UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA, LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADOS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS

PROPUESTA PARA MEJORAR LA COMPRENSIÓN DEL LENGUAJE MATEMÁTICO DE FUNCIONES LINEALES MEDIANTE EL MANEJO DE TERMINOLOGÍA ESPECIALIZADA CON PERSPECTIVA SEMÁNTICA

TESIS PREVIA A LA OBTENCIÓN
DEL TÍTULO DE MAGÍSTER EN
DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTORA:
RUTH MARIELA CORONEL ALVARADO

DIRECTORA:
MÁSTER GLADYS JAQUELÍN VERDUGO CÁRDENAS

Cuenca, diciembre 2013

RESUMEN

El presente trabajo de investigación se encamina a mejorar la compresión semántica de las Funciones lineales en matemática, para lograr aprendizajes significativos.

Con base en este planteamiento se construye una propuesta didáctica para potenciar la comprensión de los aspectos referentes a las Funciones lineales en estudiantes del nivel medio del la Unidad Educativa ´´Central la Inmaculada´´. Esta propuesta está basada en la construcción de significados y para ello se plantean diversas actividades que llevan a un aprendizaje reflexivo, en donde las estructuras son construidas por el estudiante con la guía del profesor.

En las actividades propuestas para la conceptualización de la función lineal y otros objetos matemáticos se usa diferentes registros de representación, lo que da un sustento semántico más amplio, por lo que genera una mayor comprensión de los mismos y de esta manera los estudiantes dan significado a los objetos matemáticos estudiados.

Se considera además, en la propuesta, el hecho de que la matemática debe ser estudiada dentro de un contexto que de sentido a las ideas y conceptos ya que cuando los estudiantes pueden ver las conexiones de las aplicaciones con el mundo real llegan a determinar por qué el estudio de las matemáticas es útil e interesante.

Palabras claves: Comprensión matemática, comprensión semántica, aprendizaje significativo, construcción de significados, registros de representación, función lineal.

ABSTRACT

The present research is aimed at improving the semantic compression of linear functions in mathematics, to achieve significant learning.

Based on this approach a didactic proposal to enhance the understanding of the aspects related to linear functions in middle-level students of the " Central " Immaculate Educational school is constructed. This proposal is based on the construction of meaning and to do several activities that lead to reflective learning , where the structures are built by the student with guidance from the teacher´s guide.

In the proposed activities for the conceptualization of the linear function and other mathematical objects different registers of representation is used, which gives a wider Semantic livelihood, generating a greater understanding of them and thus give meaning to students the mathematical topics studied.

It is further considered in the proposal, the fact that mathematics should be studied within a context of meaning to the ideas and concepts because when students can see the connections to the real world applications come to determine why the study of mathematics is useful and interesting.

Keywords: mathematical comprehension, semantic understanding, meaningful learning, meaning construction, representation registers, linear function.

Contenido

UNIVERSIDAD DE CUENCA

Yo, Ruth Mariela Coronel Alvarado, autora de la tesis "Propuesta para mejorar la comprensión del lenguaje matemático de Funciones Lineales mediante el manejo de terminología especializada con perspectiva semántica´´, certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor/a.

Cuenca, 16 de diciembre de 2013

Ruth Mariela Coronel Alvarado.
0301165007

RUTH MARIELA CORONEL ALVARADO /2013

UNIVERSIDAD DE CUENCA

Yo, Ruth Mariela Coronel Alvarado, autora de la tesis "Propuesta para mejorar la comprensión del lenguaje matemático de Funciones Lineales mediante el manejo de terminología especializada con perspectiva semántica´´, reconozco y acepto el derecho de la Universidad de Cuenca, en base al Art. 5 literal c) de su Reglamento de Propiedad Intelectual, de publicar este trabajo por cualquier medio conocido o por conocer, al ser este requisito para la obtención de mi título de Maestría en Docencia de las Matemáticas. El uso que la Universidad de Cuenca hiciere de este trabajo, no implicará afección alguna de mis derechos morales o patrimoniales como autor.

Cuenca, a 16 de diciembre de 2013

Ruth Coronel Alvarado
0301165007

DEDICATORIA

Todo el esfuerzo entregado en este trabajo lo dedico a Dios y a mis padres. A Dios, mi motivación y fortaleza; a mis padres, quienes han sido mi apoyo constante, enseñándome que con sacrificio y constancia se alcanzan las metas. A ellos mi admiración.

AGRADECIMIENTO

Al término de este trabajo quiero dejar constancia de un profundo agradecimiento a Dios por darme la fuerza y la sabiduría necesaria; a mis padres y hermanos que con cariño me dieron su apoyo incondicional, motivándome siempre a seguir adelante y, a todas aquellas personas que de forma directa o indirecta, han contribuido para que este anhelo se haga realidad.

INTRODUCCIÓN

> Varias teorías afirman que el aprendizaje y el conocimiento surgen de la interacción social (Desarrollistas, Cognitivistas, Conductistas), y el canal para que se dé este acercamiento es el lenguaje en cualquiera de sus manifestaciones, por lo tanto, es necesario tener una serie de códigos socialmente aceptados y conocidos que permitan comunicarnos (J. Díaz, 15)

Como lo expresa D. Díaz, el lenguaje es el canal para que se desarrolle el aprendizaje, sin embargo, los resultados de observaciones realizadas a lo largo de mi práctica docente han evidenciado falencias en la interpretación de expresiones matemáticas, lo que implica una falta de comprensión del lenguaje matemático, y por lo tanto, una dificultad de comunicarse en este lenguaje. De igual manera, a partir de diversos estudios realizados que incluían actividades de interpretación de cierto lenguaje o cierto tipo de representación al lenguaje matemático o viceversa se encontraron grandes dificultades, de ahí que los aspectos sintáctico y semántico de la matemática han sido objeto de investigaciones recientes.

Este trabajo se enmarca en un problema fundamental de la enseñanza de esta asignatura que es la construcción de significado de objetos matemáticos de manera que el estudiante pueda aplicar los conocimientos adquiridos, a través de una significación objetiva y una compresión flexible[1].

La matemática usa un lenguaje propio, que abarca una serie de signos que fueron creados para representar ideas y objetos de manera más simplificada; sin embargo, muchas veces esos signos no tienen una significación práctica para el estudiante. Entonces, ¿cómo hacer para que los conocimientos enseñados tengan sentido para el alumno? Precisamente, a través de un proceso de significación de las expresiones matemáticas que utilizan, para así entender su uso; de esta manera, el

[1] Para Perkins ´´Comprender es la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe. Para decirlo de otra manera, la comprensión de un tópico: es la capacidad de desempeño flexible. De acuerdo con esto, aprender para la comprensión es aprender un desempeño flexible´´ (ctd. en Stone 70)

alumno debe ser capaz, no de repetir, sino de conocer y comprender los procesos para resolver nuevos problemas dentro y fuera del aula.
Por lo expuesto, un aspecto medular en este trabajo es considerar que al hablar del lenguaje matemático no se puede prescindir de la semántica, pues el estudiante debe *comprender* el significado de cada uno de los términos de una definición y, "dado que los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción humana o de una experiencia intuitiva inmediata" (Duval, 174), se hace necesario tener representaciones de los mismos, así por ejemplo: una escritura, una notación, un símbolo, un punto, una gráfica, etc. representan un objeto matemático[2]. Las representaciones son consideradas importantes en el desarrollo del presente trabajo porque, como lo manifiesta Hitt, "las representaciones juegan un rol fundamental en los procesos de construcción de conceptos, por lo que son importantes en la enseñanza, aprendizaje y comunicación del conocimiento matemático" (246). Estas consideraciones permiten plantear otra forma de abordar la enseñanza de la matemática, desde el conocimiento a la comprensión y a la habilidad para transferir, y en el mejor de los casos, aplicar los conocimientos en una realidad simulada o en la realidad misma.

El propósito de este trabajo es encontrar un mecanismo apropiado para mejorar la comprensión matemática, sobre el tema Funciones Lineales, a través de la comprensión semántica (la palabra, expresiones y oraciones dentro del contexto en el que se encuentra) con la ayuda de diferentes registros de representación; concibiendo el aprendizaje matemático como una actividad inherentemente social y como una actividad esencialmente constructiva encaminada a una comprensión conceptual, y no a un mero desarrollo mecánico y memorístico.

Se ha tomado el tema específico de las Funciones Lineales ya que es un tema de fundamental importancia, a partir del cual se generan muchos conceptos,

[2] ´´Para lograrla referimos recurrir a una generalización de la idea de Brumer sugerida por Godino: ***Objeto matemático*** es todo lo que es indicado, señalado, nombrado cuando se construye, se comunica o se aprende matemática. (ctd. en D`Amore, 3)

proposiciones y procedimientos matemáticos más y es donde los estudiantes han demostrado problemas en su comprensión.

A través del diagnóstico realizado se identifican y analizan las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de funciones para luego, con la ayuda de diferentes registros de representación, desarrollar los contenidos referentes a las Funciones Lineales, construyendo el significado de los conceptos y subconceptos a partir de actividades de tratamiento y conversión que permita llegar a la comprensión, asignando significado a los objetos matemáticos, tomando en cuenta que "(…) un punto crucial en el aprendizaje de la matemática es lograr que los estudiantes dominen la semántica de los términos para comprender la parte conceptual y llegar a entender la matemática" (J. Godino, 3). Para utilizar correctamente el lenguaje matemático hay que entenderlo, no sirve hablar o escribir sin sentido.

El contenido de este trabajo está dividido en tres capítulos. El Primer Capítulo abarca una revisión teórica referente a: Semántica, Semántica y Matemática y, Matemática y Pedagogía, describiendo aspectos como: el signo y su concepción, el significado de las palabras y teorías sobre el significado, la semántica, el lenguaje matemático, los registros de representación y la relación entre semántica, matemática y pedagogía, con el propósito de conocer cómo los aspecto semánticos influyen en el aprendizaje de la matemática. En el Segundo Capítulo se presenta y analiza la información obtenida mediante la aplicación de un cuestionario a los estudiantes del primer año de Bachillerato General Unificado de la Unidad Educativa Fiscal Central La Inmaculada. Este cuestionario nos permitió determinar las dificultades presentadas en el aprendizaje de funciones matemáticas para, finalmente, en el Tercer Capítulo formular una propuesta de aprendizaje basada en la construcción de significados y encaminada a lograr una comprensión conceptual a través de un dominio semántico con la ayuda de diversos registros de representaciones basados en los registros semióticos propuestos por R. Duval.

CAPÍTULO I

Semántica, Matemática y Pedagogía.

1.1 Semántica.

1.1.1 El signo.

Todo lenguaje implica el uso de signos[3] sobre los que básicamente se han planteado dos concepciones: una binaria representada por el lingüista suizo Ferdinand de Saussure, que concibe al signo formado por un significante (parte material del signo) y un significado (la representación mental)[4] y la otra concepción de signo, la tríadica, desarrollada por el estadounidense Charles Sanders Pierce quien considera que el signo está formado por la cooperación de tres instancias, un significante (el símbolo, el soporte material), un significado (lo que se representa, la imagen mental) y un referente (el objeto real o imaginario al que hace alusión el signo, la representación)[5].

Al hablar del signo es importante tener presente lo expresado por Godino (catedrático de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada), para quien el signo debe usarse para designar la unidad que consta de forma de contenido y forma de expresión, "Cualquier signo, cualquier sistema de signos, cualquier lengua contiene en sí una forma de la expresión y una forma del contenido. La primera etapa del análisis de un texto debe consistir, por tanto, en un análisis que diferencie estas dos entidades" (10)

Según la relación que los signos tengan con los objetos, Peirce clasifica en tres tipos de signos: iconos, índices y símbolos, y explica de la siguiente manera:

> […] existe una triple conexión del *signo*, la *cosa significada* y la *cognición producida por la mente*. Puede haber una simple relación racional entre el signo y

[3] En el Diccionario de la Real Academia Española se define al signo como objeto, fenómeno o acción material que, por naturaleza o convención, representa o sustituye a otro, y define al signo lingüístico como la unidad mínima de la oración, constituida por un significante y un significado.
[4] De acuerdo a lo expuesto en , El Curso de Lingüística general de Fredinand De Saussure.
[5] Tomado de División de los Signo, de Ch. Peirce.

la cosa; en ese caso, el signo es un *icono*. O bien puede haber una conexión física directa; en ese caso, el signo es un *índice*. O bien puede haber una relación que consiste en que la mente asocia el signo con su objeto; en ese caso el signo es un *nombre* (o *símbolo*). (Peirce, 175)

Podemos describir entonces, a los iconos como signos que se caracterizan porque se parecen a su significado, así tenemos el caso de los diagramas, tan usados en matemática y otros campos, que considera ejemplos de iconos por la semejanza estructural con lo que representan; otro ejemplo, tenemos en el signo usado en matemática para representar un ángulo. Los índices o indicios en cambio son signos que sin parecerse al objeto significado, se conectan con él directamente o de alguna manera, ejemplo una huella digital y finalmente los símbolos que son signos que no se parecen a su significado sino que basan su relación con su significado en una convención totalmente arbitraria, como ejemplo tenemos el símbolo ∞ usado para representar ´infinito´.

1.1.2. Semántica.

La palabra Semántica proviene de un vocablo griego que puede traducirse como **"**significativo"**.** La semántica estudia el significado[6] de los signos lingüísticos y de sus combinaciones (palabras, expresiones y oraciones). Los problemas que se plantean al hablar de semántica tienen que ver con la lengua como productora de mensajes, "el mensaje no se reduce a una sucesión de unidades por identificar separadamente; no es una suma de signos lo que produce el sentido, es, por el contrario, el sentido, concebido globalmente, el que se realiza y se divide en "signos" particulares, que son las palabras" (Benveniste, 67)

[6]Ferdinand de Saussure sostiene que el significado es un concepto que, al asociarse a una imagen acústica (una huella psíquica en la mente), crea el signo lingüístico.
Charles Sanders Peirce, entiende al significado como una abstracción **o** imagen mental que se une al significante (el soporte material captado por los sentidos) para conformar el signo lingüístico, que alude a un referente (objeto real).

Por tanto, la semántica se ocupa de la relación entre la forma y el contenido, entre el significante y el significado en las palabras, en las frases y en los textos. A través del análisis semántico de un texto se intenta determinar lo que quiere decir dicho texto y lo que establece el significando de determinadas expresiones y frases utilizadas.

Morris, en su libro "Fundamentos de la teoría de los signos", al tratar la semiótica[7] enfatiza el tema de una tricotomía, la de la sintaxis, la semántica y la pragmática, por tanto la semántica constituye un momento de la semiótica. De estos tres elementos involucrados en el lenguaje, la sintaxis se refiere a la forma como se escribe, es decir a las relaciones formales de los signos entre sí; la semántica, como ya se mencionó se refiere a los aspectos del significado, sentido e interpretación de un determinado elemento, símbolo, palabra, expresión o representación formal, mientras que la pragmática es la disciplina que estudia la relación entre los signos y los contextos o circunstancias en que los usuarios emplean tales signos. Como se puede ver cada uno de estos niveles sintaxis, semántica y pragmática, muestra un punto de vista distinto, pero complementario, que ayuda a comprender el fenómeno del signo.

“Muchas teorías sobre los componentes semánticos, consideran que lo semántico es la base de la comunicación, siendo lo sintáctico un armazón que da forma a lo semántico, como observó el lingüista inglés Halliday” (Frías, 5). Sin embargo, se debe tener presente que se influyen mutuamente, así lo sintáctico influye en lo semántico, por ejemplo al cambiar la combinación de las palabras, varía el significado, de igual manera si a la expresión algebraica 2a + b, se cambia el orden de sus elementos (cambio en la sintaxis) a*, 2 + ab se produce un cambio en el significado pues el 2 cumple otra función, ya no es un factor. Por otro lado vemos también cómo lo semántico influye sobre lo sintáctico, si a la expresión 2 + 3 = 5, se cambia el 3 por otro valor como 2 + 7 = 5, ésta nueva expresión no tiene sentido, entonces debemos cambiar la sintaxis a, 2 + 5 = 7*

[7] La semiótica o semiología es la ciencia que trata de los sistemas de comunicación dentro de las sociedades humanas. Saussure fue el primero que habló de la semiología y la define como: "Una ciencia que estudia la vida de los signos en el seno de la vida social".

1.1.3 El significado de las palabras.

En cuanto a los significados de las palabras existen dos tesis contrapuestas, por un lado los naturalistas, que creían que las palabras poseen sus significados por naturaleza, en virtud de una correspondencia entre el sonido y el sentido, y por otro lado los convencionalistas, que sostenían que el significado es una cuestión de tradición que no responde a ningún motivo, se establece de modo convencional. Al respecto se manifiesta: “Aunque muchas palabras son así enteramente convencionales, otras son motivadas de varias maneras. La motivación puede radicar o bien en los sonidos mismos, o bien en la estructura morfológica de la palabra, o bien en su fondo semántico” (Ullman, 3), y esto es precisamente lo que encontramos en nuestro vocabulario.

Por otro lado, “de acuerdo con Kutschera las teorías del significado pueden agruparse en dos categorías: realistas y pragmáticas. Las teorías realistas conciben el significado como una relación convencional entre signos y entidades concretas o ideales que existen independientemente de los signos lingüísticos” (J. Godino, 6)

"Según esta concepción el significado de una expresión lingüística no depende de su uso en situaciones concretas, sino que el uso se rige por el significado, siendo posible una división tajante entre semántica y pragmática" (Kutschera, 34). La forma más simple de la semántica realista se presenta en los autores que atribuyen a las expresiones lingüísticas solo una función semántica.

En cuanto a la pragmática, la segunda categoría de las teorías del significado, el significado de las expresiones lingüísticas depende del contexto en que se usan. "Para un gran número de casos -aunque no para todos- en que empleamos la palabra "significado", éste puede definirse así: el significado de una palabra es su uso en el lenguaje" (Wittgenstein, 20). Por tanto, si un hablante no conoce el lenguaje matemático no puede asignar un referente ni saber, por ejemplo que designa la palabra *radio* en la expresión *el radio de una circunferencia* y por tanto puede dar una interpretación equivocada**.**

1.2. La semántica y la matemática.

1.2.1 Semántica y matemática.

La semántica en la matemática estudia la relación entre el signo lingüístico y la realidad, las condiciones necesarias para que un signo o símbolo pueda aplicarse a un objeto matemático determinado y las leyes que aseguran una interpretación de su significado y esto nos permite realizar deducciones de conceptos, teoremas y procedimientos que serán aplicados en situaciones y problemas concretos.

Los elementos que componen la semántica matemática son:

- **Conjunto de signos,** el lenguaje matemático está formado por una cantidad de signos que tienen un significado específico dentro del contexto matemático. De acuerdo con Peirce, como ya se mencionó anteriormente, estos signos pueden ser: íconos, índices y símbolos. Es importante tener presente las diferencias entre estos signos, ya que en ocasiones se suele confundirlos, así por ejemplo, es común referirse a las expresiones algebraicas como ´lenguaje simbólico´, sin embargo, Pierce manifiesta que las expresiones algebraicas no son símbolos, sino íconos y lo explica así:

> (…) una fórmula algebraica es un icono, que ha sido convertido en tal mediante las reglas de conmutación, asociación y distribución de los símbolos. Puede parecer a primera vista que es una clasificación arbitraria llamar icono a una expresión algebraica; que podría igualmente o más adecuadamente ser considerada como un signo convencional [símbolo] compuesto. Mas no es así, porque una gran propiedad distintiva de los iconos es que mediante su observación directa se pueden descubrir otras verdades concernientes a su objeto que no son las que bastan para determinar su construcción. (…) esta capacidad de revelar una verdad inesperada es precisamente aquello en que consiste la utilidad de las fórmulas algebraicas, por lo cual el carácter icónico es el predominante (Peirce, 263)

Variables y constantes, son los elementos que bajo una interpretación semántica admiten referentes (referente, uno de los tres componentes del signo que consiste en el objeto real al cual alude el signo).

- **Conjunto de predicados sobre las variables**. “Un predicado es una afirmación que expresa una propiedad de un objeto o una relación entre objetos. Estas afirmaciones se hacen verdaderas o falsas cuando se reemplazan las variables (objetos) por valores específicos" (González, 28). Ejemplo: Todos los A son B, donde A es el sujeto y ´ B´, es el predicado.

- **Conjunto de reglas a partir de expresiones sencillas**, este conjunto de reglas hace el papel de la sintaxis en las lenguas naturales. Es importante aquí tener presente que si bien la sintaxis estudia las reglas y principios sobre como formar oraciones, en sí misma no permite atribuir significados, esta consideración evitará cometer muchos errores en matemática, como el presentado en el siguiente caso, que es un error muy común:

> Partiendo, por ejemplo de que mx = 2, se obtiene x = 2/m, que es un procedimiento correcto; los estudiantes, siguiendo este mismo procedimiento, suele llegar a expresar: si tanx = 2, entonces x = 2/tan, lo que semánticamente es incorrecto a pesar que se usó la misma sintaxis.

1.2.2. Lenguaje matemático

Uno de los fines generales de la enseñanza de la matemática es que los estudiantes aprendan a comunicarse mediante la matemática, lo que exige conocer su *idioma,* es decir sus signos y terminología propia de la matemática cuyo significado no siempre coincide con el significado en el lenguaje natural; la matemática, por tanto, se halla inmersa en el mundo de los signos, atravesada por la tríada significante, significado y referente; por ejemplo:

Signo: paréntesis ()

Forma de representación -significante-: ()

Significado: agrupación

Referente:

a. Indicar la *prioridad* de las operaciones a resolver. Ejemplo. (3+5) – (5-4)
b. *Representar las coordenadas* de un punto en el plano cartesiano. Ejemplo. (3,5)

Los símbolos que se usan en matemática son los significantes de algo no visible como es el pensamiento matemático. El símbolo sin el significado no tendría ninguna importancia, es decir el símbolo (significante) y el significado han de formar un solo cuerpo, lo que involucra tanto aspectos semánticos como sintácticos, además de pragmáticos. L. Rico se refieren al símbolo de la siguiente manera:

> Un símbolo es la representación perceptible de una idea, con rasgos asociados por una convención socialmente aceptada. Son objetos puramente mentales que permiten el acceso a los productos de la mente, ya que no hay forma de observar directamente el contenido de ésta, el símbolo es un medio visible que está conectado a una idea que es su significado (ctd. en Díaz, D et al, 40).

Por otra parte Pimm manifiesta

> Cuando hablamos de lenguaje matemático nos estamos refiriendo a dos cuestiones distintas pero interrelacionadas, a saber: por un lado la simbología utilizada en matemáticas y, por otro lado, la estructura y presentación de los contenidos matemáticos. La simbología matemática está repleta de caracteres gráficos denominados logogramas, que son como las “palabras” de un idioma. Estos símbolos se deben conocer para interpretar lo que se quiere decir con ellos. Por otra parte, la presentación de los contenidos matemáticos

> se realiza mediante enunciados como *Definición*, *Teorema*, *Proposición*, *Lema*, Demostración, *Corolario*, etc. (ctd. en Díaz, D et al, 38)

Los signos que se usan en matemática se fueron adoptando con el paso del tiempo, ya que en un inicio las expresiones de operaciones matemáticas tenían que ser escritas por completo o expresadas mediante abreviaturas de las palabras[8] lo que resultaba bastante engorroso, de ahí surgió la necesidad de crear símbolos[9] para las diferentes operaciones lo que dio origen a un lenguaje propio para la matemática, como un elemento que permite la total comprensión del conocimiento matemático, ‘’(…) la matemática tiene, como la mayoría de las ciencias y otras disciplinas del saber, un lenguaje particular, específico, el cual simplifica, en algunos casos, la comunicación, y por otro lado clarifica y designa de manera exacta, sin posibles confusiones, sus contenidos” (Ortega, 3).

Es importante tener presente que los signos no se usan aisladamente sino que se forman los llamados *sistemas de signos* y que son éstos sistemas de signos los que, desde el punto de vista de los procesos de significación, merecen especial atención, así es como Luis Puig se expresa al respecto:

> “Lo que entonces aparece como crucial es el sistema de signos tomado en su conjunto y lo que hay que calificar de matemático es el sistema y no los signos, porque es el sistema el responsable del significado de los textos. Hay que hablar

[8] En la historia podemos hablar de diferentes períodos:
Período retórico o verbal: Desde los babilonios (1700 a. de C.) hasta Diofanto (250 d. de C.) las operaciones se relataban con el lenguaje ordinario. Así, en el papiro de Rhind (1650 a. de C.) se puede leer para describir un problema: "Un montón y un séptimo del mismo es igual a 24". Con la palabra "*un montón*" designaban la incógnita.
Período abreviado o sincopado: A partir de Diofanto y hasta comienzos del siglo XVI se comienzan a utilizar algunas abreviaturas.
Período simbólico: A partir del siglo XVI, con Vieta y Descrtes sobre todo, se empieza a utilizar un lenguaje simbólico bastante parecido al actual. Por ejemplo, la ecuación $3x^2 - 5x = 6$, se expresada así:
Vieta, (1591): 3Q - 5N + 6 ae 0 y Descartes, (1637): 3xx - 5x + 6 = 0

[9] Así por ejemplo: los griegos, los hindúes y el matemático alemán Jordanus Nemorarius empezaron a indicar la suma mediante yuxtaposición, mientras que los italianos la denotaban con las letras P o p atravesadas con una raya, los algebristas alemanes e ingleses introdujeron el signo +, al que denominaron signum additorum, aunque al principio sólo se utilizaba para indicar excedentes. El matemático inglés William Oughtred fue el primero en usar el signo × en vez de la palabra "veces".

pues de sistemas matemáticos de signos y no de sistemas de signos matemáticos, subrayando con la colocación del adjetivo 'matemáticos' que lo que tiene el carácter matemático es el sistema y no meramente los signos individuales"(8)

Si bien, como ya se manifestó, se crearon signos para representar diferentes expresiones en matemáticas que dieron origen a un lenguaje matemático, sin embargo, este lenguaje que fue creado con el propósito de facilitar el aprendizaje de la matemática, se ha convertido en un problema para el aprendizaje, puesto que se ha llegado a privilegiar en las clases de matemáticas las representación simbólica de los objetos matemáticos sin que se construya su significado, esto lleva a que los alumnos terminen manipulando símbolos y operaciones sin saber por qué y para qué, tal como lo expresan **Pozo y Gómez:** "(…) que saben hacer cosas pero no entienden lo que hacen" (J. Pozo, 20)**,** y esto no tiene ningún sentido, es como expresar o formular oraciones bien estructuradas sin entender lo que se dice o escribe.

Por lo tanto, se debe enfocar la enseñanza para que a través del lenguaje matemático se llegue a la comprensión de conceptos, entendida esta compresión como el acto de captar su significado como lo manifiesta Sierpinska:

> Comprender el concepto será entonces concebido como el acto de captar su significado. Este acto será probablemente un acto de generalización y síntesis de significados relacionados a elementos particulares de la "estructura" del concepto [….] Estos significados particulares tienen que ser captados en actos de comprensión (ctd. B. D`Amore, 27), y continua luego, "La metodología de los actos de comprensión se preocupa principalmente por el proceso de construir el significado de los conceptos "(ctd. B. D`Amore, 35)

En este mismo sentido H Redatz, en un estudio sobre los errores en matemática en donde realiza una clasificación de estos errores estableciendo cinco categorías generales, considera como la primera categoría los errores debidos a dificultades de lenguaje, señala que una falta de comprensión semántica de los textos matemáticos[10] es fuente de errores; por ello, la resolución de problemas verbales está especialmente abierta a errores de traducción desde un esquema semántico en el lenguaje natural a un esquema formal en el lenguaje matemático[11]

Por todo lo expuesto, este trabajo se concentrará en el significado de los términos y expresiones matemáticas para evitar que el estudiante centre su atención en los símbolos sin prestar atención a su significado y de esta manera el estudiante llegue a comprender esta asignatura y pueda no repetirla sino utilizarla.

1.3 La semántica, la matemática y la pedagogía.

1.3.1 Relación entre semántica, matemática y pedagogía.

En nuestro sistema educativo nacional se realizó un proceso de actualización y fortalecimiento de la Reforma Curricular de 1996, el mismo que dio un nuevo enfoque a la enseñanza de la matemática que tradicionalmente ha consistido en la transmisión de conocimientos sin lograr que los estudiantes desarrollen el pensamiento lógico, crítico, lateral y creativo. Hoy, uno de los propósitos en el estudio de la matemática, establecido en la Nueva Actualización Curricular, es el de *formar interpretadores más que repetidores,* y esto implica una verdadera comprensión de los conceptos. En este ámbito se hace necesario hacer un uso adecuado de la semántica, buscando la forma de interpretar correctamente los conceptos y teoremas matemáticos.

[10] Según Teresa Assude, se denomina texto matemático al "tejido de relaciones entre objetos matemáticos que se manifiesta por el uso de símbolos matemáticos, fórmulas, gráficos, entrelazados con la lengua natural, a través de un enlace de registro semiótico".

[11] Tomado de Rico, L. *Errores y Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas*.

La finalidad de la semántica en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática es establecer el significado de los signos matemáticos expresados mediante palabras, expresiones, enunciados, teoremas, propiedades y axiomas. La semántica busca la interpretación formal de los contenidos matemáticos (semántica lingüística) y el desarrollo del análisis matemático en problemas y su significación; la semántica permite hacer abstracciones, generalizaciones, análisis y síntesis (semántica lógica matemática), brindando la posibilidad de describir rasgos y propiedades esenciales de los objetos matemáticos.

El hecho de trabajar la parte semántica en el desarrollo de los contenidos matemáticos nos llevará a una comprensión de los conceptos, llegando a producir el aprendizaje significativo que no se realiza por simples repeticiones. David Ausubel, uno de los principales representantes del constructivismo, en su teoría del aprendizaje significativo, distingue entre aprendizaje memorístico no significativo y aprendizaje significativo, este último hace que el sujeto que aprende sea capaz de dar significación y sentido a lo aprendido. En esta perspectiva pedagógica el aprendizaje debe desarrollarse por vías productivas y significativas para que el estudiante sea quien, con la guía del docente, vaya construyendo los conocimientos.

> Para autores como Ausubel, Novak, Perkins y Gardner, quienes han contribuido en la concepción de que el aprendizaje debe ser una actividad significativa, aprender es sinónimo de comprender. Por otra parte Perkins, quien también entiende el aprendizaje como una comprensión, destaca la importancia pedagógica de los desempeños o acciones relacionadas con la comprensión tanto para construir como para plasmar la comprensión en desarrollo, para Perkins el verdadero aprendizaje basado en la comprensión, se traduce en poder pensar y actuar flexible (Ordoñez, 16)

Por tanto, los estudiantes no podrán aplicar lo que aprendieron a menos que lo hayan comprendido, por ello la compresión debe ocupar un lugar privilegiado en la educación. “Comprender es poder llevar a cabo una diversidad de acciones o desempeños que demuestren que uno entiende el tópico y al mismo tiempo lo amplía, y es capaz de asimilar un conocimiento y utilizarlo de una forma innovadora" (Blythe - Perkins, 5)[12], es decir comprender es llevar al alumno más allá de lo que sabe.

En este sentido la pedagogía debe articularse de tal manera que permita al estudiante construir su propio conocimiento, a través de las interacciones individuales y grupales que se realizan en el aula, para que aprenda a resolver problemas, entendidos como situaciones que no puede resolver algorítmicamente sino que precisan de una verdadera comprensión. Además, el estudiante debe ser consciente de que las actitudes hacia las matemáticas son un elemento básico para el aprendizaje, para ello es importante valorar la importancia de las matemáticas en la vida, tener una actitud de reflexión, de discusión y de valoración de las opiniones y de los saberes de los demás.

Es necesario entonces, que el docente dedique el tiempo necesario a cada concepto, teorema, fórmula o ley para que sean los estudiantes quienes construyan los significados, guiando el proceso para que lleguen a conclusiones colectivas apropiadas, pues el débil trabajo con los conceptos dentro del aula es una causa fundamental del pobre desempeño del estudiante. Cuando existen falencias en lo esencial del concepto es imposible comprender teoremas y procesos asociados y ello hace que los alumnos recurran a la memoria y a la repetición, olvidando que la matemática lejos de ser una simple aplicación mecánica de fórmulas, es un lenguaje para comunicar ideas y una herramienta para analizar y resolver problemas.

