridimensional, debido a esto surge la necesidad de estructurar, con el sustento adecuado, un conjunto de reactivos que cumpla con el objetivo.

La evaluación psicométrica mide determinadas habilidades espaciales como rotación pero no se especializa en la transición mental tridimensional que debe realizar el alumno al observar una representación en el plano, por lo tanto puede ser utilizada en el proceso solamente como una referencia del desempeño del alumnado debido a su popularidad de aplicación en el contexto actual de nuestro país.

Las habilidades que han sido consideradas en el estudio tienen el sustento teórico correspondiente por lo que se concluye que se puede desarrollar un estudio

comparativo, considerando a éstas como las requeridas para una adecuada transición del plano al espacio en la mente del alumno.

Se detecta un grupo de habilidades menos relevantes, que están involucradas con la inteligencia espacial con enfoque a la transición buscada, por lo que se concluye que para futuras investigaciones se proceda a analizar la pertinencia de mantenerlas en el estudio o priorizar las otras.

Se analizan los resultados desde dos puntos de vista, el primero es por puntuación de habilidades involucradas en los reactivos y la segunda por número de reactivos correctamente contestados. En ambos casos se demuestra con la investigación que se obtiene un incremento de los promedios entre el test inicial y final aplicados al grupo experimental. Por lo que se concluye que la aplicación del taller experimental con RA tiene un impacto beneficioso en las habilidades espaciales de los alumnos.

Se realiza un análisis por cada pregunta detectando aquellas en las que se ha presentado mayor dificultad para los alumnos con lo que se concluye que el detalle estadístico realizado permite al docente realizar un estudio individual para retroalimentar a sus alumnos sobre procesos puntuales en los que debería continuar su entrenamiento para obtener mejores resultados.

Se realiza una comparación de los resultados entre el grupo experimental y un grupo monitor con similares características como la carrera a la que pertenece, horario de estudio, contenidos previos abordados, entre otros. En esta comparación se presenta un mejor rendimiento del grupo experimental tanto en sus habilidades espaciales como

en el desempeño en test psicotécnicos. Lo anterior nos permite concluir que la implementación del taller Experimental con RA tiene un impacto positivo en el desempeño del alumnado.

Se realiza un análisis del nivel de autoconfianza de los alumnos respecto a sus respuestas obteniendo un incremento considerable en el test final lo que concluye que los alumnos se sienten más seguros después de participar en un taller con las características planteadas.

El proceso de “Diagnóstico Comparativo de Destrezas Desarrolladas” se ha sujetado al modelo planteado en el “Marco Lógico” y en el “Esquema Lógico Básico” presentado en el anteproyecto de la investigación por lo que se concluye el cumplimiento del 100% de las acciones correspondientes a esta etapa.

6. CONCLUSIONES SOBRE EL OBJETIVO GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN

Con el cumplimiento del proceso establecido en el anteproyecto de investigación y con las conclusiones favorables para cada etapa, se concluye que el objetivo general ha sido alcanzado. El sustento estadístico permite corroborar esta conclusión desde diferentes puntos de vista: por el puntaje de habilidades obtenido, por el número de reactivos correctamente contestados, por la comparación con el grupo de control y por la confianza de los alumnos en sus respuestas.



Con el sustento planteado a lo largo de la investigación se considera como verdadero que, la aplicación de un taller experimental con tecnología de Realidad Aumentada en alumnos que cursan la materia de Álgebra Lineal, en el que se desarrolle la guía de estudio elaborada, permite un importante incremento en las principales habilidades de la inteligencia espacial involucradas en el proceso de investigación.



Recomendaciones y Líneas de Investigación

En base a la investigación realizada y a las conclusiones establecidas, se ha definido algunas recomendaciones sobre la aplicación del proyecto en otros escenarios.

Con el **análisis metodológico de la materia**, elaborado para la presente investigación, se recomienda que el proceso de investigación sea replicado en otros escenarios. Se ha sustentado que la estructura de la guía de estudio es generalizada para que sea abordada como apoyo a la cátedra de Álgebra Lineal en otras universidades. La definición de secciones, los contenidos abordados, los ejercicios alternativos, los ejercicios autónomos, entre otras características, permiten que las herramientas cumplan las expectativas más exigentes de los docentes relacionados a la materia.

Respecto a las conclusiones establecidas sobre la **definición de guía de estudio** se recomienda que la aplicación del taller experimental con RA sea un proceso guiado y no se considere para un estudio autónomo debido a que la guía de estudio está conformada por ejercicios que no poseen una rigidez en la definición de habilidades involucradas, en cada uno se podría desarrollar diferentes ejercicios de estimulación, esto dependerá del docente. Será él el responsable de promover adecuadamente las experiencias en los alumnos, para lo cual, debe estar capacitado en la generación de estas experiencias de estimulación de habilidades espaciales, comprendiendo la estructura de la guía y todo el sustento teórico que la respalda.

Respecto al ámbito anterior se recomienda optimizar la herramienta de interacción para disminuir el espacio de almacenamiento requerido, así como también generar versiones compatibles con sistemas operativos diferentes para lograr una difusión

adecuada de la herramienta. A esta optimización también debería ser sometida la guía de estudio para incorporar instrucciones adicionales que sean directivas al docente para la generación de diferentes experiencias con los mismos ejercicios.

En cuanto al proceso de **desarrollo del entorno de interacción** se recomienda desarrollar los procesos necesarios para que los objetos elaborados para la investigación, que corresponde a la Guía de Estudio, Sistema de Evaluación, Software de RA y Reactivos, sean publicados y puestos a disposición de la comunidad educativa. Como expresa Annette (Vincent, Ross y Williams), existe bastante material sobre la teoría de inteligencias múltiples pero la problemática es encontrar material con estrategias prácticas a ser aplicadas en un salón de clase. Evidentemente el material encontrado se refiere a los resultados de intervenciones, en el mejor de los casos se detallan los procesos, pero en pocas de ellas se encuentra con el material didáctico de aplicación. Comparto el criterio de respeto hacia los derechos de autor pero creo firmemente en que la docencia es una tarea muy ardua que se simplificaría y fortalecería si se comparte conocimientos y sobre estos se generan nuevos avances.

Lo anterior en el área de Informática se lo denomina "Software de Código Abierto"

Considerando las conclusiones sobre **el proceso de intervención**, se recomienda dar flexibilidad en el desarrollo de las sesiones experimentales, en el sentido de la forma de comunicación de los alumnos. Se considera importante que se permita el trabajo grupal supervisado por el docente para que pueda dirigir las actividades adecuándolas a las necesidades específicas, esto es, de acuerdo a los resultados obtenidos en el test inicial cuando se detecta las habilidades a ser reforzadas.

Respecto al **diagnóstico de habilidades** desarrollado se recomienda la aplicación del proyecto en diferentes escenarios para respaldar la aplicabilidad de las herramientas elaboradas y publicarlo como un producto validado para el desarrollo eficiente de las habilidades espaciales en jóvenes universitarios.

Con las conclusiones positivas sobre el **objetivo general** se recomienda a la comunidad investigativa la generación de herramientas tecnológicas que permitan el desarrollo de las inteligencias múltiples en nuestros alumnos. Estas deberían ser: innovadoras en tecnologías para captar el interés de los jóvenes, económicas en cuanto a recursos involucrados, aplicadas a nuestra realidad y validadas con el correspondiente proceso de investigación.

Se sustentan a continuación las líneas de investigación sobre las cuales se puede incursionar en futuros proyectos generando de esta manera nuevas necesidades a ser cubiertas con los procesos investigativos adecuados.

Se genera una línea de investigación sobre los procesos de comunicación que poseen los jóvenes universitarios en nuestro contexto, debido a que los alumnos podrían tener una correcta percepción espacial pero no tienen una adecuada comunicación. Entonces se presenta la posibilidad de que el origen de los problemas en el rendimiento académico de la materia no radica básicamente en las habilidades espaciales específicas sino en los procesos de comunicación que poseen.

Sería importante analizar la planificación microcurricular y el sistema de evaluación que estamos implementando en los contextos universitarios, en el sentido de la importancia que se otorga a la estimulación de una adecuada representación visual en los alumnos frente a los problemas. Es probable que a pesar de que el concepto está adecuadamente comprendido, la falencia radique en la representación mental que el alumno posea generando de esta manera bajo rendimiento académico.

Las diferentes inteligencias pueden ser cultivadas en cualquier momento con los procesos adecuados, se ha sustentado teóricamente que depende de la cultura para que la persona desarrolle con mayor facilidad una u otra inteligencia, esto debido a la importancia que brinda la cultura a cada una de ellas. Se genera entonces una pregunta orientada a un estudio adicional, no incluido en el presente proyecto, sobre las inteligencias que se están priorizando en nuestra realidad. Es una pregunta abierta para futuras investigaciones que nos permitan conocer el entorno en el que desarrollamos nuestra labor docente y plantee líneas de acción para mejorar el desempeño de nuestros alumnos.

Durante la investigación teórica se ha encontrado diversos materiales concretos y de software para la estimulación de la inteligencia espacial pero generalmente orientado a nivel infantil o de adolescencia. Se plantea la necesidad de desarrollar material adecuado que permitan a los jóvenes de nivel universitario trabajar sobre dichas necesidades. Este es un campo en el que relativamente hace pocos años se está incursionando y del que se puede generar muchos procesos de investigación.



Bibliografía

Creative Commons. «Subinet.» <<http://www.subinet.es/wp-content/uploads/2012/09/nuevo-centro-realidad-virtual-ford-logo.jpg>>.

Android. developer.android.com. Septiembre de 2012
<<http://developer.android.com/sdk/installing/studio.html>>.

Barrientos, Elsa Jiménez. «Las inteligencias multiples, los estilos de aprendizaje y el nivel de rendimiento.» [Investigación educacional 13.23](#) (2009).

Bayonet, Luis, Andrés Patiño y Angel Willmore. «<http://www.academia.edu/>» junio de 2011.
Universidad Iberoamericana Santo Domingo. 26 de agosto de 2013
<http://www.academia.edu/1548981/Realidad_aumentada_en_el_Ambito_Universitario>.

Bragado, Ingñacio Martín. [Física General](#). 2004.

Canarias, Gobierno de. «[VECTORES Y CINEMÁTICA DEL PUNTO](#).» octubre de 2013
<<http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/Usrn/fisica/VECTYCIN.htm>>.

Coss, Raúl. [Simulación, un enfoque práctico](#). Limusa, 2003.

Esteve, Meritxell. [Tecnologías II ESO](#). Editex, 2007.

Garcia, Angel Franco. <http://www.sc.ehu.es/>. 2010. 24 de agosto de 2013
<<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/default.htm>>.

Gardner, Howard. [Estructuras de la mente, La teoría de las inteligencias múltiples](#). FONDO DE CULTURA ECONOMICA DE ESPAÑA, 1994.

Gonzalez, Miguel Angel. «<http://www.tecnoedu.net/>» Ed. EAFIT Universidad. 12 de agosto de 2013 <<http://www.tecnoedu.net/lecturas/materiales/lectura27.pdf>>.

Grossman, Stanley. [Álgebra Lineal](#). sexta. McGraw-Hill, 2007.

Hernández, Stefany. «El modelo constructivista con las nuevas tecnologías: aplicado en el proceso de aprendizaje.» 2008. [Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento](#). agosto de 2011 <<http://www.uoc.edu/rusc/5/2/dt/esp/hernandez.pdf>>.

Hernanz, Carlos Yuste y Juan M. Sánchez. [PROGRESINT](#).

<http://www.educacionespacialylogopedia.es/educacion-especial-logopedia-1/29/Progresint.html>. CEPE, 2010.

ICFM Instituto de Ciencias Físicas y Matemáticas. «Guía de Estudio para Algebra Lineal.» Cuenca, Febrero de 2013.

Kjeldsen, Tinne Hoff y Morten Blomhøj. «Integrating history and philosophy in mathematics education at university level through problem-oriented project work.» [ZDM 41](#) (2009): 87-103.

Medellín, Elvers, y otros. «<http://www.uelbosque.edu.co/>» [Cuadernos Hispanoamericanos de Psicología 1.2](#) (2001): 83-94.

Medina, Epsy. «NORMAS DE INTERACCIÓN PARA EVALUAR INTERFAZ DE SOFTWARE EDUCATIVO, Una aproximación interpretativa desde las perspectivas piagetianas.» Revista Ciencias de la Educación 18.32 (2008).

Metaio. metaio Developer Portal. <<https://dev.metaio.com/content-creation/3d-animation/format/supported-model-formats/>>.

—. metaio.com/. <<http://www.metaio.com/sdk/>>.

Milicich, Victoria. «Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura.» enero de 2014 <<http://www.fceia.unr.edu.ar/darquitectonico/darquitectonico/data/pdf/milicich.pdf>>.

Ministerio de Educación de Chile. Red Maestros de Maestros. 2010. 6 de Agosto de 2013 <<http://www.rmm.cl/usuarios/mcocha/doc/201003271337320.test-de-inteligencias-multiples.pdf>>.

Mobile Google. «Mobile Google.» enero de 2014 <<http://www.google.com/mobile/skymap/hero.jpg>>.

neuronaltraining. neuronaltraining. 2010. Septiembre de 2013 <<http://blog.neuronaltraining.net/?p=19361>>.

Olsina, Luis. «[www.ciw.cl.](http://www.ciw.cl/)» 2003. 12 de Agosto de 2013 <http://www.ciw.cl/recursos/Charla_Metricas_Indicadores.pdf>.

Pensar de nuevo org. «[www.pensardenuovo.org.](http://www.pensardenuovo.org/)» 2011. agosto de 2011 <<http://pensardenuovo.org/accion-en-la-red/especiales/el-modelo-constructivista-con-las-nuevas-tecnologias-aplicado-en-el-proceso-de-aprendizaje/4-el-modelo-constructivista-con-las-nuevas-tecnologias-en-el-proceso-de-aprendizaje/>>.

Pérez, Iván. «Carrera de Pedagogía en Matemática experimenta con realidad aumentada para enseñanza de la geometría.» UDLA. Julio de 2010.

Qualcomm Technologies, Inc. qualcomm.com. Agosto de 2012 <<http://www.qualcomm.com/solutions/augmented-reality>>.

Quest Visual. Word lens. enero de 2014 <<http://questvisual.com/es/>>.

Research Google. googleresearch.blogspot. 2012. enero de 2014 <<http://googleresearch.blogspot.com/2012/01/open-sourcing-sky-map-and-collaborating.html>>.

Robles, Vladimir. «Programación de Dispositivos Android.» Cuenca, Julio de 2013.

Santos Moreno, Antonio. «La tecnología Educativa ante el paradigma constructivista.» 2000. Revista Informática Educativa UNIANDES-LIDIE,13(1). agosto de 2011 <http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-105570_archivo.pdf>.

SSAT. learnar. enero de 2014 <<http://www.learnar.org>>.

—. «YouTube.» enero de 2014 <<http://www.youtube.com/watch?v=7G3H3ImCWIE>>.

Stewart, James. Cálculo de varias variables. sexta. CENGAGE, s.f.

—. Cálculo de Varias Variables. sexta. s.f.

Temio, Ángeles Lara. Utilización del ordenador para el desarrollo de la visualización espacial. Universidad Complutense de Madrid, 2010.

TestPsicotécnicos.net. «<http://www.testpsicotecnicos.net/.>» 20 de Agosto de 2013
<<http://www.testpsicotecnicos.net/es/left/test-aptitud-espacial/>>.

Vila, Antoni y María Luz Callejo. Matemáticas para aprender a pensar, el papel de las creencias en la resolución de problemas. Madrid: NARCEA, 2004.

Vincent, Annette, Dianne Ross y Al Williams. «Using the Multiple Intelligences Theory in International Business.» Journal of Teaching in International Business 14.1 (2002): 45-63.

Waldegg, Guillermina Agüero. Habilidades cognoscitivas y esquemas de razonamiento en estudiantes universitarios. México: Red Revista Mexicana de Investigación Educativa, 2006.

Wikipedia. wikipedia.org. 2013. Agosto de 2013 <<http://es.wikipedia.org/wiki/Android>>.

Wikitude GmbH. wikitude.com. Agosto de 2012 <<http://www.wikitude.com/>>.

WION. «Realidad Aumentada.» enero de 2014 <<http://www.realidad-aumentada.eu/wp-content/uploads/2013/03/WION-Realidad-aumentada-libros.jpg>>.

Yaridelis Romero y René Ramírez. «<http://developyourdream.net/.>» 8 de Agosto de 2013
<http://developyourdream.net/tutoriales/tesis/appendice_pdf/AP%C9NDICE%20J3%20-%20Evaluaci%F3nInformaticos.pdf>.



Anexos

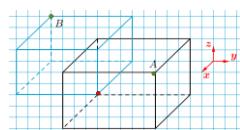
1. REACTIVOS APLICADOS EN LOS TEST DE EVALUACIÓN INICIAL Y FINAL

Estos reactivos están clasificados por el número de pregunta al que pertenecen en los test de evaluación, se presentan dos reactivos por pregunta que aparecen en el test inicial y final respectivamente.

PREGUNTA #1 INICIAL												
Identificador:	#R001	Tipo de Reactivo:	Figuras Traslapadas				Complejidad: media					
Habilidad involucrada												
Ponderación:	NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2)		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
	0	0	1	2	2	0	0	2	2	0		
Enunciado												
Considerando que el origen del sistema de referencia indicado es el punto rojo. Determine el octante en el que se encuentra el punto A y el punto B.												
Opciones:												
Opción A	Opción B	Opción C										
Punto A primer octante y punto B cuarto octante	Punto A primer octante y punto B segundo octante	Punto A segundo octante y punto B primer octante										
Punto A quinto octante y punto B octavo octante												
Verdadero												

PREGUNTA #1 FINAL												
Identificador:	#R002	Tipo de Reactivo:	Figuras Traslapadas				Complejidad: media					
Habilidad involucrada												
Ponderación:	NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2)		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
	0	0	1	2	2	0	0	2	2	0		
Enunciado												

Considerando que el origen del sistema de referencia indicado es el punto rojo. Determine el octante en el que se encuentra el punto A y el punto B.


Opciones:

Opción A	Opción B	Opción C	Opción D
Punto A primer octante y punto B cuarto octante	Punto A primer octante y punto B séptimo octante	Punto A primer octante y punto B tercer octante	Punto A quinto octante y punto B séptimo octante
		Verdadero	

PREGUNTA #2 INICIAL

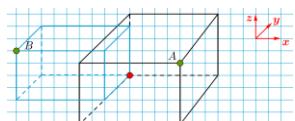
Identificador: #R003 | Tipo de Reactivo: Figuras Traslapadas | Complejidad: alta

Habilidad involucrada

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Ponderación: NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2)	0	0	1	2	2	0	2	2	2	0

Enunciado

Considerando que el origen del sistema de referencia indicado es el punto rojo. Determine el octante en el que se encuentra el punto A y el punto B.


Opciones:

Opción A	Opción B	Opción C	Opción D
Punto A primer octante y punto B cuarto octante	Punto A cuarto octante y punto B tercero octante	Punto A segundo octante y punto B tercero octante	Punto A quinto octante y punto B sexto octante
Verdadero			

PREGUNTA #2 FINAL

Identificador: #R004 Tipo de Reactivo: Figuras Traslapadas Complejidad: alta

Habilidad involucrada

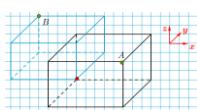
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
--	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ponderación: NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2)

0	0	1	2	2	0	2	2	2	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Enunciado

Considerando que el origen del sistema de referencia indicado es el punto rojo. Determine el octante en el que se encuentra el punto A y el punto B.


Opciones:

Opción A	Opción B	Opción C	Opción D
Punto A cuarto octante y punto B segundo octante	Punto A primer octante y punto B tercero octante	Punto A segundo octante y punto B cuarto octante	Punto A quinto octante y punto B sexto octante
Verdadero			

PREGUNTA #3 INICIAL

Identificador: #R005 Tipo de Reactivo: Simetría Complejidad: baja

Habilidad involucrada

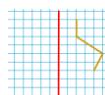
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
--	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ponderación: NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2)

0	2	1	1	2	0	1	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Enunciado

Seleccione la figura que represente correctamente la simetría del trazado respecto al eje de color rojo


Opciones:

Opción A	Opción B	Opción C	Opción D
			Verdadero

PREGUNTA #3 FINAL

Identificador: #R006 Tipo de Reactivo: Simetría Complejidad: baja

Habilidad involucrada

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ponderación: NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2) 0 2 1 1 2 0 1 0 1 0

Enunciado

Seleccione la figura que represente correctamente la simetría del trazado respecto al eje de color rojo


Opciones:

Opción A	Opción B	Opción C	Opción D
Verdadero			

PREGUNTA #4 INICIAL

Identificador: #R008 Tipo de Reactivo: Simetría Complejidad: alta

Habilidad involucrada

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ponderación: NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2) 2 2 1 1 2 0 1 0 1 1

Enunciado

Seleccione la figura cuyos puntos representen correctamente la simetría del siguiente trazado respecto al eje de color rojo.


Opciones:

Opción A	Opción B	Opción C	Opción D
Verdadero			

PREGUNTA #4 FINAL

Identificador: #R009 Tipo de Reactivo: Simetría Complejidad: alta

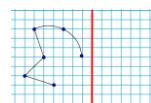
Habilidad involucrada

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ponderación: NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2) 2 2 1 1 2 0 1 0 1 1

Enunciado

Seleccione la figura cuyos puntos representen correctamente la simetría del siguiente trazado respecto al eje de color rojo.


Opciones:

Opción A

Opción B

Opción C

Opción D



Verdadero

PREGUNTA #5 INICIAL

Identificador: #R010 Tipo de Reactivo: Punto de observación Complejidad: media

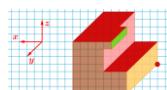
Habilidad involucrada

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ponderación: NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2) 0 1 2 0 1 0 1 2 2 0

Enunciado

Considere al punto rojo como el origen del sistema de referencia indicado así como también las dimensiones de la figura; seleccione la adecuada representación lateral con los ejes correctos.


Opciones:

Opción A

Opción B

Opción C

Opción D

		Verdadero	

PREGUNTA #5 FINAL

Identificador:	#R011	Tipo de Reactivo:	Punto de observación	Complejidad:	media
----------------	-------	-------------------	----------------------	--------------	-------

Habilidad involucrada

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Ponderación: NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2)	0	1	2	0	1	0	1	2	2	0

Enunciado

Considere al punto azul como el origen del sistema de referencia indicado, así como también las dimensiones de la figura; seleccione la adecuada representación lateral con los ejes correctos.


Opciones:

Opción A	Opción B	Opción C	Opción D

Verdadero

PREGUNTA #6 INICIAL

Identificador:	#R012	Tipo de Reactivo:	Punto de observación	Complejidad:	media
----------------	-------	-------------------	----------------------	--------------	-------

Habilidad involucrada

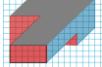
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ponderación: NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2)

Enunciado

Considerando al punto de color rojo como origen del sistema de coordenadas indicado, seleccione la correcta representación de la figura si es rotada alrededor del eje y.


Opciones:

Opción A	Opción B	Opción C	Opción D
			

Verdadero

PREGUNTA #6 FINAL

Identificador:	#R015	Tipo de Reactivo:	Punto de observación	Complejidad:	media
----------------	-------	-------------------	----------------------	--------------	-------

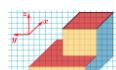
Habilidad involucrada

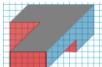
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ponderación: NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2)

Enunciado

Considerando al punto de color rojo como origen del sistema de coordenadas indicado, seleccione la correcta representación de la figura si es rotada alrededor del eje x.


Opciones:

Opción A	Opción B	Opción C	Opción D
			

Verdadero

PREGUNTA #7 INICIAL

Identificador:	#R013	Tipo de Reactivo:	Disposición de figuras con perspectiva	Complejidad:	alta
----------------	-------	-------------------	--	--------------	------

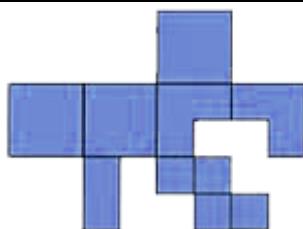
Habilidad involucrada

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ponderación:	NO REQUERIDO (0)	REQUERIDO (1)	INDISPENSABLE (2)	1	2	0	0	2	1	2	1	0	0
--------------	------------------	---------------	-------------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Enunciado

Dado el siguiente patrón, establecer la figura que se forma realizando los correspondientes dobleces en las líneas. (<http://www.fibonacci.com/es/razonamiento-espacial/prueba-dificil/>)


Opciones:

Opción A	Opción B	Opción C	Opción D
Verdadero			

PREGUNTA #8 FINAL

Identificador:	#R014	Tipo de Reactivo:	Disposición de figuras con perspectiva	Complejidad:	alta
----------------	-------	-------------------	--	--------------	------

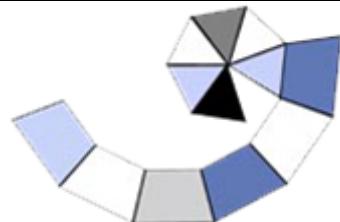
Habilidad involucrada

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ponderación:	NO REQUERIDO (0)	REQUERIDO (1)	INDISPENSABLE (2)	1	2	0	0	2	1	2	1	0	0
--------------	------------------	---------------	-------------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Enunciado

Dado el siguiente patrón, establecer la figura que se forma realizando los correspondientes dobleces en las líneas. (<http://www.fibonacci.com/es/razonamiento-espacial/prueba-dificil/>)


Opciones:

Opción A	Opción B	Opción C	Opción D
Verdadero			

PREGUNTA #9 INICIAL

Identificador : #R021	Tipo de Reactivo: Identificar perspectivas	Complejidad media d:
-----------------------	--	----------------------

Habilidad involucrada

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

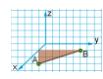
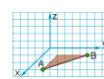
Ponderación: NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2)

Enunciado

Si el segmento AB representa una barra sobre el suelo, determine la representación de un triángulo rectángulo trazado sobre el mismo.


Opciones:

Opción A	Opción B	Opción C	Opción D
----------	----------	----------	----------


Verdadero
PREGUNTA #9 FINAL

Identificador : #R016	Tipo de Reactivo: Identificar perspectivas	Complejidad media d:
-----------------------	--	----------------------

Habilidad involucrada

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

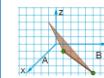
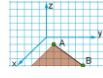
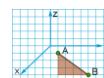
Ponderación: NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2)

Enunciado

Si el segmento AB representa una barra sobre el suelo, determine la representación de un triángulo rectángulo trazado sobre el mismo.


Opciones:

Opción A	Opción B	Opción C	Opción D
----------	----------	----------	----------


Verdadero

PREGUNTA #10 INICIAL

Identificador:	#R017	Tipo de Reactivo:	Identificar perspectivas	Complejidad:	alta
----------------	-------	-------------------	--------------------------	--------------	------

Habilidad involucrada

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ponderación: NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2) 0 0 2 1 2 0 2 2 2 0

Enunciado

Si el segmento AB representa una barra sobre el suelo, determine la representación de un triángulo rectángulo trazado sobre el mismo.


Opciones:

Opción A	Opción B	Opción C	Opción D
----------	----------	----------	----------



Verdadero

PREGUNTA #10 FINAL

Identificador:	#R018	Tipo de Reactivo:	Identificar perspectivas	Complejidad:	alta
----------------	-------	-------------------	--------------------------	--------------	------

Habilidad involucrada

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ponderación: NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2) 0 0 2 1 2 0 2 2 2 0

Enunciado

Si el segmento AB representa una barra sobre el suelo, determine la representación de un triángulo rectángulo trazado sobre el mismo.


Opciones:

Opción A	Opción B	Opción C	Opción D
----------	----------	----------	----------



Verdadero

PREGUNTA #11 INICIAL

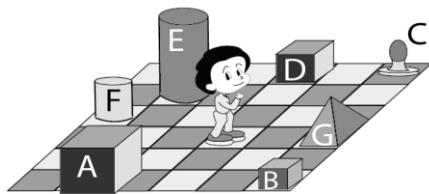
Identificador:	#R019	Tipo de Reactivo:	Punto De Observación	Complejidad:	alta
----------------	-------	-------------------	----------------------	--------------	------

Habilidad involucrada

Ponderación:	NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2)	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
--------------	--	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Enunciado

Dada la siguiente distribución de objetos, seleccione la representación correcta en un sistema 3D tal que su origen es la persona y el eje x positivo está en dirección hacia el objeto "G"


Opciones:

Opción A	Opción B	Opción C	Opción D

Verdadero
PREGUNTA #11 FINAL

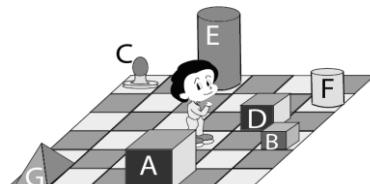
Identificador	#R020	Tipo de Reactivo:	Punto De Observación	Complejidad:	alta
---------------	-------	-------------------	----------------------	--------------	------

Habilidad involucrada

Ponderación:	NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2)	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
--------------	--	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Enunciado

Dada la siguiente distribución de objetos, seleccione la representación correcta en un sistema 3D tal que su origen es la persona y el eje x positivo está en dirección hacia el objeto "B"


Opciones:

Opción A	Opción B	Opción C	Opción D

Verdadero

PREGUNTA #12 INICIAL

Identificador:	#R022	Tipo de Reactivo:	Describir una escena o evento sin estar presente	Complejidad:	alta
----------------	-------	-------------------	--	--------------	------

Habilidad involucrada

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ponderación: NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2)

0	2	2	2	0	0	2	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Enunciado

La puerta de ingreso a una habitación se encuentra en el centro horizontal de la pared correspondiente, al ingresar usted puede observar los siguientes objetos:

- (F) Un florero a su derecha
- (G) Un gato al frente suyo observándolo
- (S) Un sillón a la derecha del gato
- (V) Una ventana en la pared izquierda
- (E) Un escritorio a su izquierda
- (B) Un basurero entre usted y el escritorio
- (O) Un ovillo de hilo frente al gato

Seleccione la representación correcta del escenario descrito considerando al punto rojo como su ubicación

Opciones:

Opción A	Opción B	Opción C	Opción D
Verdadero			

PREGUNTA #12 FINAL

Identificador:	#R023	Tipo de Reactivo:	Describir una escena o evento sin estar presente	Complejidad:	alta
----------------	-------	-------------------	--	--------------	------

Habilidad involucrada

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ponderación: NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2)

0	2	2	2	0	0	2	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Enunciado

La puerta de ingreso a una habitación se encuentra en el centro horizontal de la pared correspondiente, al ingresar usted puede observar los siguientes objetos:

- (F) Un florero a su derecha
- (V) Una ventana en la pared del frente
- (G) Un gato entre usted y la ventana observando hacia fuera
- (S) Un sillón a la derecha del gato
- (E) Un escritorio a su izquierda
- (O) Un ovillo de hilo entre usted y el sillón
- (B) Un basurero a la izquierda del gato

Seleccione la representación correcta del escenario descrito considerando al punto rojo como su ubicación

Opciones:	Opción A	Opción B	Opción C	Opción D
				Verdadero

PREGUNTA #13 INICIAL

Identificador : #R024	Tipo de Reactivo: Relaciones espaciales	Complejidad : media
-----------------------	---	---------------------

Habilidad involucrada

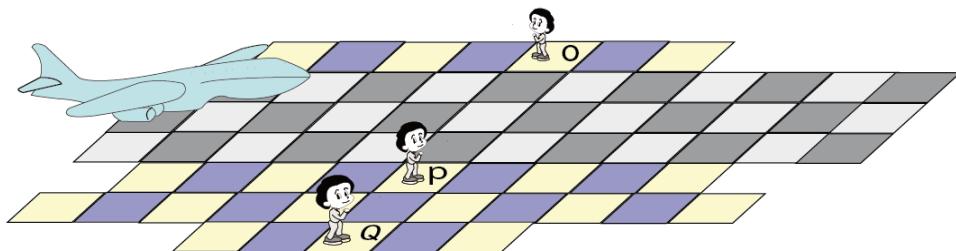
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

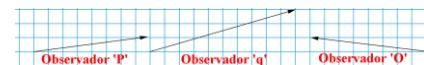
Ponderación: NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2)

0	1	2	2	2	0	2	1	0	2
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Enunciado

Tres personas ubicadas en los puntos O, P, Q observan despegar un avión durante 10s. Seleccione la representación correcta del movimiento relativo a cada observador. Considere la ubicación y el campo de visión de cada uno.


Opciones:
Opción A

Opción B

Opción C
Verdadero


PREGUNTA #13 FINAL

Identificador :	#R025	Tipo de Reactivo:	Relaciones espaciales	Complejidad :	media
-----------------	-------	-------------------	-----------------------	---------------	-------

Habilidad involucrada

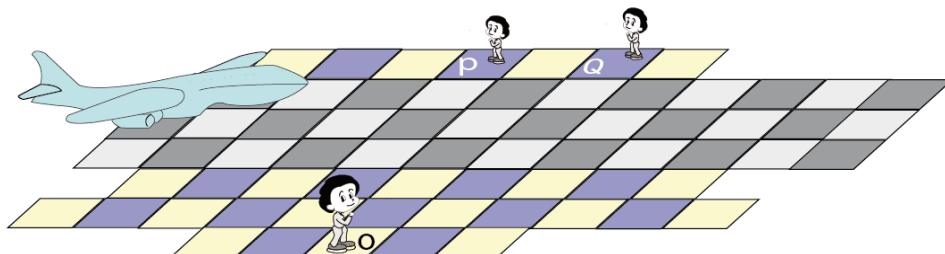
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ponderación: NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2)

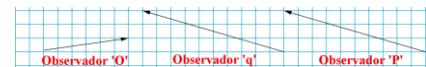
0	1	2	2	2	0	2	1	0	2
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Enunciado

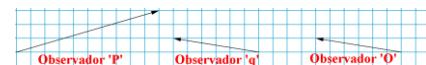
Tres personas ubicadas en los puntos O, P, Q observan despegar un avión durante 10s. Seleccione la representación correcta del movimiento relativo a cada observador. Considere la ubicación y el campo de visión de cada uno.