Es importante que el proceso de enseñanza-aprendizaje, se tenga en cuenta que una característica importante de la actividad matemática es el uso de diversos sistemas de expresión y representación, además del lenguaje natural. Tomar en cuenta que, "Un conocimiento es significativo en tanto el sustento semántico es más

[12] Tomado del artículo ´´La enseñanza para la comprensión: Guía para el docente´´, escrito por Por: David Perkins y Tina Blythe.

amplio, entre más vínculos puedan establecerse con el objeto en cuestión al que dedica atención nuestro pensamiento, mayor será su comprensión” (Rodriguez, 3).

1.3.2 Educación matemática y registro de representación.

“Un registro es un conjunto de significados apropiados para una determinada función del lenguaje, junto con las palabras y estructuras que expresan esos significados” (Halliday, 195). A través de los diversos registros un individuo puede exteriorizar sus representaciones mentales.

R. Duval profundizó en el estudio de las representaciones refiriéndolas al campo de la semiótica, interesándose particularmente por el uso variado de los sistemas de representación semiótica[13] ya que considera que las diferentes representaciones de los conceptos constituyen un aspecto fundamental para la compresión matemática. Duval reconoció la importancia de las representaciones cuando aseguró que: “El funcionamiento cognitivo del pensamiento humano se revela como inseparable de la existencia de una diversidad de registros semióticos de representación” (ctd. en Planchart, 12). Esta afirmación ha llevado a que muchos investigadores se dediquen a precisar el concepto de representación y a analizar el papel que desempeña en el aprendizaje, así tenemos estudios sobre los diversos sistemas de representación para las *funciones matemáticas* realizados por Janvier y expuestos en su tesis doctoral en 1978, que le llevó a determinar algunas dificultades de comprensión sobre este concepto generadas por la conversión entre diversos sistemas.

Algunas ideas fundamentales sobre sistemas semióticos de representación a partir de las cuales Duval desarrolla su obra *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales,* en 1999 son:

[13] Registros o representaciones semióticos son sistema de signos que permiten llevar a cabo las funciones de comunicación, tratamiento y objetivación. (Tomado de: Bruno´Damore. *Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética*)

- Considerar necesario el tener representaciones de los objetos matemáticos, aludiendo a que éstos no son accesibles a la percepción humana, a la vez que afirma que el conocimiento matemático se puede representar bajo diferentes formas semióticas.
- No debe confundirse al objeto matemático con su representación.
- Debe distinguirse entre: imagen mental (preceptos interiorizados), representación semiótica (representación constituida mediante el empleo de signos) y representación mental (interiorización de una representación semiótica).

Afirma también que las representaciones semióticas están asociadas a sistemas semióticos[14]. A su vez, sostiene que para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir que se cumplan tres actividades cognitivas inherentes a toda representación: formación, tratamiento y conversión**.**

- **La Formación de una representación** implica una selección de rasgos en el contenido a representar. Por ejemplo, enunciar una frase, diseñar una figura geométrica, hacer una gráfica, etc.

- **El Tratamiento de una representación**, es la transformación de una representación en otra del mismo sistema. Es una transformación interna a un sistema. Ejemplo de la expresión $2x + 3x$ un tratamiento sería obtener una nueva expresión, $5x$.

- **La Conversión de una representación** es la transformación de esta representación en una representación de otro sistema conservando la totalidad o sólo una parte del contenido de la representación inicial. La conversión es una

[14]El sistema de representación se refiere a diferentes gráficos, símbolos y signos que responden a un carácter sistémico, así en matemática hablamos del sistema de representación algebraico, el sistema de representación gráfico, etc. (tomado de la tesis doctoral de Orlando Planchart)
Sistema semiótico: conjunto de signos y reglas que representan objetos, donde los signos son las unidades elementales del sistema y las reglas rigen las asociaciones de signos.

transformación externa del sistema de partida. Por ejemplo, la representación gráfica de la ecuación $3x + 5 = y$, es una conversión.[15]

Dentro de los diferentes registros de representaciones podemos mencionar:

Registro verbal*.* Cuando representamos situaciones del mundo real a través del lenguaje común, por tanto se utiliza la sintaxis y el vocabulario del lenguaje natural.

Registro analítico. Cuando se hace referencia a la definición de algún concepto mediante una expresión algebraica.

Registro simbólico. Cuando se da la definición de un concepto mediante expresiones simbólicas sustentadas por las reglas de la lógica formal.

Registro figural. Cuando se expresa algún concepto mediante una figura.

Registro algebraico. Cuando se llega a la expresión final por medio de operaciones algebraicas.

Registro tabular. Cuando los valores numéricos se organizan en una tabla de valores.

Registro numérico. Cuando se realizan todas las evaluaciones que conllevan y que están involucradas en el método de cálculo.

Registro grafical. Corresponde a la representación en el plano cartesiano, incluyendo los convenios implícitos en la lectura de gráficos (interpretación de ejes coordenados, de unidades, de corte o cruce de la gráfica con respecto al eje x, etc.)

En el ámbito de las matemáticas las representaciones, según Castro y Castro "Son las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes*"* (96*).* Para que se dé un buen aprendizaje de las matemáticas es necesario el uso de diversos registros de representación y la realización de conversiones entre distintos registros, estableciendo la correcta coordinación entre los mismos.

[15] Basado en Duval, Raymond. Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, Didáctica.

La idea de representación puede quedar ilustrada con la expresión citada por Piaget: ´´Cuando percibo una casa, no veo una imagen que me entra en el ojo. Al contrario veo un sólido en el que puedo entrar´´ (Piaget, 88).

CAPÍTULO II.

Diagnóstico y análisis de resultados.

2.1. Descripción del contexto.

La investigación realizada en este trabajo se ha desarrollado en la Unidad Educativa ´´Central la Inmaculada´´, específicamente en el primer año del Bachillerato General Unificado.

Esta Institución, como Unidad Educativa, se crea en el año 2 009 utilizando la Unidad Ejecutora La Asunción, ante un Decreto Ministerial en el cual los docentes con partidas fiscales que laboraban en la Unidad Educativa Fiscomisional ´´La Asunción´´ debían ser ubicados en instituciones fiscales. De esta manera se crea el colegio La Inmaculada adhiriéndose a la ya existente escuela ´´Central la Inmaculada´´ y se forma una Unidad Educativa con docentes que laboraban en el Colegio ´´La Asunción´´.

Esta nueva Unidad Educativa oferta, mediante el nuevo colegio, el bachillerato en Ciencias con las especializaciones: Físico Matemático, Químico Biólogo y Sociales con una filosofía institucional reflejada bajo el slogan ``La educación una experiencia afectiva´´ y se crea el proyecto: *Integración de tutoras en el sistema educativo,* con el propósito de mejor la calidad académica y la búsqueda de afecto y participación social al considerar que los estudiante provienen de hogares disfuncionales y que presentaban un bajo rendimiento académico. Un punto de especial interés es el establecimiento es la búsqueda constante de estrategias necesarias para ofrecer a los estudiantes un servicio de tutoría orientada a asesorarles adecuadamente.

En año 2 010, con la propuesta de la Actualización y Fortalecimiento Curricular del Ministerio de Educación y el Gobierno Nacional se crea el Nuevo Bachillerato

General Unificado, que de acuerdo al artículo 43 de la nueva Ley Orgánica de Educación (LOEI) comprende tres años de educación obligatoria a continuación de la Educación General Básica Superior; el colegio se acoge a esta disposición y da inicio en el 2 012 a un nuevo Bachillerato General Unificado (B.G.U)

La creación del BGU tiene como propósito brindar a las personas una formación general y una preparación interdisciplinaria que las guíe para la elaboración de proyectos de vida y en la integración a la sociedad como seres humanos responsables, críticos y solidarios, como consta en el documento del Nuevo Bachillerato, del Ministerio de Educación.

Es importe anotar que de acuerdo a La Actualización y Fortalecimiento Curricular se propone que en las clases de Matemática se enfaticen las conexiones que existen entre las diferentes ideas y conceptos matemáticos en un mismo bloque curricular, entre bloques, con las demás áreas del currículo, y con la vida cotidiana. Lo que permite que los estudiantes integren sus conocimientos, y así estos conceptos adquieran significado para alcanzar una mejor comprensión de la Matemática, de las otras asignaturas y del mundo que les rodea.

En cuanto al pensum en matemática, éste se divide en cuatro bloques: números y funciones; algebra y geometría; matemática discreta y probabilidades y estadística. Para cada bloque están definidas las destrezas con criterios de desempeño[16] correspondientes.

[16] Las destrezas con criterios de desempeño constituyen el referente principal para que los docentes elaboren la planificación microcurricular de sus clases y las tareas de aprendizaje. Expresan el saber hacer, con una o más acciones que deben desarrollar los estudiantes, estableciendo relaciones con un determinado conocimiento teórico y con diferentes niveles de complejidad de los criterios de desempeño. Las destrezas se expresan respondiendo a las siguientes interrogantes:

- ¿Qué debe saber hacer? Destreza
- ¿Qué debe saber? Conocimiento
- ¿Con qué grado de complejidad? Precisiones de profundización

2. 2. Diagnóstico.

2.2.1 Descripción del problema.

Las diversas evaluaciones realizadas a los estudiantes en el área de matemática, en las diferentes instituciones educativas, así como las pruebas SER aplicadas por el Ministerio de Educación para la evaluación del desempeño matemático del estudiante en nuestro país, evidencian resultados nada satisfactorios para los estándares de calidad establecidos[17] y, si bien, los estudiantes la Unidad Educativa Fiscal Central "La Inmaculada" no participaron en esta evaluación, por ser un Colegio de reciente creación, es evidente que el problema está latente en la institución, prueba de ello es el bajo rendimiento en las evaluaciones, el alto porcentaje de estudiantes que deben rendir examen supletorio, el porcentaje también considerable de pérdidas de año, entre otros.

Este problema en el aprendizaje se va arrastrando año tras año ya que los estudiantes no comprenden los conceptos necesarios lo que se refleja en las dificultades que presentan para transferir los conocimientos a situaciones nuevas y a otros temas relacionados. Generalmente el proceso de aprendizaje se centra en la resolución de ejercicios repetitivos que no generan un aprendizaje significativo, por tanto, lo aprendido dura poco tiempo, demostrando así una falta de comprensión y esto posiblemente se debe a la poca importancia que se da a los aspectos semánticos de los elementos involucrados.

2.2.2 Formulación del problema:

¿Cómo influye el manejo correcto de la semántica en el desarrollo de la comprensión del lenguaje matemático en el bloque de números y funciones en los estudiantes del primer año de Bachillerato General Unificado?

[17] Información correspondiente a los resultados de las pruebas SER (Sistema Nacional de Evaluación y Rendición de Cuentas) aplicadas en el 2 008 muestran que en el tercer año de bachillerato de nuestra país un 49% se ubica en el nivel insuficiente y 32% como regular.

2.2.3. Metodología.

El tipo de investigación utilizado en el presente trabajo es de carácter documental – bibliográfica y de campo. Para su desarrollo se revisó bibliografía en base a la cual se realiza la descripción de la teoría referida a la Semántica y a Funciones Lineales. Se plantea una propuesta para desarrollar los contenidos matemáticos, desde la perspectiva de la semántica, a partir del diagnóstico realizado mediante el análisis de un cuestionario aplicado a los estudiantes, cuyo propósito es detectar el grado de comprensión e interpretación del concepto de función y otros objetos matemáticos involucrados en este tema.

2.2.4. Población y muestra:

La población está constituida por 59 estudiantes de los tres paralelos del primer año de Bachillerato General Unificado de la Unidad Educativa Fiscal “La Inmaculada”, periodo lectivo 2011 – 2012. Esto es factible, ya que la población está constituida por un número manejable de estudiantes, por lo que se decidió trabajar con toda la población.

2.2.5. Descripción de los procesos de recolección y análisis de datos.

Para recopilar información que permita conocer el nivel de dominio semántico de los términos involucrados dentro del contexto matemático en el tema *Funciones,* se elaboró y aplicó un cuestionario diagnóstico. Este cuestionario consta de 18 preguntas que tenían como objetivos específicos:

• Determinar si los alumnos identifican una función a partir de distintos registros de representación.

• Analizar las dificultades que presentan al realizar conversiones entre diferentes registros (gráfico, algebraico, tabular, verbal y figural)

• Investigar cómo los alumnos interpretan el dominio y recorrido de funciones.

• Analizar los errores presentados en la comprensión de diferentes conceptos y subconceptos involucrados en el tema, funciones.

La información obtenida en este cuestionario fue procesada utilizando el análisis porcentual. Los resultados del diagnóstico se presentan en tablas de distribución de frecuencias con sus respectivas interpretaciones.

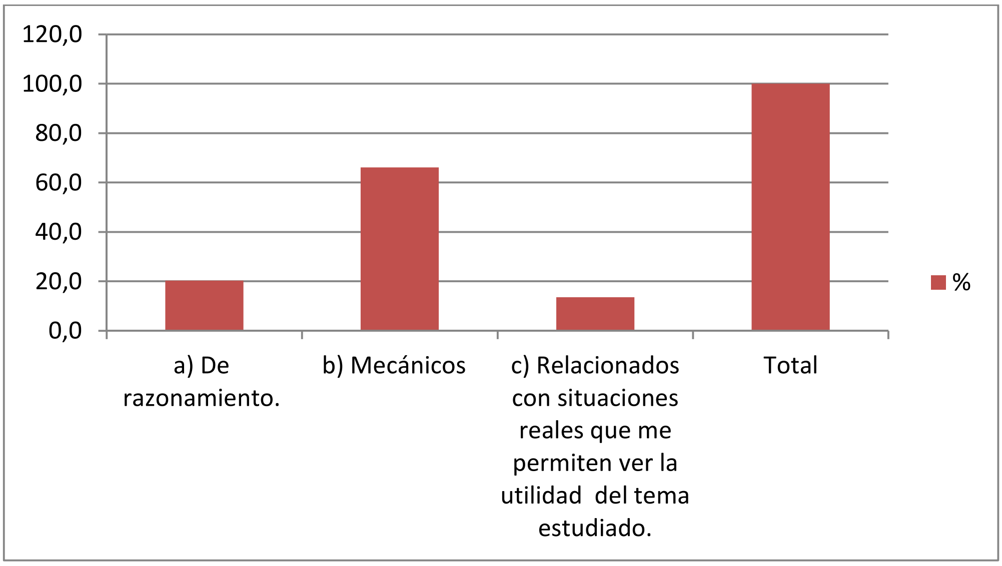
2.2.6. Presentación y análisis de resultados del instrumento de investigación aplicado a los estudiantes.

Las tablas y gráficos presentados a continuación muestran los resultados de las respuestas dadas por los estudiantes a cada una de las preguntas planteadas en el cuestionario aplicado y su análisis respectivo, para luego presentar el análisis general de éstos.

1. **Indique en qué porcentaje se desarrollan, en la clase de matemáticas, cada uno de las tipos de ejercicios indicados.**

Opciones.	Total	%
a) De razonamiento.	12	20,3
b) Mecánicos (procesos repetitivos)	39	66,1
c) Relacionados con situaciones reales que me permiten ver la utilidad del tema estudiado.	8	13,6
Total	59	100,0

Fuente: **Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´**
Elaboración: La Autora

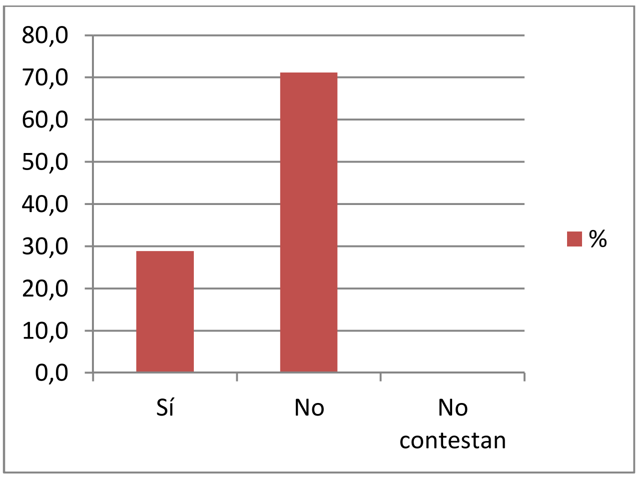


De acuerdo con estos resultados podemos determinar que en el proceso de enseñanza-aprendizaje hay un predominio de una ejercitación de tipo mecánico (proceso repetitivo) utilizado en las clases.

2. ¿Cree que la matemática sólo es memorización y seguimiento de reglas?

Opciones.	Total	%
Sí	17	28,8
No	42	71,2
No contestan	0	0
Total	59	100

Fuente: Inidad Educativa ´´la Inmaculada´´
Elaboración: La Autora



La mayoría de estudiantes manifiesta que la matemática va más allá de una simple aplicación de reglas a pesar de que, de acuerdo a lo manifestado en la pregunta anterior, en sus clases un alto porcentaje de ejercicios que se desarrollan son de tipo mecánico.

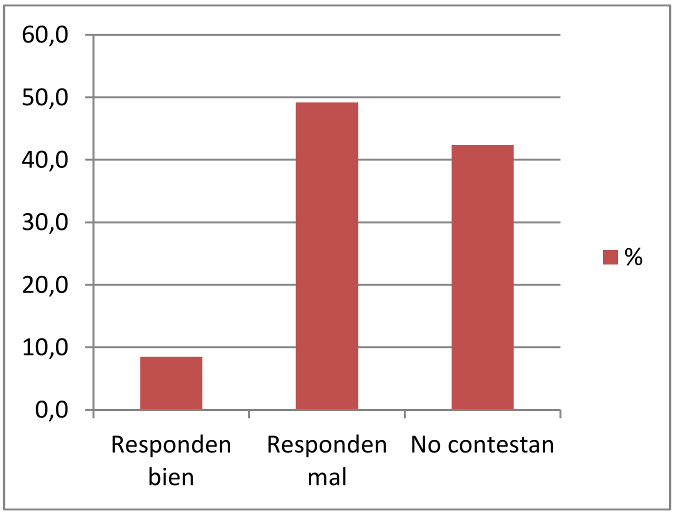
Funciones Lineales.

3. Expresen con sus palabras:

a) ¿Qué es una función?

Opciones.	Total	%
Responden bien	5	8,5
Responden mal	29	49,2
No contestan	25	42,4
Total	59	100,0

Fuente: **Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´**
Elaboración: La Autora



Aquí vemos como muchos de los estudiantes no pudieron decir con sus palabras lo que es una función y otro grupo, considerable, lo hizo mal.

Existen respuestas incorrectas como:

- *Es una operación para encontrar un valor de la incógnita.*
- *Es una fórmula que se expresa por f(x) = mx +b*

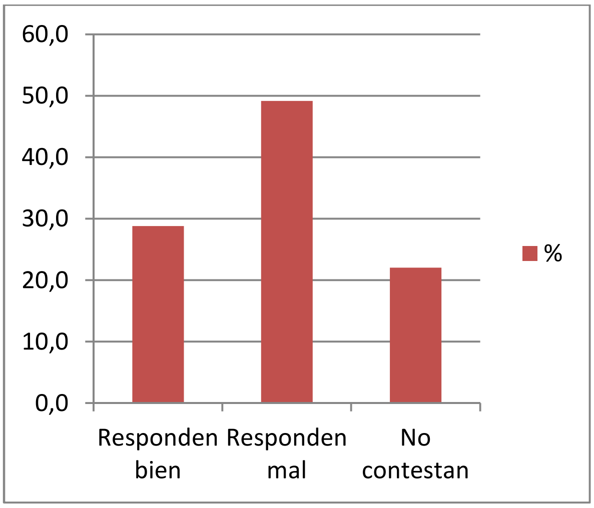
- *Es encontrar los valores de x y de y*
- *Es una expresión algebraica y tiene rango, dominio y llevan variables.*
- *Es una operación en donde hay una incógnita y tenemos que encontrar*

Estos resultados demuestran una falta de comprensión del significado conceptual de este objeto matemático ya que identifican algunos elementos que involucran el concepto de función, pero no expresan su significado.

b) ¿Qué es el dominio de una función?

Opciones	Total	%
Responden bien	17	28,8
Responden mal	29	49,2
No contestan	13	22,0
Total	59	100,0

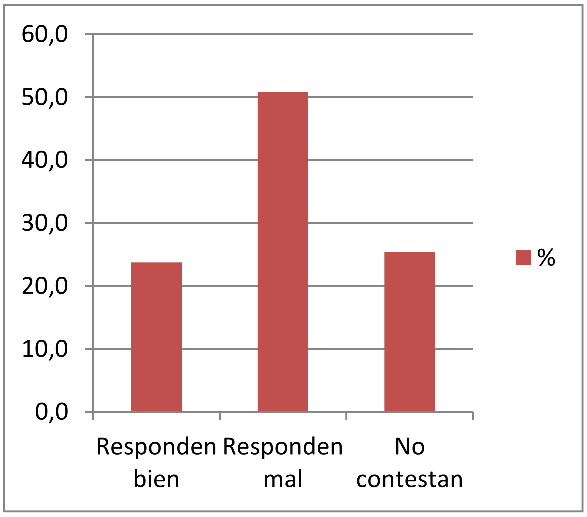
Fuente: **Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´**
Elaboración: La Autora



c) ¿Qué es el rango de una función?

Opciones	Total	%
Responden bien	14	23,7
Responden mal	30	50,8
No contestan	15	25,4
Total	59	100,0

Fuente: **Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´**
Elaboración: La Autora



En el literal b y c, se determina que existen muy pocos estudiantes que pueden expresar de manera correcta lo que es el dominio y el rango de una función.

Las respuestas incorrectas dadas para esta pregunta son:

b)

- *Dominio es de la coordenada x*
- *Dominio son todos los números que pertenecen a x*
- *Dominio es cualquier número del eje x*
- *Dominio abarcan los números de x*

Vemos que se identifica el dominio con x, pero no se dice correctamente su significado.

c)

- *El rango es un conjunto de números reales que puede tomar el eje y.*
- *El rango es el valor de la coordenada y.*
- *El rango es número del eje y.*

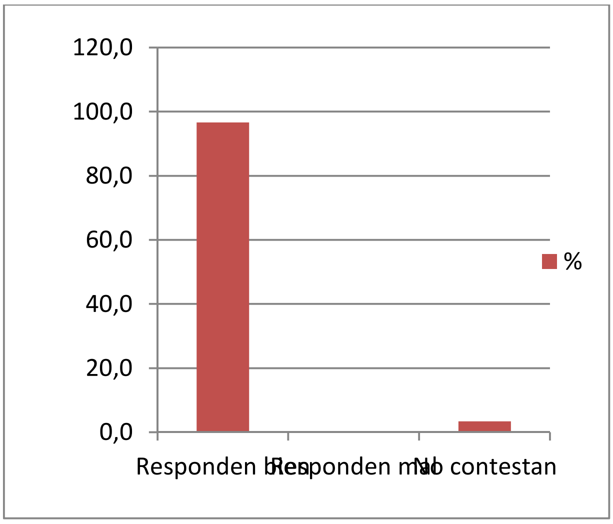
En la primera respuesta se habla de valores del eje y, porque lo que se determina que no hay un concepto claro de *eje y*, es decir existe un error en la comprensión semántica del dominio y rango de una función. En las dos últimas respuestas se toma al dominio no como un conjunto de elementos sino únicamente como un elemento.

4. Indique cómo se lee la siguiente expresión y qué significa:

a) ¿Cómo se lee f(x)?

Opciones	Total	%
Responden bien	57	96,6
Responden mal	0	0,0
No contestan	2	3,4
Total	59	100,0

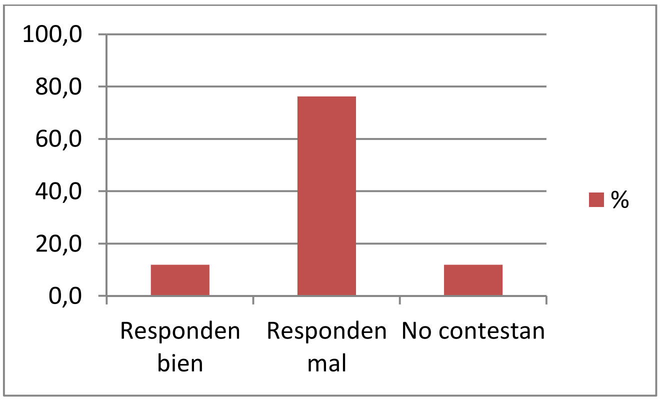
Fuente: **Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´**
Elaboración: La Autora



b) **¿Qué significa?**

Opciones		%
Responden bien	7	11,9
Responden mal	45	76,3
No contestan	7	11,9
	59	100,0

Fuente: **Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´**
Elaboración: La Autora



Del análisis de estas respuestas podemos concluir que la mayoría de estudiantes no presentan dificultad en hacer la lectura del símbolo, pero se puede determinar que no es una lectura comprensiva ya que no entienden su significado porque no relacionan de manera correcta el símbolo con el concepto matemático, esto se refleja en las respuestas erróneas como, el decir que:

- *f es constante mientras que x es variable.*
- *Significa que podemos dar un valor cualquiera al valor x*

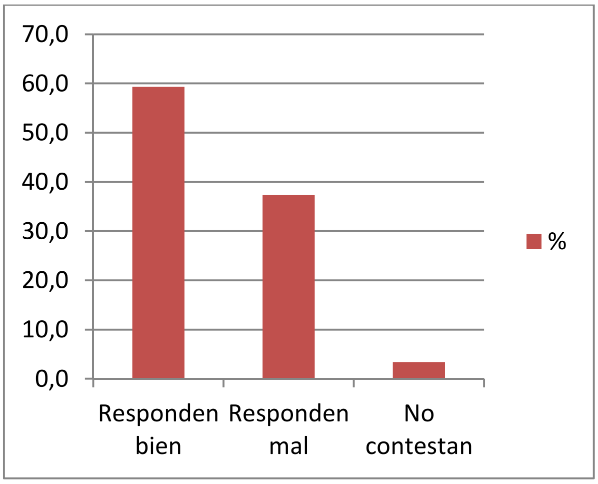
De acuerdo a la primera respuesta se puede determina que no existe el concepto de variabilidad asociado con el de función, por ello no se identifica la variable dependiente. En la segunda respuesta podemos ver que existe el concepto de variable independiente, pero no es suficiente para definir una función.

5.. Escriba F si es falso o V si es verdadero. En una función:

a) Un elemento del dominio está relacionado con uno del rango.

Opciones	Total	%
Responden bien	35	59,3
Responden mal	22	37,3
No contestan	2	3,4
Total	59	100,0

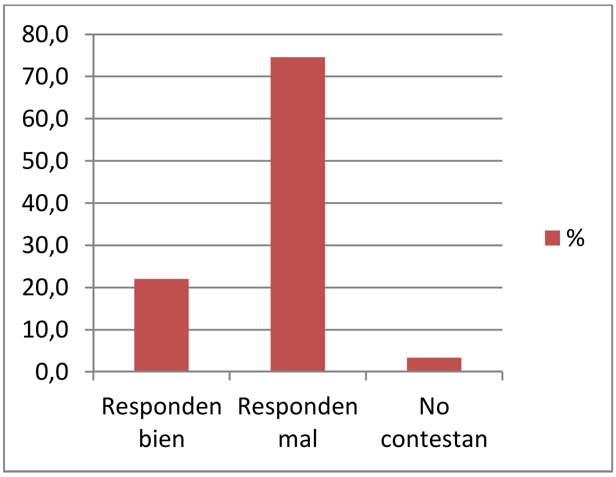
Fuente: **Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´**
Elaboración: La Autora



b) Un elemento del dominio esta relacionados con al menos un elemento del rango.

Opciones	Total	%
Responden bien	13	22,0
Responden mal	44	74,6
No contestan	2	3,4
Total	59	100,0

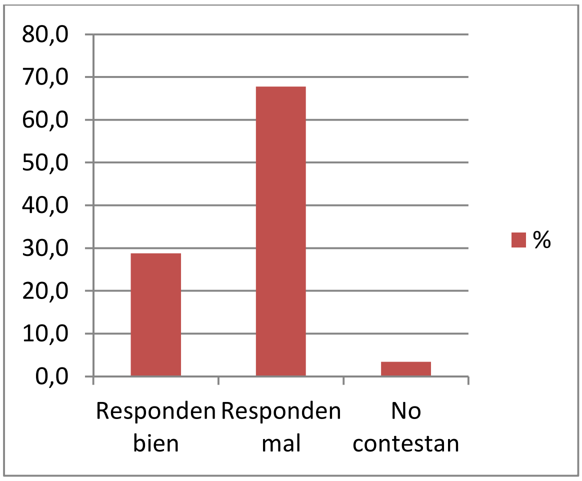
Fuente: **Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´**
Elaboración: La Autora



c) **Dos elementos del dominio están relacionados con uno del rango**.

Opciones	**Total**	**%**
Responden bien	17	28,8
Responden mal	40	67,8
No contestan	2	3,4
Total	59	100,0

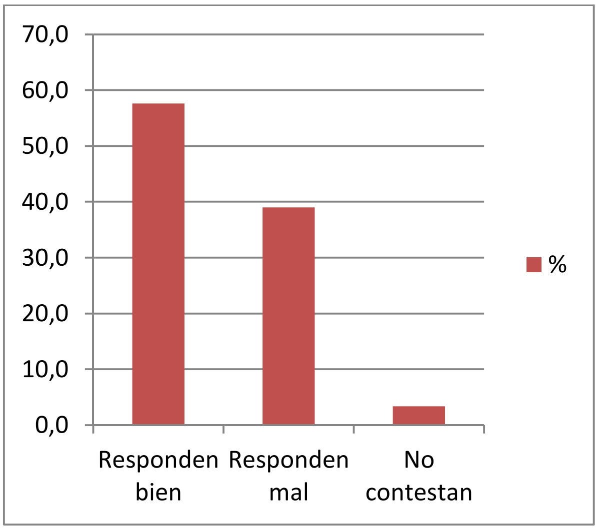
Fuente: Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´
Elaboración: La Autora



d) Dos elementos del **rango** pueden estar relacionados con un elemento del **dominio.**

Opciones	Total	%
Responden bien	34	57,6
Responden mal	23	39,0
No contestan	2	3,4
Total	59	100,0

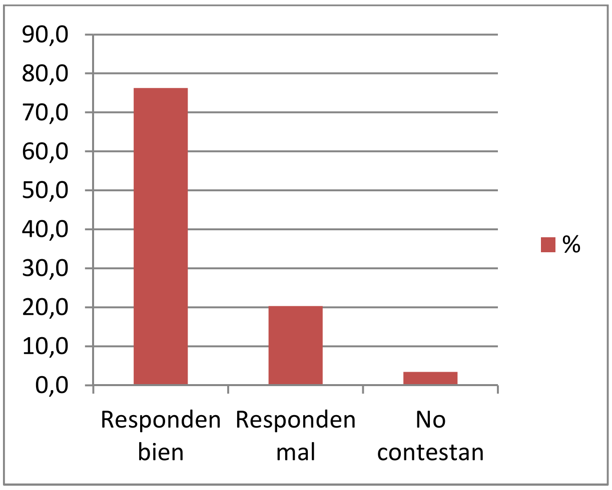
Fuente: **Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´**
Elaboración: La Autora



e) A cada elemento del **rango** le corresponde al menos un elemento del **dominio.**

Opciones	Total	%
Responden bien	45	76,3
Responden mal	12	20,3
No contestan	2	3,4
Total	59	100,0

Fuente: **Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´**
Elaboración: La Autora

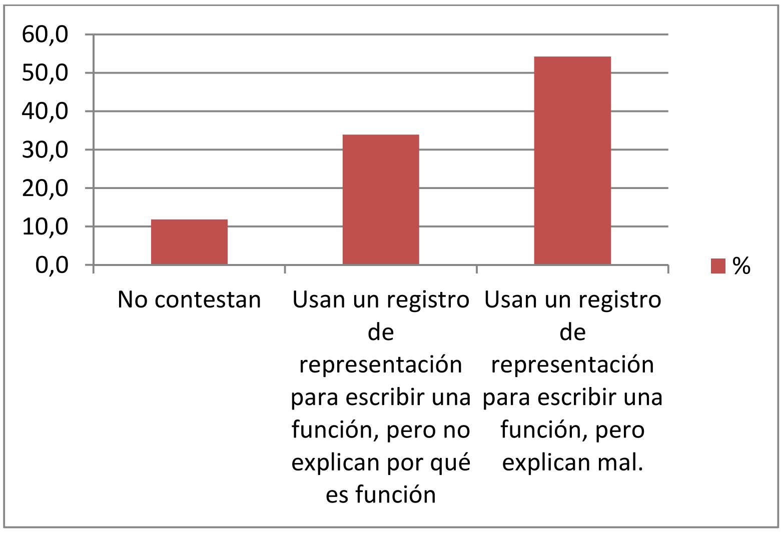


De acuerdo a los resultados, la mayoría de estudiantes demuestran comprenden que existe relación de correspondencia entre los elementos del dominio y los elementos del rango; sin embargo, podemos notar también, en los resultados de los diferentes literales, que no está claro cómo es esta relación.