Opciones:

Opción A	Verdadero		
----------	-----------	--	--



Opción B			
----------	--	--	--



Opción C			
----------	--	--	--



PREGUNTA #14 INICIAL

Identificador: #R026 | Tipo de Reactivo: Relaciones espaciales | Complejidad: baja

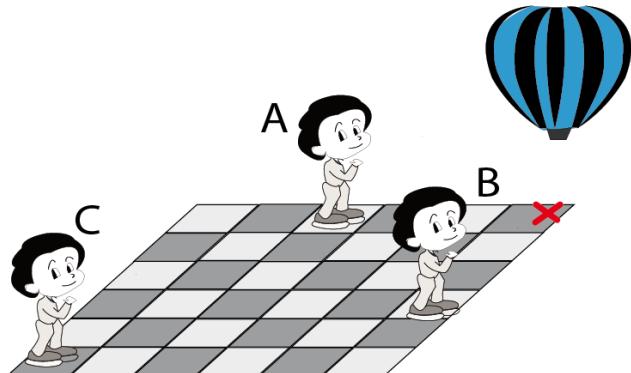
Habilidad involucrada

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

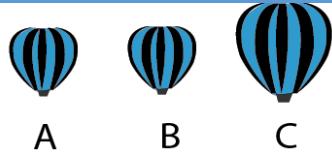
Ponderación: NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2) | 0 2 2 2 1 0 1 1 0 0

Enunciado

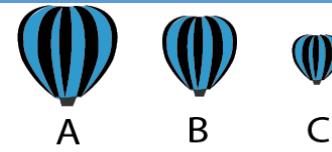
Tres personas observan un globo iniciando su elevación. Seleccione la representación de la percepción de dicho globo, relativo a cada observador. Considere la ubicación y el campo de visión de cada uno.


Opciones:

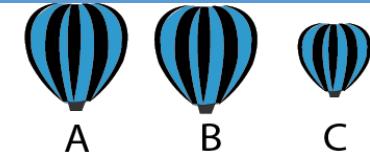
Opción A



Opción B



Opción C


Verdadero
PREGUNTA #14 FINAL

Identificador: #R027 | Tipo de Reactivo: Relaciones espaciales | Complejidad: baja

Habilidad involucrada

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

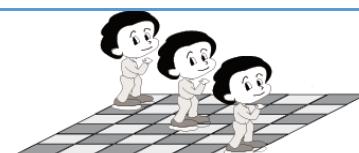
Ponderación: NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2) | 0 2 2 2 1 0 1 1 0 0

Enunciado

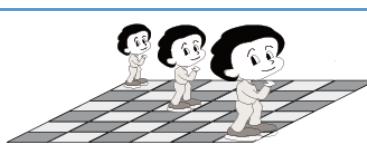
Considerar que usted es el observador y tres personas de similar tamaño se ubican en frente. Seleccione la representación adecuada de su percepción visual.

Opciones:

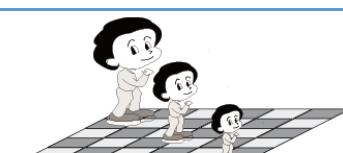
Opción A



Opción B



Opción C


Verdadero
PREGUNTA #15 INICIAL

Identificador:	#R028	Tipo de Reactivo:	Describir trayectorias	Complejidad:	baja
----------------	-------	-------------------	------------------------	--------------	------

Habilidad involucrada

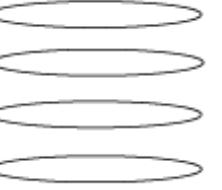
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ponderación: NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2) 0 2 0 1 1 0 0 2 0 2

Enunciado

Una mosca se acerca al pastel con movimientos circulares. Seleccione la representación de la trayectoria descrita por la misma, con la que llega más rápido al pastel.



Opciones:	Opción A	Opción B	Opción C	Opción D
Verdadero				
Verdadero				

PREGUNTA #15 FINAL

Identificador:	#R029	Tipo de Reactivo:	Describir trayectorias	Complejidad:	baja
----------------	-------	-------------------	------------------------	--------------	------

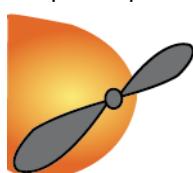
Habilidad involucrada

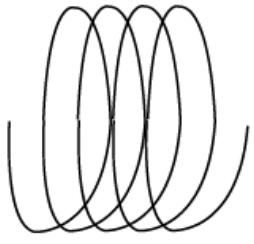
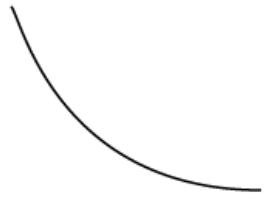
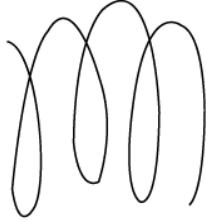
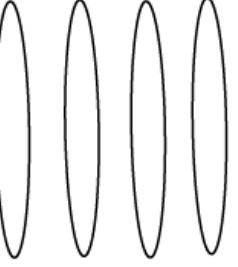
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ponderación: NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2) 0 2 0 1 1 0 0 2 0 2

Enunciado

Considere un punto en uno de los extremos de la hélice de una avioneta. Seleccione la representación de la trayectoria descrita por el punto a medida de que la avioneta vuela.



Opciones:	Opción A	Opción B	Opción C	Opción D
Verdadero				
Verdadero				

Descripción																					
Identificador	#R030	Tipo de Reactivo:	Describir trayectorias			Complejidad	media														
:						:															
Habilidad involucrada																					
<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">B</td> <td style="text-align: center;">C</td> <td style="text-align: center;">D</td> <td style="text-align: center;">E</td> <td style="text-align: center;">F</td> <td style="text-align: center;">G</td> <td style="text-align: center;">H</td> <td style="text-align: center;">I</td> <td style="text-align: center;">J</td> <td style="text-align: center;">K</td> </tr> </table>											A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K											
Ponderación:	NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2)																				
0	2	2	0	2	1	0	1	0	2												
Enunciado																					
<p>Considere un objeto que es atrapado por un tornado. Seleccione la representación de la trayectoria y dirección descrita por el objeto a medida de que pasa el tiempo.</p>																					
Opciones:																					
Opción A	Opción B	Opción C	Opción D																		
				Verdadero																	

Descripción																					
Identificador	#R031	Tipo de Reactivo:	Describir trayectorias			Complejidad	media														
:						:															
Habilidad involucrada																					
<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">B</td> <td style="text-align: center;">C</td> <td style="text-align: center;">D</td> <td style="text-align: center;">E</td> <td style="text-align: center;">F</td> <td style="text-align: center;">G</td> <td style="text-align: center;">H</td> <td style="text-align: center;">I</td> <td style="text-align: center;">J</td> <td style="text-align: center;">K</td> </tr> </table>											A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K											
Ponderación:	NO REQUERIDO (0), REQUERIDO (1), INDISPENSABLE (2)																				
0	2	2	0	2	1	0	1	0	2												
Enunciado																					
<p>Considere un objeto que es atrapado por un remolino. Seleccione la representación de la trayectoria y dirección descrita por el objeto a medida de que pasa el tiempo.</p>																					
Opciones:																					
Opción A	Opción B	Opción C	Opción D																		
Verdadero																					

2. TEST PSICOTÉCNICO DE APTITUDES ESPACIALES

MAESTRÍA EN “DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS”

TESISTA: Ing. Viviana Jackeline Morquecho Calle

NOMBRE DEL DOCUMENTO:

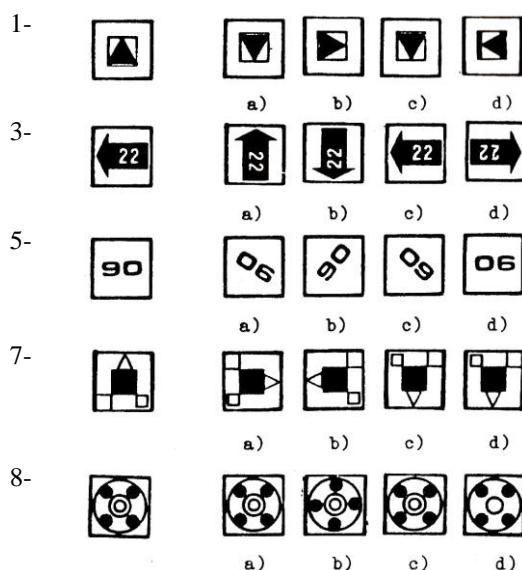
TEST PSICOTÉCNICO DE APTITUDES ESPACIALES

ALUMNO: _____

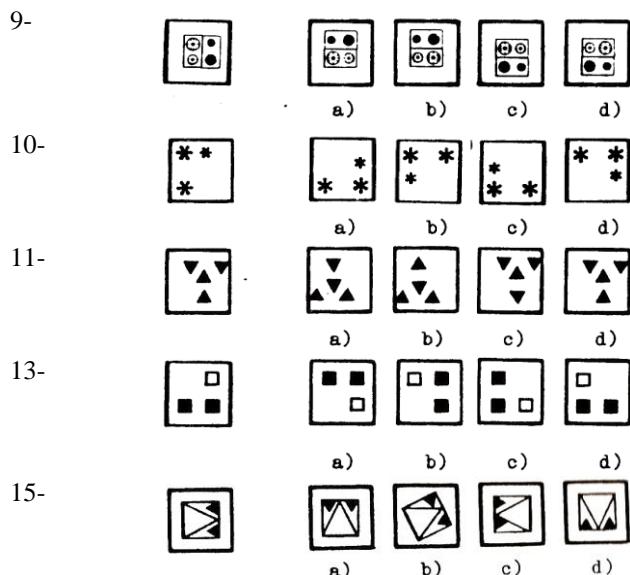
FUENTE DEL TEST: <http://www.tests-gratis.com/tests-de-aptitud-espacial.htm>

Ejercicios de Rotación de Figuras:

- ¿Cuál es la figura distinta a la del modelo?:



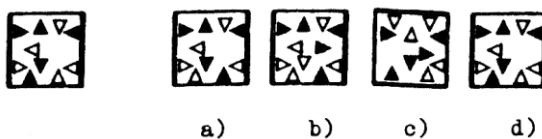
- ¿Cuáles son las figuras iguales al modelo?



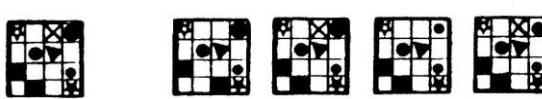
Ejercicios de Figuras Idénticas:

- ¿Cuál es la figura idéntica a la modelo?:

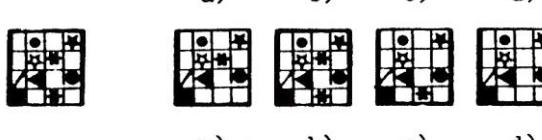
2-



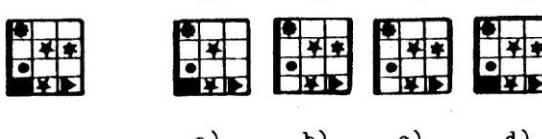
3-



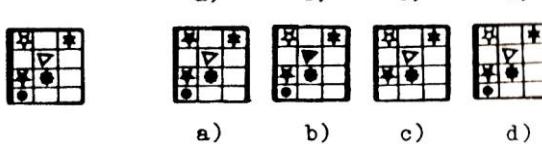
6-



7-

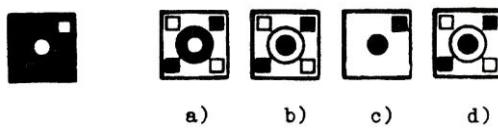


8-



- ¿Qué figura es el negativo de la propuesta?:

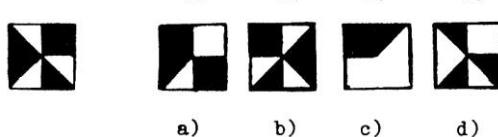
9-



10-



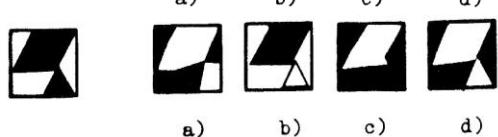
11-



14-



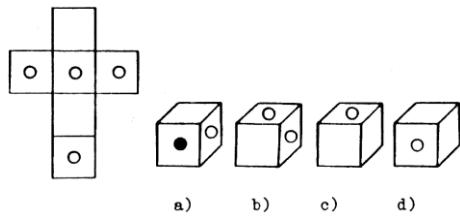
15-



Ejercicios de Desarrollo de Superficies:

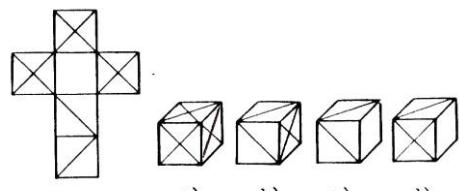
-¿Qué construcción surgirá de este desarrollo?:

1-



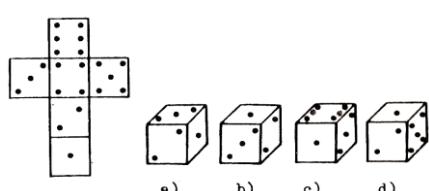
a) b) c) d)

3-



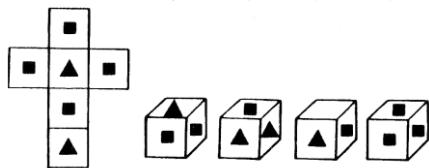
a) b) c) d)

4-



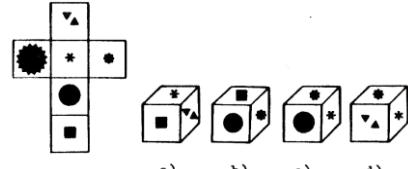
a) b) c) d)

5-



a) b) c) d)

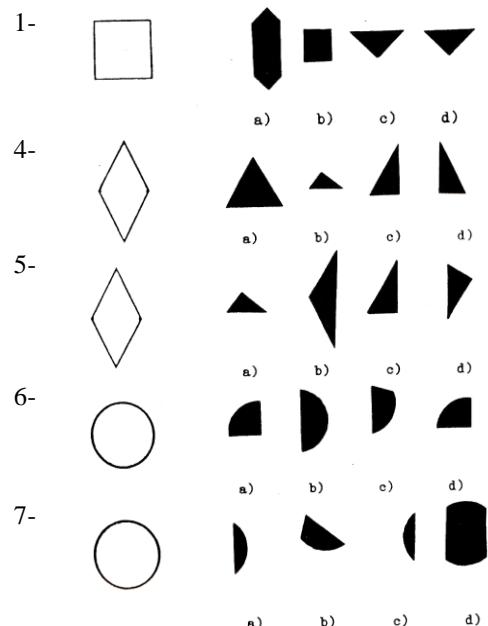
7-



a) b) c) d)

Ejercicios de Completamiento de Superficies:

- Con tres trozos de la derecha se puede armar la figura de la izquierda, identifique el trozo que sobra.





3. GUÍA DIDÁCTICA

DESARROLLO DE LA INTELIGENCIA ESPACIAL CON ÁLGEBRA LINEAL Y REALIDAD AUMENTADA



Guía Didáctica del Estudiante

Autora: Jackeline Morquecho Calle

Tesis previa a la obtención del Título de Master en Docencia de las Matemáticas

"LABORATORIO EXPERIMENTAL CON TECNOLOGÍA DE REALIDAD AUMENTADA
PARA LA TRANSICIÓN DEL TRAZADO DE ELEMENTOS EN EL PLANO DE DOS DIMENSIONES
A LA ABSTRACCIÓN TRIDIMENSIONAL
EN EL APRENDIZAJE DE ÁLGEBRA LINEAL"

1. REPRESENTACIÓN ESPACIAL

Sistema Coordenado

Origen y ejes	A un punto en el espacio se le toma como el origen y se trazan tres rectas perpendiculares a las que se denominan eje x, eje y, eje z. Estos ejes dividen al plano en octantes los cuales se nombran en sentido contrario a las manecillas del reloj.
Sistema derecho	Se refiere al orden en el que se toman a los ejes.