6. Escriba un ejemplo que represente una función y explique por qué es función.

Opciones	Total	%
No contestan	7	11,9
Usan un registro de representación para escribir una función, pero no explican por qué es función	20	33,9
Usan un registro de representación para escribir una función, pero explican mal.	32	54,2
Total	59	100,0

Fuente: **Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´**
Elaboración: La Autora



32 estudiantes escribe correctamente un ejemplo de la función, 3 de ellos lo hace a través de un diagrama de Venn y el resto usa el registro algebraico, pero de ellos 12 no explican por qué la expresión utilizada es una función mientras que el resto lo hacen de manera incorrecta, con expresiones como:

- *Es función porque tiene una incógnita*
- *Es función porque se puede dar un valor a x y obtener un valor de f*
- *Es función porque tienen una variable*
- *Es función porque tienen dominio y rango.*

La mayoría de estudiantes dan un ejemplo de función expresando en forma algebraica, pero no explican por qué es función. Es decir identifican el significante, pero no saben su significado.

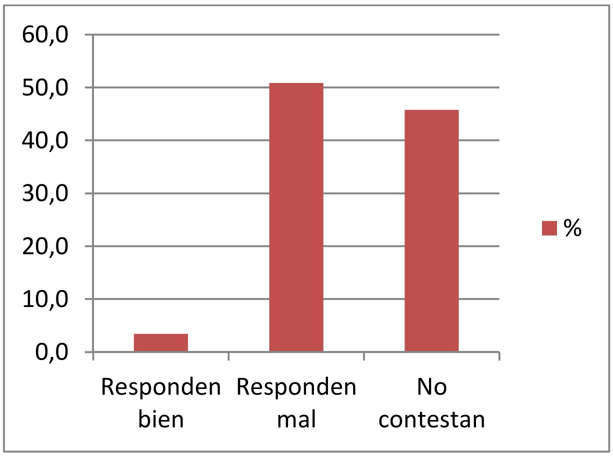
7. Complete. Si A = {2, 4, 5}, B = {1, 3, 5} y la relación entre A y B está dada por: R = { (x, y)/ x + y es un número primo}, entonces:

R = { (…… ,…..); (…… ,…….); (…… ,…….); (…… ,…….); (….., …..) }

Dominio. { ……. , …… } ; Rango. { …… , ……. , …….. }

Opciones	Total	%
Responden bien	2	3,4
Responden mal	30	50,8
No contestan	27	45,8
Total	59	100,0

Fuente: Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´
Elaboración: La Autora



La cantidad de alumnos que no contesta evidencia las grandes dificultades que se les presenta para interpretar la parte simbólica, **R = { (x, y)/ x + y es un número primo}**. Además se observa que una vez formada la relación (de forma incorrecta la mayoría) muchos no tuvieron problema en encontrar el conjunto dominio y rango, para ello tomaron los primeros elementos de los pares ordenados de la relación para formar el dominio y los segundos para formar el rango, lo que indica un proceso puramente mecánico ya que, de acuerdo a lo evidenciado en la pregunta 3 literal c, no existe una comprensión clara del concepto de dominio y rango.

Los mayores errores encontrados al formar la relación fueron:

- Relacionar un elemento del dominio con varios del rango.
- Los elementos relacionados no cumplen la regla de correspondencia, lo que indica que no entendieron la regla.

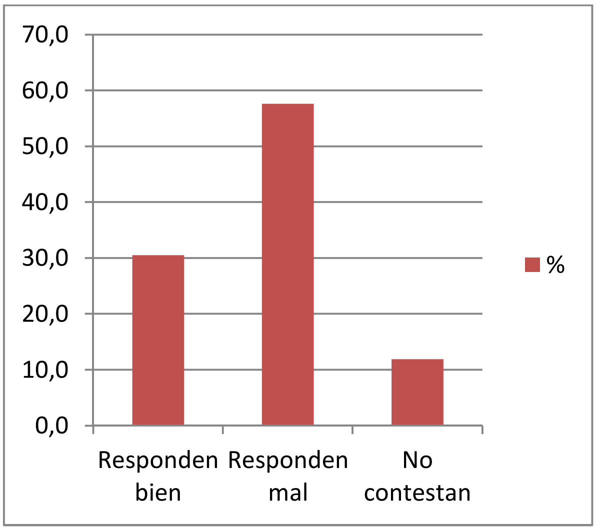
- Relacionar un elemento del primer conjunto con uno del segundo en el orden que aparecen, sin considerar la regla establecida.
- Identificar el rango como el conjunto formado por todos los elementos del conjunto de llegada, sin hacer una verificación semántica.

8. ¿Las siguientes expresión, son ecuaciones?

a) $(a + b)^2 = a^2+2ab+b^2$

Opciones	Total	%
Responden bien	18	30,5
Responden mal	34	57,6
No contestan	7	11,9
Total	59	100,0

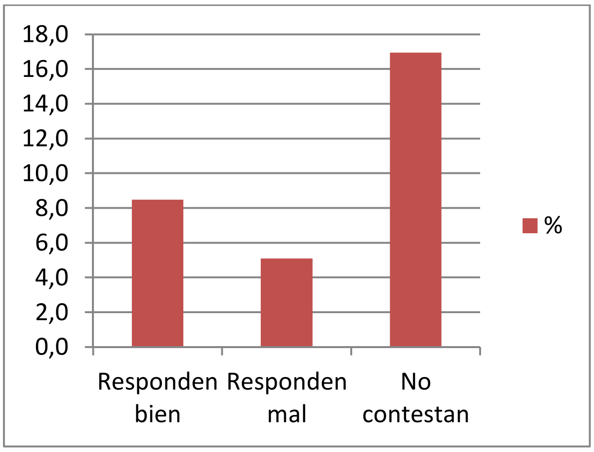
Fuente: **Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´**
Elaboración: La Autora



¿Por qué?

Opciones	Total	%
Responden bien	5	8,5
Responden mal	3	5,1
No contestan	10	16,9
Total	18	30,5

Fuente: **Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´**
Elaboración: La Autora

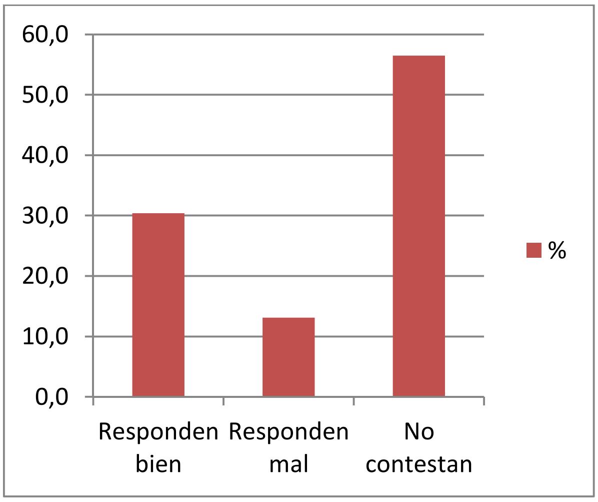


Un alto porcentaje de los 34 estudiantes que respondieron correctamente al manifestar que la expresión dada no es ecuación, dan una respuesta errónea al justificar su respuesta. Justifican manifestando que la expresión dada es una ecuación: *porque existe un signo igual, porque tiene incógnitas* o *porque tienen número y letras*. Esto indica que identifican una ecuación únicamente como una igualdad, más no le consideran como una igualdad condicional, por tanto hay una falta de comprensión en el significado de ecuación.

b) **a - 2 = 17**

Opciones	Total	%
Responden bien	23	39,0
Responden mal	29	49,2
No contestan	7	11,9
Total	59	100,0

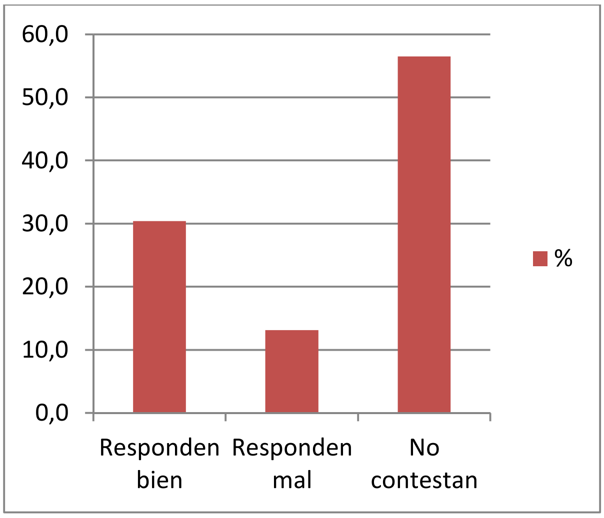
Fuente: **Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´**
Elaboración: La Autora



¿Por qué?

Opciones	Total	%
Responden bien	7	30,4
Responden mal	3	13,1
No contestan	13	56,5
Total	23	100,0

Fuente: **Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´**
Elaboración: La Autora

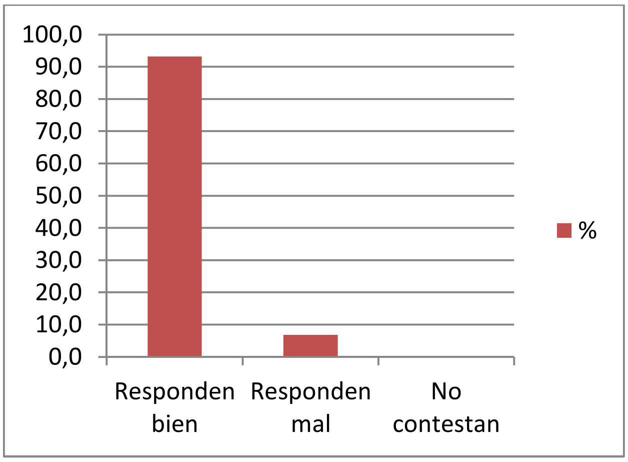


En este segundo caso, literal b, podemos ver mayor número de respuestas correctas, pero las justificaciones dadas al decir que es igualdad (anotan: *porque* *son igualdades, porque tienen incógnitas, porque tienen una variable*) se cumple también para igualdades que no son ecuaciones.

c. Resuelva a – 2 = 17.

Opciones	Total	%
Responden bien	55	93,2
Responden mal	4	6,8
No contestan	0	0
Total	35	100,0

Fuente: Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´
Elaboración: La Autora



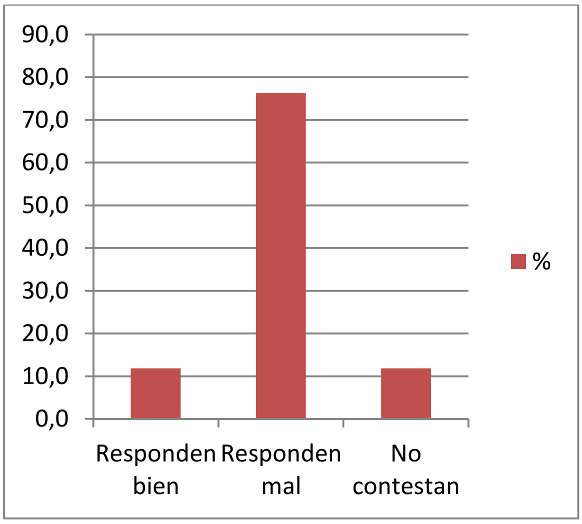
Por lo observado, los estudiantes no presentan problemas al resolver la ecuación (sólo dos no lo hicieron correctamente). Saben resolver una ecuación pero no tienen claro lo que es una ecuación.

9. Analice las siguientes tablas de valores, determine cómo se relacionan las variables *x* y *y*, y escriba la función correspondiente.

X	Y
- 4	- 16
- 2	-10
0	-4
4	8
5	11
7	17
Función 1………………..	

Opciones	Total	%
Responden bien	7	11,9
Responden mal	45	76,3
No contestan	7	11,9
Total	59	100,0

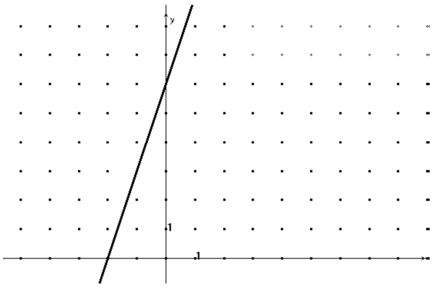
Fuente: **Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´**
Elaboración: La Autora



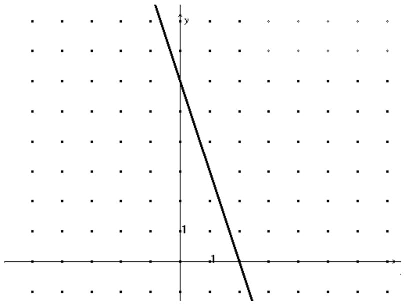
Del análisis de estas respuestas podemos concluir que en general los estudiantes presentan dificultades en la conversión del registro tabular al registro verbal y al registro algebraico.

10. Identifique cuál de las siguientes gráficas corresponde a la función:

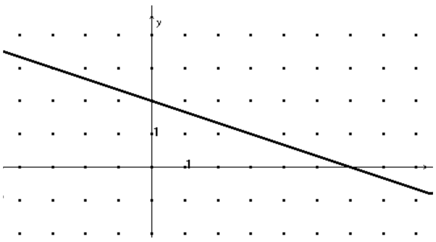
f(x) = -3x + 6



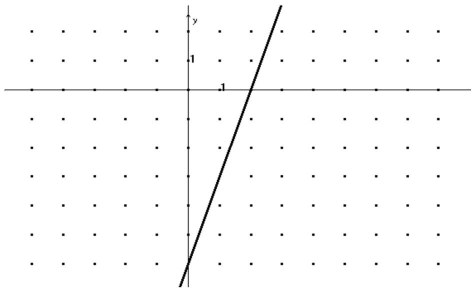
(a)



(b)



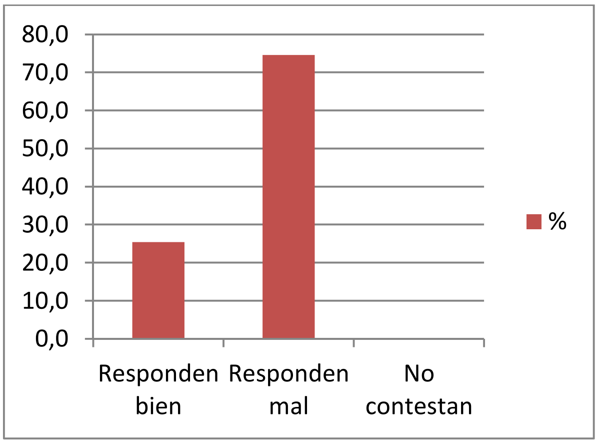
(c)



(d)

Opciones	Total	%
Responden bien	15	25,4
Responden mal	44	74,6
No contestan	0	0,0
Total	59	100,0

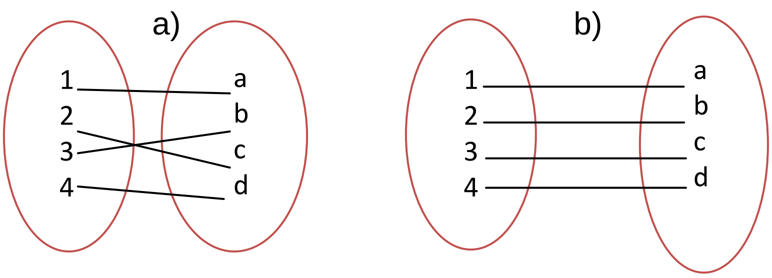
Fuente: **Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´**
Elaboración: La Autora

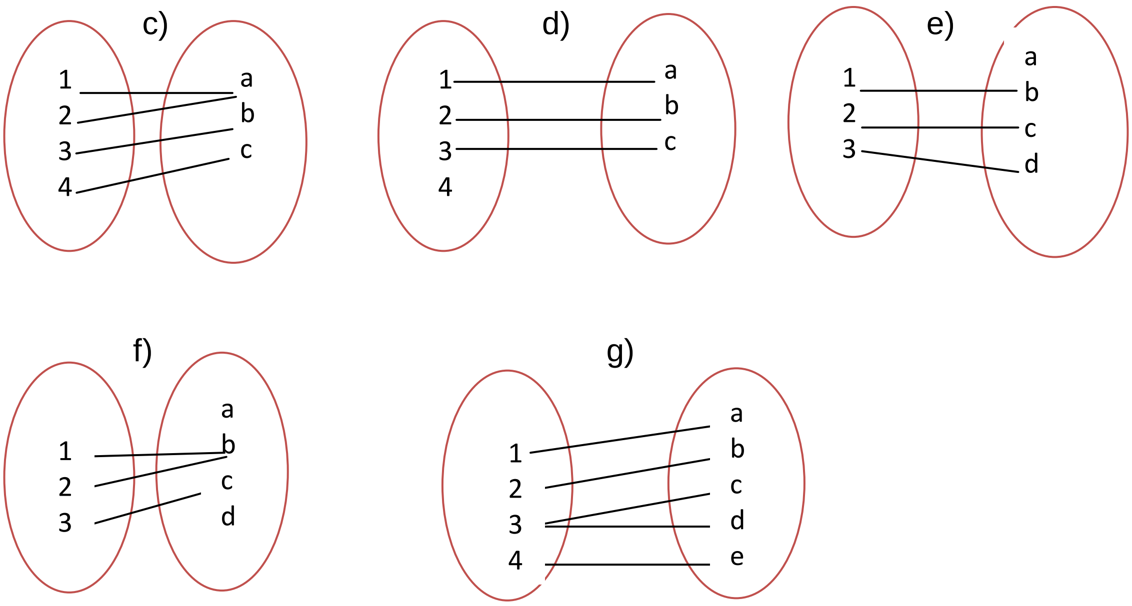


En esta pregunta se pide relacionar las gráficas con la ecuación correspondiente (conversión del registro gráfico al registro algebraico), se trata de verificar si el estudiante puede identificar directamente las variables visuales con los parámetros de la expresión algebraica (*m, b*). Los resultados nos dan a conocer que la mayoría no logró identificar la gráfica correcta, 15 de los 44 estudiantes que eligieron mal su respuesta, identificaron correctamente en la gráfica los valores de la pendiente *m* y del parámetro *b*, pero no interpretaron el signo de *m,* siete estudiantes determinaron correctamente sólo el valor de *b* y dos no lograron identificaron correctamente estos valores en la gráfica.

En resumen, la mayoría presentan dificultades para relacionar los coeficientes de las ecuaciones algebraicas de las funciones con las características geométricas de su representación gráfica

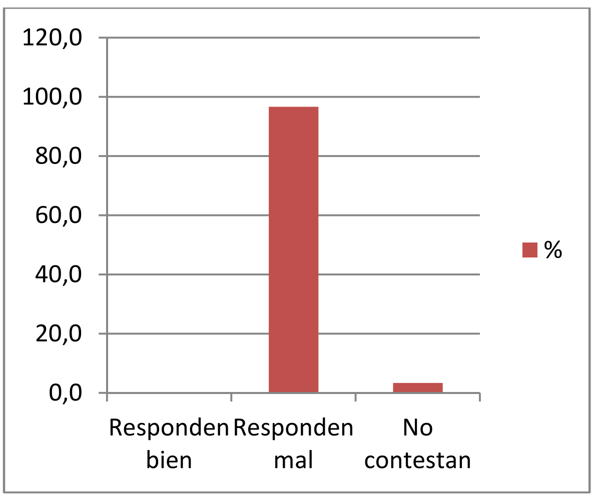
11. ¿Cuál o cuáles de las siguientes relaciones es una función?





Opciones	Total	%
Responden bien	0	0,0
Responden mal	57	96,6
No contestan	2	3,4
Total	59	100,0

Fuente: Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´
Elaboración: La Autora



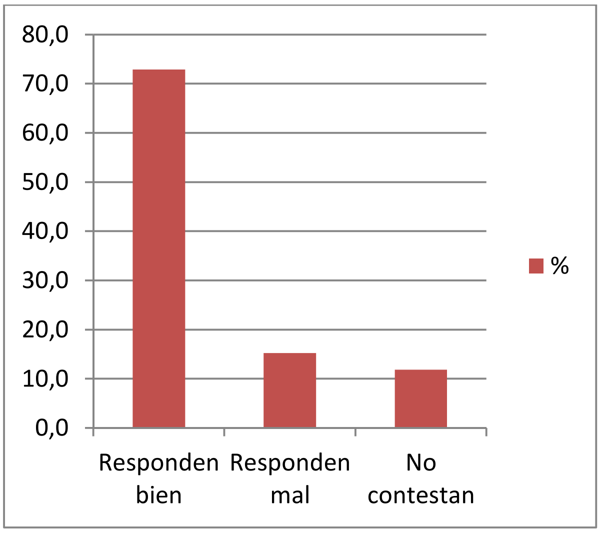
Aquí el estudiante debe identificar los diagramas que representan una función, es decir, interpretar el concepto de función mediante un diagrama. Los resultados reflejan la falta de comprensión de los conceptos: función, dominio y rango.

12. Si f(x) = 2 + x, cuál es el valor de f(x) para x = 1?, para estos valores, cuál es imagen y cuál es dominio?, ¿cuál es variable dependiente y cuál es variable independiente?

a) ¿Cuál es el valor de f(x) para x = 1

Opciones	Total	%
Responden bien	43	72,9
Responden mal	9	15,3
No contestan	7	11,9
Total	59	100,0

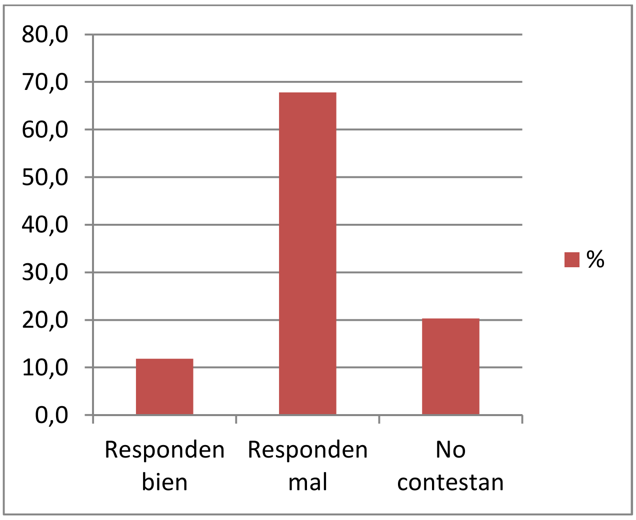
Fuente: Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´
Elaboración: La Autora



b) **¿Cuál es la imagen?**

Opciones	Total	%
Responden bien	7	11,9
Responden mal	40	67,8
No contestan	12	20,3
Total	59	100,0

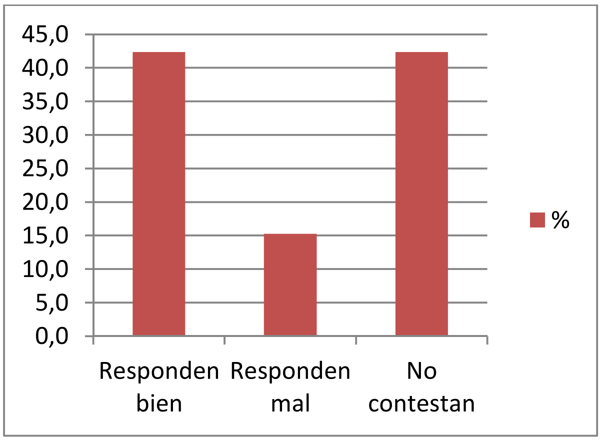
Fuente: **Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´**
Elaboración: La Autora



c) **¿Cuál es el dominio?**

Opciones	Total	%
Responden bien	25	42,4
Responden mal	9	15,3
No contestan	25	42,4
Total	59	100,0

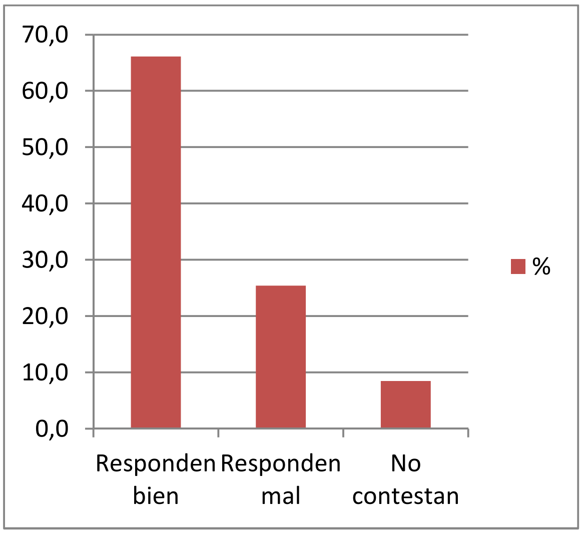
Fuente: **Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´**
Elaboración: La Autora



d) **¿Cuál es la variable independiente?**

Opciones	Total	%
Responden bien	39	66,1
Responden mal	15	25,4
No contestan	5	8,5
Total	59	100,0

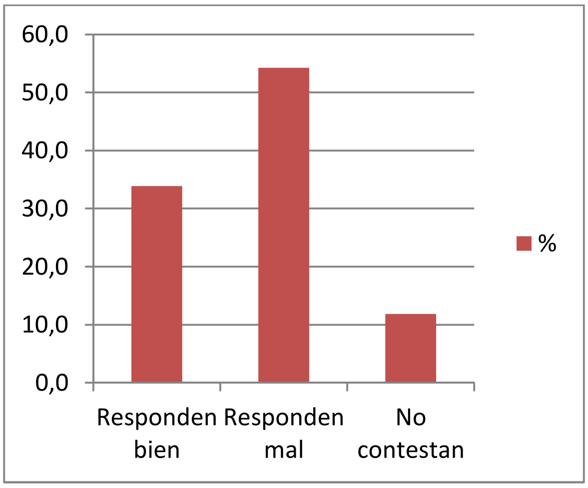
Fuente: Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´
Elaboración: La Autora



e) **¿Cuál es la variable dependiente?**

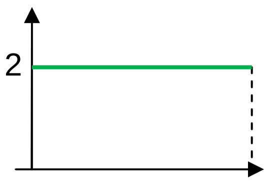
Opciones		%
Responden bien	20	33,9
Responden mal	32	54,2
No contestan	7	11,9
Total	59	100,0

Fuente: **Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´**
Elaboración: La Autora



La mayoría no tiene problema en evaluar una función y en identificar la variable independiente, pero un porcentaje considerable no identifica la imagen, el dominio ni la variable dependiente.

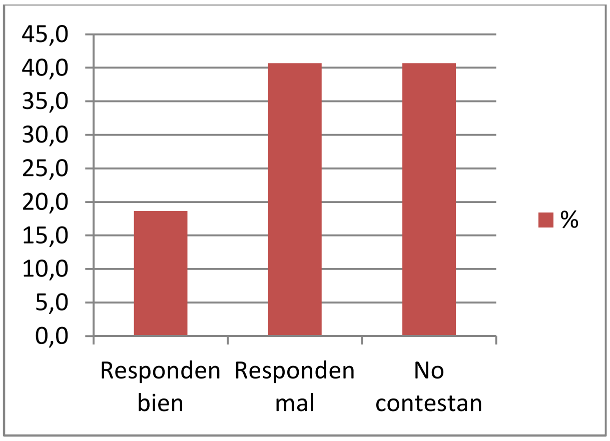
13. En la siguiente función *f(x)* = *mx* + *b* ¿Cuánto vale *m* y cuánto vale *b*?



a) Valor de b

Opciones	Total	%
Responden bien	11	18,6
Responden mal	24	40,7
No contestan	24	40,7
Total	59	100,0

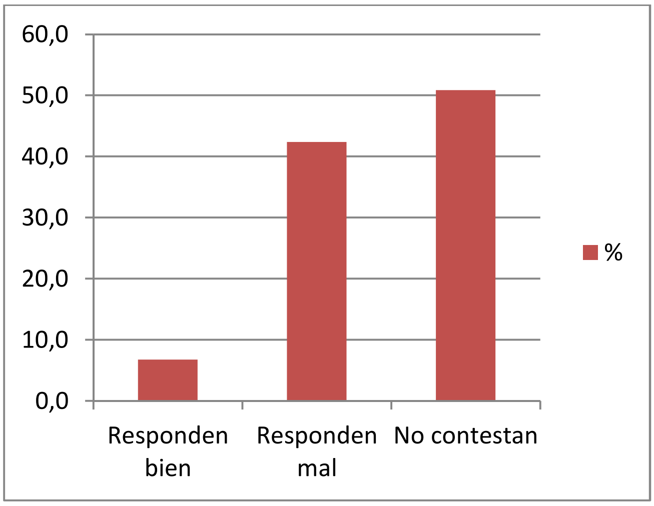
Fuente: Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´
Elaboración: La Autora



b) Valor de *m*

Opciones	Total	%
Responden bien	4	6,8
Responden mal	25	42,4
No contestan	30	50,8
Total	59	100,0

Fuente: Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´
Elaboración: La Autora

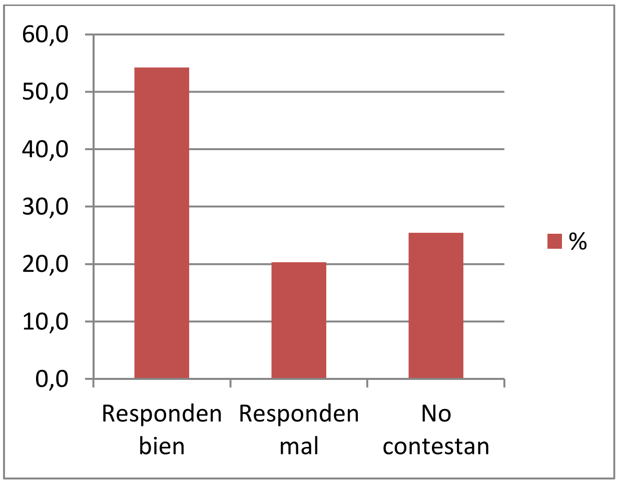


Esta pregunta cumple el mismo objetivo que la pregunta 10, pero ahora referida a una función constante (conversión del registro gráfico al registro algebraico). Los resultados demuestran cómo la gran mayoría de estudiantes no sabe interpretar lo que *m* y *b* representan en la gráfica.

14. Exprese mediante una función el ingreso que resulta de la venta de un determinado número de artículos vendidos a $ 5 cada uno.

Opciones	Total	%
Responden bien	32	54,2
Responden mal	12	20,3
No contestan	15	25,4
Total	59	100,0

Fuente: **Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´**
Elaboración: La Autora

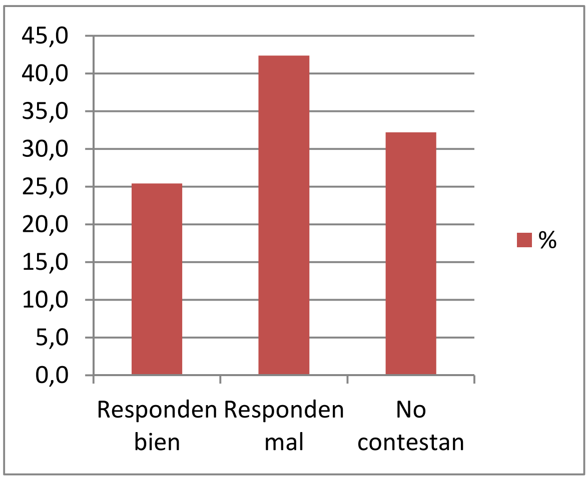


Un alto porcentaje, como se presenta en la tabla, lo resuelven correctamente, es decir no tienen mayor dificultad en pasar del lenguaje verbal al algebraico.

15. Traduzcan al lenguaje algebraico el siguiente enunciado: Hay seis veces tantos estudiantes como profesores.

Opciones	Total	%
Responden bien	15	25,4
Responden mal	25	42,4
No contestan	19	32,2
Total	59	100,0

Fuente: **Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´**
Elaboración: La Autora

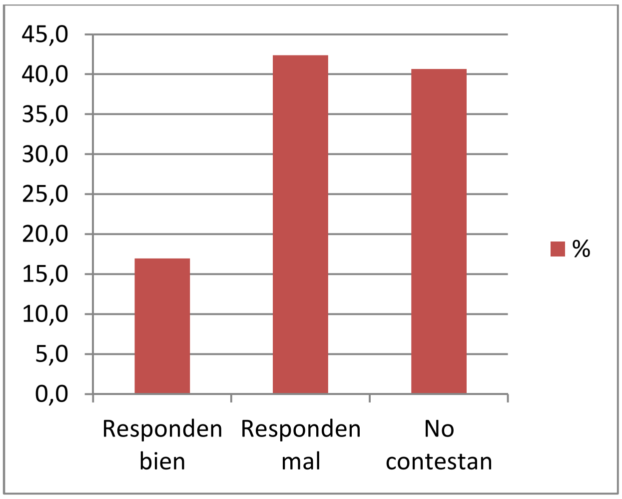


Podemos ver cómo, a diferencia de los resultados anteriores, muchos estudiantes no realizan la conversión correcta del registro verbal al algebraico, ésta dificultad se presenta, como lo podemos notar, a medida que el ejercicio se complica. Este proceso en matemática es fundamental, pues corresponde a la lectura comprensiva del enunciado del problema para poder expresarlo en un lenguaje matemático y es el primer paso sobre el cual deberá construirse la posterior resolución.

16. Ponga un enunciado para la siguiente función $f(x) = 2x - 3$

Opciones	Total	%
Responden bien	10	16,9
Responden mal	25	42,4
No contestan	24	40,7
Total	59	100,0

Fuente: **Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´**
Elaboración: La Autora



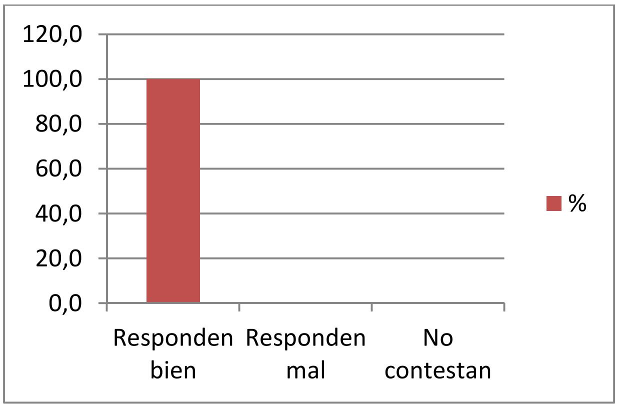
Sólo un número reducido de estudiantes puede dar significado a una expresión algebraica al pasar del lenguaje algebraico al lenguaje verbal.

17. Dados los puntos de coordenadas (1,4) y (3,5):

a) Graficar la recta que pasa por los dos puntos.

Opciones	Total	%
Gráfica correcta	59	100,0
Gráfica incorrecta	0	0,0
No contestan	0	0,0
Total	59	100,0

Fuente: Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´
Elaboración: La Autora

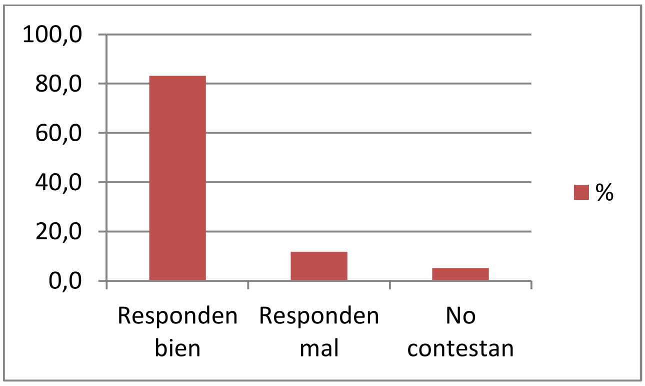


Todos los estudian responden correctamente. Trazan la recta que pasa por los puntos señalados y no tienen problema al dibujar las coordenadas de los puntos en el plano cartesiano.

c) ¿Qué signo tiene la pendiente de esta recta? y ¿por qué?
d)

Opciones	Total	%
Responden bien	49	83,1
Responden mal	7	11,8
No contestan	3	5,1
Total	59	100,0

Fuente: Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´
Elaboración: La Autora



En el literal *b,* muchos estudiantes (excepto 10) responden correctamente, sin embargo las justificaciones dadas no son correctas, son del tipo:

- *Porque la recta se encuentra en el primer cuadrante.*
- *Porque al aplicar la fórmula de la pendiente sale positivo.*
- *Porque corta al eje y en la parte positiva*.

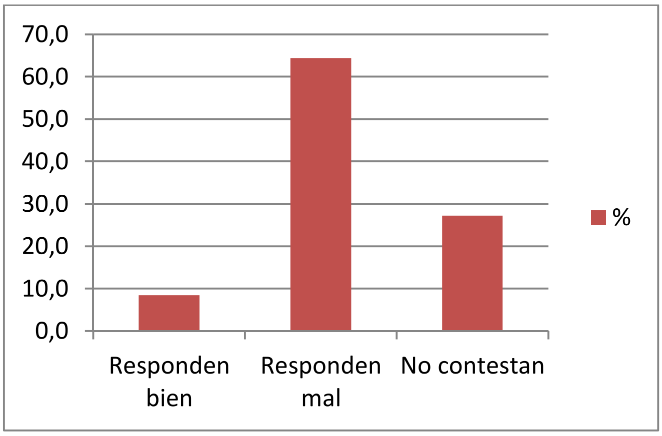
Ninguno de los estudiantes asocia el signo de la pendiente con la inclinación de la recta.

e) Calcular el valor de la pendiente de la recta.

f)

Opciones	Total	%
Bien	52	88,1
Mal	7	11,9
No contestan	0	0,0
Total	35	100,0

Fuente: **Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´**
Elaboración: La Autora

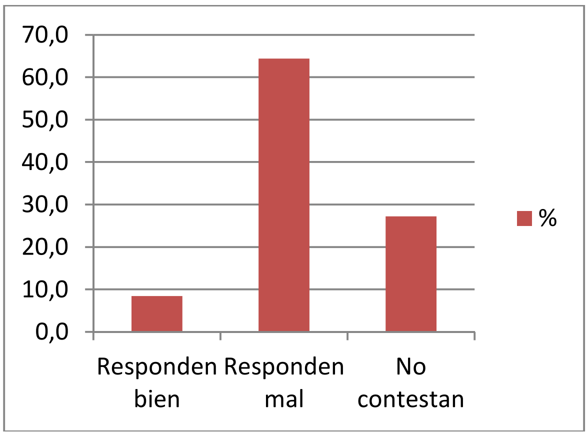


En el literal c, casi todos calculan correctamente el valor de la pendiente *m*, aplicando la fórmula, a excepción de siete estudiantes que comenten errores al escribir la fórmula.

d) ¿Qué entiende por pendiente de una recta?

Opciones	Total	%
Responden bien	5	8,4
Responden mal	38	64,4
No contestan	16	27,2
Total	59	100,0

Fuente: Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´
Elaboración: La Autora



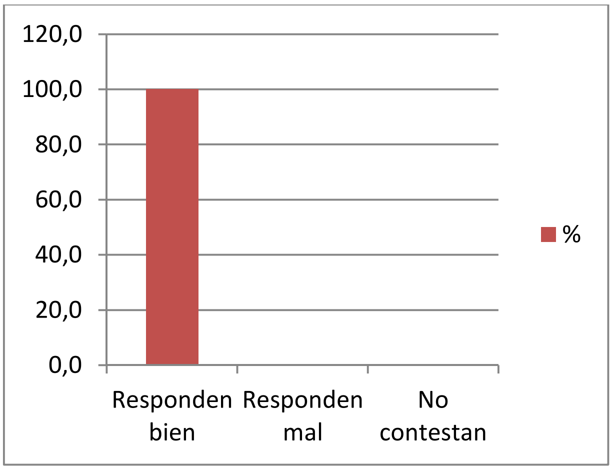
A pesar de que todos los estudiantes han podido calcular la pendiente solicitada, podemos evidenciar, de acuerdo a las respuestas dadas en este literal, que casi ninguno de ellos tiene un significado claro de esta noción, la mayoría la asocia simplemente con la fórmula o con una constante y no como una razón de cambio. En estas condiciones es difícil que puedan convertir la representación gráfica de una función lineal en algebraica o viceversa.

18. Dada la siguiente tabla de datos, determine si pertenece a una función lineal. ¿Por qué?

X	*Y*
10	4
20	8
30	12
40	16
50	20

Opciones	Total	%
Responden bien	59	100
Responden mal	0	0
No contestan	0	0
Total	59	100

Fuente: **Inidad Educativa ´´La Inmaculada´´**
Elaboración: La Autora



Si bien todos los estudiantes concluyen que la función es lineal, lo cual es correcto, todos cometen error en la explicación del por qué, ya que argumentan manifestando: *porque su gráfica es una línea recta*; lo que indica un error en la concepción de este objeto matemático ya que esta condición no es suficiente para asegurar que la función sea lineal.

2.2.7 Análisis e interpretación general de resultados.

De acuerdo a los resultados presentados en las tablas y gráficas referentes al cuestionario aplicado podemos determinar que:

El mayor porcentaje de ejercicios desarrollados en las clases de matemáticas son mecánicos, así lo expresan los estudiantes lo cual es corroborado con los resultados reflejados en la pregunta 6, en donde la mayoría de estudiantes (88,1%) escriben algebraicamente un ejemplo de función, pero no explican correctamente por qué, el ejemplo citado, corresponde a una función; de igual manera en la segunda parte de la pregunta 7, los resultados demuestra que la mayoría (96,6%) identifican los elementos del dominio y rango una vez formados los pares ordenados de la relación, pero la relación obtenida, R, es incorrecta; en la pregunta 12, un alto porcentaje de estudiantes (72,9%) no tienen problema en evaluar una función (reemplazan correctamente el valor de x en la función y resuelven bien las operaciones), lo mismo sucede en la pregunta 17, en donde la gran mayoría de los estudiantes (88,1%) calcula correctamente el valor de la pendiente usando la fórmula, pero al preguntarles ¿qué es pendiente?, el 97,6% no demuestran tener una comprensión clara del concepto. Finalmente podemos observar que el proceso mecánico usado por los estudiantes en la pregunta 8, al resolver correctamente una ecuación simple, no les permite identificar qué igualdades son ecuaciones.

También es importante destacar el hecho de que todos los estudiantes en la pregunta 18 optaron por traducir la tabla punto por punto al registro gráfico y ver la forma del trazo, obteniendo una recta lo que les llevó a concluir que la relación es lineal, y no se fijaron en el tipo de relación existente entre los valores de las variables representadas en la tabla; es decir, utilizan el registro tabular solamente como una herramienta intermedia para localizar puntos en un plano, y no como un objeto matemático a partir del cual se puede interpretar una función. La determinación del tipo de relación entre los datos de la tabla (registro tabular) y el registro algebraico, en los cuales se ve claramente una relación de proporcionalidad directa, hubiese evitado dar una justificación incorrecta. Este resultado es consecuencia de una falta de información semántica y de información semántica incorrecta que hace ver a la función lineal y a la función afín como un mismo objeto, esto lo he comprobado al revisar el cuaderno de los estudiantes así como también algunos textos matemáticos.

La mayoría de estudiantes no reconocen un mismo objeto matemático a través de representaciones que son dadas en registros diferentes, por lo que es evidente la falta de una comprensión integral. Esto se refleja en los resultados de las preguntas 9, 10, 13 y 15; en las que la mayoría de estudiantes (88,1%, 74,6%, 93,2% y 74,6%, respectivamente) demuestran grandes dificultades al realizar la conversión de un objeto matemático de un registro a otro. Así, en la pregunta 9 no pudieron encontrar y escribir algebraicamente la función representada en una tabla de datos, en las preguntas 10 y 13 no relacionaron la gráfica de una función con su expresión algebraica (la pregunta 10 hacía referencia a una función afín y la 13 a una función constante); en la pregunta 15, se debía expresar en forma algebraica un enunciado a una situación determinada, lo hacen en forma incorrecta; y en la pregunta 16 no escriben correctamente un enunciado que corresponda a una expresión algebraica dada. Todo esto demuestra cómo un proceso mecánico y repetitivo no permite que el estudiante se apropie de los significados de los diversos objetos matemáticos.

Los estudiantes al no conceptualizan los objetos matemáticos, aprenden solamente los procedimientos de cálculo en un nivel puramente algorítmico, sin tener en cuenta la semántica de los objetos involucrados. Esto podemos determinar de acuerdo al alto porcentaje de estudiantes que demuestran no tener una comprensión de los conceptos al no poder expresar lo que es función, dominio, rango, imagen, pendiente, variable dependiente y, al demostrar una falta de comprensión en la relación de dependencia en una función, en el significado de cada elemento del dominio y del rango; tampoco comprenden la pendiente como una razón de cambio, lo identifican únicamente por su fórmula.

Luego de este análisis, los errores registrados no sólo revelan dificultades en las actividades de conversión entre diversos registros por parte del estudiante, sino además una confianza excesiva en los procedimientos que han logrado mecanizar y de los que no evidencian tener una significación clara, es decir no existe una relación entre expresión y contenido (significante y significado), lo que genera una falta en la comprensión, ya que como dice Dummett: “Una teoría del significado es una teoría de la comprensión; esto es, aquello de lo que una teoría del significado tiene que dar cuenta es lo que alguien conoce cuando conoce el lenguaje, esto es, cuando conoce los significados de las expresiones y oraciones del lenguaje" (372).

Por todo lo expuesto, podemos determinar cómo la falta de información semántica (trabajar conceptos que no son comprendido), la poca articulación entre diversos registros, así como una ejercitación puramente mecánica generan una incomprensión del lenguaje matemático.

Como consecuencia de estos resultados se hace necesario buscar estrategias que garanticen la adquisición significativa de conceptos y subconceptos relacionados con funciones y que muestren las riquezas de sus aplicaciones. Esto permitirá a los estudiantes apropiarse de estos conceptos para lo que se desarrolla una propuesta, que busca precisamente mejorar la compresión matemática a través de la comprensión semántica de los textos matemáticos, en la que se considera que cada planteamiento matemático es necesario abordarlo desde varias aristas o expresarlo de diferentes maneras, teniendo en cuenta los distintos medios de representación y expresión involucrados así como las coordinaciones que necesariamente tienen que establecerse entre ellos.

CAPÍTULO III

3.1 PROPUESTA DIDÁCTICA.

3.1.1 Antecedentes.

Uno de los temas de gran importancia dentro del estudio de la matemática es el correspondiente a *Funciones.* David Tall señala que un propósito de la *Función* es representar cómo cambian las cosas, mientras C. Kieran considera, que describir el mundo es describir el cambio[18]. Podemos, entonces, darnos cuenta de la gran importancia y aplicación que tienen las funciones en diversas situaciones de la vida, es por ello que Eisenberg, manifiesta: “Que la función es un concepto crucial en la comprensión de la matemática y que desarrollar en los estudiantes una sensibilidad para las funciones debe ser uno de los objetivos primordiales del currículo” (ctd. en Monzoy, 1).

Sin embargo, un gran problema que he enfrentado en mi práctica docente, ha sido la falta de comprensión y dominio que tienen los estudiantes hacia los diferentes conceptos involucrados en este tema. Las diferentes fórmulas que se generan pierden su validez ya que el estudiante no logra apropiarse de su verdadero significado y se convierten en simples fórmulas memorizadas. Siendo, como ya se manifestó, el concepto de función de fundamental importancia, a partir del cual se generan muchos conceptos matemáticos más, este problema se convierte en un obstáculo para continuar los estudios matemáticos siguientes y entender su aplicación.

[18] Las expresiones de Tall y Kieran son tomadas del artículo: EL ESTUDIO DEL CONCEPTO DE FUNCION EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR MEDIANTE LA SIMULACION DE UN CONTEXTO de José Alberto Monzoy Vásquez

Existen numerosos estudios realizados en torno al aprendizaje de las funciones matemáticas[19], los mismos que, al igual que los resultados obtenidos en el diagnóstico aplicado y a la experiencia docente, reflejan la falta de comprensión de este concepto, considerando como una causa de mucho peso al aprendizaje centrado en los procedimientos algorítmicos, que lleva al estudiante a fijar su atención en los símbolos y en su manipulación, sin prestar atención a los significados; como se pudo notar en los resultados del diagnóstico.

Por lo expuesto, y considerando que el estudiante debe apropiarse del concepto, esta propuesta se orienta a la generación de aprendizajes significativos, basados en la comprensión semántica, lo que implica comprender el significado de los conceptos, expresiones y frases utilizadas en un texto matemático, para ello se dará la información semántica necesaria a través de las diversas actividades planteadas y utilizando los diversos registros de representación, de manera que el estudiante llegue a entender su aplicación en las diversas situaciones de la vida y sienta interés por su aprendizaje.

3.1.2 Descripción de la propuesta.

La base de esta propuesta radica en la construcción de significados de los conceptos desde una teoría de los sistemas semióticos de representación que le permitan al estudiante llegar a su comprensión.

Se desarrolla la propuesta en el siguiente orden:

[19] Entre ellos podemos mencionar los estudios realizados por:
Duval (1998), quien determina la dificultad en los alumnos en la conversión entre diversos registros en el estudio de funciones. En Duval,(1999) se refiere a la capacidad de reconocer las unidades significativas de los registros para pasar de una representación a otra en donde considera la necesidad de desarrollar las tres capacidades cognitivas: formación, tratamiento y conversión.
Hitt (1996, 1998,2000a, 2000b) en su estudio, Teoría de los Sistemas Semióticos de Representación en la adquisición del concepto de Función.
De la Rosa (2000, 2001), Estudio la noción de función que tenían los estudiantes.
Janvier (1987) en uno de sus trabajos realiza un estudio de algunas dificultades sobre el concepto de función basado en las representaciones gráficas.

Primero, se definen los términos que el estudiante debe conocer para empezar el estudio de la *Función Lineal*, formulando ejemplos que aclaren el significado de los términos en el contexto matemático en el que se van a usar.

Segundo, se presenta una serie de actividades para el diagnóstico, las mismas que involucran tanto la parte conceptual como la parte práctica a través de diversos ejercicios y problemas.

Tercero, se desarrollan los contenidos a través de diversas actividades que permitan al estudiante ir construyendo los significados de los diferentes conceptos, los mismos que serán abordados en sus diferentes registros de representación ya que el aprendizaje de las matemáticas involucra distintas actividades cognitivas y, por tanto, requieren diversos sistemas de representación [20] que ayudan a los estudiantes a dar significado a los objetos matemáticos. Se hará hincapié en la conversión entre los diversos registros utilizados, ya que como Janvier sostiene: “no se ha integrado el concepto de función hasta que no se es capaz de pasar de una de las representaciones a todas las demás” (ctd. en Lávque, Méndez y Villarroel, 1)

Cuarto, considerando, que la ejercitación es uno de los momentos más importantes en el aprendizaje de la matemática y que debe ser realizada con profesionalismo de manera que cumpla su propósito; esta propuesta concluye con la formulación de ejercicios y problemas que tendrán por objetivo coadyuvar a la compresión y al uso correcto de los términos estudiados. Se tomará en cuenta el razonamiento matemático, más que los procedimientos de simple memorización, planteando problemas que requieran procesos heurísticos antes que algorítmicos[21].

---

[20] En este mismo sentido, Duval (1993) sostiene la necesidad de diversos sistemas semióticos ligados a un mismo concepto matemático y establece que las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias, ya que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por la percepción o por una experiencia intuitiva inmediata como lo son los objetos comúnmente llamados físicos. Esto lleva a la necesidad de considerar las relaciones entre los diversos sistemas de representación para un mismo concepto.

[21] En los procesos algorítmicos se sigue un conjunto de pasos establecidos, mientras que en los procesos Heurísticos el alumno debe descubrir el proceso de solución.

Se espera, que la estrategia presentada sea una alternativa a considerar por los docentes de la asignatura y pueda ser ampliada a otros temas matemáticos para lograr activar en los alumnos los procesos cognitivos de manera significativa para la comprensión del lenguaje matemático.

3.1.3. Fundamentos pedagógicos.

Según la posición del constructivismo, el conocimiento no es una fiel copia de la realidad, sino una construcción del ser humano.

Constantemente se ha hablado en el presente trabajo de *construcción de significados* y, ésta es una expresión clave en uno de los principios del constructivismo (proceso individual de construcción de significados) y se refiere, como lo manifiesta Claudia Ordoñez, a la construcción por parte de quien aprende y no a la transmisión por parte de quien enseña. (143).

El desarrollo de esta propuesta está encaminada a fomentar la construcción de los conocimientos mediante la interacción constructivista – comunicativa. En este sentido y siguiendo la propuesta pedagógica del Ministerio de Educación para el Nuevo Bachillerato, el estudiante es el protagonista activo del aprendizaje, mientras que el docente asume el rol de facilitador y mediador. El estudiante es quien construye su propio aprendizaje el cual se produce a través de las interacciones individuales y grupales que se realizan en el aula, el docente es quien prepara las actividades necesarias para que el estudiante construya su aprendizaje, siguiendo una secuencia de desempeño cada vez más compleja, a la vez que interviene oportunamente para introducir información y solucionar posibles conflictos en el desarrollo del proceso de aprendizaje.

Las actividades están elaboradas para tratar de que el proceso de enseñanza - aprendizaje se desarrolle en forma participativa e interactiva, partiendo de una comprensión conceptual de los objetos matemáticos para luego, conociendo los procesos, llegar a la aplicación y generación de un aprendizaje significativo.

3.1.4 Metodología.

Esta propuesta se encamina a desarrollar las tres macrodestrezas planteadas en el documento de *Actualización y Fortalecimiento Curricular:* Comprensión de conceptos, conocimiento de procesos y aplicación en la práctica; destrezas que deriven de las funciones lineales. Se visualiza desde la comprensión semántica, a partir de la construcción de significados, con lo cual se pueda facilitar un aprendizaje significativo.

Se seguirá el siguiente proceso: Se inicia presentando una definición ejemplificada de los términos, con la debida información semántica dentro del contexto matemático, información que el estudiante debe manejar como prerrequisito al estudio de las funciones lineales, luego se realiza un diagnóstico, para lo cual se propone diversas actividades que permitan conocer el grado de comprensión y dominio de aspectos relacionados con funciones en forma general.

Los contenidos se desarrollan en base a diversas actividades cognitivas planteadas para que el estudiante las realice con la guía del docente. Estas actividades tienen como objetivo la construcción, paso a paso, de los diferentes significados de los objetos matemáticos.

Se utilizan diversas representaciones para comprender el concepto de función y se trabaja en el tratamiento y conversión entre representaciones, ya que, “mediante el trabajo con las representaciones las personas asignan significados y comprenden las estructuras matemáticas" (ctd. en Rico, 3). Se representan las funciones a través de un conjunto de pares ordenados, o tabla de valores (registro tabular); expresiones verbales, por medio de las que se expresa una regla con una descripción en palabras (registro verbal); expresiones algebraicas, a través de una fórmula explícita (registro algebraico o analítico), y expresiones gráficas representadas en un sistema de coordenadas cartesianas (registro gráfico), haciendo hincapié, en que una función puede representarse de diferentes modos (un mismo objeto matemático puede ser representando con diferentes registros).

Finalmente, se plantean problemas que requieran un trabajo mental del estudiante, un trabajo que le permita pensar y razonar los conceptos involucrados. En cada uno de los problemas se exige procedimientos y respuestas debidamente argumentadas (pensamiento crítico), tratando de que el estudiante encuentre diferentes vías de solución para un mismo problema (desarrollo del pensamiento lateral). Los problemas planteados son, generalmente, problemas de contexto real y realista y no rutinarios, es decir problemas en el que el estudiante no conoce la respuesta ni un procedimiento previamente establecido o rutinario para llegar a la solución, de manera que permitan mostrar a los estudiantes la utilidad de las funciones, para resolver diversas situaciones que puedan presentarse en la vida.

Para la solución de los problemas planteados se recomienda tener presente: la formulación del problema, la elaboración del modelo del problema, la resolución del modelo y la interpretación de la solución.

Algunas actividades se desarrollan con la ayuda de GeoGebra, un software matemático que se distribuye libre y gratuitamente vía internet. Este mecanismo se ha usado con el propósito de ahorrar tiempo en el gráfico de funciones, una vez que ya se haya trabajo este tema.

3.2. Desarrollo de la propuesta.

En el estudio de las matemáticas hay tres conceptos relevantes: sucesión, función y límite; a partir de estos conceptos se genera el resto de conceptos, proposiciones y procedimientos. Es por ello que en esta propuesta se tratarán las funciones lineales afines y constantes.

FUNCIONES LINEALES.

3.2.1 Destrezas a desarrollar:

- Representar **funciones lineales, afines y constantes** por medio de tablas, gráficas, una ley de asignación y ecuaciones algebraicas.
- Reconocer **el comportamiento de una función lineal, afín y constante** a través del análisis de su dominio, recorrido, monotonía y simetría.
- Calcular la **pendiente de una recta** si se conocen dos puntos de la misma.
- Calcular la **pendiente de una recta** si se conoce su posición relativa (paralela o perpendicular) respecto a otra recta y la pendiente de ésta.
- Determinar **la ecuación de una recta** dados dos parámetros (dos puntos, o un punto y la pendiente).
- Determinar la **monotonía de una función lineal, afín y constante** a partir de la pendiente de la recta que representa dicha función.
- Determinar la **pendiente de una recta** a partir de su ecuación escrita en sus diferentes formas.
- Determinar **la relación entre dos rectas** a partir de la comparación de sus pendientes respectivas (rectas paralelas).
- Graficar **una recta** dada su ecuación en sus diferentes formas.
- Reconocer a **la gráfica de una función lineal, afín y constante** como una recta a partir del significado geométrico de los parámetros que definen a la función lineal.

3.2.2. Descripción de términos.

Para iniciar el estudio de las Funciones Lineales es imprescindible haber comprendido claramente conceptos relacionados con este tema, saber el significado preciso de cada término dentro del contexto en que va a ser usado; es por ello que se iniciará este estudio abordando diferentes conceptos involucrados en esta propuesta.

Expresión algebraica.

Una expresión algebraica es una combinación de letras, números y signos de operaciones. Las expresiones algebraicas nos permiten traducir al lenguaje matemático expresiones del lenguaje habitual.

Relación.

En matemática una relación es una correspondencia entre los elementos de dos conjuntos, un conjunto que lo podemos denominar conjunto A que es el conjunto de partida, y el otro conjunto B, llamado conjunto de llegada. Una relación en matemática se representa con la letra ***R.***

Ejemplo: Cuando hablamos del costo de la energía eléctrica que nos toca pagar por mes, sabemos que esta cantidad va a depender de la cantidad de energía consumida (Kwh, Kilowatts hora), es por ello que en diciembre, suele ser el mes que más se paga. Aquí podemos ver que hay una **relación** entre el consumo de energía y la cantidad pagada por dicho consumo.

Para éste ejemplo el conjunto A, conjunto de partida, estaría formado por los valores que corresponden a los Kwh consumidos y los elementos del conjunto B serían los valores que representan el dinero a pagar. A cada Kwh de energía consumida le corresponde un valor a pagar.

Ejemplo

Si tenemos dos conjuntos, **A** y **B,** formados por los siguientes elementos numéricos:

A = {1, 2, 3, 7, 8} y **B = {2, 4, 6, 9, 10}.** Podríamos encontrar algunas relaciones definidas del conjunto **A** en el conjunto **B** como:

- La relación de dependencia o correspondencia entre el conjunto **A** y el conjunto **B** es “asignar a cada elemento su duplo”, entonces:

  R_1 = {(2, 4), (3, 6), (1, 2)}

Los elementos de **R** nos permiten ver precisamente que a cada elemento del conjunto **A**, conjunto de partida, le corresponde su duplo en el conjunto **B**, conjunto de llegada.

En este misma relación si representamos por ***x*** a los elementos del conjunto **A** y por ***y*** los elementos del conjunto **B**, la regla correspondiente sería: **y es el doble de x** ó **y = 2x.**

Con los mismos conjuntos **A** y **B** se puede obtener otras relaciones.

Dominio de una relación.

El **Dominio** de una relación está constituido por los elementos del conjunto de partida (conjunto **A)** que establece correspondencia con los elementos de un conjunto de llegada (conjunto **B).** Se representan simbólicamente por ***dom R*.**

Rango de una relación.

El rango de una relación, conocido también como **recorrido,** está constituido por los elementos del conjunto **B** (conjunto de llegada) que se relacionan con elementos del dominio de la relación **R**. Se representa por ***rag R*.** El rango de una relación es un subconjunto del conjunto de llegada.

Imagen.

Se llama Imagen a cada uno de los elementos que forman el Rango de una relación, es decir solamente los elementos del conjunto de llegada que están asociados con algún elemento del Dominio.

Podemos decir entonces que el Rango es el conjunto formado por todas las imágenes de una relación.

Pre-imagen:

Son los elementos que forman el Dominio de una relación.

En el ejemplo anterior podemos ver que 4 es la imagen de 2, por tanto 4 es elemento del dominio y 2 es elemento del rango.

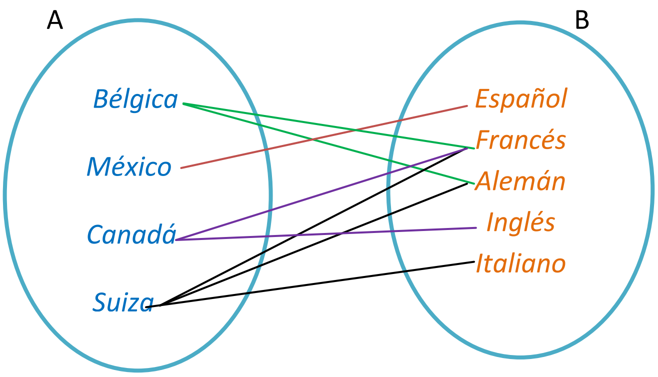
Ejemplos.

1. Relación: Países - Idiomas oficiales.

Conjunto de partida (Países), representado por: $A = \{Bélgica,\ México,\ Canadá,\ Suiza\}$

Conjunto de llegada (Idiomas oficiales), representado por:

$B = \{Español,\ Francés,\ Alemán,\ Inglés,\ Italiano\}$



$$dom\ R = \{Bélgica,\ México,\ Canadá,\ Suiza\}$$

$$rang\ R = \{Español,\ Francés,\ Alemán,\ Inglés,\ Italiano\}$$

En este ejemplo todos los elementos del conjunto de salida (A), y todos los elementos del conjunto de llegada (B) pertenecen, respectivamente, al dominio y rango de la relación ya que todos los elementos de A tienen una imagen en B y a su vez todos los elemento de B son imágenes de al menos un elemento en el conjunto A.

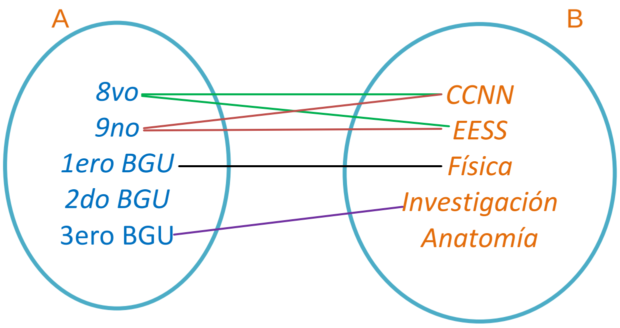
2. Relación: Cursos - asignaturas correspondientes

Conjunto de partida. (cursos)

$$A = \{8vo,\ 9no,\ 1er\ BGU,\ 2do\ BGU,\ 3ro\ BGU\}$$

Conjunto de llegada. (asignaturas)

$$B = \{CCNN\ ,\ EESS\ ,\ Física\ ,\ Investigac\ ión,\ anatomí\ a\}$$



$$dom\ R = \{8vo,\ 9no,\ 1er\ BGU\ ,\ 3ro\ BGU\}$$

$$rang\ R = \{CCNN\ ,\ EESS\ ,\ Física\ ,\ Investigac\ ión\ \}$$

En este segundo ejemplo vemos que hay elemento del conjunto de partida, como el elemento *2do de BGU,* que no se relaciona con ningún elemento de conjunto de llegada ya que en el conjunto de llegada no existe ninguna asignatura que corresponda a este curso, es decir no existe una imagen para este elemento. Además observamos también que el elemento *anatomía,* del conjunto de llegada, no es parte del rango de la relación ya que no es imagen de ningún elemento del dominio.

De los ejemplos analizados podemos anotar que no necesariamente todos los elementos del conjunto de partida forman parte del dominio de una relación, tampoco todos los elementos del conjunto de llegada son parte del rango en una relación.

Igualdad.

Una igualdad es una equivalencia de dos expresiones o cantidades.

Ejemplo: La expresión 5 + 5 y la expresión 10, son iguales, pues se refieren a un mismo objeto matemático. Una igualdad en matemática se representar con el signo =[22].

Existen dos tipos de igualdades, las absolutas (Identidad) y las condicionales (ecuaciones).