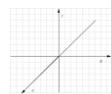


Figura 1 Sistema de Ejes Coordenados

Planos coordenados	Los ejes determinan tres planos llamados: plano xy, plano yz y plano xz.
---------------------------	--



Figura 2 Plano xy



Figura 3 Plano yz



Figura 4 Plano xz

Punto en el espacio

Coordenadas	Se representa por una triada que corresponden a las proyecciones sobre los ejes.
$P(x_1, y_1, z_1)$	



Figura 5 Coordenadas de un punto

Representación	Se utiliza el concepto de una caja para abstraer la representación geométrica del punto en el espacio
-----------------------	---

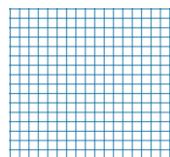
Tabla Conceptual 1: Representación Espacial

(Grossman 245) (Stewart, Cálculo de Varias Variables 765 (160 pdf))

Actividades con Realidad Aumentada

1. En el siguiente marcador:

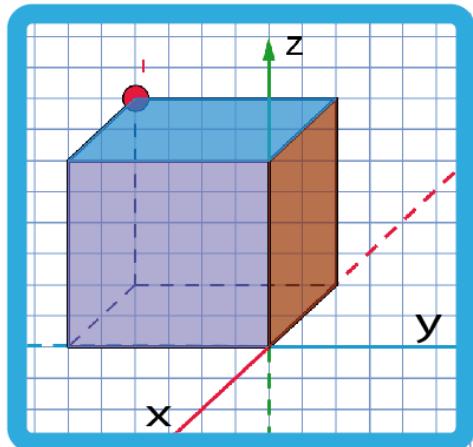
- Seleccione algún punto de referencia en el que usted desearía estar ubicado.
- Desde el punto anterior bosqueje los ejes coordenados en la cuadrícula
- Coloque los demás objetos presentes en el paisaje en los octantes correspondientes.



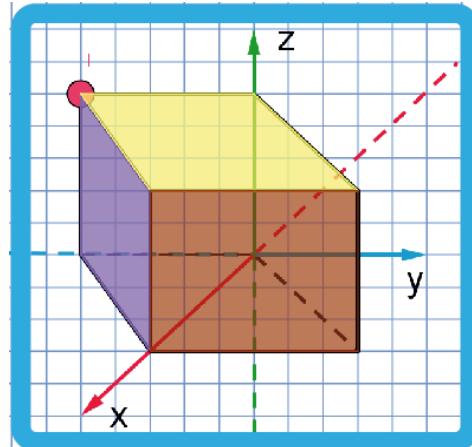
Marcador 1 Ubicación de ejes [id044]

2. Determine en caso de ser posible:

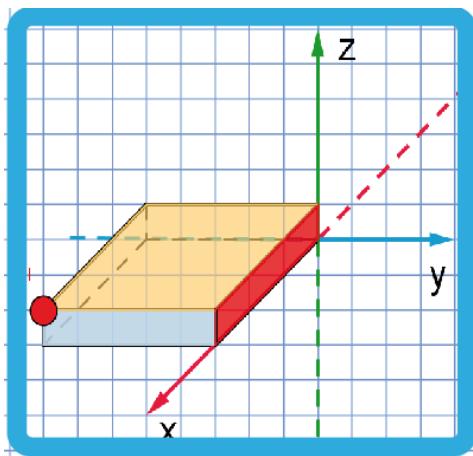
- El octante en el que se encuentra el punto I en cada representación y sus coordenadas.
Justifique los casos en que no se puede.



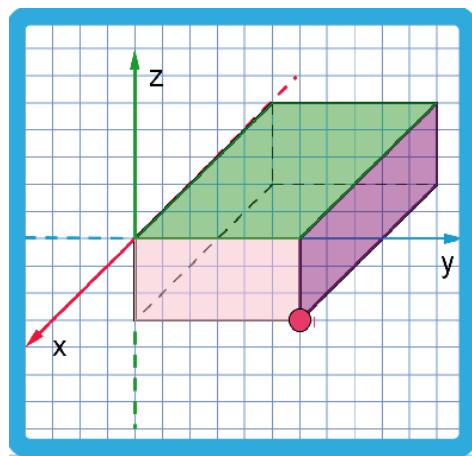
Marcador 2 Identificación de Octante opción I [id004]



Marcador 3 Identificación de Octante opción II [id005]

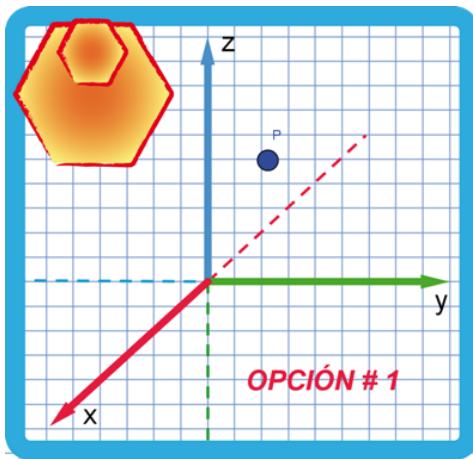


Marcador 4 Identificación de Octante opción III [id006]

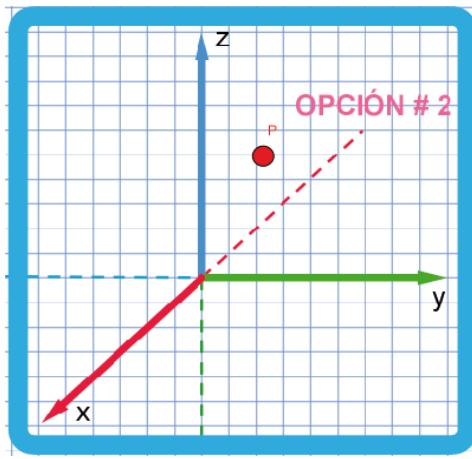


Marcador 5 Identificación de Octante opción IV [id007]

3. Determine en caso de ser posible las coordenadas de los siguientes puntos, justifique sus respuestas.

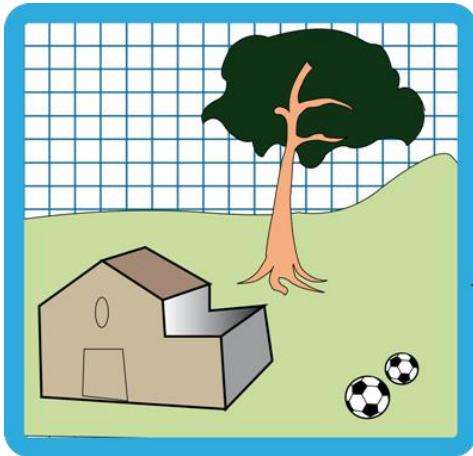


Marcador 6 Coordenadas de punto en primer octante [id008]



Marcador 7 Coordenadas de punto en tercer octante [id009]

4. Determine si las asignaciones de ejes están correctas. Justifique sus respuestas.



Marcador 8 Asignación de ejes [id043]

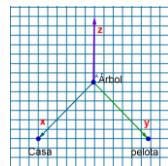


Figura 6: Opción I de asignación

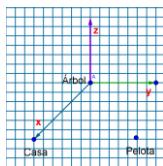


Figura 7: Opción II de asignación

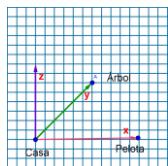


Figura 8: Opción III de asignación

Ejercicios Autónomos

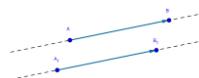
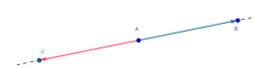
1. Grafique los siguientes puntos en un sistema de coordenadas cartesianas y determine el octante en el que se encuentra
 - a. $P(3,2,6)$
 - b. $Q(-4,-2,6)$
2. Determine las coordenadas de un punto que se encuentre sobre el plano xy
3. Determine las coordenadas de un punto que se encuentre sobre el plano yz
4. Indique si es falso o verdadero los siguientes enunciados
 - a. El punto $P(0,0,-5)$ se encuentra sobre el eje z
 - b. El punto $P(3,0,8)$ se encuentra sobre el plano xy
 - c. Los puntos $Q(0,-2,0)$ y $T(0,9,0)$ se encuentran ambos sobre el mismo eje

Proyectos a Desarrollar:

Seleccione un proyecto para desarrollar y compartir con los compañeros

1. Elabore una maqueta que represente el sistema de ejes coordenados
2. Construya un ambiente de su casa en los que se distinga los planos xy , yz , xz , así como ciertos octantes. Puede utilizar cualquier medio de representación (maqueta, fotografías, dibujos, etc.)
3. Ubique un lugar que posea ocho ambientes o habitaciones dispuestas como los ocho octantes del espacio. Describa la experiencia de colocar en cada ambiente a la vez un reproductor de audio, es decir, usted ubicado en el "primer octante" describa la forma en que escucha la reproducción que proviene de los "otros octantes".
4. Utilice un software que le permita representar puntos en el espacio. Describa la experiencia de manipular las coordenadas de los puntos. Asocie dicho comportamiento con objetos de su ambiente real.

2. INTRODUCCIÓN A VECTORES

Magnitudes	Escalares	Magnitudes físicas que se indican mediante un número acompañado de su unidad (tiempo, masa, densidad)
	Vectoriales	Magnitudes físicas que además de la cantidad se requiere una dirección (velocidad, aceleración)
Definición	Origen	Punto de aplicación o punto exacto donde actúa el vector
	Módulo	Longitud o tamaño del vector
	Dirección	La orientación en el espacio de la recta que lo contiene
	Sentido	Indica con una punta de flecha situada en el extremo del vector
Representación Gráfica	 <p>Figura 9: Representación Gráfica de un Vector</p>	
Tipos	Equivalentes	Tienen igual longitud y dirección, sin importar su ubicación.
	 <p>Figura 10: Vectores equivalentes</p>	
	Cero	de longitud cero, no tiene dirección natural, se le puede asignar cualquiera según el problema a tratar
Tipos	Negativo / Opuesto	Los vectores opuestos tienen el mismo módulo, dirección y distinto sentido
	 <p>Figura 11: Vectores Opuestos</p>	

Vector de Posición

une el origen de coordenadas O con un punto P se llama vector de posición del punto P



Figura 12: Vector Posición 3D



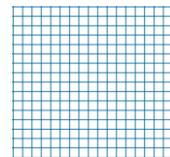
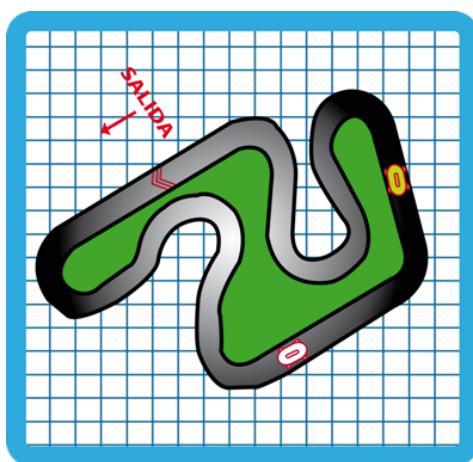
Figura 13: Vector Posición 2D

Tabla Conceptual 2: Introducción a Vectores

Fuente conceptual (ICFM Instituto de Ciencias Físicas y Matemáticas),(Bragado)

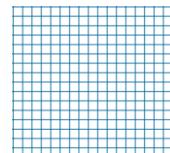
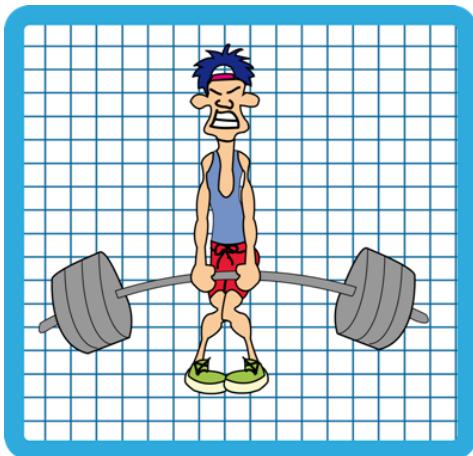
Actividades con Realidad Aumentada

1. El marcador describe un circuito de karts en el cual se ubica el punto de partida, la dirección de la carrera y a dos competidores.
 - a. Trace un sistema de coordenadas en dos dimensiones con el origen en el punto de partida y cuyo eje x sea paralelo a la dirección de la carrera.
 - b. Trace un conjunto de vectores consecutivos que describan la trayectoria del competidor de color blanco.
 - c. Trace el vector de desplazamiento total correspondiente a ambos competidores y determine el cuadrante en el que se encuentran cada uno.
 - d. Trace un vector que determine la distancia entre los dos competidores.

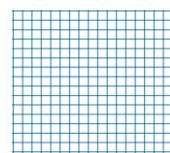
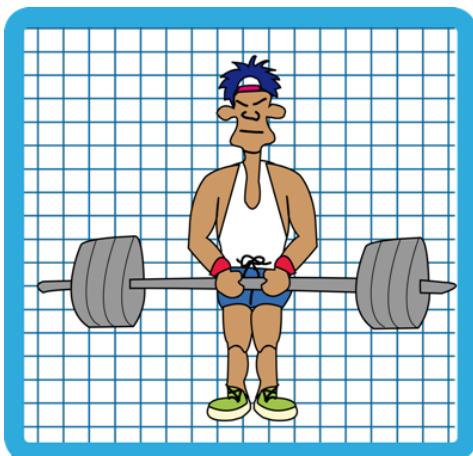


Marcador 9: Circuito de Karts [id045]

2. Se toma de referencia para los ejes coordenados la esquina de una habitación cuyas dimensiones son 6m. x 6m.
 - a. Trace los ejes coordenados de tres dimensiones correspondientes.
 - b. Determine las coordenadas de la ubicación de un hombre que está en el centro de la habitación levantando unas pesas
 - c. Represente gráficamente el efecto que se presentará sobre la barra al aplicar una fuerza como se determina en cada una de las siguientes figuras.
 - d. Bosqueje el vector correspondiente al peso.

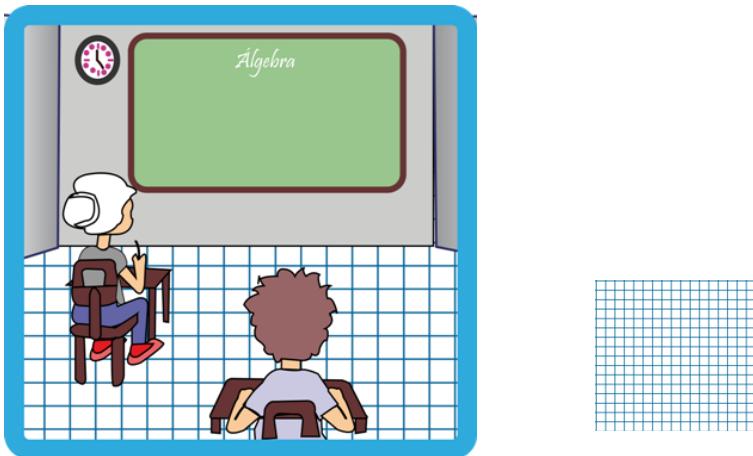


Marcador 10: Representación vectorial de la Fuerza Opción I [id019]



Marcador 11: Representación vectorial de la Fuerza Opción II [id020]

El siguiente marcador representa la distribución de algunos objetos en un salón de clase.



Marcador 12: Distribución de objetos en un salón de clase [id021]

- Trace un sistema coordenado 3D con el eje x paralelo al pizarrón y con el origen en el punto de ubicación del joven.
- Bosqueje el vector que corresponde a la posición de los siguientes objetos (reloj, señorita, la palabra "álgebra") respecto al observador (el joven).
- Determine la representación correcta de los objetos: reloj (R), señorita (M) y joven (H) en el sistema coordenado en dos dimensiones, al visualizar el mismo ambiente pero desde un punto muy alto.



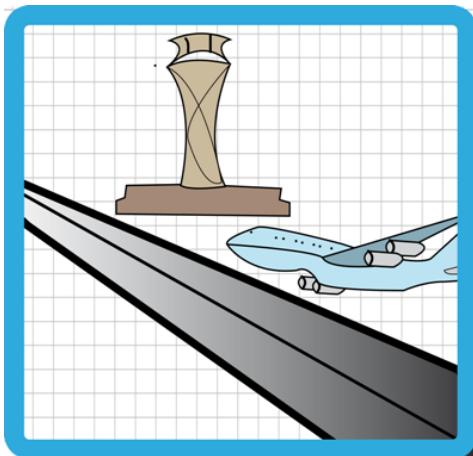
Figura 14: Distribución de objetos 2D en un salón, opción I



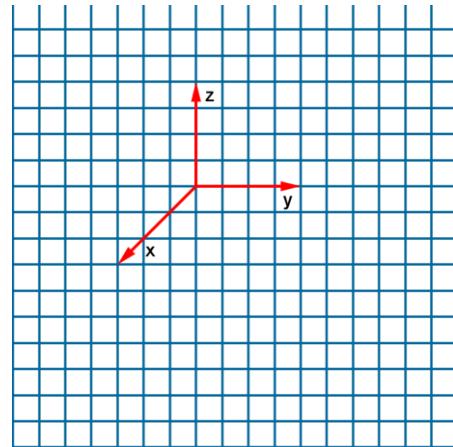
Figura 15: Distribución de objetos 2D en un salón, opción II

- Se ha determinado un sistema coordenado con el eje y paralelo a la pista de aterrizaje y con el origen en la base de la torre de control.
 - Bosqueje algunos vectores que representen la posición del avión a medida de que va aterrizando.
 - Determine los octantes en los que se encuentran cada vector bosquejado.

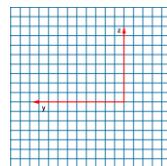
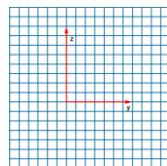
- c. Grafique el vector que represente la posición más cercana del avión a la base de la torre.