Identidad.

Una identidad o igualdad absoluta es una igualdad matemática entre expresiones algebraicas que se cumple para todos los valores que tome la variable que contiene.

Ejemplo: la igualdad trigonométrica $\tan\theta = \frac{Sen\theta}{Cos\theta}$, se cumple para cualquier valor del ángulo θ, por tanto esta igualdad es una identidad, la igualdad $2x + 4x = 6x$, también es identidad.

Se puede concluir diciendo que todo identidad es una igualdad, pero no toda igualdad es una identidad, así la igualdad $2x + 3 = 11$, no es identidad ya que se cumple sólo si la variable x toma el valor de 4.

Ecuación.

Término que procede del latín aequatio, que significa "igualdad", sin embargo, en matemática no toda igualdad es considerada una ecuación sino únicamente aquella igualdades condicionales es decir, en matemática una ecuación es una igualdad

[22] Este signo se debe a Robert Recorde, que empezó a utilizarlo en 1 557. Explicó su elección diciendo: "Pondré, como hago a menudo en el curso de mi trabajo, un par de paralelas o líneas gemelas de una misma longitud, así: ======, porque no hay dos cosas que puedan ser más iguales". Posteriormente, la rutina se encargó de acortar las paralelas. Historia de los signos matemáticos.

entre dos expresiones algebraicas denominadas miembros de la ecuación que sólo se verifica para ciertos valores de la incógnita. En ella aparecen números y letras (incógnitas) relacionados mediante operaciones matemáticas[23]. Ejemplos:

$x+4x=15$, es ecuación porque se cumple sólo **si es que** (condición) la variable x toma el valor de 3, ya que $3+4\times 3=15$.

$x^2+3=7$, **se cumple si** (condición) la variable x toma los valores de 2 y -2, $2^2+3=7$ y $(-2)^2+3=7$

Resolver una ecuación es determinar los valores desconocidos (incógnitas) que hacen a la ecuación verdadera, estos valores se denominan soluciones o raíces de la ecuación y gráficamente representa los cortes de la gráfica con el eje de las abscisas o eje de las x.

Las expresiones que aparecen a los dos lados de una ecuación verdadera corresponde a diferentes significantes, pero no a diferentes objetos matemáticos (diferentes significados).

"Las ecuaciones no son afirmaciones universales verdaderas, pues el signo igual en una ecuación no conexiona expresiones equivalentes, aunque si condiciona a la incógnita" (M. Palrea, 96).

El planteamiento de ecuaciones en matemáticas responde a la necesidad de expresar simbólicamente los problemas y los pensamientos, por ejemplo haremos referencia a la tumba del griego Diophante[24], o también conocido como Diofanto, en donde aparece grabado un enunciado en la que se explican datos de la vida de este griego.

---

[23] Las ecuaciones más utilizadas por los egipcios eran de la forma: *x + ax = b* , *x + ax + bx = 0* donde *a, b* y *c* eran números conocidos y *x* la incógnita que ellos denominaban *aha* o *montón*. Una ecuación lineal que aparece en el papiro de Rhid responde al problema siguiente:
"Un montón y un séptimo del mismo es igual a 24".

[24] Diofanto nació en Alejandría es reconocido como el padre del álgebra. Escribió un libro dedicado exclusivamente a la resolución de problemas con ecuaciones. Las ecuaciones con coeficientes enteros cuyas soluciones son también enteras se denominan ecuaciones diofánticas o diofantinas, en honor a Diofanto.

¡Transeúnte!, en esta tumba yacen los restos de Diophante. De la lectura de este texto podrás saber un dato de su vida. Su infancia ocupó la sexta parte de su vida, después transcurrió una doceava parte hasta que su mejilla se cubrió de vello. Pasó aún una séptima parte de su existencia hasta contraer matrimonio. Cinco años más tarde tuvo lugar el nacimiento de su primogénito, que murió al alcanzar la mitad de la edad que su padre llegó a vivir. Tras cuatro años de profunda pena por la muerte de su hijo, Diophante murió.

¿Podría escribir la ecuación que representa la situación descrita y determinar cuántos años vivió Diophante?

Incógnita.

En matemática una incógnita es, esencialmente, algo que se desconoce.

Recordando la historia, podemos ver que Diofano (de quien se habló ya en párrafos anteriores) fue el primer matemático griego que planteó los problemas aritméticos en un campo totalmente abstracto, desde entonces se comienza a prestar interés por las operaciones que se realizan con cualquier número desconocido que toma el nombre de incógnita lo que permite dar el salto desde la Aritmética al Algebra. En este contexto Diofanto introduce símbolos para designar incógnitas y operaciones y utiliza abreviaturas.

Una incógnita posee las mismas propiedades algebraicas que los objetos matemáticos a los que representa. En matemática se usa generalmente la ***x*** para representar una incógnita.

Variable.

El concepto de variable es multifacético, en matemática una variable ocupa el lugar de una cantidad o número indeterminado. Ursini consideran que en el álgebra elemental aparecen esencialmente tres usos de la variable: como incógnita específica, como número general y en relación funcional.(M. T. Sonia Ursini ,7) En cambio Schoenfeld y Arcavi consideran que es difícil ver la incógnita como una variable, ya que en general, variable refiere a algo que varía o que toma múltiples valores en tanto que el término incógnita parece estar asociado a un valor específico que no se conoce, pero que puede determinarse.

Nos referiremos a los tres usos descriptos por Ursini en su estudio ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas?

La variable como incógnita. Aquí la variable tiene un sentido restringido, representa un valor específico como el caso de las ecuaciones, en donde se dan las condiciones para representar dicho valor, es decir, la variable se limita únicamente a algunos valores que es capaz de tomar.

Ejemplo: Se sabe que después de cuatro años el doble de la edad que tendrá Pablo será igual a los doce quintos de su edad actual y se quiere determinar la edad actual de Pablo.

Al traducir el texto del enunciado al lenguaje matemático tenemos la siguiente ecuación: $2(x+4)=\frac{12}{5}x$

En esta ecuación la variable x que representa la edad actual de Pablo, toma un valor específico (20 años).

La variable como número general. Cuando la variable representa, precisamente un número general.

Ejemplo: *5 (2x + 4*), aquí la variable, *x*, puede representar cualquier valor.

Variables en relación funcional. Se refiere a una relación de correspondencia entre dos o más variables[25].

Ejemplo: El costo por consumo de luz debe pagarse un valor fijo de 1 dólar por emisión de factura, independiente de consumo realizado, y un valor promedio de 0, 075 dólares por cada Kwh de energía consumida. Aquí vemos una relación entre dos variables: el número de Kwh consumidos y el valor a pagar por dicho consumo.

Si representando por ***x*** la cantidad de Kwh consumido y por ***y*** el valor a pagar, podremos expresar este enunciado mediante la siguiente expresión algebraica: $y = 1 + 0.07x$

En el ejemplo, tenemos variables en relación funcional, se muestra la dependencia de la una respecto a la otra.

A pesar de que en cada expresión señalada en los diversos ejemplos se involucra el mismo símbolo literal *x* para la variable, el uso que se hace de ella en cada caso es distinto.

En toda relación funcional, los valores que toma una variable **depende** de los valores tomados por la otra, de ahí el nombre de variable dependiente y variable independiente.

Variable independiente

Es la variable a la cual se asignan arbitrariamente valores. Estas variables determinan cambios en los valores de otras variables llamadas dependiente. Generalmente se representa con la letra *x*.

25 Para Trigueros M, ´´la idea de relación funcional puede considerarse desde dos perspectivas: una, estática, en la que la relación se concibe como la correspondencia punto por punto entre dos conjuntos de valores; otra dinámica, en la que se resalta la variación interdependiente de las variables.´´ pag 353.

Variable dependiente.

Es aquella cuyo valor está determinado por la relación y por el valor tomado por otra variable llamadas independientes. Generalmente se representa con la letra *y.*

En el ejemplo anterior, la variable independiente es la cantidad de energía consumida, representada por ***x*** y la variable dependiente el valor a pagar por dicho consumo, representado por **y.** La dependencia entre las dos variables está expresada en la relación $y = 1 + 0.07x$. Aquí podemos ver que el valor de ***y*** cambia de acuerdo a los valores tomados por ***x***.

Variación

Se conoce como variación en matemática al cambio que sufre una variable, se representa usualmente con la letra griega Δ (delta), así si la variable es x, Δx representará el cambio generado en esta variable cuando cambia de un valor u otro, por tanto este valor se obtiene restando el nuevo valor de x de su valor inicial, $\Delta x = x_2 - x_1$, que se conoce también como cambio o incremento.

Proporcionalidad.

Cuando una razón (cociente entre dos cantidades) es igual a otra se dice que existe proporcionalidad.

Magnitudes Directas

Dos magnitudes son directas si al aumentar la una, la otra magnitud también sufre un aumento. Si además la una aumenta y la otra también aumenta la misma cantidad de veces que aumentó la primera, se dice que las magnitudes son directamente proporcionales y por tanto la razón entre las dos magnitudes siempre será la misma. Podemos decir entonces que dadas dos variables, ***x*** y ***y****,* la variable ***y*** es directamente proporcional a ***x*** si hay una constante ***k*** distinta de cero, **llamada constante de proporcionalidad**, tal que: $\frac{y}{x}=k$ o, lo que es lo mismo $y=kx$

Ejemplo: El peso de un objeto y su correspondiente masa son magnitudes directamente proporcionales. Si la masa de un cuerpo aumenta al doble su peso se duplicará, es decir, aumentan en la misma proporción. Esta relación se representa por ***P = gm***, en donde la constante de proporcionalidad es ***g*** que en este caso corresponde al valor de la aceleración de la gravedad cuyo valor promedio en la tierra es de 9,8 m/s^2.

Magnitudes Inversa.

Dos magnitudes son inversas cuando la una aumenta en tanto que la otra disminuye. Si además la una aumenta y la otra disminuye la misma cantidad de veces que aumentó la primera, estas magnitudes son inversamente proporcionales.
Ejemplo: El tiempo y la velocidad son magnitudes inversamente proporcionales. El tiempo que tarda un auto para moverse de un lugar a otro depende de su velocidad, si la velocidad se duplica, el tiempo se reduce a la mitad.

Par ordenado,

Conjunto formado por dos elementos que tienen un orden. Si los representamos por a y b los elementos, entonces el par ordenado se representa (a, b). El orden en que se escriben los valores es significativo, pues el par ordenado (b, a) es diferente del primero. En el primer caso **a** es el primer componente y **b** es el segundo componente del par, en tanto que en el segundo par las posiciones cambian y su significado también.

En el caso de las funciones, los componentes del par ordenado están formados por cada elemento del Dominio con su Imagen respectiva (*D, I*). Si relacionamos con la variable el primer elemento corresponde a la variable independiente y el segundo a la variable dependiente. Gráficamente, dentro de un plano cartesiano, el par ordenado representa un punto que pertenece a la gráfica de la función.

Para darnos cuenta de lo relevante del orden de un par, podemos analizar la siguiente relación de dependencia: Para desplazarse un objeto en una trayectoria recta, con velocidad constante, el espacio que recorre el objeto (variable dependiente) depende del tiempo que el objeto estuvo en movimiento (variable independiente), si se conoce que en 1s el objeto se desplaza 0.5 m, y luego construimos la tabla de valores, obtenemos por ejemplo el par (2,1), lo que significa que en 2s el objeto se ha desplazado 1m. Si escribimos (1,2),cambia el significado, indicaría que para un tiempo de 1 s el cuerpo se desplaza 2m lo que contradice el dato inicial y por tanto este par ordenado no corresponde a la relación propuesta.

Tiempo empleado (variable independiente) t (s)	Espacio recorrido (variable dependiente) e (m)
1	0.5
2	1.0
3	1,5
4	2.0
....	....

Coordenadas de un punto

Los valores de (a, b) de un par ordenado se denominan coordenadas del punto. El valor que corresponde al primer componente del par se denomina abscisa y el segundo componente es la ordenada. Dentro de las funciones el valor de la abscisa corresponde a un valor de la variable independiente, mientras que la ordenada es el valor que toma la variable dependiente.

En una función las coordenadas serían (x, f(x) o (x, y).

Sistema de ejes cartesiano

Cartesiano proviene de Cartesius que es el nombre latino de Descartes, se ha denominado así ya que su invención se atribuye a René Descartes. Este sistema está formado por dos ejes perpendiculares que se cortan entre sí, tiene como finalidad describir la posición de puntos representados por pares ordenados.[26]

El **eje horizontal** se llama **eje X** o **eje de abscisas** en el cual se representan los valores de la variable independiente y el **eje vertical** se llama **eje y** o **eje de ordenadas** en donde se grafican los valores de la variable dependiente.[27]

El punto de coordenadas (0,0), en donde se cortan los dos ejes, se denomina **origen de coordenadas.**

Las coordenadas de un punto cualquiera P se representan por **(x, y)**

Función.

Al hablar de función en matemática, encontramos actualmente muchas formas de definirla. En el siglo XVII Sottfriend Wilhelm Leibniz, filósofo y matemático alemán, uno de los inventores del cálculo, introdujo el término función en el vocabulario

---

[26] ´´El sistema de coordenadas que Descartes expuso en su obra *La Geometrie* no era exactamente como el que usamos hoy (vemos, que las coordenadas que utilizaba Descartes no eran cartesianas): sólo tomaba el eje horizontal, el otro se escogía y no era necesariamente perpendicular, sino según las circunstancias del problema; además, sólo consideraba las curvas dentro del primer cuadrante´´

[27] **Abscisa**. Del latín *abscissa*, 'cortada'. En latín se decía *abscissa linea*, 'la línea cortada', para referirse a lo que hoy llamamos 'eje de las abscisas', es decir, el eje respecto del cual se mide, en los sistemas de referencia cartesianos, la coordenada horizontal, que se quedó por ello con el nombre de *abscisa*.
Ordenada, en latín se decía *ordinātae linĕae* para referirse a las líneas paralelas. Dado que para obtener la coordenada vertical de un punto en los sistemas de referencia cartesianos se traza una paralela al eje horizontal, a dicha coordenada vertical se le terminó llamando ordenada.

matemático, desde entonces este concepto fue evolucionando [28] hasta que a comienzos del siglo XIX, en 1837, Dirichlet formuló la definición de **función** como **relación entre dos variable,** y expresa a través de una regla establecida cómo una variable depende de otro.

El diccionario de filosofía de José Ferrater Mora manifiesta "(…) se llama "función" a una relación en la cual cierta cantidad llamada "valor de la función" está ligada a otra cantidad llamada "argumento de la función". Puede decirse también que una función es una relación entre variables tal que, dadas, por ejemplo, dos variables, para cada valor asignado a una de ellas se determinan uno o más valores a la otra" (729).
Anotaremos algunas definiciones de funciones citadas por Hitt, pero haremos mayor énfasis en el concepto de función en términos de variables[29], manifestando que cuando dos variables están relacionadas de tal manera que el valor de la primera queda determinada si se da un valor a la segunda, entonces se dice que la primera es función de la segunda. Ejemplo: en la relación: temperatura a la que hierve el

[28] 1 637, la palabra función fue usada por Descartes y significaba cualquier potencia positiva de una variable.
1748, Euler definió una función en su libro como sigue: ``*Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de la cantidad variable y de números o cantidades constantes*`` ver en:
1 821, Cauchy dio una definición que hace de la dependencia entre variables el centro del concepto de función. Escribió en *Cours d'analyse*: *Si cantidades variables son unidas entre ellas de tal modo que el valor de una de ellas está dado, se puede llegar a los valores de todas las otras.*
1 822, Fourier, en *Théorie analytique de la Chaleur*, dio la siguiente definición: *En general, la función f(x) representa una sucesión de valores u ordenadas cada uno de los cuales es arbitrario. Dados una infinidad de valores de la abscisa x, hay un número igual de ordenadas f(x). Todas tienen valores numéricos, ya sean positivos, negativos o cero. No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se siguen unas a otras de una forma cualquiera y cada una de ellas está dada como si fuera una cantidad sola.*
1 837, Dirichlet describe como una regla de correspondencia entre dos conjuntos.
1 838, Lobachevsky dio una definición de una función general: *Una función de* x *es un número que está dado de modo que para cada* x, existe un *y que cambia gradualmente junto con* x. *El valor de la función puede estar dado mediante una expresión analítica o mediante una condición que ofrece una manera de probar todos los números y seleccionar uno de ellos o, finalmente, la dependencia puede existir pero ser desconocida.*
1 923, Goursat dio la definición que aparece en la mayoría de los libros de textos hoy en día:
Se dice que y *es una función de* x *si a cada valor de* x *le corresponde un valor de* y. *Esta correspondencia se indica mediante la ecuación* y = f(x).
1 995 Kieran considera que describir el mundo es describir el cambio y al hacerlo se crean objetos viables y que las funciones son un tipo especial de dependencia de algo que varía libremente a algo que varía bajo ciertas restricciones.
1 996, Tall señala que un propósito de la función es representar como cambian las cosas.
[29] Hitt (2 000), cita algunas definiciones de funciones y expone que es importante desarrollar la idea intuitiva de variación para la adquisición del concepto de función. Por esta razón, se considera que la definición en términos de variable independiente y dependiente resulta ser la más adecuada para el nivel medio.

agua y altura sobre el nivel del mar a la que se encuentra, existe una variable (temperatura a la que hierve el agua) cuyo valor depende de otra variable (altura a la que se encuentra), esta relación es un ejemplo de función. Si representamos con la letra ***y*** a la primera variable y con ***x*** a la segunda y, puesto que el valor de ***y*** está determinado por el valor de ***x***, decimos que ***y*** está en función de ***x,*** entonces **y** representa la variable dependiente (el valor de la función) y **x** la variable independiente (el argumento de la función).

El punto de partida del concepto de función es la variabilidad ya que el único medio de percibir que una cosa depende de otra es hacer variar la una y constatar la variación producida en la otra. Los principales elementos que integran la noción de función son entonces la variación, la dependencia, la correspondencia, la simbolización y expresión de la dependencia, y sus distintas formas de representación.

Cuando dos variables están relacionadas mediante una función se puede estudiar el cambio de una de ellas con respecto a la otra, aquí radica la importancia del estudio de las funciones, pues una función permiten modelizar (hallar la función que describe la variación o dependencia entre dos variables) las múltiples situaciones del mundo real en las que aparecen valores que varían dependiendo de una regla fija como por ejemplo: el crecimiento de la tasa de desempleo, el pago de impuestos, la variación de la temperatura, etc.

La expresión función se representa ***f( ).*** Así la expresión función de ***x*** se escribe ***f(x),*** es importante insistir en el uso adecuado de la notación *f(x)* como la imagen del valor de *x* y no como la función misma (así, *f(2)* es la imagen de x cuando toma el valor de 2 en alguna función). La función de dos variables suele expresarse mediante la ecuación ***y = f (x),*** que expresa la dependencia entre dos variables, ***x*** y ***y***, de donde ***x*** representa la variable independiente o argumento, y ***y*** es la variable dependiente o valor de la función.

Hemos analizado la función en términos de variables, anotaremos a continuación dos definiciones más.

En término de conjunto de pares ordenados:

Una función es un conjunto de pares ordenados de elementos tales que ninguno de los pares tiene igual el primer elemento. El conjunto de los primeros elementos de los pares ordenados se llama dominio y el conjunto de los segundos elementos es el rango de la función.

En término de regla de correspondencia:

Una función f de un conjunto A en un conjunto B es una regla de correspondencia[30] que asignan a cada valor de x, elemento del conjunto A, un único elemento f(x) en el conjunto B. La expresión simbólica es entonces, ***f*: A → B,** y se lee una función del conjunto **A** en el conjunto **B**, o simplemente una función de A en B**.** Se usa la flecha para indicar el sentido de la aplicación, por tanto la función ***f*: B → A** representa otra función distinta a la primera. Considerando la función matemática como una aplicación todos los elementos del conjunto de partida están relacionados con elementos del conjunto de llegada, es decir todos los elementos del conjunto de partida forman parte del Dominio de la función.

Dominio de una función.

Es la serie de valores de la variable independiente, ***x*** (argumento) para los cuales función está definida, es decir, el conjunto formada por los elementos que tienen imagen.

El dominio de una función puede restringirse según el contexto, por ejemplo:

[30] Una regla de correspondencia o aplicación es una ley de asignación entre dos conjuntos, que pueden ser números o no.

En la función $f(x)=\frac{1}{x}$, el valor de la variable independiente, *x* no puede tomar el valor cero, porque para ese valor la función no estaría definida (1/0, no está definido), por lo tanto el cero no sería parte del dominio de la función; si además la variable *x* representa el tiempo, por ejemplo, entonces los valores de *x* no pueden ser negativos; es decir, los valores negativos y el cero no forman parte del dominio de esta función.

Rango o recorrido de una función.

Al conjunto de todos los valores que toma ***f(x)*** (variable dependiente, ***y***) a medida que ***x*** varía se denomina rango de la función; es decir, es el conjunto formado por las imágenes.

Imagen de una función.

Se llama imagen de una función a cada uno de los elementos del rango o recorrido que están asociados con un elemento del dominio.

Al conjunto de llegada se conoce también como Codominio y es el conjunto de valores que **podrían** ser imagen, mientras que el rango es el conjunto de valores que **realmente** son imágenes, de ahí que el rango es un subconjunto del dominio.

Grafo de una función

El grafo de una función es igual al conjunto de pares ordenados (x, f(x)), tal que x (variable independiente) pertenece al dominio de la función).

Registros de representación de una función.

Una función comúnmente está representada por medio de diferentes registros que ayudan a tener una mejor comprensión de los diversos términos antes mencionados.

Analizaremos las diferentes representaciones a partir de una función usada en Física, correspondiente a la relación entre espacio recorrido por un objeto en caída libre y el tiempo empleado.

Registro Verbal.

En este registro la función admite como representación una descripción en lenguaje natural, describiendo como se relacionan dos variables. Si se quiere estudiar un fenómeno utilizando una función como modelo, se cuenta generalmente, en principio, con una descripción de este tipo. Por ejemplo:

> **El espacio recorrido por un cuerpo en caída libre está determinado por el semi producto de la aceleración de la gravedad y el cuadrado del tiempo transcurrido.**

En este ejemplo la variable independiente es el tiempo transcurrido y la variable dependiente es el espacio recorrido, por tanto el dominio está formado por los valores del tiempo para los cuales la función está definida y no podrá tomar valores negativos. El rango lo forman los valores que va tomando el espacio a medida que el tiempo varía.

Registro Algebraico o Analítico.

En este registro, una función se puede representar por una expresión algebraica o fórmula, (una asociación de signos, letras y números). Por lo general las variables se asocian a los símbolos ***x*** y ***f(x)*** o ***y***, donde ***x*** representa la variable independiente y

f(x) o **y** la variable dependiente. Nos permite calcular la imagen *f(x)* para toda *x* perteneciente al dominio de la función.

Para el ejemplo citado, la variable independiente es el tiempo transcurrido que representaremos con la letra ***t*** y para representar el espacio, que corresponde a la variable dependiente, usaremos la letra ***e***, entonces algebraicamente la función está representada por: $e=\frac{gt^2}{2}$ o $f(t)=\frac{gt^2}{2}$ ya que $e=f(t)$, el espacio está en función del tiempo.

	Registro Verbal	Registro Algebraico
Función Expresión de la relación de dependencia entre dos variables que, por medio de una regla, asigna a cada valor de la variable independiente un único valor de la variable dependiente.	El espacio recorrido está en función del tiempo transcurrido. El espacio recorrido por un cuerpo en caída libre está determinado por el semi producto del valor de la aceleración de la gravedad y el cuadrado del tiempo transcurrido.	$e=f(t)$ $e=\frac{gt^2}{2}$ o $f(t)=\frac{gt^2}{2}$
Variable independiente (argumento)	Tiempo transcurrido	*t*
Variable dependiente (valor de la función)	Espacio recorrido.	*e*

En este tipo de registro cada valor que toma *x* en la función (variable independiente) es un elemento del dominio y cada valor de *y* (variable dependiente) es un elemento del rango.

Registro Tabular.

En este registro, una función se representa con una tabla de valores o grafo que pone en juego la relación de correspondencia. Así:

tiempo t (s)	2	3	4	5	6	7
espacio e (m)	19,6	44,1	78,4	122,5	176,4	240,1

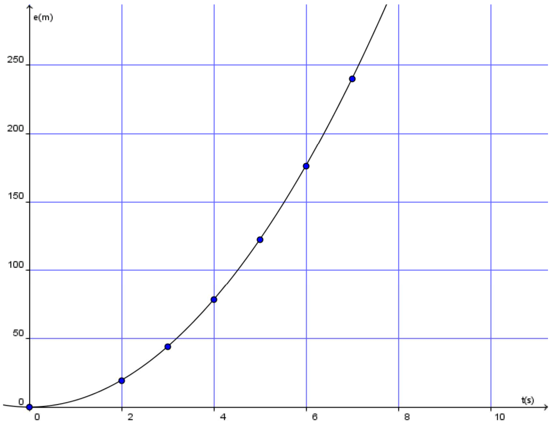
En esta tabla, el valor se ha tomado libremente los valores del tiempo (variable independiente) mientras que los valores del espacio depende de los valores asignados al tiempo mediante la relación $e = \frac{gt^2}{2}$. Todos los valores de la primera fila son elementos del dominio, mientras que los de la segunda fila, son elementos del rango o recorrido.

Registro Gráfico.

En este registro, una función se puede representar por medio de una curva (continua o no) en el plano cartesiano.

La gráfica de una función es el conjunto de todos los pares ordenados (x, f (x)) Las graficas nos permiten obtener una representación visual de una función y entrega información que puede no ser tan evidente a partir de descripciones verbales o algebraicas.

Para representar gráficamente una función la variable independiente ***x*** se representa en el eje horizontal o eje de las abscisas, y la variable dependiente ***y*** en el eje vertical o eje de las ordenadas.



En este registro el dominio de la función está representado en el eje ***x*** y está formado por los valores de ***x*** que están en la gráfica y el rango de la función está representado en el eje ***y*** y está constituido por los valores de ***y*** que están en la gráfica)

El la gráfica podemos ver que a cada valor de ***x*** le corresponde un solo valor ***y***, por tanto representa una función, también podemos determinar los elementos del dominio y del rango, además el gráfico nos permite ver las imágenes de diferentes valores de tiempos, que no están en la tabla.

De acuerdo a la representación tabular y a la gráfica podemos ver que una función está formada por un conjunto de pares ordenados de elementos, tales que, ninguno de los dos pares tienen el mismo primer elemento. El conjunto de los primeros elementos de los pares ordenados forman el dominio y el conjunto de los segundos elementos, el rango de la función.

De acuerdo a lo anatado podemos determinar que todas las funciones son relaciones, pero no todas las relaciones son funciones. Por ejemplo, la relación entre la masa de los cuerpos y su peso, es una función ya que a cada valor de la masa, (variable independiente), le corresponde un único peso (variable dependiente); en tanto que la relación entre la masa de las personas y sus edades respectivas, no es una función porque a una misma edad le puede corresponder varios valores de masa.

Registro figural.

Cuando se expresa algún concepto mediante una figura, por ejemplo: cuando utilizamos diagramas de Venn para representar el concepto de función.

Ejemplo 1.

Relación f: m→P, P es igual al producto de m por g, (relación de m en P)

Conjunto de partida. (masas), $m = \{20kg,\ 30kg,\ 40kg,\ 50kg\}$

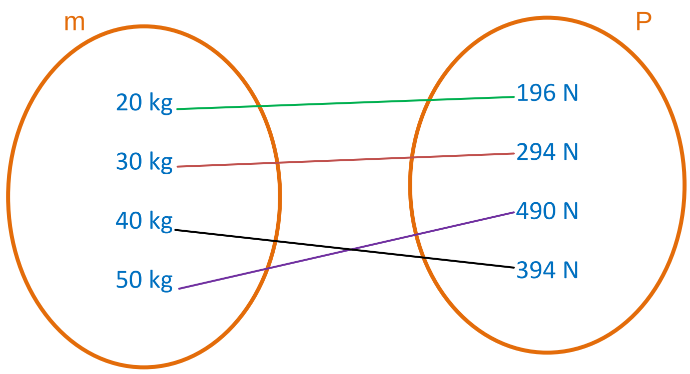
Conjunto de llegada. (pesos), $P = \{196\,N,\ 294\,N,\ 490\,N,\ 394\,N\}$

Fórmula ***P* = *mg*,** el peso está en función de la masa **(*P* = *f(m)*).**

P variable dependiente (peso) y *m* variable independiente (masa)

$$f = \{(20kg, 196\,N), (30kg,\ 294\,N), (40kg, 394), (50kg, 490\,N)\}$$

Conjunto de partida (m) Conjunto de llegada (P)



Podemos ver que los elementos de ***x*** (primer elemento del par ordenado), de cada par (x, y) de la función, son los elementos del dominio y que los valores de ***y*** (segundo elemento del par ordenado) corresponden a los elementos del rango o recorrido.

$dom\ f = \{20kg,\ 30kg,\ 40kg\ ,\ 50kg\}$, formado por **todos** los elementos del conjunto de partida (m).

$rang\ \ f = \{196\,N,\,294\,N,\,490\,N,\,394\,N\}$, formado por todos los elementos del conjunto de llegada (P).

En el ejemplo analizado, cada elemento del dominio tiene una única imagen (condición para que una relación sea una función). Así la imagen de 40 kg es 394N, porque ***f(40kg)*** es 394N $\left(f(40kg) = P = m \times g = 40kg \times 8m/s^2 = 394N\right)$,lo que indica que a una masa de 40kg le corresponde un único peso de 394 N.

Ejemplo 2.

Relación f: A→B, ´´*y* es el doble del cuadrado de *x*`` (relación de A en B)

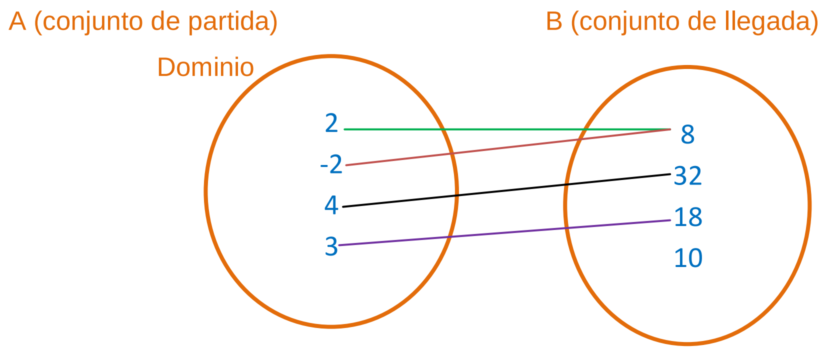
Conjunto de partida: $A = \{2,\,-2,\,4,\,3\}$

Conjunto de llegada: $B = \{8,\,32,18,10\}$

f(x) = y, *y* = $2x^2$

y variable dependiente y ***x*** variable independiente

$f = \{(2,8),\,(-2,\,8),\,(4,\,32),\,(3,18)\}$



$dom\ \ f = \{2,\,-2,\,4,\,3\}$, formado por **todos** los elementos del conjunto de partida (A).

$rang\ \ f = \{8,32,18\}$, formado por **algunos** elementos del conjunto de llegada (B). El 10 es elemento del conjunto de llegada, pero no es elemento del rango, ya que no está relacionado con ningún elemento del dominio.

Cada elemento del dominio tiene una única imagen (condición para que una relación sea una función). Así la imagen de 2 es 8, porque ***f(2)*** es 8

$\left(f(x) = y = 2x^2 = 2\times 2^2 = 8\right)$, lo que indica que el doble del cuadrado de 2 es un único número 8.

Ejemplo 3.

Relación f: A→B, ´´*y* es la tercera parte del valor de *x*´´ (relación de A en B)

Conjunto de partida, $A = \{15,\ 21,\ 6\}$

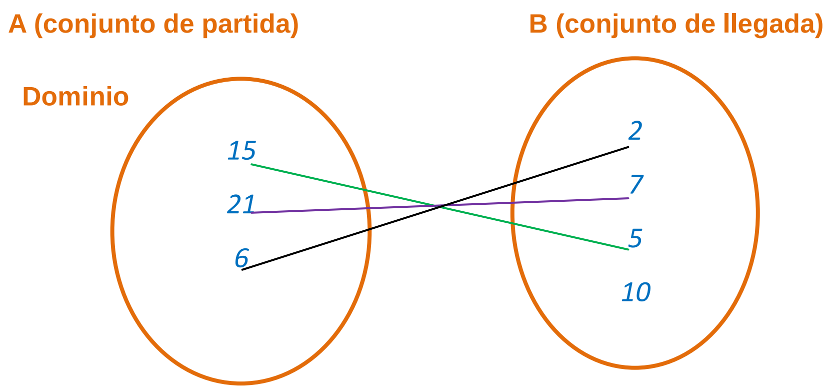
Conjunto de llegada, $B = \{2,\ 7,\ 5,\ 10\}$

f(x) = y, $y = \frac{1}{3}x$

y variable dependiente (valor de la función)

x variable independiente (argumento)

$f = \{(15,\ 5),\ (21,\ 7),\ (6,\ 2)\}$



$dom\ \ f = \{15,\ 21,\ \ 6\}$, formado por **todos** los elementos del conjunto de partida (A).