Marcador 13: Vectores de posición de avión al aterrizar [id022]



- d. Bosqueje diferentes ubicaciones del avión durante el aterrizaje de acuerdo a los sistemas de coordenadas de dos dimensiones planteados.



Ejercicios Autónomos

Dado el siguiente vector a trace lo indicado en cada numeral.

1. $-a$
2. Un vector equivalente
3. Un vector con el sentido opuesto
4. Un vector con diferente dirección
5. Un vector con igual magnitud y diferente dirección



Proyectos a Desarrollar:

Seleccione un proyecto para desarrollar y compartir con los compañeros

1. Realice una colección de fotografías en los que se clasifique diferentes magnitudes en escalares y vectoriales.
2. Construya una pista para un juguete a control remoto, un ejemplo de trayectoria la puede encontrar en el marcador del ejercicio 1. Coloque una pelota de ping-pong sobre el auto y recorra con este la pista procurando mantener igual velocidad durante todo el trayecto. Detenga abruptamente el auto en diferentes puntos de la trayectoria y describa mediante vectores lo ocurrido con la pelota en cada ocasión.
3. Grabe un video en el que se presente a una persona moviéndose con una velocidad constante de 4m/s.y a otra con una velocidad de 1 m/s. Se requiere registrar en video cada intento hasta conseguir el objetivo.

3. COMPONENTES DEL VECTOR

Componentes del vector

Son las proyecciones sobre cada uno de los ejes, son vectores perpendiculares entre si y su suma es igual al vector original

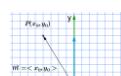


Figura 19: Componentes de un vector en 2D

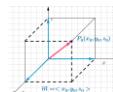


Figura 20: Componentes de un vector en 3D

Norma

Es la longitud del vector, se le denota con doble barra, se le llama también magnitud o módulo.

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Están sobre los ejes coordinados con una magnitud de una unidad.



Figura 21: Vectores unitarios 2D



Figura 22: Vectores unitarios 3D

Vectores unitarios

Componentes

$$i = < 1, 0 >$$

$$j = < 0, 1 >$$

$$i = < 1, 0, 0 >$$

$$j = < 0, 1, 0 >$$

$$k = < 0, 0, 1 >$$

Vectores en función de vectores unitarios

$$v = v_x i + v_y j$$

$$v = v_x i + v_y j + v_z k$$

El vector unitario de otro dado, es el que tiene la misma dirección y sentido pero de magnitud igual a 1

$$v = \frac{v}{|v|}$$

Cosenos directores

En el plano

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v}$$

$$\cos \beta = \frac{v_y}{v}$$

$$v = < v \cos \alpha, v \cos \beta >$$

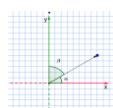


Figura 23: Ángulos y Cosenos directores 2D

En el espacio

$$\cos \alpha = \frac{V_x}{v}; \cos \beta = \frac{V_y}{v}; \cos \gamma = \frac{V_z}{v}$$

$$v = \langle v \cos \alpha, v \cos \beta, v \cos \gamma \rangle$$



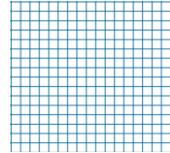
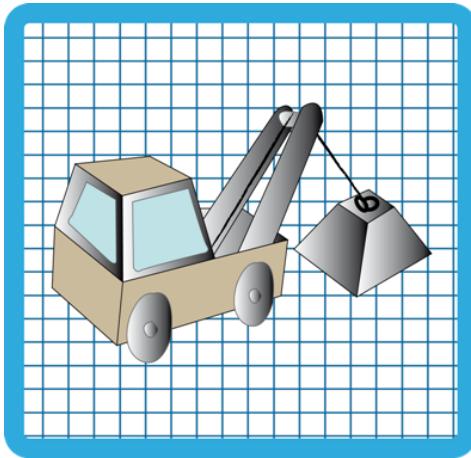
Figura 24: Ángulos y Cosenos directores 3D

Tabla Conceptual 3: Componentes de un Vector

(ICFM Instituto de Ciencias Físicas y Matemáticas), (Bragado 18) (Stewart, Cálculo de varias variables 782)

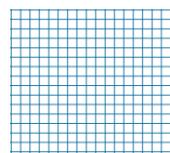
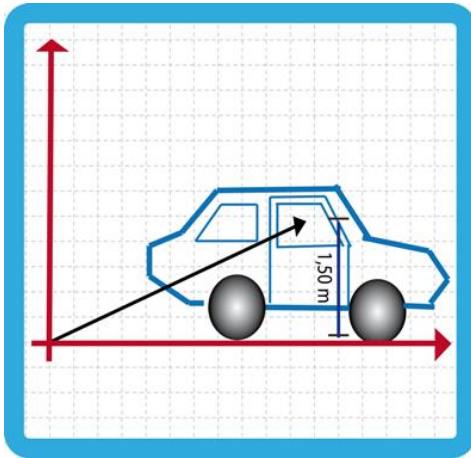
Actividades con Realidad Aumentada

1. Una grúa aplica sobre un objeto una fuerza $F = 4i - 7j + 10k$.
 - a. Trace un sistema coordenado con el origen en el punto de aplicación de la fuerza.
 - b. Grafique el vector Fuerza.
 - c. Determine la magnitud de dicha fuerza



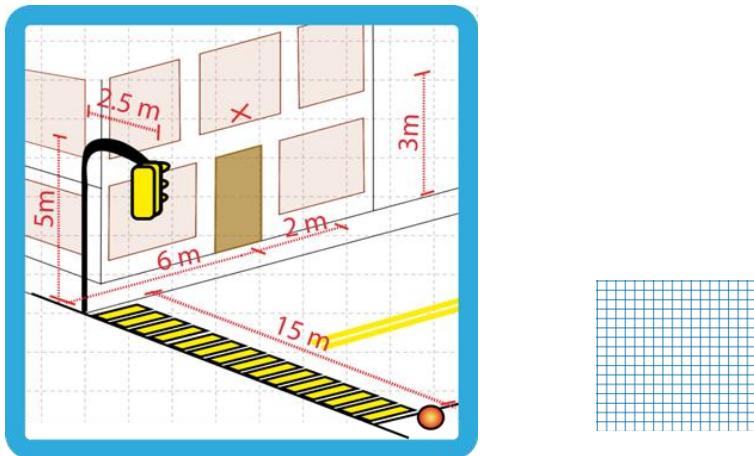
Marcador 14: Aplicación de una fuerza con una grúa [id031]

2. Un coche avanza en línea recta, con una velocidad constante de 3 m/s, determine las componentes del vector que representa la posición del pasajero respecto al punto de partida a los 4s.



Marcador 15: Vector Posición de un Auto en movimiento [id016]

3. Desde la ventana central de una casa se observa un semáforo, una pelota y una bicicleta
- Trace un sistema coordenado con el origen en la ventana de observación.
 - Determine las componentes del vector posición de cada objeto respecto al punto de visión
 - Calcule la distancia correspondiente.

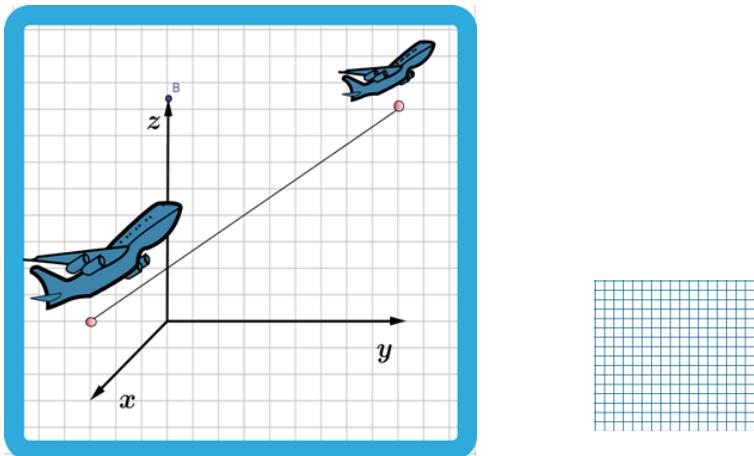


Marcador 16: Componentes de Vector Posición [id017]

4. Un avión se mueve en el tiempo de tal manera que el vector posición cambia constantemente, asuma que las componentes del mismo se representan de la siguiente manera:

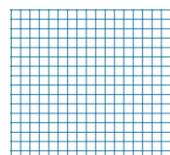
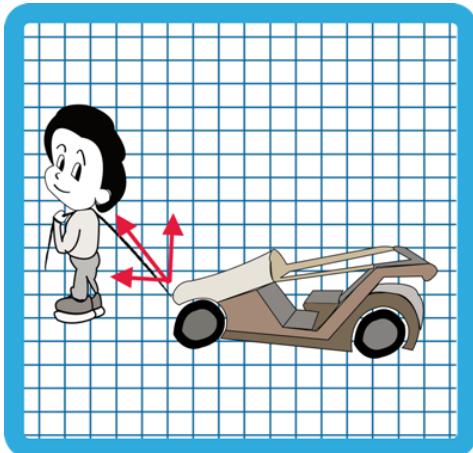
$$p = \langle 2 - t, -1 + 2t, 2 + t \rangle$$

- Determine los vectores de posición correspondientes a los segundos 0 al 4.
- Determine los octantes en los que se encuentra en el segundo 0 y 1.
- ¿En qué segundo el avión pasa al segundo octante del sistema de referencia?



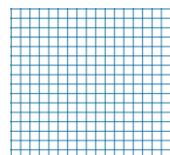
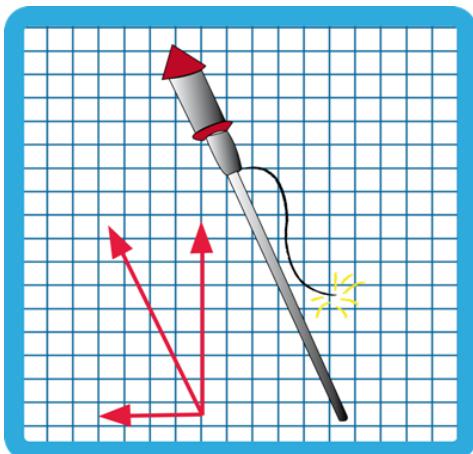
Marcador 17: Ubicación de un avión en movimiento [id024]

5. Una persona jala un coche de madera con una cuerda con un ángulo de 30° , si el niño aplica una fuerza de 40N. Con un sistema de referencia en 2D, determine la fuerza que permite que el coche se mueva horizontalmente y la fuerza que tiende a levantar al choche.



Marcador 18:Descomposición de vectores [id025]

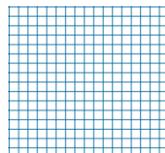
6. Se lanza un cohete pirotécnico con un ángulo de inclinación de 75° respecto al suelo con una velocidad V_0 .
- a. Determine las componentes del vector velocidad correspondiente en un sistema 2D.



Marcador 19:Descomposición de vectores [id027]



- b. Describa con un gráfico o de forma verbal la diferencia de la trayectoria del cohete si se modifica el ángulo de inclinación.



Ejercicios Autónomos

1. Defina las componentes del vector que va desde el punto $P(1,2,3)$ hasta $Q(3,5,-1)$
2. Determine la norma de $a = \langle 5, -2, 4 \rangle$
3. Exprese el vector $s = \langle -15, 6, -24 \rangle$ en función de los vectores unitarios.
4. Calcule el vector unitario de $b = \langle 12, 2, -74 \rangle$
5. Dado $P(-5, 4, 7)$ y $Q(8, -2, 7)$ encuentre el vector unitario de dirección opuesta a QP
6. Encuentre la magnitud de los cosenos directores de $c = -3i - 5j - 3k$
7. Exprese el vector $c = 7i - 15j - 8k$ en función de los cosenos directores (Stewart, Cálculo de varias variables)

Proyectos a Desarrollar:

Seleccione un proyecto para desarrollar y compartir con los compañeros

1. Registre en video el lanzamiento de una pelota con un ángulo respecto al suelo que usted elija, registre el efecto de cambiar el ángulo o la velocidad de lanzamiento, asocie los resultados del recorrido de la pelota con las componentes del vector velocidad inicial.
2. Realice una simulación en software de un objeto en movimiento. Se debe manipular o controlar el movimiento de tal forma que se distinga el instante en el que atraviesa los octantes de referencia.
3. Elabore una maqueta con una pista de autos, ubique un sistema de referencia de tal forma que la trayectoria del objeto pase por todos los octantes. Registre en video los resultados o presente la maqueta.

4. ÁLGEBRA VECTORIAL

Relación entre vectores

Equivalencia Dos vectores son iguales si sus componentes son iguales

$$a = b$$

$$a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z$$

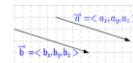


Figura 25: Equivalencia de vectores

Paralelismo / proporcionalidad Son paralelos o proporcionales si la división entre sus componentes resulta una misma constante

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = k$$



Figura 26: Condición de Paralelismo

Suma geométrica PROCESO 1: Se colocan los puntos iniciales juntos, se dibuja un paralelogramo, el resultado es el vector sobre la diagonal

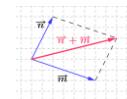


Figura 27: Suma geométrica, proceso I

Suma

PROCESO 2: Trazar los vectores en forma anidada, el vector resultante va desde el primer punto inicial hasta el último punto final

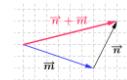


Figura 28: Suma geométrica, proceso II

Suma Algebraica Se suman las componentes correspondientes

$$a = u + w$$

$$a = \langle u_1, u_2 \rangle + \langle w_1, w_2 \rangle$$

$$a = \langle u_1 + w_1, u_2 + w_2 \rangle$$

Resta

Resta geométrica PROCESO 1: se cambia la resta por una suma con el vector opuesto del vector sustraendo.

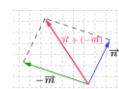


Figura 29: Resta geométrica, proceso I

PROCESO 2: vectores con los puntos iniciales iguales, el resultado va desde el extremo final del sustraendo hasta el extremo final del minuendo



Figura 30: Resta geométrica, proceso II

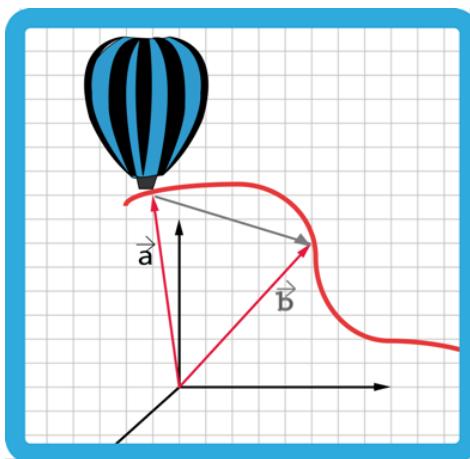
Resta algebraica	Las componentes del vector resultante son la resta de las componentes correspondientes de los vectores	$a = u - w$ $a = \langle u_1, u_2 \rangle - \langle w_1, w_2 \rangle$ $a = \langle u_1 - w_1, u_2 - w_2 \rangle$
Producto	es un vector que tiene la misma dirección pero un módulo que es m veces mayor	
División	Igual al anterior pero de módulo m veces menor	

Figura 31: Multiplicación por un escalar

Tabla Conceptual 4: Álgebra Vectorial (ICFM Instituto de Ciencias Físicas y Matemáticas)(Grossman)

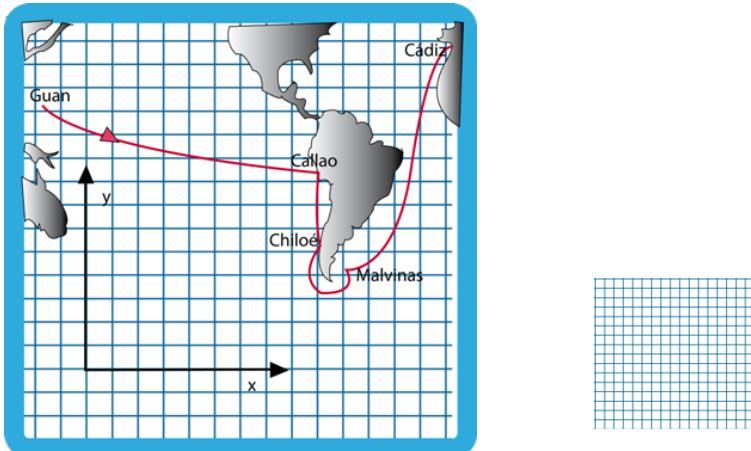
Actividades con Realidad Aumentada

- Si un globo aerostático viaja con la trayectoria indicada en la figura, determine el vector desplazamiento correspondiente a dos instantes en el tiempo, cuya posición inicial y final corresponde a los vectores $a = \langle 100, 50, 500 \rangle$ y $b = \langle 150, 400, 450 \rangle$ respectivamente. (Canarias)



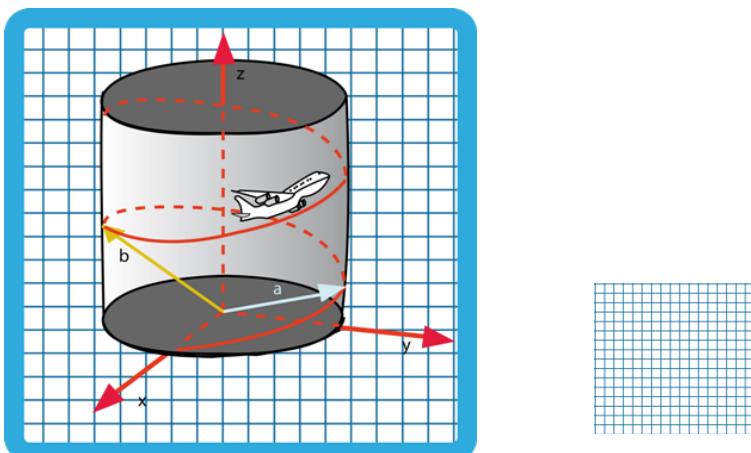
Marcador 20: Vector de desplazamiento de un Globo [id023]

2. Dada la siguiente ruta de un navío determine las componentes de los **vectores de desplazamiento** que corresponden al viaje entre cada puerto con el siguiente, así como también el vector desplazamiento total del trayecto. Consideré el sistema de referencia marcado.



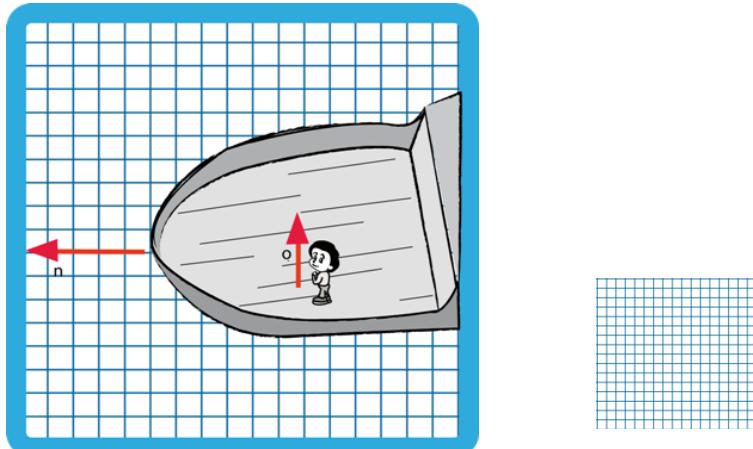
Marcador 21:Desplazamiento de un navío [id026]

3. En una exhibición de aviones se realiza la acrobacia descrita en la figura. Si $a = <0,500,50>$ y $b = <0, -500,100>$ son los vectores de posición del avión a los 3 y 7 s respectivamente.
- Determine el vector de "velocidad media" correspondiente a este intervalo de tiempo. (Si d es el vector de desplazamiento de un objeto, el vector de "velocidad media" se determina con la relación $v = \frac{d}{t} = \frac{1}{t} d$). Fuente conceptual(Canarias)
 - Grafique los vectores de desplazamiento y de velocidad



Marcador 22:Desplazamiento y velocidad media de un avión [id028]

4. Una persona camina al oeste en la cubierta de un barco a 3 millas/hora. El barco se mueve al norte a una velocidad de 22 millas/hora, encuentre y grafique el desplazamiento y la velocidad con la que se mueve la persona con respecto a la superficie del agua. (Stewart, Cálculo de varias variables)



Marcador 23: Desplazamiento y velocidad relativa [id029]

Ejercicios Autónomos

1. Dado $a = 10i - 15j + 9k$ determine los vectores: $3a$; $\frac{1}{2}a$; $-4a$
2. Encuentre el vector de magnitud 6 que tenga igual dirección a $c = -3i - 5j - 3k$
3. Dados los vectores $u = \langle 1, 8, -4 \rangle$; $v = \langle -6, 3, -1 \rangle$ y $w = \langle 11, 0, -3 \rangle$ determine:
 - a. $|w|$
 - b. $2u - 3v$
 - c. $-u + 2v$

Proyectos a Desarrollar:

Seleccione un proyecto para desarrollar y compartir con los compañeros

1. Realizar una práctica de laboratorio en la que con instrumentos de medición determinen la fuerza resultante para mover diferentes objetos y los efectos de combinar fuerzas y modificar los ángulos de aplicación. Describa la asociación teórica del experimento en un reporte escrito.
2. Experimente en una escalera eléctrica los vectores de velocidad. Calcule la velocidad de la escalera en escalones/min, luego la velocidad de una persona en una escalera fija y luego la velocidad de las dos combinadas respecto a un observador externo. Registre en video el experimento y comente los datos.

5. PRODUCTO PUNTO O ESCALAR

Definiciones Sean u y v dos vectores diferentes de cero en los espacios bi y tridimensional

$$u \cdot v = \begin{cases} u \cdot v \cos \theta & \text{si } u \neq 0 \text{ y } v \neq 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \text{ ó } v = 0 \end{cases}$$

Una segunda definición en función de las componentes

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Ángulo entre vectores Definición.- el ángulo θ determinado por ellos está entre $0 \leq \theta \leq \pi$.

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{u \cdot v}$$



Figura 32: Ángulo entre vectores

Tipo de Ángulo definido por el resultado del producto punto

$$\theta \text{ es } \begin{cases} \text{agudo} & \text{si } u \cdot v > 0 \\ \text{obtuso} & \text{si } u \cdot v < 0 \\ \text{recto} & \text{si } u \cdot v = 0 \end{cases}$$

Vectores ortogonales Son ortogonales o perpendiculares si su producto escalar es 0

$$u \cdot v = 0$$


Figura 33: condición de perpendicularidad

Proyecciones ortogonales Un vector puede expresarse como la suma de dos vectores perpendiculares entre sí.

Se requiere de un vector de referencia sobre el cual se proyectarán.



Figura 34: Vector de referencia para proyección

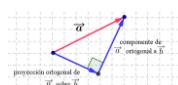


Figura 35: Proyecciones ortogonales

**Proyección
ortogonal sobre
un vector**

Para proyectar un vector a sobre un eje marcado por un vector b

$$\text{proj}_b a = \frac{a \cdot b}{b}$$

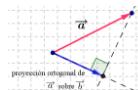


Figura 36: Proyecciones ortogonales sobre un vector

**Componente
ortogonal a un
vector**

$$\text{comp ortogonal}_b a = a - \frac{a \cdot b}{b} b$$

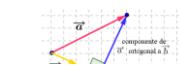


Figura 37: Componente ortogonal a un vector

Trabajo

Aplicación de física en la que se define como trabajo realizado por una fuerza F al desplazar un objeto una distancia D como

$$W=F.D$$

Se utiliza la componente de la fuerza con igual dirección que el desplazamiento (Stewart, Cálculo de varias variables 783)

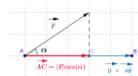


Figura 38: Trabajo de una fuerza

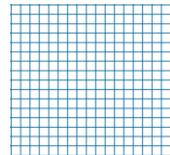
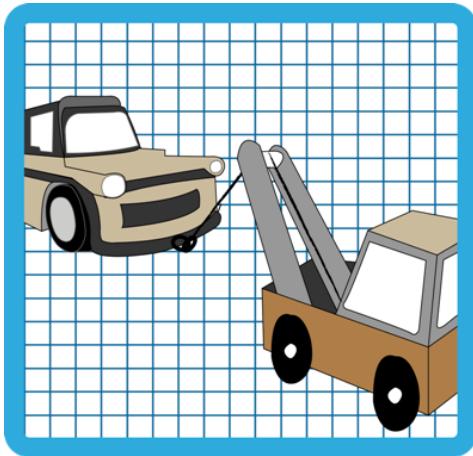
$$W = F \cos \alpha \quad D = F \cdot D$$

Tabla Conceptual 5: Producto Punto o Escalar

(ICFM Instituto de Ciencias Físicas y Matemáticas), (Bragado 19) (Grossman) (Stewart, Cálculo de varias variables)

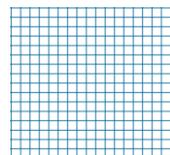
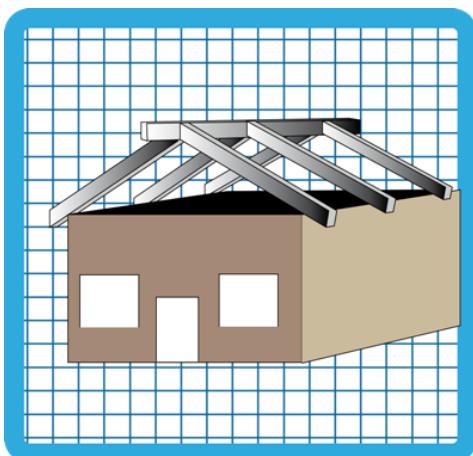
Actividades de realidad aumentada

- Una grúa trasladada a un vehículo en una trayectoria horizontal de 100m, el brazo de la grúa mantiene un ángulo de elevación de 30° y mantiene una fuerza constante de 940 N. Trazar los vectores involucrados en un sistema tridimensional y determine el trabajo realizado.



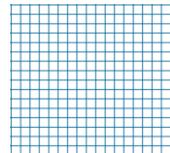
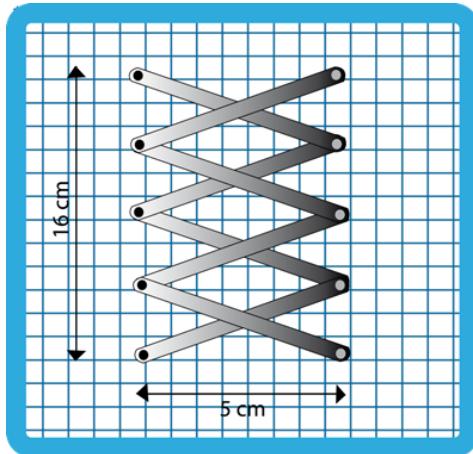
Marcador 24: Trabajo de una fuerza [id030]

2. Para construir un techo se tienen la representaciones de las vigas $v_1 = < 0, -1.5, -2.5 >$ y $v_2 = < 0, 1.5, -2.5 >$
 - a. Represente en un sistema de coordenadas tridimensional
 - b. Determine el ángulo entre ellas
 - c. Determine la longitud que debe poseer las vigas



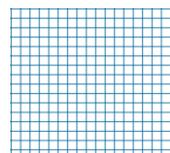
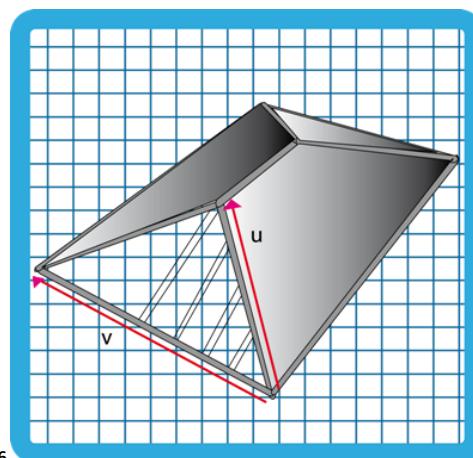
Marcador 25: Ángulo de las vigas de un techo [id032]

3. Se representa un muelle flexible,
 - a. Determine las componentes de los vectores que conforman uno de los cruces
 - b. Representar los vectores en un sistema de dos dimensiones
 - c. Determine el ángulo que forman los vectores anteriores



Marcador 26: Ángulo entre vectores en 2D [id033]

4. En un techo de cuatro aguas, dados los vectores $v = \langle 0, -10, 0 \rangle$ y $u = \langle -1, -5, 1 \rangle$ se desea calcular la longitud de la viga central para el soporte del tejado.



Marcador 27: Proyecciones ortogonales [id034]

Ejercicios Autónomos

1. Calcule el producto punto entre $a = \langle 5,0,-14 \rangle$ y $b = \langle 6,8,-2 \rangle$
2. Determine el ángulo entre los vectores $a = \langle 2,9,4 \rangle$ y $b = \langle 12,-3,7 \rangle$
3. Determine si los vectores $a = \langle 2,2,-1 \rangle$ y $b = \langle 5,-4,2 \rangle$ son ortogonales
4. Halle la proyección de $a = i + j + 2k$ sobre el vector $a = -2i + 3j + k$ y determine su magnitud.
5. Del ejercicio #1, realice un bosquejo de los objetos, fuerzas y del desplazamiento en un esquema de dos dimensiones
6. Un objeto se mueve del punto $P(4,2,0)$ al punto $Q(6,7,2)$ por acción de una fuerza $F = 6i + 8j + 10k$, determine el trabajo realizado.

Proyectos a Desarrollar:

Seleccione un proyecto para desarrollar y compartir con los compañeros

1. Realice una colección de fotografías de su entorno real en la que defina el sistema de referencia, mida las componentes de los vectores y determine ángulos.
2. Registre en video varias situaciones en los que se presente el caminar de dos personas en diferentes direcciones, determine los vectores de desplazamiento y el ángulo de separación en cada caso.
3. Determine la altura del punto más alto de varios objetos de su entorno real que se encuentren inclinados mediante la aplicación de vectores. Presente un informe detallado del proceso.

6. PRODUCTO VECTORIAL

Representación Geométrica

Producto vectorial (cruz)

Definición por determinantes

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$A \times B = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} k$$

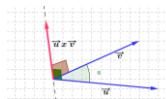


Figura 39: Producto cruz

Dirección

Su dirección es perpendicular a los dos vectores y el sentido se define por la ley de la mano derecha.

Norma

$$\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \alpha$$

Dados dos vectores no nulos, se dicen paralelos si el producto cruz entre ellos es cero.

$$u \times v = 0$$

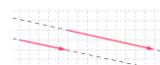


Figura 40: Condición de paralelismo con el producto vectorial

Área del paralelogramo – aplicación Geométrica

Dados dos vectores u y v que son dos lados consecutivos de un paralelogramo, se cumplen las siguientes relaciones.

$$\text{Área} = \|n \times m\|$$



Figura 41: Área de un paralelogramo

Volumen de un paralelepípedo
(Grossman 255)

Triple producto escalar

$$u \cdot v \times w = u \times v \cdot w$$

$$\text{Volumen} = ||u \cdot v \times w||$$

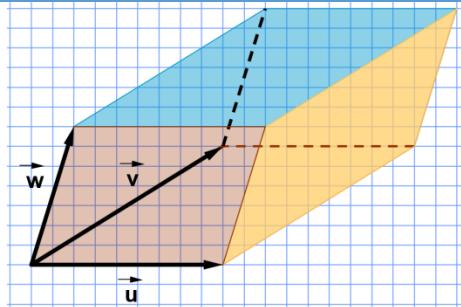


Figura 42: Volumen de un paralelepípedo

Si el triple producto escalar es cero

Vectores coplanares

$$u \cdot v \times w = 0$$

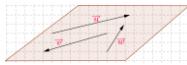


Figura 43: Vectores coplanares

Momento de una Fuerza – aplicación Física (García)

Se denomina momento de una fuerza respecto de un punto, al producto vectorial del vector posición de la fuerza por la componente perpendicular del vector fuerza, trasladados al origen

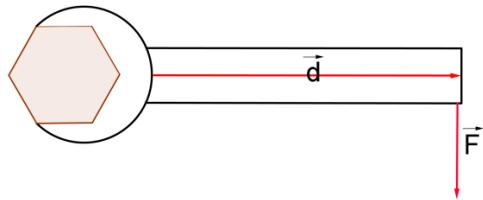


Figura 44: Momento de una Fuerza

El momento es un vector: $M = d \times F$

El módulo es $M = d \times F$

La dirección perpendicular al plano que contiene al punto y a la fuerza

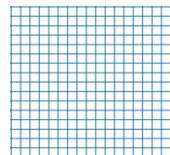
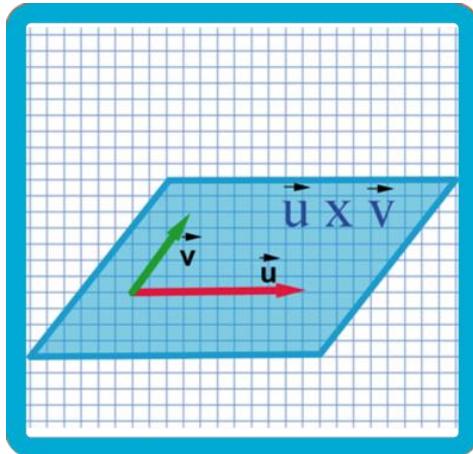
El sentido está dado por (hacia donde gira el tornillo) la ley de la mano derecha.