$rang\ \ f = \{2, 7, 5\}$, formado por **algunos** elementos del conjunto de llegada (B), podemos ver que el 10 es elemento del conjunto de llegada, pero no es elemento del rango, ya que no está relacionado con ningún elemento del dominio.

Cada elemento del dominio tiene una única imagen (condición para que una relación sea una función). Así la imagen de 6 es 2, porque ***f(6)*** es 2 $\left((x) = y = \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}\times 6 = 2\right)$, lo que indica que la tercera parte de 6 es un único número 2.

Cuando expresamos el concepto de función, mediante los llamados diagramas de Venn se reconoce una función como una ley de correspondencia en donde a cada elemento del conjunto de partida le corresponde **una y sólo una imagen** en el conjunto de llegada.
El dominio de la función está formado por **todos** los elementos del conjunto de partida mientras que **no necesariamente todos** los elementos del conjunto de llegada deben formar parte del rango[31]. De la misma manera se afirma que toda función es una relación pero que no toda relación es una función, se debe afirmar también que no todas las ecuaciones en *x* y *y,* definen a *y* como una función de *x;* usaremos un ejemplo para aclarar esta afirmación**.**

La expresión $y^2 = 2x$ es una ecuación, pero no es una función, porque al dar un valor a ***x, y*** toma dos valores, por ejemplo para ***x*** = 2***, y*** toma dos valores 2 y -2.

Existen algunas ecuaciones de dos variables en las que definen a cualquier variable como una función de la otra.

Ejemplo:

$y = x + 3$, es una función porque para cada valor de ***x*** (variable independiente) le corresponde un solo valor a ***y*** (variable dependiente), por tanto ***y*** está en función de ***x***. Pero si despejamos ***x*** en la ecuación anterior, tendremos: $x = y - 3$ que también es una función pues para cada valor de ***y*** (variable independiente) le corresponde un solo valor a ***x*** (variable dependiente), aquí ***x*** está en función de ***y.***

[31] El COPREM (Comisión para la Reflexión sobre la Enseñanza de la Matemática) formuló la siguiente recomendación (1978): "Una función no es ni una estadística de valores ni una representación gráfica ni un conjunto de cálculos ni una fórmula, sino todo ello al mismo tiempo".

Tipo de funciones.

Según la forma en que interactúen el dominio (conjunto de partida) y el codominio (conjunto de llegada), nos referiremos a las funciones: Inyectiva, Sobreyectiva y Biyectiva.

Función Inyectiva.

Una función es Inyectiva si ningún elemento ***y*** en el rango (variable dependiente) es imagen de más de un elemento en ***x*** (variable independiente o argumento)
Ejemplo.

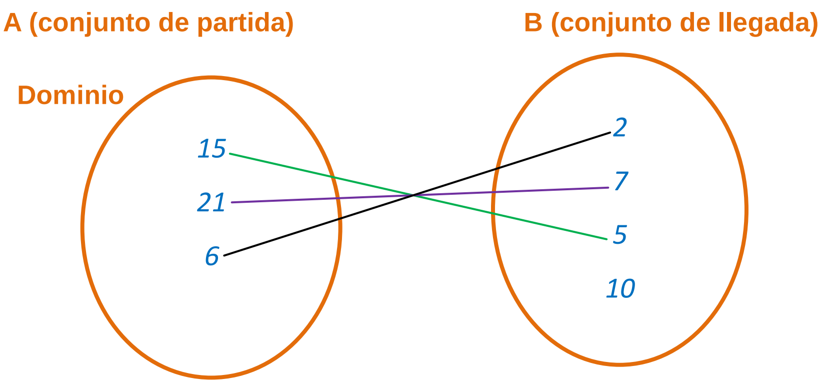
Relación f: A→B, ´´*y* es la tercera parte del valor de *x*´´

Conjunto de partida, $A = \{15,\ 21,\ 6\}$, Conjunto de llegada, $B = \{2,\ 7,\ 5,\ 10\}$

$$\boldsymbol{f(x) = y,} \quad y = \frac{1}{3}x$$

y variable dependiente (valor de la función), *x* variable independiente (argumento)

$$f = \{(15,\ 5),\ (21,\ 7),\ (6,\ 2)\}$$

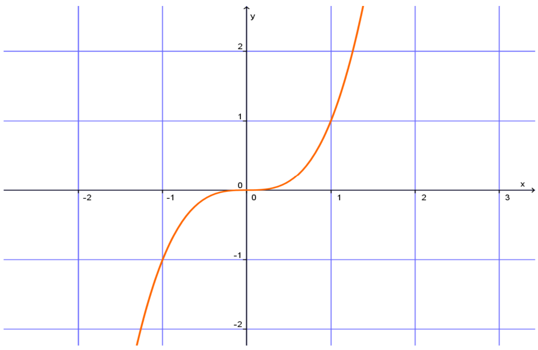


$$dom\ f = A$$

$$rang\ \ f = \{2,\ 7,\ \ 5\}$$

Ningún elemento y del Rango es imagen de más de un elemento (x) del Dominio (2 sólo es imagen de 6; 7 sólo es imagen de 21 y 5 sólo es imagen de 15).

La gráfica que se muestra a continuación corresponde a una función inyectiva.



Podemos observar en el gráfico que a cada valor de *y* le corresponde un solo valor de *x*, así para cuando *y* vale 1, *x* toma un solo valor 1.

Cada elemento del rango (valores de y o variable dependiente) es imagen de un solo elemento, x, del dominio. Es decir en cada par ordenado (x, y) que pertenecen a la gráfica, el valor de y no se repite.

Función Sobreyectiva o suprayectiva.

Una función es sobreyectiva si todos los elementos del conjunto de llegada pertenecen al rango de la función, es decir son imagen de al menos un elemento de su dominio.

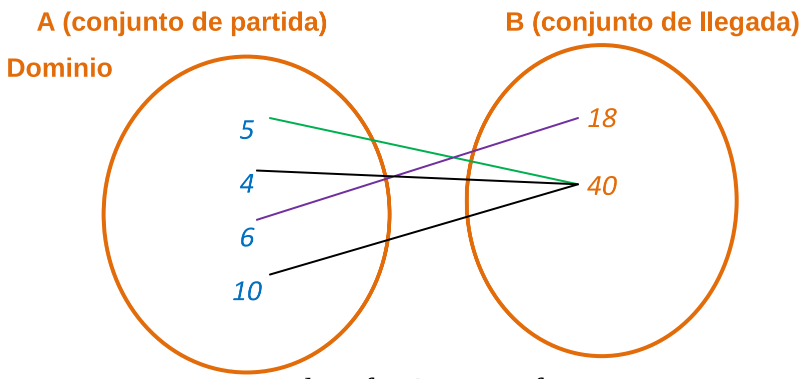
Ejemplo.

Relación f: A→B, ´´*y* es múltiplo de *x*´´

Conjunto de partida, $A = \{5,\ .4,\ 6,\ 10\}$

Conjunto de llegada, $B = \{18,\ 40\}$

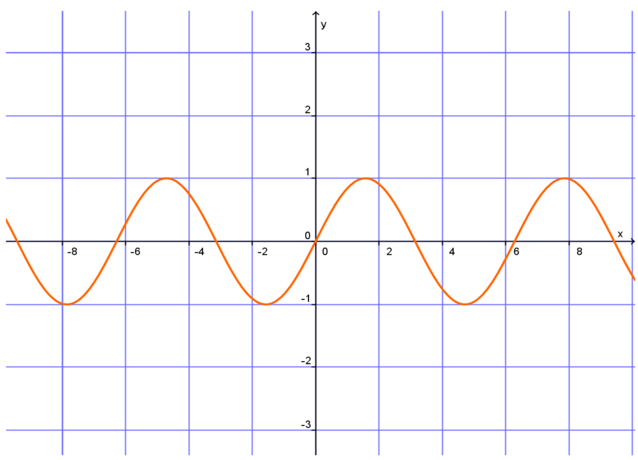
$$f = \{(5, 40), (4,\ 40), (6, 18), (10, 40)\}$$



$$dom\ f = A,\ \ rang\ f = B$$

Todos los elementos del conjunto de llegada forman parte del rango de la función, es decir son imagen de los elementos del Dominio (18 es imagen de 6 y 40 es imagen de 5, de 4 y de 10).

La gráfica mostrada a continuación corresponde a una función inyectiva.



El dominio es el conjunto de los números reales y el conjunto de llegada está formado por el intervalo [-1, 1]. Es una función sobreyectiva, ya que todos los valores de y, que están dentro del intervalo [-1, 1], son imagen de al menos un elemento del dominio (x).

Para poder determinar si una función es sobreyectiva se debe conocer el conjunto de llegada.

Función Biyectiva.

Una función es biyectiva sí y sólo sí es inyectiva y sobreyectiva. Es decir si en una función todos los elementos del conjunto de llegada son elementos del rango y son imagen de un sólo elemento del dominio.

Ejemplo.

Relación f: A→B, ´´*y* es el duplo de *x*´´

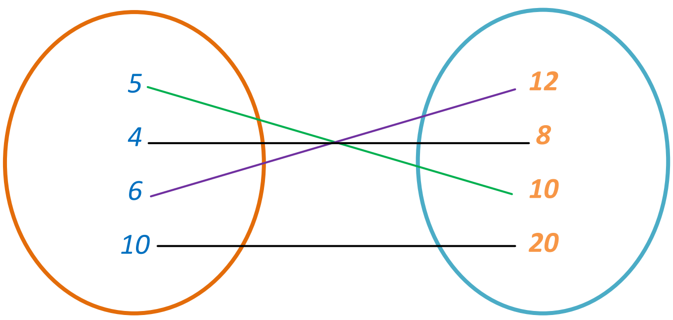
Conjunto de partida $A = \{5, .4, 6, 10\}$, Conjunto de llegada., $B = \{10, 8, 12, 20\}$

$$\boldsymbol{f(x) = y,} \quad y = 2x$$

$$f = \{(5, 10), (4, 8), (6, 12), (10, 20)\}$$

A (conjunto de partida) **B (conjunto de llegada)**

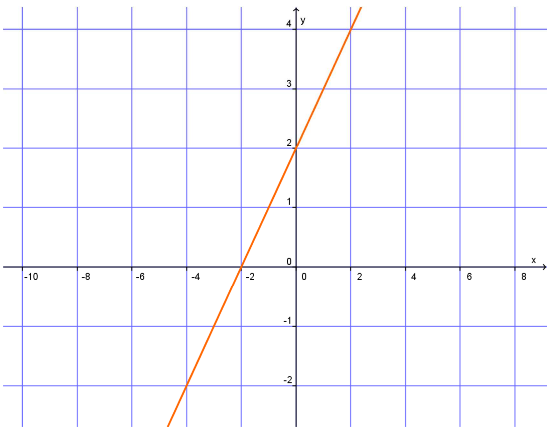
Dominio



$$dom\ f = A, \quad rang\ f = B$$

Cada elemento del conjunto de llegada es elemento del rango y cada elemento del rango es imagen de un sólo elemento del dominio.

La función que se representa en la siguiente gráfica, que es función *f: R→R* (función del conjunto de los números reales en el conjunto de los números reales, es decir, en donde el conjunto de partida y el de llagada son los números reales) Para cada valor de ***x*** le corresponde solo un elemento ***y,*** y todos los valores del rango son imagen de un sólo valor del dominio.



Evaluar una función

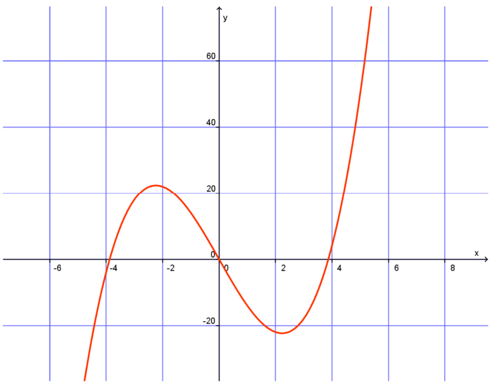
Evaluar una función es calcular la imagen (el valor de *y*) que corresponde a un elemento del dominio (valor de *x*) en una relación funcional, para ello se sustituye el valor del dominio en la función y se realizan las operaciones indicadas.

En términos de Frege, evaluar una función es encontrar el valor de una función para un argumento y es el resultado de completar la función propiamente dicha con el argumento en cuestión. Recordando que valor de ***x***, Frege le llama **argumento** de la función y, ***y*** es el valor que toma una cierta función teniendo a ***x*** como argumento (ctd en J. Bauzá 5)

Gráfica de una función

Continuidad

Una función f(x) es continua en un intervalo [a, b] si su gráfica, para valores de x dentro del intervalo [a, b], se puede dibujar de un solo trazo, sin cortes, ni saltos ni interrupciones. Ejemplo:

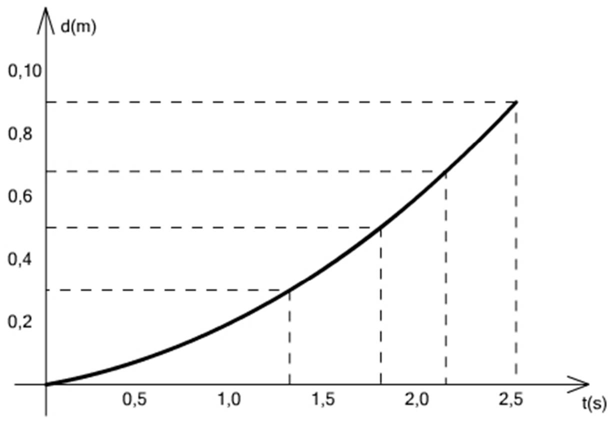


Función creciente.

Una función es creciente en un intervalo sí y sólo sí para cualquier elección de valores de la variable independiente, x_1 y x_2 del intervalo tales que $x_1 \leq x_2$ entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Si se cumple en un intervalo que $x_1 < x_2$ y $f(x_1) < f(x_2)$, entonces la función es estrictamente creciente.

Ejemplo: Sabemos en física que en un movimiento el espacio recorrido por un cuerpo depende del tiempo empleado, mientras mayor sea el tiempo, mayor será el espacio recorrido. Existe una relación directa de crecimiento entre las variables, como podemos ver en el gráfico.



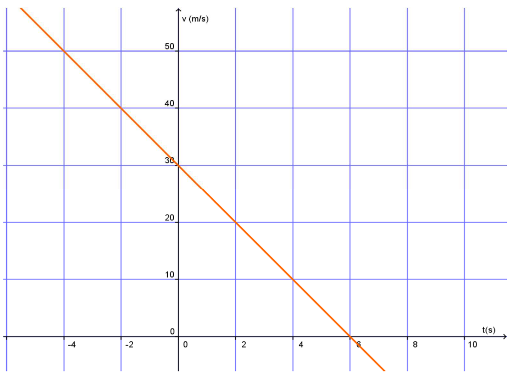
Función decreciente

Una función es decreciente en un intervalo si para cualquier pareja de valores de la variable independiente x_1 y x_2 del intervalo tales que $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$

Una función es decreciente en un intervalo sí y sólo sí para cualquier elección de valores de la variable independiente x_1 y x_2 del intervalo tales que $x_1 \geq x_2$ entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$.

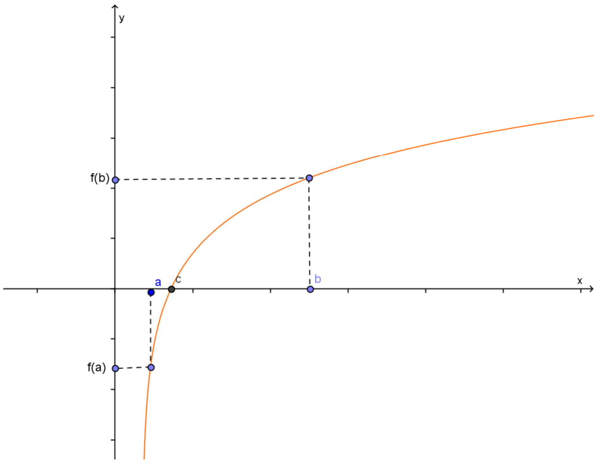
Si se cumple en intervalo, que $x_1 > x_2$ y $f(x_1) < f(x_2)$, entonces la función es estrictamente creciente.

Ejemplo: En el mismo movimiento en física, analizando la relación entre la velocidad y el tiempo, sabemos que si el tiempo empleado en recorrer una distancia es menor, la velocidad será mayor. Existe una relación inversa decreciente entre las variables.



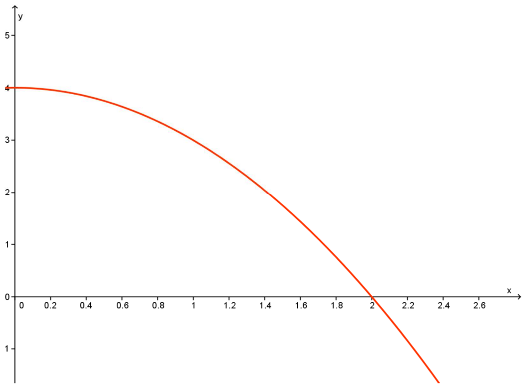
Monotonía.

La función *f* es **monótona** sí y sólo sí la función es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en todo su dominio.



Función monótona creciente.

a < b y f(a) < f (b)

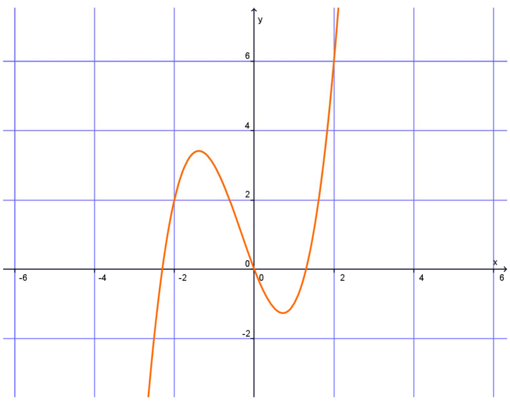


Función monótona decreciente.

0 < 2 y f(0) > f (2)

f(0) = 4 y f (2) = 0

4 > 2



Función no monótona

3.2.3. FUNCION LINEAL.

3.2.3.1 Diagnóstico.

Para iniciar el estudio de las funciones lineales es necesario realizar un diagnóstico sobre aspectos relacionados y necesarios sobre funciones, este diagnóstico debe reflejar la comprensión de los aspectos considerados. Para ello se proponen algunas actividades que involucran comprensión de conceptos, conocimiento de procesos y aplicación. Si estas actividades no son desarrolladas correctamente por parte de los estudiantes, se debe realizar el refuerzo respectivo.

Actividades de Diagnóstico.

Actividad 1

Use el Modelo Frayer [32] para los siguientes términos: Identidad, Función, Dominio, Rango, Imagen, Argumento, Función biyectiva, Función inyectiva y Función sobreyectiva, Función monótona.

Modelo Frayer.

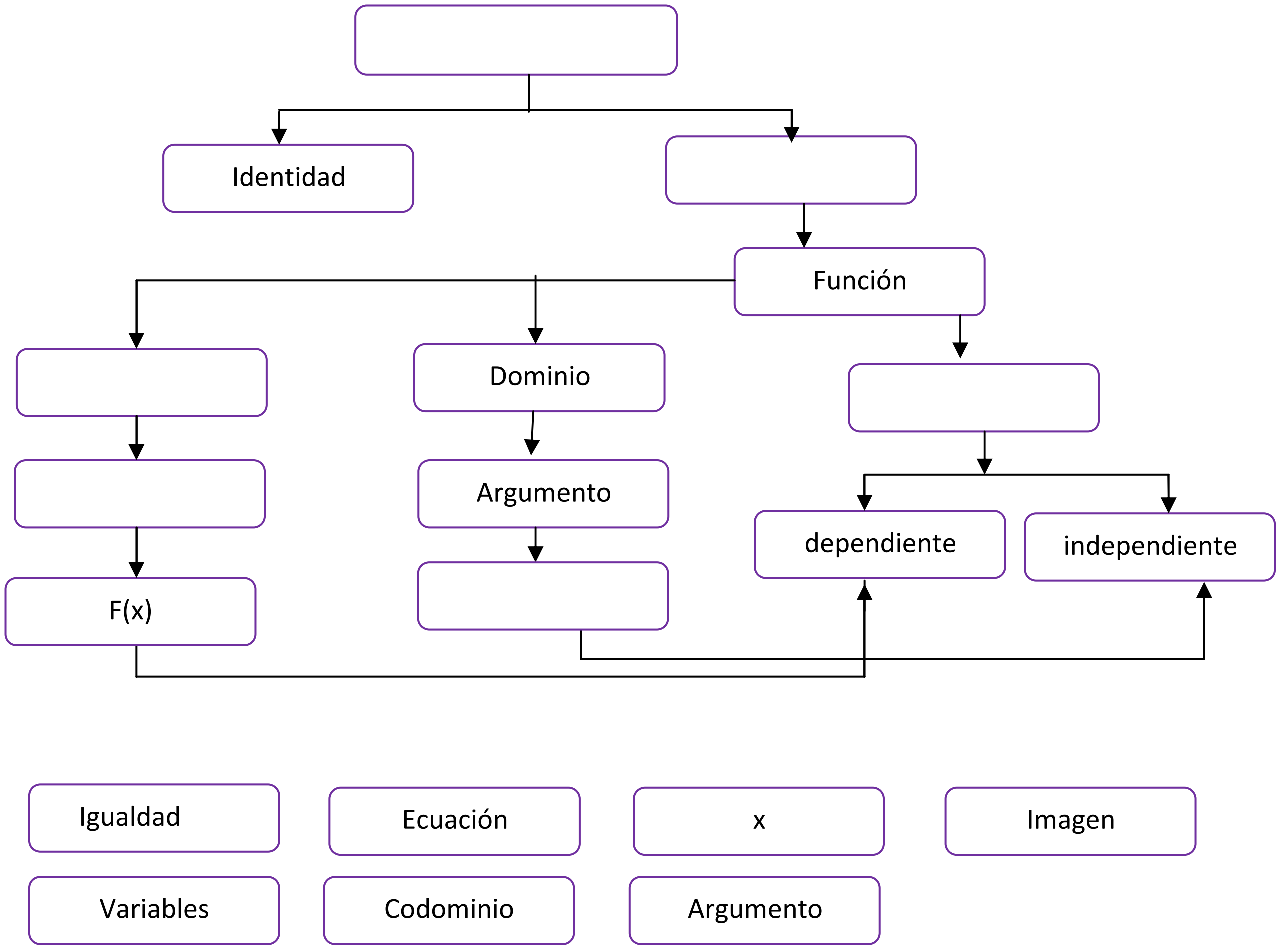
Definición	Características
IDENTIDAD	
Ejemplo	No ejemplo

[32] El modelo Frayer es un Mapa de la palabra: esquema (visual verbal) usado como una técnica para la comprensión del significado de palabras, conceptos, ideas, etc. Tomado de: *Mapas Conceptuales, Mapas Mentales y Otras Formas de Representación del Conocimiento,* de Agustín Campos Arenas, 2005.

Actividad 2.

En esta actividad se usa un diagrama jerárquico. Un diagrama jerárquico ayuda a reflejar la organización conceptual de una disciplina, o parte de ella, ayuda a captar y representar esquemáticamente un conjunto de significados conceptuales.

Arrastre cada palabra de la parte inferior y ubique en el recuadro correspondiente.



Actividad 3.

3.1 Dado los conjuntos A y B, formados por los elementos indicados: A = {3, 4, 5} y B = {12, 10, 14}, escriba una **relación** entre A y B, de manera que resulte una **Función Biyectiva.** Exprese esta relación en lenguaje verbal y en lenguaje algebraico. Explique por qué la **función** propuesta es **biyectiva.**

3.2 Sean los conjuntos A y B cuyos elementos son: A = {1, 2, 3, 4} y B = {4, 5, 6, 7, 8} y, sea R la relación definida de A en B a través de la regla "*y* es el doble de *x*" .

- Escriba una expresión algebraica para esta relación.

- Complete:

El conjunto **dominio** de la relación está formado por, $Dom\ \ f = \{$.................. ……….

El **rango** de la relación es el conjunto formado por los siguientes elementos:

$Rang\ \ f = \{$.................. ……………………………………………….

¿Esta relación es una función?, ¿por qué?

3.3. La **imagen** de 4 es …………………..

- La **imagen** de ………… es 4
- La **imagen** de ………… es …………………..
- El número ………….. no pertenece al **rango**, porque …………………………

3.4 Determine si los siguientes enunciados son: Falso o Verdadero. Si son falsos corrija el error.[33]

---

[33] Esta actividad ayuda a determinar con claridad la diferencia entre relación y función. En la segunda opción se puede justificar su respuesta (F) de dos maneras: 1.- Con, el rango no necesariamente está formado por todos los elementos del conjunto de salida o, 2.- Cambiando la palabra función por función sobreyectiva. El estudiante puede encontrar más de una solución (pensamiento lateral)

- En una **relación** el **dominio** necesariamente está formado por todos los elementos del **conjunto de partida** y el **rango** no necesariamente contiene todos los elementos del **conjunto de llegada.**

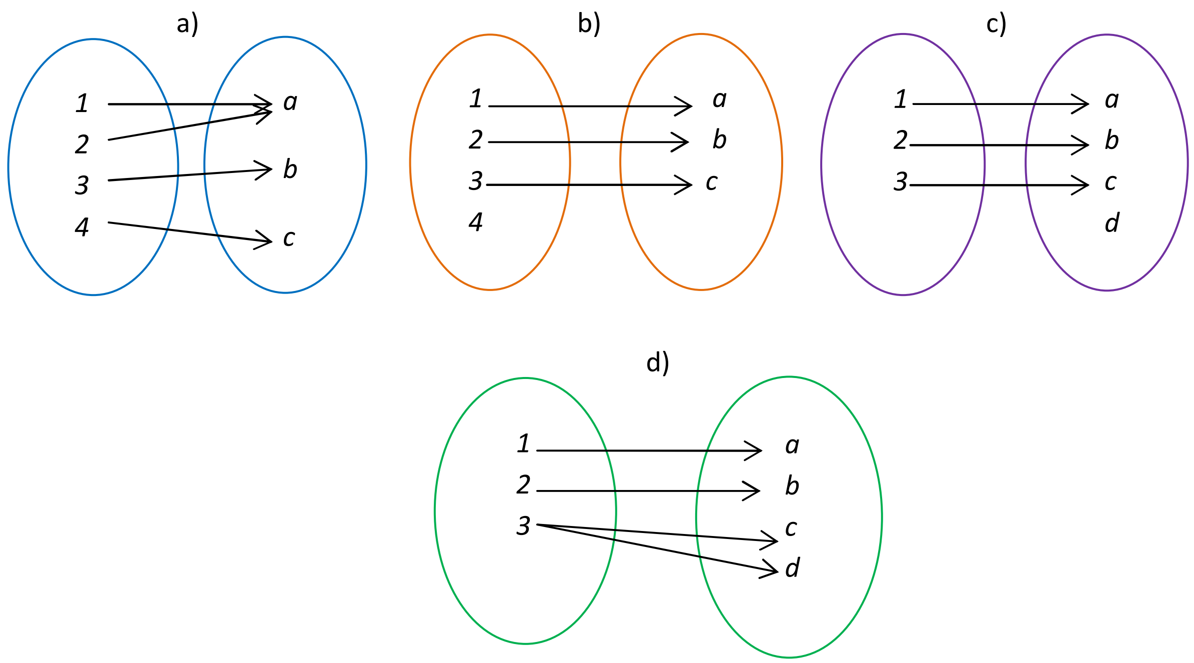
- En una **función** siempre el **dominio** está formado por todos los elementos del **conjunto de partida** y el **rango** por todos los elementos del **conjunto de llegada**.

Actividad 4.

4.1 Escriba dos características que debe cumplir toda función.

1. ………………………………………………………………………………………..
2. ………………………………………………………………………………………..

4.2 De acuerdo a las características anotadas en la actividad 4.1, indique los diagramas que no corresponden a una función y explique por qué no son funciones.



Actividad 5.

5.1 En cada una de las siguientes funciones indique cuál es la variable dependiente y cuál es independiente. Argumente su respuesta.

a) La cantidad de gasolina consumida por un auto y el espacio recorrido.

b) Tiempo entrenando en el gimnasio y precio pagado.

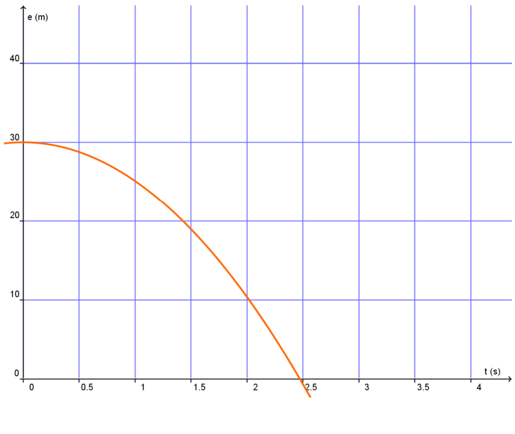
5.2 Plantee una situación de relación que corresponda a una función, indique la variable dependiente y la variable independiente y represente la función en forma algebraica.

5.3 Explique: Cuándo un elemento del conjunto de salida no pertenece al rango de una función.

Actividad 6

En esta actividad los alumnos interpretan distintos aspectos desde la representación gráfica de la función.

El siguiente caso se refiere a una piedra que es lanzada desde lo alto de un edificio de 30 metros de altura. Su posición en los diferentes momentos (t segundos) de ser lanzada se describe gráficamente así:



Responda.

a) ¿Qué es lo que cambia en esta situación?

b) ¿Durante qué intervalo de tiempo la piedra permanece en el aire?

c) ¿Anote si la gráfica corresponde a una función? Explique.

d) ¿Cuál es la variable dependiente e independiente, cuál es el dominio y cuál es el rango? Justifique.

e) ¿Cuál es el valor de la imagen para 1s y que significa éste valor?

f) ¿Cuál es el valor de $f(2)$?

g) ¿De qué valor es imagen 5?

Actividad 7.

En esta actividad se trabajan aspectos que pueden obtenerse desde la representación gráfica de una función, involucrando básicamente los registros gráfico y simbólico.

A partir del análisis de la gráfica responda.

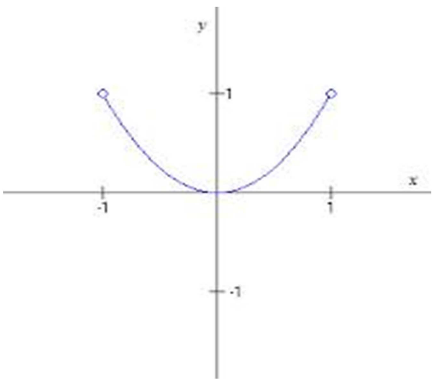
a) ¿Cuál es el intervalo de variación de x? ¿Cómo se denomina a este intervalo?

b) ¿Cuál es el intervalo de variación de y? ¿Cómo se denomina a este intervalo?

c**)** ¿En qué tramo la función es creciente? ¿Por qué?

d) ¿Es una función monótona? ¿Por qué?

e) ¿La función representada es: Inyectiva, sobreyectiva o biyectiva? Explique.



Actividad 8.

Aquí se propone una situación de cambio a través del lenguaje verbal.

Juan sale de su casa en su auto y se dirige hacia su trabajo. Prende el auto y acelera uniformemente hasta alcanzar una velocidad 50 km/h, que es la permitida en la avenida que toma para llegar al trabajo, y la mantienen durante 10 min. Luego frena al ver un semáforo en rojo y se detiene en 20 s, justo en el semáforo, espera 1min y al ponerse el semáforo en verde acelera durante 5min llegando a su trabajo con una velocidad de 40 km/h.

Realice un grafo (tabla de valores de las variables) de la variación de la velocidad con respecto al tiempo y luego represente gráficamente y analice la monotonía.