Tabla Conceptual 6: Producto Vectorial

Fuente: (ICFM Instituto de Ciencias Físicas y Matemáticas)(Stewart, Cálculo de varias variables 791)

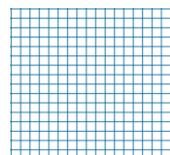
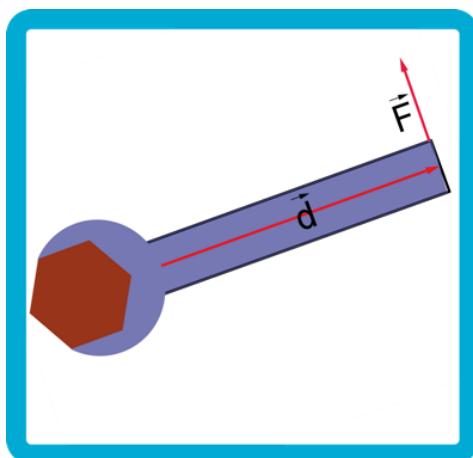
Actividades de realidad aumentada

1. Dado los siguientes vectores representados en un mismo plano realice lo siguiente:
 - a. Trace la correspondiente representación de los mismos en un sistema de referencia 3D.
 - b. Determine la dirección y el sentido del vector resultante del producto vectorial entre ellos y grafique el resultado

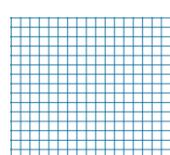
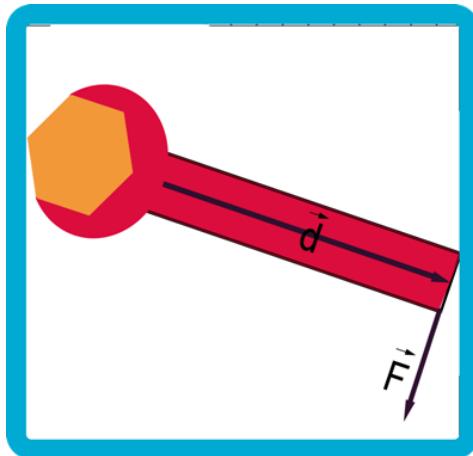


Marcador 28: Producto Vectorial [id012]

2. Grafique los vectores de distancia y fuerza y determine el sentido del vector momento correspondiente a cada representación



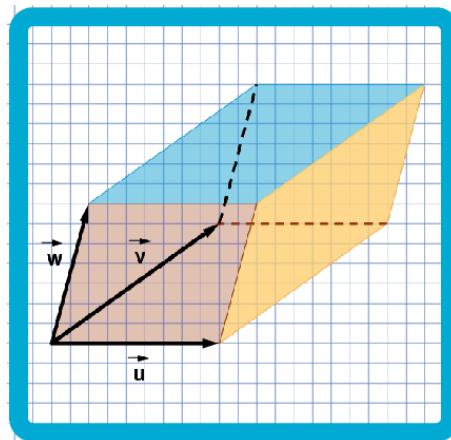
Marcador 29: Momento de una fuerza, opción I [id011]



Marcador 30: Momento de una fuerza, opción II [id010]

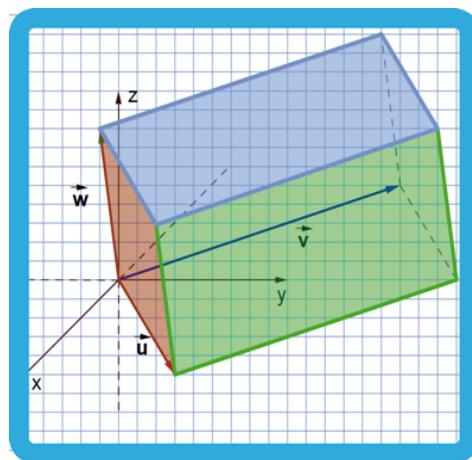
3. Determine el área del paralelepípedo cuyas aristas son los vectores u, v, w

$$u = \langle 0, 5, 0 \rangle \quad v = \langle -2, 1, 3 \rangle \quad w = \langle -7, 0, 0 \rangle$$



Marcador 31: Volumen de un Paralelepípedo [id014]

4. Cuál es la representación correcta en un sistema de referencia para el paralelepípedo determinado por los vectores $u = \langle 4, 7, -1 \rangle, v = \langle -3, 12, 2 \rangle, w = \langle 0, -1, 8 \rangle$ como aristas



Marcador 32: Gráfica de un Paralelepípedo [id015]

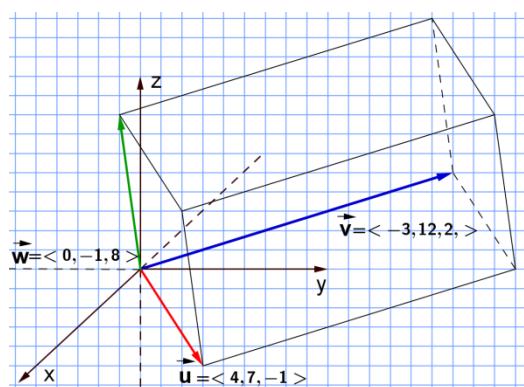


Figura 45: Representación de un paralelepípedo, opción I

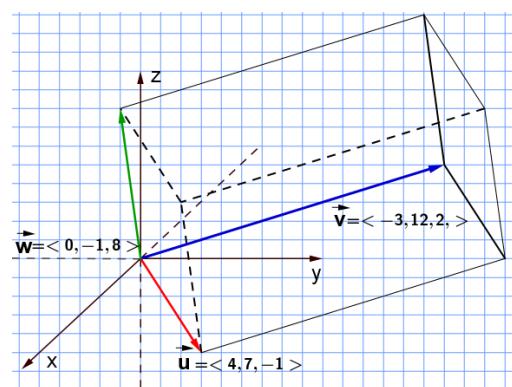


Figura 46: Representación de un paralelepípedo, opción II

Ejercicios Autónomos

1. Calcule el producto vectorial entre $a = \langle 5,0, -14 \rangle$ y $b = \langle 6,8, -2 \rangle$
2. Defina si el conjunto de vectores $a = \langle 15, -6, -2 \rangle$, $b = \langle 1, -5, -12 \rangle$ y $c = \langle 9, -10, -6 \rangle$ son coplanares.
3. Determine el área del triángulo definido por los vectores $a = \langle 2,8,4 \rangle$ y $b = \langle 5, -3,7 \rangle$
4. Determine el volumen del paralelepípedo cuyas aristas están definidas por los vectores $a = \langle 6,3,2 \rangle$ y $b = \langle 2,6,10 \rangle$ y $c = \langle -4,7,7 \rangle$

Proyectos a Desarrollar:

1. Elabore con papel un paralelepípedo y determine el volumen del mismo mediante los vectores de sus aristas, elabore un informe del proceso.
2. Obtenga la imagen de un levantamiento de los linderos de un terreno, en lo posible que sea irregular
 - a. Determine un sistema de referencia en dos dimensiones.
 - b. Fragmente el terreno en triángulos y paralelogramos determinando los vectores correspondientes para el cálculo de su área.
 - c. Calcule la superficie total del terreno.

7. FORMAS DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA

Generalidades

La recta pasa por un punto conocido

$$P_0(x_0, y_0, z_0)$$

Tiene una dirección definida por el vector

$$v = \langle a, b, c \rangle$$

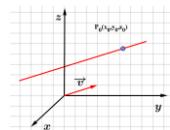


Figura 47: Punto y Dirección de una recta

Ecuación Punto -Dirección

$$PoP = tv$$

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = \langle ta, tb, tc \rangle$$

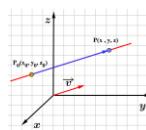


Figura 48: Punto y Dirección de una recta

Ecuación vectorial

$$PoP = tv$$

$$OP_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$$

$$OP = \langle x, y, z \rangle$$

$$P_0P = OP - OP_0$$

$$\langle x, y, z \rangle - \langle x_0, y_0, z_0 \rangle = t \langle a, b, c \rangle$$

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t \langle a, b, c \rangle$$

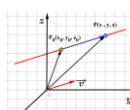


Figura 49: Ecuación Vectorial

Ecuaciones paramétricas

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t \langle a, b, c \rangle$$

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc \rangle$$

$$x = x_0 + ta$$

$$y = y_0 + tb$$

$$z = z_0 + tc$$

Ecuaciones Simétricas

Despejando t de las ecuaciones paramétricas

$$t = \frac{x - x_0}{a}$$

$$t = \frac{y - y_0}{b}$$

$$t = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Intersección

Recta L1

$$x = x_0 + ta$$

$$y = y_0 + tb$$

$$z = z_0 + tc$$

Recta L2

$$x = x_1 + ka$$

$$y = y_1 + kb$$

$$z = z_1 + kc$$

$$x_0 + ta = x_1 + ka$$

$$y_0 + tb = y_1 + kb$$

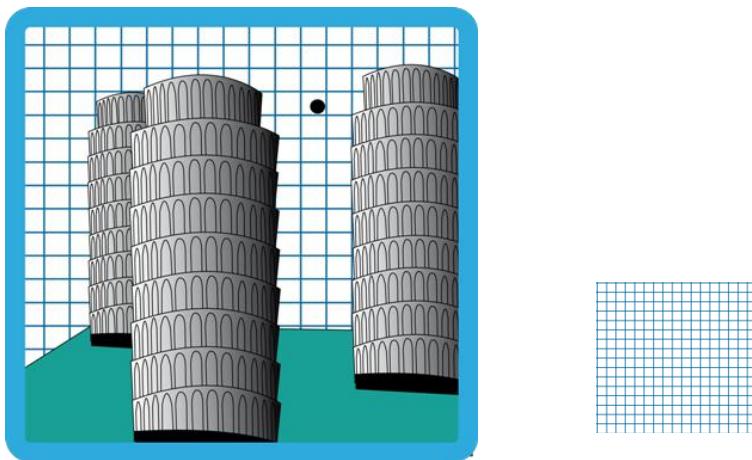
$$z_0 + tc = z_1 + kc$$

Tabla Conceptual 7: Formas de la Ecuación de la Recta en el espacio

(ICFM Instituto de Ciencias Físicas y Matemáticas)(Grossman)

Actividades de realidad aumentada

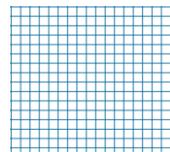
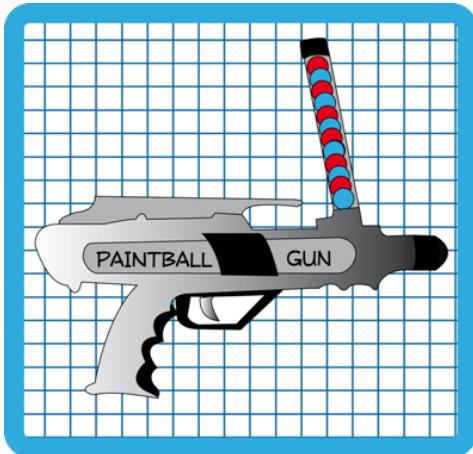
1. Un objeto muy pesado cae desde lo alto de un rascacielos. Considerando que no existen factores que modifiquen su trayectoria realice lo siguiente:
 - a. Trace un sistema de referencia con el origen en el inicio de la trayectoria del objeto.
 - b. Determine el vector de dirección de la trayectoria
 - c. Determine la ecuación de la recta que recorre el objeto en su trayectoria.



Marcador 33: Recta conociendo un punto y dirección [id036]

2. Se dispara una pistola de paintball con una dirección definida por $F = \langle 10, 4, 1 \rangle$. Asumamos que la fuerza es tal que la trayectoria inicial se approxima a una línea recta.

- Determine la ecuación de la recta que define la trayectoria inicial de la bala y
- Grafique la recta en un plano coordenado seleccionando adecuadamente el origen.

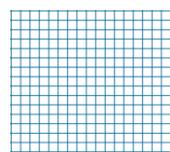
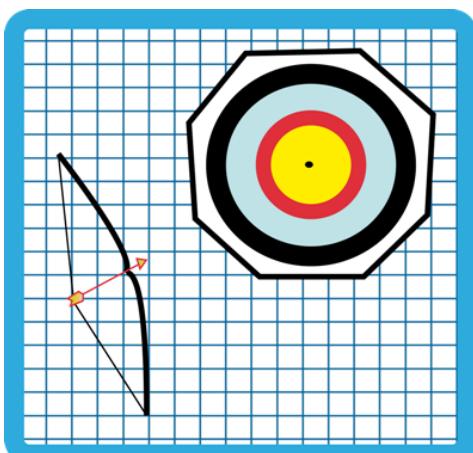


Marcador 34: Recta de trayectoria de bala de pintura [id038]

- Se conoce que una flecha después de su lanzamiento sigue una trayectoria parabólica, sin embargo consideraremos que fue lanzada con tal impulso y que el blanco está lo suficientemente cerca para que la trayectoria sea aproximadamente una línea recta.
 - Grafique un sistema de referencia con la punta de la flecha como origen.
 - Si la recta se parametriza con t en milisegundo mediante

$$\begin{aligned}x &= 2t \\y &= 3t \\z &= \frac{1}{2} t\end{aligned}$$

Y el blanco está ubicado en el punto $6,9, \frac{3}{2}$, determine si el tiro llegó o no al blanco



Marcador 35: lanzamiento de una flecha [id039]

Ejercicios Autónomos

1. Identifique el vector de dirección y un punto de las siguientes rectas

a. $\langle x, y, z \rangle = t \langle 1, -5, -12 \rangle + \langle 24, 5, -21 \rangle$

$x = 8k - 5$

b. $y = 3k + 2$

$z = -9k + 4$

c. $\frac{x-5}{10} = \frac{y+8}{6} = \frac{z-2}{-5}$

2. Determine dos puntos que pertenezcan a la recta

$$\begin{aligned} t &= \frac{x-6}{4} \\ t &= \frac{y-3}{10} \\ t &= \frac{z+4}{2} \end{aligned}$$

3. Determine si el punto Q(9,10,3) pertenece a la recta

$$\begin{aligned} t &= \frac{x-16}{4} \\ t &= \frac{y+8}{10} \\ t &= \frac{z+9}{2} \end{aligned}$$

Proyectos a Desarrollar:

1. Escriba en forma simétrica los casos particulares de las siguientes rectas y elabore una maqueta que represente su posición en el espacio

$x = 8k - 5$

a. $y = 2$

$z = -9k + 4$

$x = 4$

b. $y = 6k - 2$

$z = -9k + 4$

$x = k - 3$

c. $y = 8k + 2$

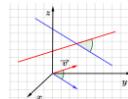
$z = 4$

8. POSICIÓN RELATIVA DE LAS RECTAS

Ángulo entre rectas

Determinado por el ángulo de los vectores de dirección correspondientes

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\|} \right)$$

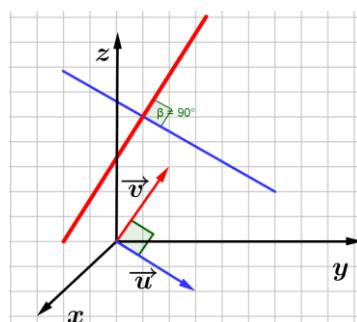


Ortogonales

1. Sus vectores de dirección son perpendiculares

Producto punto entre vectores de dirección es cero

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = 0$$

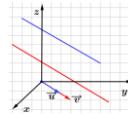


Paralelas

1. Los vectores de dirección son paralelos

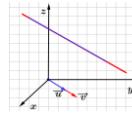
$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{y_0}{y_1} = \frac{z_0}{z_1} = k$$

$$vxu = 0$$



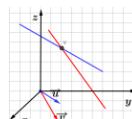
Coincidentes

1. Las rectas son paralelas
2. Un punto cualquiera que pertenece a la una también lo hace a la segunda



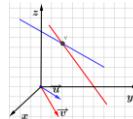
Intersecantes

1. Se determina las ecuaciones paramétricas
2. Determinamos sistema de ecuaciones igualando las incógnitas para determinar el valor de las constantes



1. Ningún punto en común
2. No están contenidas en un mismo plano
3. Sus vectores no son paralelos

Distancia de un punto a una recta



TZ es un vector cualquiera sobre la recta

La norma de la proyección del vector TS sobre TZ

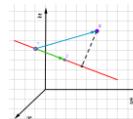


Tabla Conceptual 8: Posición Relativa de Rectas en el espacio

(ICFM Instituto de Ciencias Físicas y Matemáticas)(Grossman)

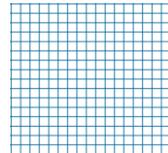
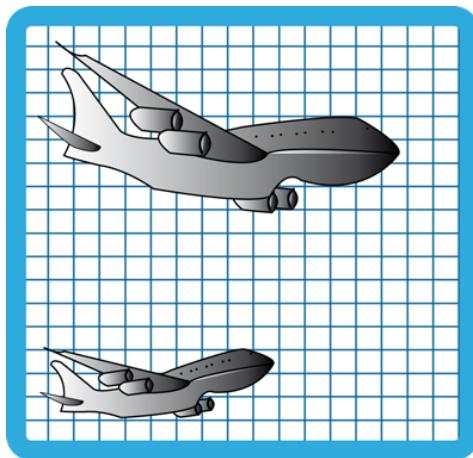
Actividades de realidad aumentada

1. Dos aviones parten con iguales velocidades de dos aeropuertos diferentes con una trayectoria casi lineal descrita por las siguientes rectas.

$$\langle x, y, z \rangle = k \langle 90, 60, 50 \rangle + \langle 120, 480, 150 \rangle$$

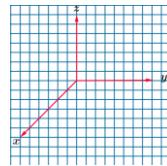
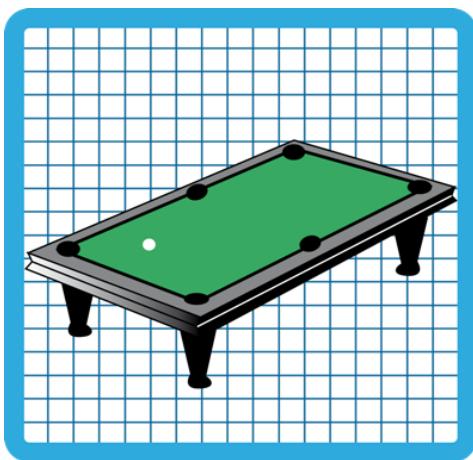
$$\langle x, y, z \rangle = t \langle 50, 160, 50 \rangle + \langle 150, 160, 100 \rangle$$

- a. Grafique las trayectorias en un sistema de referencia
- b. Determine si existe una probabilidad de cruce de las trayectorias.
- c. Determine la ubicación de los aeropuertos respecto al sistema coordenado



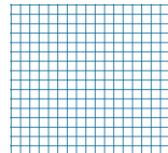
Marcador 36: Recta de trayectoria de bala de pintura [id040]

2. Considerando como origen del sistema de referencia la esquina posterior izquierda. Se golpea una bola de billar ubicada en (210 cm, 40cm, 0cm) de tal forma que ingresa en la buchaca ubicada en (125cm, 130cm, 0cm),
- Grafique los puntos indicados y el plano sobre el cual se está desarrollando el movimiento.
 - Determine la ecuación de la recta que sigue la trayectoria de la bola.
 - Grafique la recta y su vector de dirección.
 - Calcule el ángulo de incidencia respecto al borde de la mesa.



Marcador 37: Recta conociendo dos puntos [id037]

3. Se considera como origen de referencia la esquina derecha de una cancha de fútbol, cuyo ancho es de 45m. La medida oficial del arco es de 7m. de ancho. Un balón ubicado en (15, -18, 0) es pateado al ras del suelo hacia el arco con una trayectoria descrita por la recta $\langle x, y, z \rangle = t \langle -3, -8.7, 0 \rangle + \langle 15, -18, 0 \rangle$
- Determinar el vector de dirección y el punto en que atraviesa el arco.
 - Trazar en un sistema de referencia la distribución de elementos y la recta de la trayectoria



Marcador 38: Recta conociendo dos puntos [id041]

Ejercicios Autónomos

1. Determine el punto de intersección de las rectas en caso de que existan

$$\begin{array}{ll} x = 6k - 15 & x = -2k - 3 \\ y = -3k + 12 & y = 10k + 10 \\ z = 19k + 41 & z = -7k + 4 \end{array}$$

2. Determine la posición relativa de las rectas

$$\begin{array}{ll} t = \frac{x-16}{4} & t = \frac{x+25}{20} \\ t = \frac{y+8}{10} & t = \frac{y-18}{40} \\ t = \frac{z+9}{2} & t = \frac{z+5}{8} \end{array}$$

3. Determine la distancia del punto Q(5,8,10) a la recta $\langle x,y,z \rangle = t\langle -3, -8.7, 0 \rangle + \langle 15, -18, 0 \rangle$

Proyectos a Desarrollar:

1. Obtenga fotografías de rectas en el mundo real que sean paralelas, perpendiculares, intersecantes y oblicuas. Determine un sistema de referencia y defina las ecuaciones respectivas.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Sistema de Ejes Coordenados	162
Figura 2 Plano xy	162
Figura 3 Plano yz	162
Figura 4 Plano xz.....	162
Figura 5 Coordenadas de un punto.....	162
Figura 6: Opción I de asignación	165
Figura 7: Opción II de asignación	165
Figura 8: Opción III de asignación	165
Figura 9: Representación Gráfica de un Vector	167
Figura 10: Vectores equivalentes.....	167
Figura 11: Vectores Opuestos	167
Figura 12: Vector Posición 3D	168
Figura 13: Vector Posición 2D	168
Figura 14: Distribución de objetos 2D en un salón, opción I.....	170
Figura 15: Distribución de objetos 2D en un salón, opción II.....	170
Figura 16: Sistema coordenado 3D para aterrizaje de avión	171
Figura 17: Sistema para aterrizaje, perspectiva I	171
Figura 18: Sistema para aterrizaje, perspectiva II	171
Figura 19: Componentes de un vector en 2D.....	173
Figura 20:Componentes de un vector en 3D	173
Figura 21: Vectores unitarios 2D	173
Figura 22: Vectores unitarios 3D	173
Figura 23: Ángulos y Cosenos directores 2D	173
Figura 24: Ángulos y Cosenos directores 3D	174
Figura 25: Equivalencia de vectores	178
Figura 26: Condición de Paralelismo	178
Figura 27: Suma geométrica, proceso I.....	178
Figura 28: Suma geométrica, proceso II.....	178
Figura 29: Resta geométrica, proceso I	178
Figura 30: Resta geométrica, proceso II	179
Figura 31: Multiplicación por un escalar	179
Figura 32: Ángulo entre vectores	182
Figura 33: condición de perpendicularidad.....	182
Figura 34: Vector de referencia para proyección.....	182
Figura 35: Proyecciones ortogonales	182
Figura 36: Proyecciones orthogonal sobre un vector	183
Figura 37: Componente orthogonal a un vector	183
Figura 38: Trabajo de una fuerza	183
Figura 39: Producto cruz	187
Figura 40: Condición de paralelismo con el producto vectorial.....	187
Figura 41: Área de un paralelogramo.....	187
Figura 42: Volumen de un paralelepípedo.....	188



Figura 43: Vectores coplanares	188
Figura 44: Momento de una Fuerza	188
Figura 45: Representación de un paralelepípedo, opción I	190
Figura 46: Representación de un paralelepípedo, opción II	190
Figura 47: Punto y Dirección de una recta	192
Figura 48: Punto y Dirección de una recta	192
Figura 49: Ecuación Vectorial	192

ÍNDICE DE MARCADORES

Marcador 1 Ubicación de ejes [id044]	163
Marcador 2 Identificación de Octante opción I [id004]	164
Marcador 3 Identificación de Octante opción II [id005]	164
Marcador 4 Identificación de Octante opción III [id006]	164
Marcador 5 Identificación de Octante opción IV [id007]	164
Marcador 6 Coordenadas de punto en primer octante [id008]	164
Marcador 7 Coordenadas de punto en tercer octante [id009]	164
Marcador 8 Asignación de ejes [id043]	165
Marcador 9: Circuito de Karts [id045]	168
Marcador 10: Representación vectorial de la Fuerza Opción I [id019]	169
Marcador 11: Representación vectorial de la Fuerza Opción II [id020]	169
Marcador 12: Distribución de objetos en un salón de clase [id021]	170
Marcador 13: Vectores de posición de avión al aterrizar [id022]	171
Marcador 14: Aplicación de una fuerza con una grúa [id031]	174
Marcador 15: Vector Posición de un Auto en movimiento [id016]	175
Marcador 16: Componentes de Vector Posición [id017]	175
Marcador 17: Ubicación de un avión en movimiento [id024]	175
Marcador 18: Descomposición de vectores [id025]	176
Marcador 19: Descomposición de vectores [id027]	176
Marcador 20: Vector de desplazamiento de un Globo [id023]	179
Marcador 21: Desplazamiento de un navío [id026]	180
Marcador 22: Desplazamiento y velocidad media de un avión [id028]	180
Marcador 23: Desplazamiento y velocidad relativa [id029]	181
Marcador 24: Trabajo de una fuerza [id030]	184
Marcador 25: Ángulo de las vigas de un techo [id032]	184
Marcador 26: Ángulo entre vectores en 2D [id033]	185
Marcador 27: Proyecciones ortogonales [id034]	185
Marcador 28: Producto Vectorial [id012]	189
Marcador 29: Momento de una fuerza, opción I [id011]	189
Marcador 30: Momento de una fuerza, opción II [id010]	189
Marcador 31: Volumen de un Paralelepípedo [id014]	190
Marcador 32: Gráfica de un Paralelepípedo [id015]	190
Marcador 33: Recta conociendo un punto y dirección [id036]	193
Marcador 34: Recta de trayectoria de bala de pintura [id038]	194
Marcador 35: lanzamiento de una flecha [id039]	194
Marcador 36: Recta de trayectoria de bala de pintura [id040]	198
Marcador 37: Recta conociendo dos puntos [id037]	198
Marcador 38: Recta conociendo dos puntos [id041]	199

EVALUACIONES ICFM PERIODO 42 PARA ÁLGEBRA LINEAL

3.1. PRUEBA #3

MATERIA: ALGEBRA LINEAL

TEMA: VECTORES

TIEMPO PARA LA REALIZACION DE LA PRUEBA: 40 minutos

HORARIO DE LA MAÑANA

PUNTAJE: 2 PUNTOS

1. (0.5 puntos) El vector unitario que tiene la misma dirección que el vector $\vec{V} = \langle 3, 4 \rangle$ es:
 - a) $\vec{u} = -3i - 4j$
 - b) $\vec{u} = -\frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j$
 - c) $\vec{u} = -\frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j$
 - d) $\vec{u} = \frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j$
2. (0.5 puntos) El ángulo formado por los vectores:
 $\vec{A} = i + j + k$ y $\vec{B} = 2i + 2j + 2k$ es:
 - a) 0°
 - b) 90°
 - c) 180°
 - d) 360°
3. (0.5 puntos) Dos fuerzas de 200 lb y 250 lb forman un ángulo de $\pi/6$ entre si y están aplicadas a un objeto en el mismo punto. Determine:
 - a) La intensidad o modulo de la fuerza resultante.
 - b) el ángulo que forma con la fuerza de 250 lb.
4. (0.5 puntos). Utilizar el producto vectorial para calcular el área del triángulo de vértices A, B y C
A(0,2,2)
B(2,0,-1)
C(3,4,0)



3.2. PRUEBA# 4

MATERIA: ALGEBRA LINEAL

TEMA: RECTAS

TIEMPO PARA LA REALIZACION DE LA PRUEBA: 40 minutos

HORARIO DE LA MAÑANA

PUNTAJE: 2 PUNTOS

1. (0.5 puntos). Demostrar que la recta que pasa por los puntos $(1, -3, 3)$ y $(2, -1, 0)$ es paralela a la recta que pasa por los puntos $(3, 1, 8)$ y $(6, 7, 17)$

2. (0.5 puntos) . Encontrar la intersección entre las siguientes rectas:

$$L_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad L_2 : \begin{cases} x = 3t \\ y = -\frac{5}{3} - t \\ z = \frac{7}{3} + 2t \end{cases}$$

3. (1 puntos). Hallar la ecuación vectorial, paramétricas y simétricas, si es posible, de la recta que pasa por $C(4, 3, -1)$ y es perpendicular al plano xz



3.3. PRUEBA # 5

MATERIA: ALGEBRA LINEAL

TEMA: PLANOS

TIEMPO PARA LA REALIZACION DE LA PRUEBA: 1 Hora

HORARIO DE LA MAÑANA

PUNTAJE: 4 PUNTOS

1. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $(2, -1, 1)$ y $(3, 1, 2)$ y es paralelo al eje x. Trazar la grafica. (1 PUNTO)
2. Encontrar el punto de intersección de la recta $OP : x=1-t, y=2-3t, z=4+t$ con el plano $x - 3y + 2z - 6 = 0$ (1 PUNTO)
3. Encontrar la ecuación del plano que pasa por tres puntos: $P(1, -2, 1)$ $Q(1, 3, 5)$ $R(0, 6, 1)$. Trazar la grafica. (1 PUNTO)
4. Encontrar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano $3x - 2y + z = 5$ que pasa por el punto $(4, 1, 5)$. (1 PUNTO)

4. INDICADORES DE CALIDAD DE SOFTWARE

Los criterios son aplicados tanto para la aplicación de software como para la guía didáctica considerada como el medio de interacción con la aplicación. Las opciones para la tercera y cuarta columna son en escala del 1-5

Nivel Pedagógico (Medina), (Gonzalez)

Presentación del contenido	1. El lenguaje utilizado es coherente, preciso y relevante	
	2. Presentan esquematización de contenidos (mapas, diagramas)	ñ
	3. La cantidad de información expuesta es breve y de fácil lectura	
	4. Presentan secuencia los temas (introducción, desarrollo y cierre) ²³	
Contenido Científico	5. Las referencias, términos técnicos y datos estadísticos son exactos y actuales ²⁴	
	6. La bibliografía indica fuentes fidedignas y útiles	
Contenido Socio-cultural e ideológico	7. Los contenidos son significativos para el alumno	
	8. Presenta una visión socio-cultural marcada (repetición intencionada de representaciones raciales, grupos de género, referencias geográficas, etc.)	
	9. Participación de personajes cotidianos a la realidad del alumno	
	10. Se trabaja sobre épocas de tiempo conocidas por los alumnos	
	11. Promueven las actividades al desarrollo de valores	
	12. Se trabaja sobre situaciones y temas de la vida cotidiana	
Calidad de las ilustraciones	13. Las imágenes están acordes al texto	
	14. Las representaciones tridimensionales están acorde a las planteadas en el plano bidimensional	ñ
	15. Las imágenes bi o tridimensionales son representativas a la situación planteada	
Contenido curricular	16. Los conceptos son presentados de forma clara	
	17. Los contenidos son correspondientes a la planificación curricular	
Contenido pedagógico	18. Permite el error y reconduce la actividad	ñ
	19. Se plantean claramente los niveles de aprendizaje que se busca (Destrezas por adquirir)	
	20. Se plantean claramente y de forma oportuna las intenciones formativas (Objetivos)	
	21. Se dan a conocer los conocimientos previos requeridos	ñ
	22. Se presentan actividades de auto-evaluación de los conocimientos previos	ñ
23. Nivel de Evaluación de Aprendizaje(Medina)		
	24. Presenta una evaluación inicial de tipo exploratoria	ñ
	25. Formativa	
	26. Presenta una evaluación Sumativa	
	27. Dimensional: considera la capacidad académica – instruccional del usuario.	
	28. Valora el proceso socializador del aprendizaje	

²³ Forma parte de los requerimientos del sistema

²⁴ Forma parte de los requerimientos del sistema

	29. Contiene síntesis de contenidos	
	30. Se presentan ejercicios	
	31. Se incluye material informativo que motive la investigación	
	32. Contiene auto-evaluaciones de cada sección	
	33. Contiene actividades de refuerzo	
	34. Presenta un seguimiento de logros	ñ
35. Nivel de software como objeto (Gonzalez), (Yaridelis Romero y René Ramírez)		
Facilidad de aprendizaje	36. Cuando se utiliza la aplicación se puede predecir el resultado de ciertas acciones (comportamiento, mensajes, presentación de ayudas, presentación de resultados, etc.)	
	37. Los mecanismos de interacción son usados siempre de la misma forma, es decir son consistentes en toda la aplicación.	
Flexibilidad	38. Libertad para el usuario de iniciar cualquier actividad en el sistema	ñ
	39. El sistema se adapta a los diferentes usuarios	ñ
Mecanismos de soporte	40. Disponibilidad de la ayuda en cualquier momento sin salir del sistema	ñ
	41. Se dispone de un glosario de la ayuda	ñ
	42. La información de la ayuda es detallada y precisa	
	43. La presentación de la ayuda no es obstructiva (uso de ayuda no impide el uso normal de la aplicación)	ñ
	44. Organización del texto de ayuda es adecuada (lenguaje, cantidad de texto, gráficos,etc.)	
Mensajes	45. Las formas de presentar información son visualmente agradables	
	46. Presentan mensajes de retroalimentación	ñ
Organización	47. Se presentan manuales para el uso adecuado de la aplicación	
	48. Se presentan elementos de organización interna como índices, objetivos, evaluaciones, etc.	
	49. Permite complementar, aclarar e integrar a la información brindada por el maestro	
	50. Permite al maestro es seguimiento de logros	
Adaptabilidad	51. Presenta exigencia de ciertas habilidades para obtener los objetivos (memorización de información, seguir instrucciones, relación con otros contenidos, etc.)	
	52. Se exige el uso de materiales o equipos determinados	
	53. La aplicación impone el método, ritmo y secuencia de actividades al docente	
	54. Se dispone de diferentes métodos de entrada de datos para el alumno	
	55. Ofrece ejercicios diferentes y graduados según el nivel de los alumnos	ñ
Seguridad	56. Detecta el acceso de usuarios	ñ
	57. El tiempo de apertura de la aplicación es rápida	
Interface	58. Es amigable al usuario	
	59. Las opciones se ubican fácilmente	
	60. Existe un menú comprensible y organizado	

5. RECOPILACIÓN FOTOGRÁFICA DEL TALLER EXPERIMENTAL



Ilustración 62: Grupo Experimental



Ilustración 63: Implementación del Test de Evaluación



Ilustración 64: Interacción del alumnado



Ilustración 65: Evaluación del Grupo de Control



Ilustración 66: Uso de Tablets y Guías



Ilustración 67: Desarrollo de Test



Ilustración 68: Manipulación de Tablets