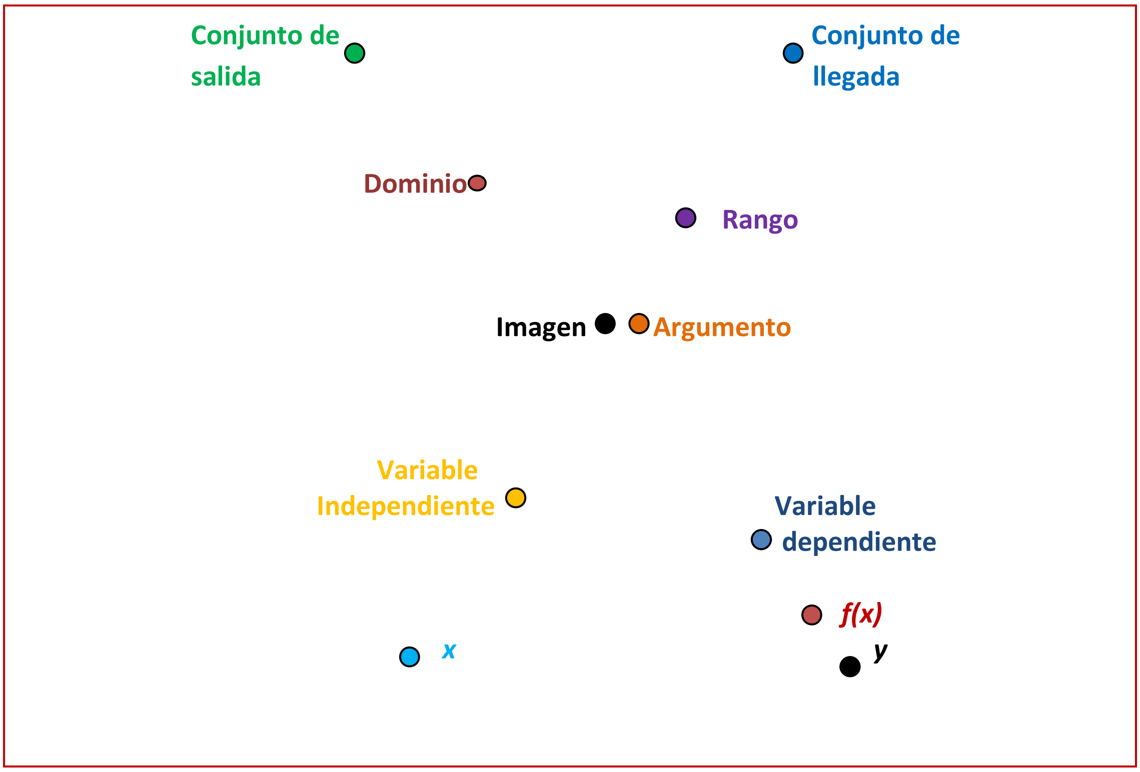
Actividad 9.

A través del paso del registro algebraico al verbal se pretende determinar la interpretación de los estudiantes de una función definida algebraicamente.

Exprese con sus palabras una regla que determine la dependencia entre las variable ***x*** y ***y*** en la siguiente función: $y = f(x) = 2x - 4$.

Actividad 10.

Una con una línea los puntos según se relacionen (tome en cuenta el siguiente orden: conjunto, subconjunto, elemento)



A continuación se inicia el estudio de la función lineal, el mismo que se desarrolla a partir de actividades que le **permitan al estudiante ir construyendo los significados de los diferentes conceptos estudiados,** pues es importante dar al estudiante la oportunidad de reinventar los conceptos en donde el profesor será guía y orientador. Esto permitirá que el estudiante comprenda los conceptos y los utilice en diferentes situaciones.

Es necesario aclarar ciertas situaciones sobre las funciones lineales, para ello se hace referencia a lo manifestado por M. Martínez y P. Sánchez en su ponencia *¿Toda Gráfica de línea recta es función lineal?,* en donde se refiere a errores en la definición de función lineal, de esta manera:

> De acuerdo con las definiciones de función lineal propuestas en la revisión anterior, se encontró que en su mayoría dichas definiciones,

son erróneas pues asocian dicha función con una línea recta, olvidándose que los verdaderos principios matemáticos de donde emerge el concepto de función lineal se encuentra en los fundamentos del algebra lineal. (5)

Este tipo de **errores semánticos**, que es muy común encontrar en textos, repercuten en el aprendizaje de los objetos matemáticos, pues hablan de funciones lineales haciendo referencia a la función de la forma ***f(x) = ax + b***, o simplemente a aquellas cuya gráfica es una línea recta, presentándose una confusión entre la función lineal y la función afín, sin considerar los criterios de linealización que deben cumplir las funciones lineales.[34]

En esta propuesta se considera la diferencia entre función lineal y afín, teniendo en consideración que una función lineal debe cumplir con las condiciones de linealidad y este es el caso de las funciones de la forma ***f(x) = mx,*** pero al no existir las bases necesarias en los estudiantes de segundo Bachillerato General Unificado respecto al álgebra lineal, en este desarrollo no se hace referencia a criterios de linealidad, pero sí se hablará de función lineal como la función de la forma ***f(x) = mx*** y de su función afín como aquellas funciones de la forma ***f(x) = mx + b***. Se analizan los dos casos desde una perspectiva variacional, considerando que es la razón de cambio constante la que caracteriza a las dos funciones.

[34]. Se denomina transformación lineal, función lineal o aplicación lineal a toda aplicación cuyo dominio y codominio sean espacios vectoriales que cumpla la siguiente definición:
Sean V y W espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo o campo K, y T una función de V en W. T es una transformación lineal si para todo par de vectores u y v pertenecientes a V y para todo escalar k perteneciente a K, se satisface que:

1. T(u+v) = T(u) + T(v)
2. T(ku) = kT(u) \, donde k es un escalar.

Tomado de: "Aplicacion Lineal" BuenasTareas.com.

Para ver más sobre criterios de linealidad revisar: Grossman, S. (2006). Álgebra lineal. (6ª ed.). Colombia: McGraw – Hill.

3.2.3.2. FUNCIONES LINEALES.

Si quieres comprar globos para la fiesta de cumpleaños y tienes 10 dólares en el bolsillo, una función lineal te indica la cantidad de globos que puedes comprar.

En nuestro entorno encontramos muchas casos de funciones, anotaremos otro caso: si se va al mercado y se necesita comprar 8 libras de tomates, no se pregunta cuánto cuestan las ocho libras de tomate, sino más bien cuánto cuesta la libra de tomate y con este dato se puede determinar cuánto se debe pagar por las 8 libras o por el número de libras que se desee comprar. En este caso se está aplicando una relación de dependencia (el valor a pagar por los tomates, depende del número de libras que se va a comprar) y la función que determina la regla de dependencia es una **función lineal.**

Para construir el concepto de función lineal, función afín, función constante y los subconceptos involucrados, se proponen las siguientes actividades en las que se indica lo que debe realizar el estudiante, así como las intervenciones del docente.

Actividad 1. (Estudiante)

1.1. Luis, dueño de una copiadora con mucha clientela, para que sus empleados ahorren tiempo ha colocado en la vitrina una tabla con los siguiente valores:

Valor fotocopias	
Número de planos	Precios (centavos)
1	18
2	36
3	54
4	72
5	90
6	108
7	126
8	144
9	162
10	180

En base a la situación presentada:

- Determine el valor a cobrar si una persona desea fotocopiar 27 planos.
- ¿Cómo determinaría el valor para cualquier número de copias, representando por *x* la variable independiente y por y la variable dependiente?
- Determine a través de una función la relación de dependencia entre costo y número de copias.
- Complete: en esta función la variable dependiente es…………………………,
  Porque ………………………………………………………………………………..
  y la variable independiente es ……………………………………………………,
  Porque ……………………………………………………………………………………………
- Indique la imagen de 2 y de 6.
- Indique de qué valores son imágenes los elementos 36, 90 y 162
- Grafique en el plano cartesiano los valores del grafo.

1.2 Llene el grafo P – m (masa y peso), utilizando un dinamómetro para determinar el peso correspondiente al valor de las masas indicadas. Esta actividad puede desarrollarse en el laboratorio en coordinación con el profesor de Física.

Masa (m) (kg)	Peso (P) (N)
0,03	
0,04	
0,05	
0,06	
0,07	
0,08	
0,09	
0,1	

1.3 Una empresa de transporte cobra una tarifa fija de 3 dólares y por cada kilogramo de paquete transportado cobra 4 dólares.

- Escriba la una función que exprese la relación de dependencia entre el peso del trasporte y los kilogramos transportados.

- Complete: en esta función la variable dependiente es ………..……………………. …………..…………………………………………………………………………, y la variable independiente es …………………………………………………,
- Identifique cinco elementos del dominio e indique cuáles son sus imágenes.
- Consulte cuál es la relación matemática entre masa y peso.
- Llene la siguiente tabla, para los 7 valores de masa transportada y grafique en el plano cartesiano.

Masa transportada (Kilogramos)	Precios (dólares)
2	
4	
6	
8	
10	
12	

1.4 Con el propósito de recaudar fondos para la gira el fin de año, los estudiantes de sexto curso de cierto colegio han organizado una Peña Artística, el dinero gastado en la organización ha sido de 1 500 dólares y cada entrada se decide vender a 10 dólares.

- Escriba una relación de dependencia, identificando cuáles son las variables y luego cuál es dependiente y cuál independiente. (utilice la ***x*** para representar la variable independiente ***y*** por y la dependiente)
- Complete la tabla de valores que visualice la utilidad obtenida de acuerdo al número de entradas vendidas y grafique en el plano cartesiano.

Número de entradas vendidas	Utilidad
150	
200	
230	
300	
350	
450	

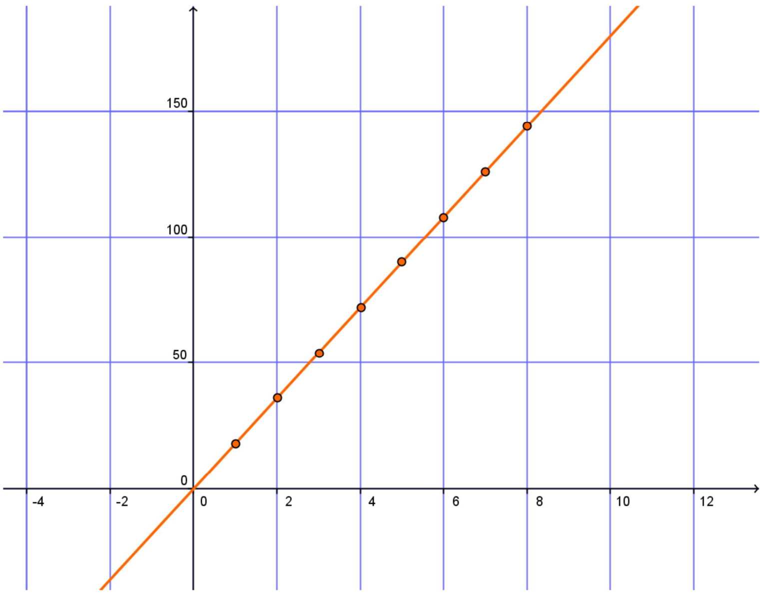
Actividad 2. (Estudiante)

En grupos de 4 estudiantes comparen y discutan sobre las anteriores actividades trabajadas.

Solución de la actividad 1 y 2.

Grafos, gráficas y funciones de las actividades 1, 2, 3 y 4 desarrolladas por el estudiante.

Relación: número de copias - valor a pagar

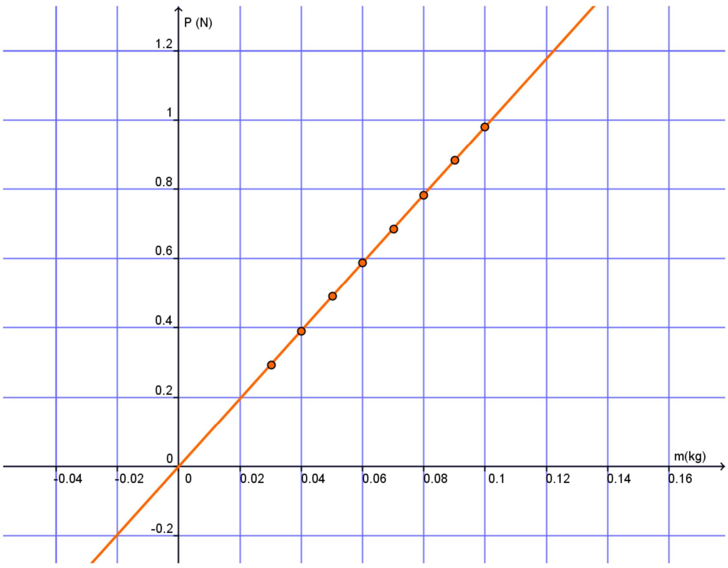


f(x) = 18x

Valor fotocopias

Número de planos	Precios
1	18
2	36
3	54
4	72
5	90
6	108
7	126
8	144
9	162
10	180

Relación: masa - peso

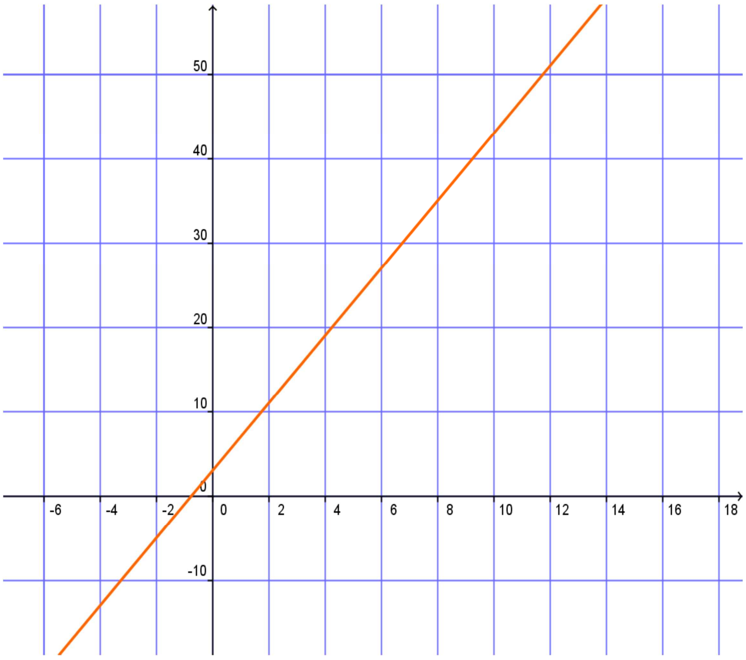


Masa y peso

M (kg)	P (N)
0,03	0.294
0,04	0,392
0,05	0.490
0,06	0,588
0,07	0,686
0,08	0,784
0,09	0,882
0,10	0,980

$f(x) = 9.8x \qquad (P = mg)$

Relación: masa transportada - precio

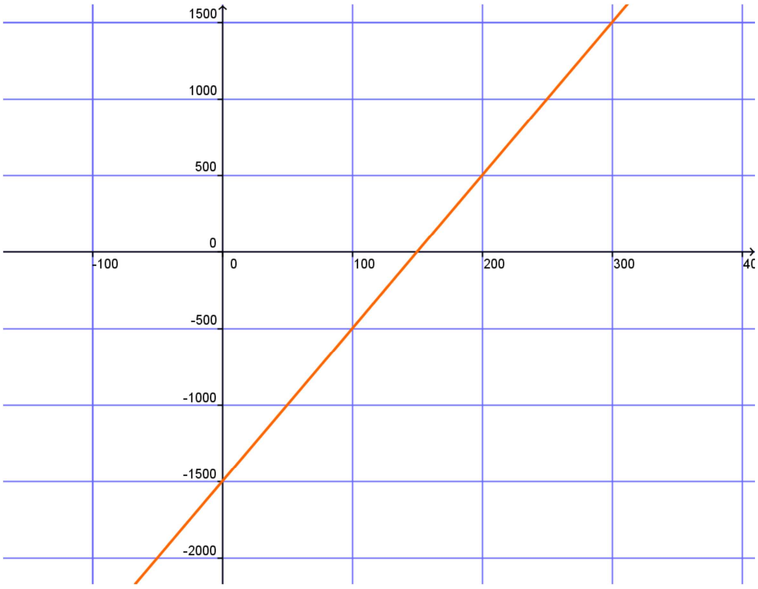


Transporte

Masa transportada (kg)	Precio $
2	11
4	19
6	27
8	35
10	43
12	51

$f(x) = 4x + 3$

Relación: número de entradas - utilidad



Peña artística

Número de entradas	Utilidac
150	0
200	500
230	800
300	1 500
350	2 000
450	3 000

$f(x) = 10x - 1\,500$

Profesor.

Luego de constatar que todas las actividades han sido desarrolladas y corregidas, en caso necesario, el docente solicita a los grupos de trabajo que desarrollen la siguiente actividad.

Actividad 3. (Estudiante)

a) Anote las semejanzas y diferencias encontradas entre las cuatro gráficas de las actividades anteriores y entre las funciones obtenidas. ¿Puede escribir alguna conclusión?

Profesor.

Desarrollada la actividad 3, realizar una puesta en común para resumir lo trabajado. Destacar las semejanzas y diferencias que ayuden a identificar una función lineal y una afín para, de esta manera, ir construyendo los conceptos.

Puesta en común.

Semejanzas y diferencias. (tabla elaborada entre profesor y estudiantes)

	Gráfica 1	**Gráfica 2**	**Gráfica 4**	**Gráfica 4**
Función	**f(x) = 18x**	**f(x) = 9.8x**	**f(x) = 4x + 3**	**f(x) = 10x- 1 500**
La gráfica es una línea recta.	Sí	Sí	Sí	Sí
La gráfica pasa por el origen de coordenadas.	Sí	Sí	No	No
Corte con el eje x	(0,0)	(0,0)	(0,3)	(0,-1 500)

El profesor debe proponer unos dos ejercicios más de cada situación para reforzar las conclusiones obtenidas: funciones cuya gráfica es una línea recta, funciones cuya gráfica es una línea recta y pasan por el origen de coordenadas, funciones cuya gráfica es una línea recta y no pasan por el origen de coordenadas y, cortes de las gráficas con el eje x.

b) Compare las funciones obtenidas en los actividades 1, 2, 3 y 4 e identifique con cuál de las siguientes formas se corresponden: ***f(x) = y = mx*** o ***f(x) = y = mx + b,*** entonces determine qué representa ***y, x***, ***m*** y ***b*** en cada función y qué representan los valores de ***b*** en la gráfica.

Solución actividad 3.b

	Gráfica 1	**Gráfica 2**	**Gráfica 3**	**Gráfica 4**
Función	***f(x) = 18x***	***f(x) = 9.8x***	***f(x) = 4x + 3***	***f(x) = 10x- 1 500***
Forma de la Función.	***f(x) = mx*** ***f(x)*** es el precio ***m*** es 18 ***x*** es el número de impresiones ***b*** es cero	***f(x) = mx*** ***f(x)*** es el peso. ***m*** es 9.8 ***x*** es la masa ***b*** es cero	***f(,x) = mx + b*** ***f(x)*** es el precio ***m*** es 4 ***x*** es la masa ***b*** es 3	***f(x) = mx + b*** ***f(x)*** es la utilidad ***m*** es 10 ***x*** es el número de entradas ***b*** es - 1 500

Durante el desarrollo de todas las actividades, es necesario hacer hincapié en los significados de cada término involucrado de acuerdo a las definiciones establecidas al inicio e insistir para que el estudiante las exprese constantemente.

El profesor

Intervenir manifestando que las funciones que se acoplan a la forma: ***y = mx*** se denominan Funciones Lineales y las de la forma ***y = mx + b*** se conocen como Función Afín.

Actividad 4. (Estudiante)

A partir de los gráficos realizados y las funciones obtenidas, describa una función lineal y una función afín.

Profesor.

Concluir aclarando que en la función de la forma ***f(x) = mx + b,*** si *b* = 0, entonces ***f(x) = mx***, es una Función Lineal cuya gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas (0,0). En esta perspectiva Grossman, hace una advertencia al manifestar que: “no toda transformación que parece lineal lo es en realidad y que las únicas transformaciones lineales de *R* en *R* (*R* conjunto de los números reales) son funciones de la forma ***f(x)= mx,*** para algún número real ***m***. Así, pues entre todas las funciones cuyas gráficas son rectas, las únicas que son lineales son aquellas que pasan por el origen.” (Grossman , 385) .

Ahora se analizará la función lineal y afín en términos de razón de cambio, para ello se trabajarán las siguientes actividades.

3.2.3.3 Razón de cambio

Actividad 1. (Estudiante)

En los cuatro grafos obtenidos en las actividades anteriores, determine la variación (modificación o cambio que sufre la variable), que experimenta cada variable, dependiente e independiente, entre dos valores consecutivos.

1.1. Responda:

- ¿Cuál es la variación entre los dos primeros valores de las variables dependientes del primer grafo, es decir entre 18 y 36, y de la variable independiente o sea entre 2 y 1?
- ¿Cómo obtuvo esta variación?
- ¿Cómo podría expresar esta variación para cualquier pareja de valores, en términos de *f(x)* para la una variable dependiente y en términos de *x* para la variable independiente?

Profesor.

Con las repuestas de los estudiantes e indicando que la variación se representa con la letra griega ∆[35], se debe llegar a determinar que la variación para la variable dependiente e independiente se obtiene por: $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1)$ y $\Delta(x) = (x_2) - (x_1)$.

1.2 Complete la siguiente tabla de valores.

Valor fotocopias			
Número de planos X	Precios Y	$\Delta f(x)$ $f(x_f) - f(x_o)$	$\Delta f(x)$ $f(x_f) - f(x_o)$
1	18		
2	36		
3	54		
4	72		
5	90		
6	108		
7	126		
8	144		
9	162		
10	180		

Masa y peso			
M (kg) x	P (N) Y	$\Delta f(x)$ $f(x_f) - f(x_o)$	$\Delta f(x)$ $f(x_f) - f(x_o)$
0,03	0.294		
0,04	0,392		
0,05	0.490		
0,06	0,588		
0,07	0,686		
0,08	0,784		
0,09	0,882		
0,10	0,980		

1.3 Trabaje las mismas tablas, pero con los datos de los ejercicios desarrollados en las actividades anteriores (Transporte y Peña artística).

Profesor y estudiantes presentan los resultados en la siguiente tabla.

Datos de valor de fotocopias

[35] El símbolo delta mayúscula, Δ, es la cuarta letra del alfabeto griego, esta letra se utiliza en matemática para representar una variación es decir el valor final menos el valor inicial de algo.

Variación de x 1 1 1 1 1

Número de planos (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Precio f(x)	18	36	54	72	90	108	126	144	162	180

Variación de f(x) 18 18 18 18 18

Actividad 2 (Estudiante)

2.1 Obtenga el cociente (resultado de la división) entre cada uno de los cambios de la variable independiente y de la variable dependiente de las tablas trabajadas en la actividad 1.3.

Profesor

Los resultados obtenidos nos indican la medida en que una variable cambia con respecto a la otra medida es decir la *razón de cambio.*

El profesor pide definir: razón de cambio.

El profesor concluye:

Razón de cambio conocida también como tasa de cambio es la medida en que una variable (f(x)) cambia con respecto a otra (x), esta relación comparativa se mide a través del cociente entre el cambio producido en f(x), variable dependiente y el cambio producido en x, variable independiente.

2,2. Exprese lo expuesto en el párrafo anterior a través de una fórmula, llegando a obtener:

Se concluye:

$$Raz\acute{o}n\ de\ cambio = \frac{cambio\ \ producido\ en\ la\ \mathrm{var}\,iable\ dependiente}{cambio\ \ producido\ en\ la\ \mathrm{var}\,iable\ independiente} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo.

La siguiente tabla muestra la relación entre dos variables.

X	*y*
0	*3*
1	*5*

Podemos ver que la variable *x* cambia de 0 a 1 y la variable *f(x)* cambia de 3 a 5, en este caso decimos que si *x* ha cambiado 1 unidad y *f(x)* ha cambiado en 2 unidades, por tanto la razón de cambio es 2/1.

Hacer el mismo análisis con los datos:

X	*y*
0	*3*
2	*7*

Actividad 3.

- Obtenga la razón de cambio, de los cuatro grafos anteriores y responda: ¿A qué conclusión llega en cada grafo?
- Compare las conclusiones obtenidas.

Profesor.

Con la información de la actividad 3 se concluye que la razón de cambio es constante en los cuatro ejemplos y que además representa el valor de ***m*** de las funciones trabajadas por el estudiante. Recuerde que las dos primeras funciones son función lineal y los otros dos corresponden a funciones afines y generaliza manifestando que una característica de toda función cuya gráfica es una línea recta, ya sea función lineal o afín, es que la razón de cambio sea constante.

Resumiendo

Razón de cambio.- la medida en que una variable cambia con respecto a otra.

$$Razón\ de\ cambio = \frac{cambio\ producido\ en\ la\ variable\ dependiente}{cambio\ producido\ en\ la\ variable\ independiente} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

En toda función lineal o afín la razón de cambio es constante.

Una vez determinado cómo obtener la razón de cambio se analiza, con un ejemplo, su significado.

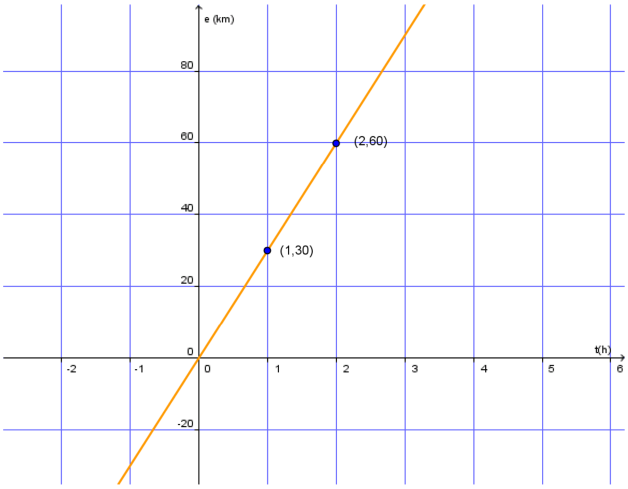
Ejercicio 1.

En Física, para determinar el espacio recorrido a velocidad constante se utiliza la siguiente fórmula $e = v.t$, en donde se representa el espacio recorrido (variable dependiente), *v* es la velocidad que, para el ejercicio tendrá, un valor constante de 30 km/h y, t representa el tiempo del movimiento (variable independiente), por tanto e = f(t) = 30 km/h . t. (el espacio está en función del tiempo, el espacio depende del tiempo). Es una función de la forma ***f(x) = mx,*** por tanto, es una función lineal.

- Construya la gráfica que represente la función y determinar la razón de cambio.
- Interprete el resultado de la razón de cambio.

Solución.

Se sabe ya, que la gráfica es una línea recta; por tanto, para construir la gráfica que represente el comportamiento de esta función, basta conocer las coordenadas de dos puntos que, de acuerdo a la Geometría Euclidiana, dos puntos determinan una sola recta.



T (h)	e = 30km/h. t	E (Km)
1	e = 30km/h.1h	30
2	e = 30km/h. 2h	60

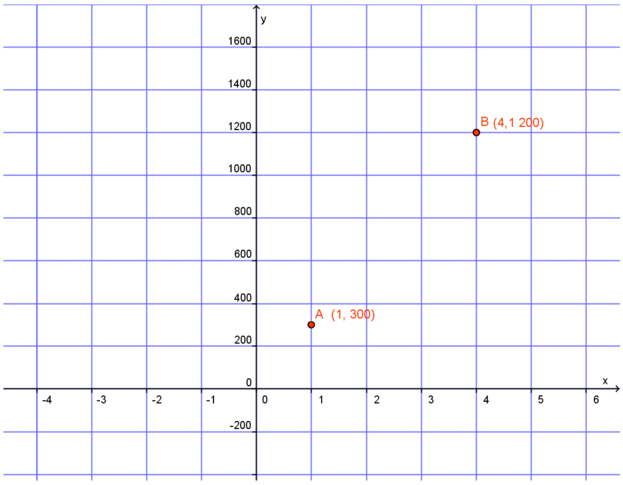
$$Razón\ de\ cambio = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{60km - 30km}{2-1} = \frac{30km}{1h} = 30km/h$$

La razón de cambio para este ejemplo es de 30 km/h e indica la variación del espacio con respecto a la variación del tiempo. Este valor de la razón de cambio nos dice que el espacio aumenta 30km cada vez que el tiempo aumenta 1h, esto nos permite determinar, por ejemplo, que para recorrer 240 km se demoraría 8h.

El hecho de determinar el valor de una razón de cambio entre dos variable tiene mucha aplicación, por ello, que algunas razones de cambio se han identificado con nombres específicos. Por ejemplo: A la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo se denomina módulo de la velocidad, la razón de cambio de la masa con respecto al peso se denomina gravedad, la razón de cambio de la velocidad respecto al tiempo se llama aceleración, la razón de cambio de la masa respecto al volumen se conoce como densidad, etc.

Ejercicio 2.

Mónica presta cierta cantidad de dinero a su amiga María, con la condición de que cada mes le abone cierta cantidad y que esta cantidad se incremente cada mes en un mismo valor, hasta que se termine de cancelar todo el dinero. La siguiente gráfica muestra los cambios en el valor cancelado, durante los meses de enero y abril.



¿Cuál es el valor de la razón de cambio?

¿Qué representa este valor?

¿Puede anotar si la función es lineal o afín? Justifique.

¿Si la cantidad pedida por María fue de 6 300, en qué mes del año terminará de pagar, y cuál es el valor del último pago? ¿Mónica cobró interés por el dinero prestado a María?

¿Cuál es la variable dependiente e independiente en este caso?

¿Cuál es la función que representa esta situación?

Si la deuda no fue de 6 300, sino únicamente de 2 900 y María, cumpliendo la condiciones impuesta, termina de pagar en abril del mismo año. ¿Cuál fue el interés pagado por la deuda?

Relación de proporcionalidad directa.

Recordando.

En muchas situaciones dos variables están relacionadas de manera que cuando una aumenta la otra también aumenta y en la misma proporción y, análogamente cuando disminuye; entonces su cociente es constante y se dice que son magnitudes directamente proporcionales. Al cociente entre las dos variables (*y/x*) que existe entre ambas variables de este tipo se denomina *Constante de proporcionalidad directa.*

Las funciones lineales son relaciones directamente proporcionales, esto se revisará a continuación.

Actividad 1. (Estudiante)

1.1 A partir de lo recordado sobre relaciones de proporcionalidad directa, determine en los siguientes grafos el cociente ***y/x*** para cada par de valores.

y = 18 x, ***(f (x) = mx)***

Valor fotocopias		
Número de planos	**Precios**	***y/x***
X	***Y***	
1	18	
2	36	
3	54	
4	72	
5	90	
6	108	
7	126	
8	144	
9	162	
10	180	

y = 9,8 x, ***(f (x) = mx)***

Mada – Peso		
Masa (kg)	**Peso (N)**	***y/x***
X	***Y***	
0,03	0.294	
0,04	0,392	
0,05	0.490	
0,06	0,588	
0,07	0,686	
0,08	0,784	
0,09	0,882	
0,1	0,980	

y = 4 x + 3, ***(f (x) = mx+b)***

y = 10 x – 1 500, ***(f (x) = mx+b)***

Masa transportada		
Masa transportada (Kilogramos)	Precios (dólares)	*y/x*
X	*Y*	
2	11	
4	19	
6	27	
8	35	
10	43	
12	51	

Peña artística		
Masa (kg)	Peso (N)	*y/x*
X	*Y*	
150	0	
200	500	
230	800	
300	1 500	
350	2 000	
450	3 000	

1.2. Escriba lo que observa de este valor y responda:

- ¿La razón *y/x* es constante?
- ¿Hay una constante de proporcionalidad directa en las funciones?
- ¿Qué representa este valor (*y/x*) en las dos primeras funciones?

Solución actividad 1.

En esta actividad el estudiante determinará que la razón ***y/x*** es constante en las 2 primeras funciones que tienen la forma ***f(x) = mx,*** es decir en las funciones lineales, no así, en las otras dos que representan una función afín y que este valor corresponde al valor de ***m.***

1.2 ¿Qué se puede anotar de las funciones lineales?

Profesor concluye:

Las funciones que relacionan magnitudes directamente proporcionales se conocen como funciones de proporcionalidad directa. Su gráfica sigue siempre un mismo patrón: una recta que pasa por el origen de coordenadas, es decir, una función lineal.

Se analiza la definición dada en el diccionario de filosofía de José Ferrater Mora ``(…) se llama función lineal a la relación entre dos o más cantidades, tal que siendo las cantidades variables, la relación entre ellas es constante (…)´´ (729).

Junto con los estudiantes se anota las características de una función lineal y una función afín que se ha ido deduciendo hasta ahora. Y se analizan las diferentes representaciones de una función.

Resumiendo.

Función Lineal.

- Al ser una función expresa una relación entre una variable independiente y una variable dependiente, a través de una regla de correspondencia, donde a cada valor de ***x*** le corresponde un único valor de ***y***.
- La razón de cambio es constante.
- Es una función de proporcionalidad directa ya que el cociente entre las variables ***y/x*** es constante (dos magnitudes son directamente proporcionales si su cociente es constante).
- Es una función de la forma ***f(x) = mx,*** cuya representación gráfica en el plano cartesiano es una recta que pasa por el origen de coordenadas.
- Es una función biyectiva ya que es inyectiva y sobreyectiva a la vez.
- Es estrictamente creciente o decreciente,

Es importante recalcar la importancia de la función lineal en el estudio de las ciencias. La función lineal es el punto de partida para lograr obtener buenos modelos sobre el comportamiento de la naturaleza a más de tener gran aplicación en situaciones cotidianas, como en el caso de la preparación de una receta de cocina, es necesario que todos sus ingredientes guarden una proporción con la cantidad que se prepara.

Ejercicio 1

Analice cada una de las características de la función lineal en la siguiente relación: la cantidad de aire que introducimos cuando respiramos y el tiempo empleado, sabiendo que respiramos unas 17 veces por minuto y cada vez introducimos en una respiración normal medio litro de aire.

Ejercicio 2

Dada la función $\boldsymbol{m = \rho V}$, en donde m representa la masa de un cuerpo, $\boldsymbol{\rho}$ la densidad y V su volumen.

- Identifique la variable dependiente e independiente.
- Escriba el tipo de relación existente entre las variables.
- Si la sustancia es agua la densidad es 1 000 kg/m^3, entonces la función es: ……………………………………………….
- Si el volumen de agua se duplica ¿qué sucede con la masa? y, ¿si el volumen se reduce a la tercera parte?
- ¿Qué tipo de relación existe entre masa y el volumen? Explique.
- Construya un grafo entre el volumen y su masa para el caso del agua. Grafique.
- Determine la razón de cambio y explique lo que significa.

3.2.3.4 Función Afín

Si a dos magnitudes directamente proporcionales se les aplica alguna condición inicial, la función que las relaciona ya no es una función lineal entonces se denomina función afín.

Resumiendo:

Función Afín

- Al ser una función debe expresa una relación entre la variable independiente y la variable dependiente, a través de una regla de correspondencia, donde a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

Ejercicio 1

Analice cada una de las características de la función afín en la relación entre el costo por rentar un vehículo y el recorrido efectuado, sabiendo que el vehículo es un Grand Vitara y se renta en 65 dólares más 2 dólares por cada kilómetro recorrido.

Ejercicio 2

La estatura de un hombre se puede calcular de la siguiente manera: se toma la medida del hueso húmero, se multiplica por 2.89, y al resultado se le suma 70.64.

- Identifique la variable dependiente e independiente.
- Escriba la función correspondiente.
- Complete un grafo entre estatura y medida del húmero. Grafique.
- Determine la razón de cambio y explique su significado en este caso específico.

3.2.3.5 Función Constante.

El sol se encuentra a 150.000.000 km, la luz tarda 500 segundos (8 minutos 20 segundos) en llegar hasta la Tierra, entonces, ¿con qué velocidad se mueve la luz?

La luz y los fenómenos relacionados con ella han intrigado a la humanidad desde hace más de 2 000 años. Fueron los antiguos griegos quienes por primera vez discutieron sobre cómo se mueve la luz, llegando a determinar que ésta se mueve en línea recta y siempre a la misma velocidad. El valor actual de la velocidad de la luz (c) fue adoptado en la Conferencia General de Pesos y Medidas del año 1983 y es de c = 299 792 458 metros por segundo, es decir, aproximadamente 300 000 km/s.

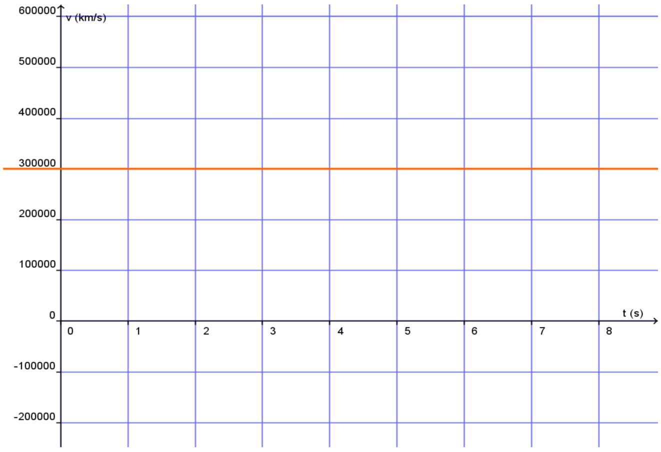
Actividad 1. (Estudiante)

- Si la luz se mueve en línea recta y con velocidad constante, ¿qué tipo de movimiento tiene la luz?

- Complete el siguiente grafo y realice la gráfica correspondiente.

t (s) x	v (Km/s) y
1	
2	
3	
4	

Solución, actividad 1.



t (s) x	v (Km/s) y
1	300 000
2	300 000
3	300 000
4	300 000

Actividad 2. (Estudiante)

- ¿Cómo es la gráfica de la función?
- ¿La gráfica obtenida representa una función lineal? Argumente la respuesta.
- Determine la razón de cambio de la función anterior (*m*).
- ¿Cuál es el valor del parámetro de la función? (*b*)
- Escriba la función que corresponda a la gráfica.
- ¿En qué se diferencia esta gráfica de la función lineal y de la función afín?

Solución actividad 2.

- La gráfica es una línea recta.
- Dado que la gráfica no pasa por el origen, no es una función lineal.
- La razón de cambio *(m)* es cero, pues el estudiante ya lo determinó,

$$\left(\frac{f(x_f) - f(x_o)}{x_f - x_o} = \frac{300000 - 300000}{2-1} = \frac{0}{1} = 0 \right)$$

- Las coordenadas del corte con eje *y* es (0,b), entonces en la *f(x) = mx + b* , *f(x) = 0x + b* , *f(x) = b* *y* *f(x) = 300 000*

Profesor.

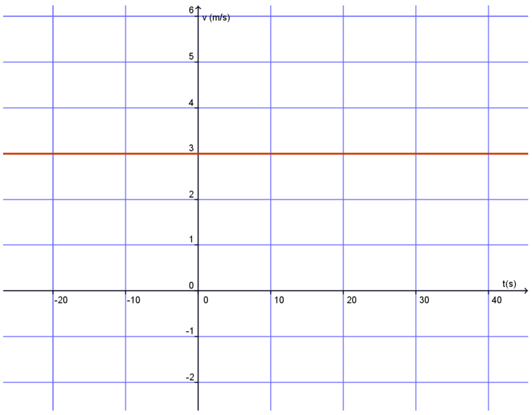
Da a conocer a los estudiantes que la función graficada es una Función Constante y, con las respuestas dadas por los estudiantes en la actividad 1, se llega a determinar las características de este tipo de función.

Resumiendo

Función constante

- Al ser una función debe estar claramente comprendido que expresa una relación entre la variable independiente y la variable dependiente, a través de una regla de correspondencia, donde a cada valor de x le corresponde un único valor de y.
- Gráficamente la función constante está representada por una recta paralela al eje horizontal y que pasa por el punto de coordenadas (o, b), que nos permite visualizar cómo la variable dependiente y permanece constante para cualquier valor de la variable independiente, x.
- Es una función de la forma $f(x) = b$
- La razón de cambio es cero.

Ejemplo. En un movimiento uniforme la velocidad es constante, no cambia conforme cambia el tiempo. Si un objeto se mueve con velocidad de 3m/s tendremos la función ***f(t) = 3.***



t (s)	v (m/s)
10	3
20	3
30	3
40	3

Resumen.

Función Lineal, Afín y Constante

Forma general	Valores	Forma	Denominación
f(x) = mx + b	$b \neq 0$ *y* $m \neq 0$	***f(x) = mx + b***	Función Afín
f(x) = mx + b	*b = 0*	***f(x) = mx***	Función Lineal
f(x) = mx + b	*m = 0*	***f(x) = b***	Función Constante

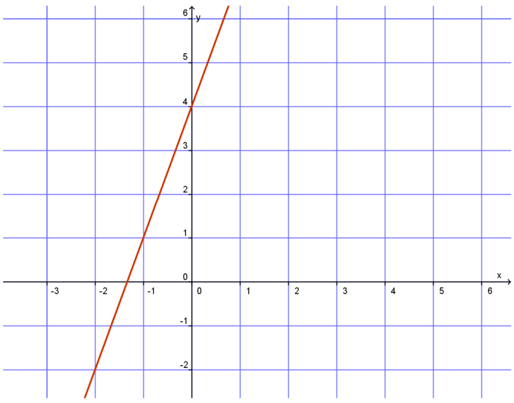
Estudio de la constante *m* y del parámetro *b* en la función lineal, función afín y función constante.

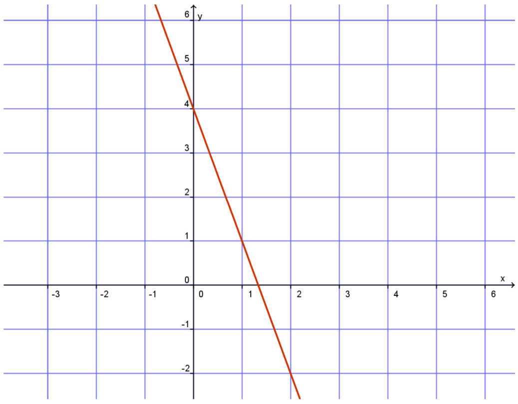
Actividad 1 (Estudiante)

1.1 Construya las siguientes gráficas e indique qué tienen en común y en qué se diferencian. Las gráficas pueden construirlas manualmente o utilizando algún software matemático, como geogebra, por ejemplo:

a)* *f(x) = 3x + 4 ***b) f(x) =-3x + 4***

Solución Actividad 1.1





1.2 ¿Qué sucede con la gráfica cuando *m* es positivo y qué sucede cuando *m* es negativa?

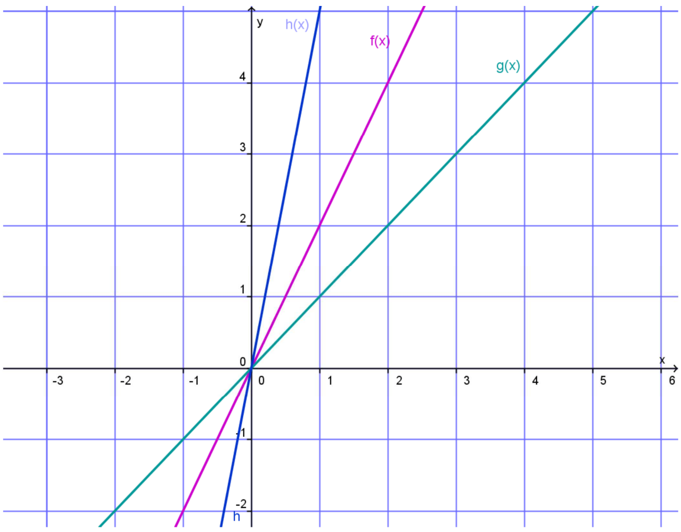
1.3 Grafique en un mismo plano cartesiano las funciones lineales:

a) ***f(x) = + 2x*** ***g(x) = + 1x*** ***h(x) = +5x***

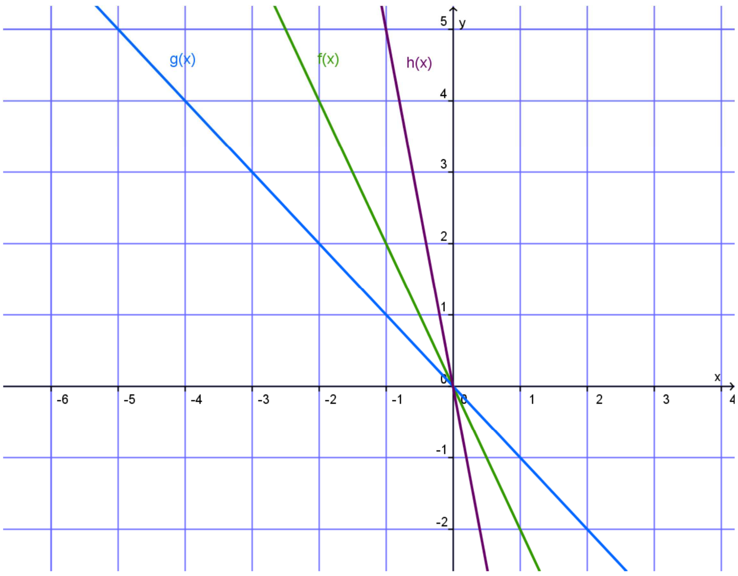
b) ***f(x) = - 2x*** ***g(x) = -x*** ***h(x) = -5x***

Gráficas Actividad 1.3

a)



b)



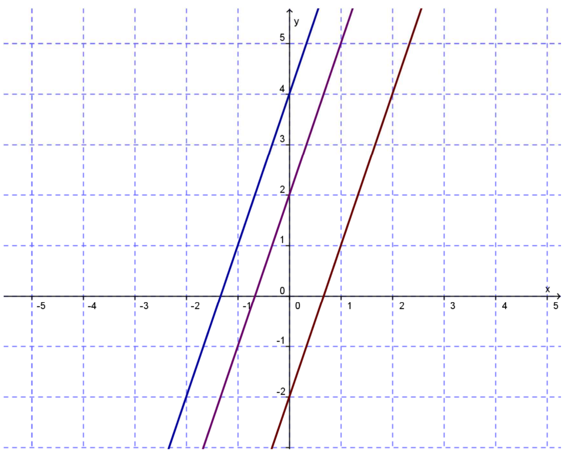
¿En que cambian las gráficas cuando cambia el valor de *m*?

¿Qué se puede decir de los valores y signos de m?

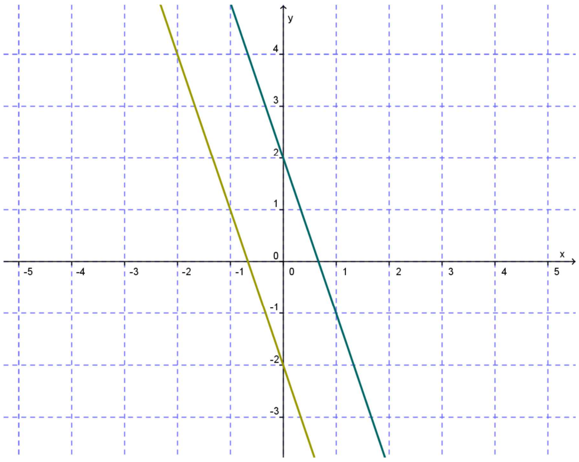
1.4. Grafique las funciones en un solo plano cartesiano.

a) f(x) = + 3x+5, f(x) = + 3x+3 y f(x) = + 3x- 2
b) f(x) = - 3x+2, f(x) = - 3x-2

Sol. Gráficas de: f(x) = 3x+5 , f(x) = 3x+3 y f(x) = + 3x- 2



b) f(x) = - 3x+2 y f(x) = - 3x-2



Escriba las coordenadas del corte de cada gráfica con el eje y, compare el valor de la ordenada con el valor de ***b*** de cada función.

1.5 A partir de las gráficas elaboradas, conteste las siguientes preguntas:

Si el parámetro ***b*** es positivo, ¿en qué parte del eje de las ordenadas (y), le corta la recta?

¿Qué sucede si el parámetro ***b*** es negativo?

¿Qué pasa con la gráfica si ***b*** = *0* y cómo se denomina a la función?

Si el valor de la constante ***m*** es positiva ¿hacia dónde se inclina la recta?

Si el valor de la constante ***m*** es negativa ¿hacia dónde se inclina la recta?

Si el valor de la constante ***m*** aumenta ¿qué sucede con la gráfica?

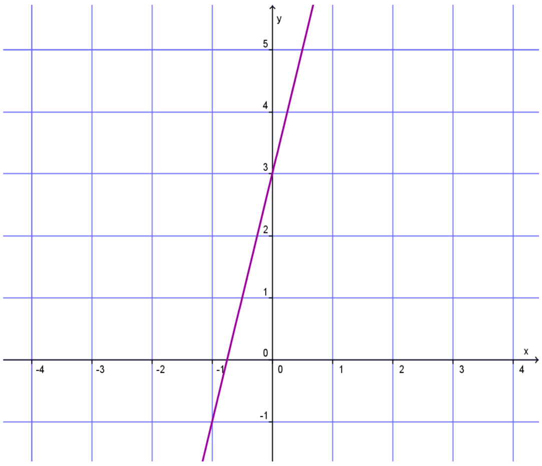
Resultados.

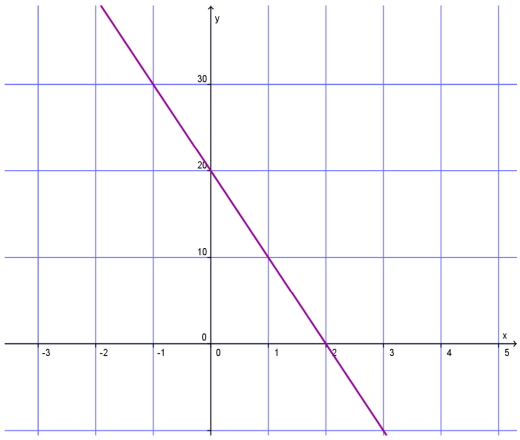
En una función lineal, función afín y función constante:

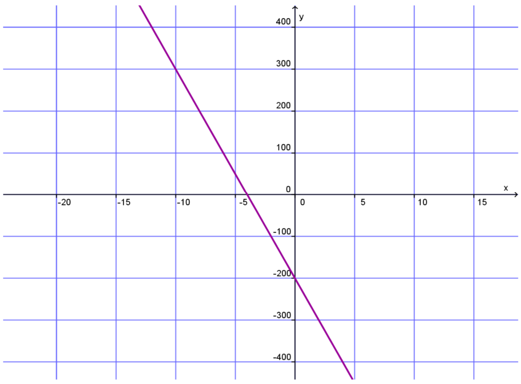
- El parámetro *b* en la gráfica representa la ordenada del punto de corte con el eje *y* las coordenadas del punto de corte son, (0, b)
- La valor de la constante *m* en la gráfica determina la inclinación de la recta que representa la gráfica de la función y su signo determina hacia dónde se inclina la recta

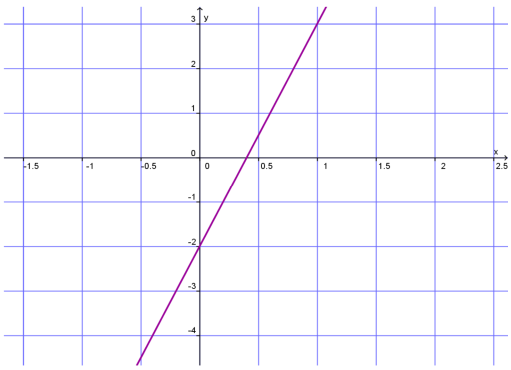
Ejercicio 1

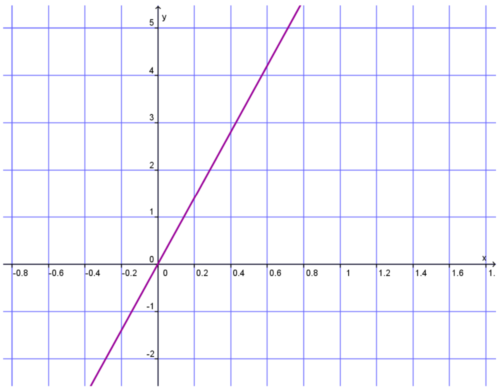
Dadas las siguientes gráficas, determine cuál es el valor de *b* y anote si *m* es positivo o negativo. Argumente cada respuesta.

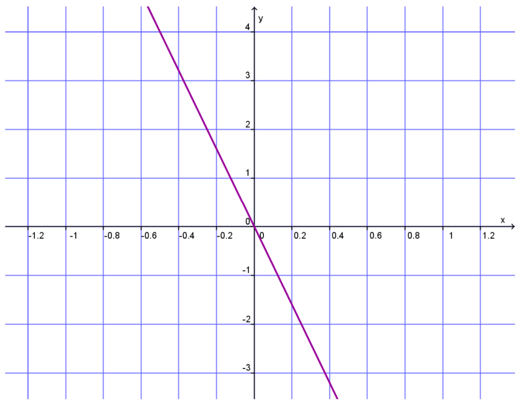












Resumiendo.

Parámetro b

- En la forma general de la función cuya gráfica es una línea recta, *f(x) = mx + b*, el valor de b es un término constante independiente, es decir su valor no va a cambiar cuando cambien los valores de las variable. Siempre tendrá el mismo valor.

- Como par ordenado, *b* es el valor de la ordenada del punto que corresponde a un valor de cero en *x*.

- *b* es la imagen de *x* cuando ésta vale cero, es decir *b = f(0).*

- En la gráfica de la función, *b* representa el valor de la ordenada del punto en el que la recta corta al eje *y*.

Ejemplo:

Un profesor de inglés que da clases particulares cobra 10 dólares la hora, pero cuando estas clases son dadas a domicilio cobra adicionalmente un valor fijo de 5 dólares.

La función que representa la relación entre el valor pagado y el número horas dictadas está dada por f(x)= 10x + 5. En esta situación podemos ver que *b* representa el valor fijo adicional cobrado.

Constante *m.*

Profesor.

En las actividades ya desarrolladas se observó que en la gráfica de una función lineal, afín o constante, el valor de la constante m, determina la inclinación de la recta.

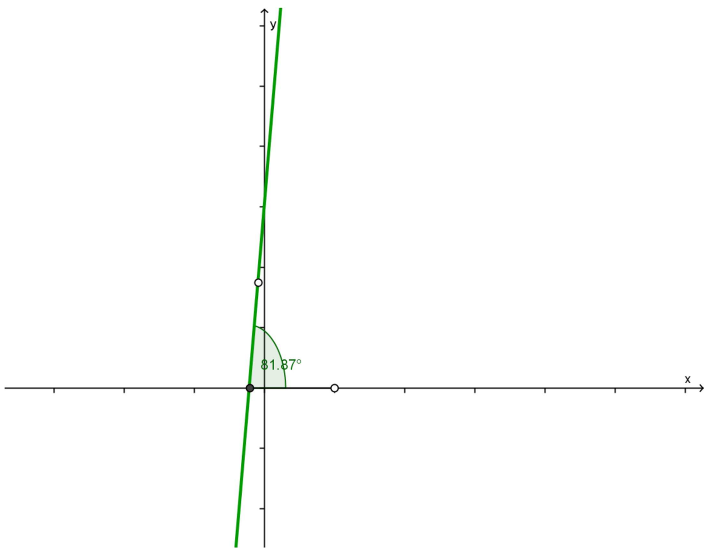
1. Actividad (Estudiante)

Grafique las funciones indicadas y mida el ángulo de inclinación de la recta con el eje la horizontal (puede usar geogebra para las gráficas.

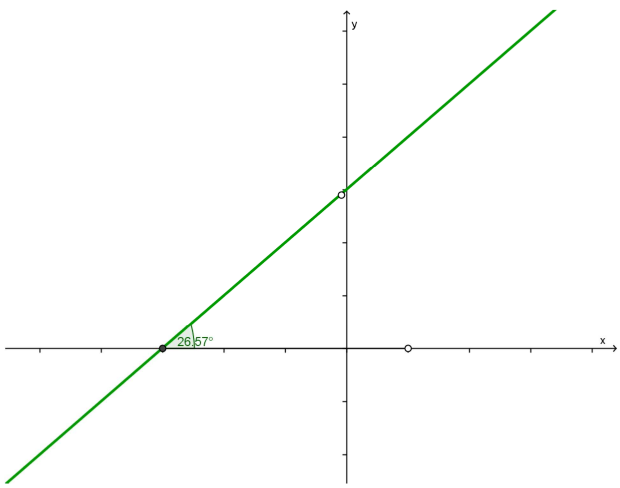
f(x) = 7x +3   y   f(x) =0.5 x +3

Solución.

f(x) = 7x +3



f(x) =0.5 x +3



Actividad 2. (Estudiante).

¿Qué sucede con el ángulo cuando el valor de la constante *m* cambia?

Profesor.

Use geogebra para observar cómo cambia el ángulo cuando cambia el valor de m.

Al cambiar la inclinación cambia el ángulo entre la recta y la horizontal, por tanto la constante *m* tiene relación con el ángulo de inclinación de la recta, ¿cuál es esta relación?

Actividad 3. (Estudiante)

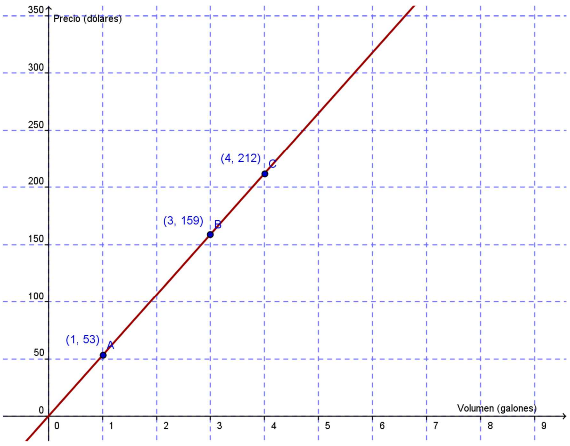
1. Escriba y grafique las funciones que correspondan a las siguientes situaciones (para hacer la gráfica realice un grafo con tres valores de las variables)

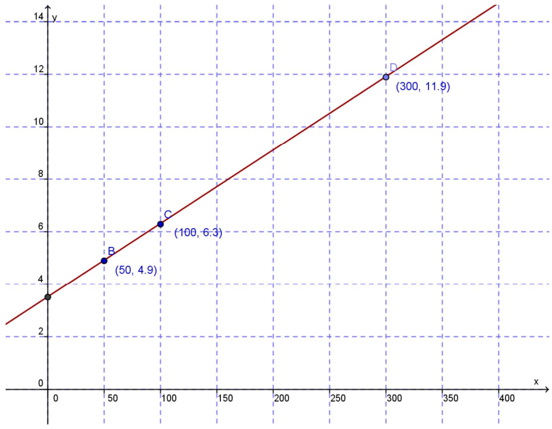
a) El rendimiento de combustible (cantidad de kilómetros recorridos por cada galón o litro de combustible) de un vehículo Hyundai Tucson en carretera es alrededor de 53 kilómetros por galón. Escriba la relación del espacio recorrido, en kilómetros, en función de la cantidad de combustible, en galones. Luego exprese la función mediante una gráfica (utilice un grafo con valores de la variable independiente de 1 galón, 3 galones y 4 galones)

b) Se va a viajar por carretera, en el mismo vehículo del ejemplo anterior, determine la función entre el gasto generado por el traslado y el número de kilómetros recorridos si se sabe que cada galón de combustible tiene un costo de 1.46 dólares y además se debe pagar un total de 3,50 dólares por peaje. Construya la gráfica que represente la función (utilice un grafo con valores de la variable independiente de 50 km, 100 km y 300 km)

Solución actividad 3.

$f(x) = 53x$ $\qquad\qquad$ $f(x) = 0{,}028x + 3.5$





Actividad 4. (Estudiante)

Encuentre la razón de cambio entre los valores de las coordenadas de los puntos: A y B y entre B y C de cada gráfica

Solución actividad 4.

Primera función

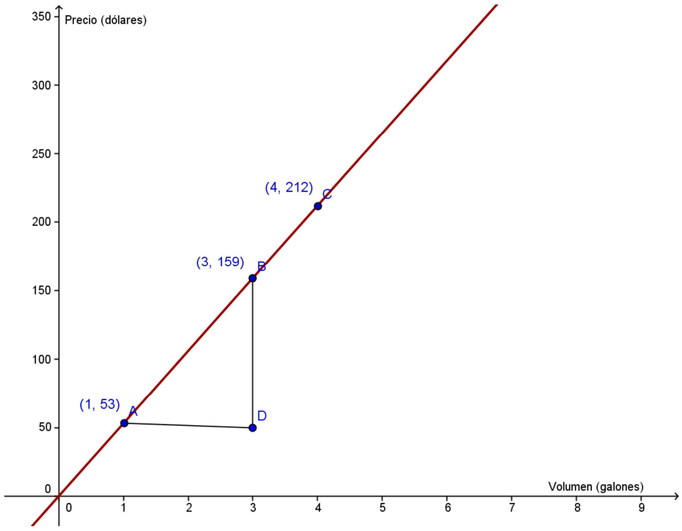
$$razón = m = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{159 - 53}{3 - 1} = 53, \quad razón = m = \frac{f(x_C) - f(x_B)}{x_C - x_B} = \frac{212 - 159}{4 - 3} = 53$$

Segunda función

$$razón = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{6.3 - 4{,}9}{100 - 50} = 0.028, \quad razón = \frac{f(x_C) - f(x_B)}{x_C - x_B} = \frac{11.9 - 6.3}{300 - 100} = 0.028$$

Actividad 5. (Profesor y estudiante)

Analicen el ángulo que forma la recta con la línea horizontal, dibujando un triángulo rectángulo de catetos AD y BD en la gráfica de la primera recta, como se indica.



De acuerdo al gráfico la longitud del cateto AD triángulo rectángulo es 3 – 1, del lado BD es 159 - 53 y el ángulo entre la recta y la horizontal es DCB que le denominaremos θ, entonces de acuerdo a la función tangente se puede escribir.

$$\tan\theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{BD}{AD} = \frac{159-53}{3-2} = 53$$

Actividad 6. (Estudiantes)

Haga el mismo análisis formando un triángulo que tenga por hipotenusa AC.

Actividad 7. (Estudiante).

- Repita el mismo análisis con los datos de la segunda gráfica.
- Compare el proceso desarrollado en esta actividad con el de la actividad 4.
- Anote la conclusión a la que llegue.

(Con esta actividad el estudiante concluirá que la tan θ = m)

Profesor.

Con la actividad 7 se concluye que el valor de la constante *m* es igual a la tangente del ángulo entre la recta y la línea horizontal y manifiesta que a éste valor, *m*, se denomina *pendiente de la recta.*

3.2.3.6. Pendiente de la recta.

Muchas veces cuando vamos por la calle nos encontramos con cambios en la nivelación del terreno, es decir, la calle que era totalmente horizontal, de repente comienza a inclinarse hacia arriba, a esta inclinación se le llama pendiente. Esta palabra proviene del latín “mutationis”, que quiere decir cambio.

Fig 1. recursostic.educación.es

El valor de la constante *m* recibe el nombre de pendiente y determina la inclinación de la recta.

Actividad 1 (Estudiante).

- ¿Ha observado alguna vez este letrero en las carreteras?

Fig. 2 recursostic.educación.es

- ¿Qué quiere decir esta señal?

Profesor.

En la figura 3, el letrero indica una pendiente de 10% que nos informa que por cada 100 m que avanza hacia la derecha se sube 10 m. El gráfico muestra claramente una recta y la pendiente nos está dando la inclinación de la misma.

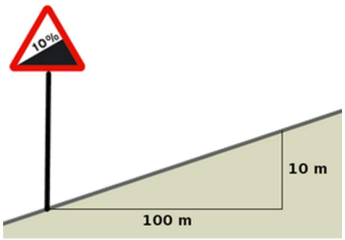


Fig. 3. recursostic.educación.es

Actividad 2. (Estudiante).

- Interprete el gráfico si el letrero indicara 20%.
- ¿En cuál de los dos casos habría mayor peligro al descender con un vehículo?, ¿por qué?
- ¿Qué sucedería en un día lluvioso? Explique.

Actividad 3. (Estudiante).

- Analice y responda, ¿qué sucede con el valor de la pendiente en una función constante?

Actividad 4. (Estudiante).

- Si cada quintal de arroz tiene un valor de 45 dólares, escriba y grafique la función entre el valor a pagar y el número de quintales comprados. Determine el valor de la pendiente m y del parámetro b. Considerando valores de las variable dependiente e independiente, analice la monotonía de la función.

- El mismo ejercicio anterior realice ahora con la función que represente la siguiente situación:

Juan tiene una deuda de 1500 dólares y cada mes cancela 150 dólares. Determine la función del saldo con respecto al número de meses pagados

- Considerando los dos casos trabajados, ¿qué puede decir del signo de la pendiente y la monotonía de la función?

Actividad 5. (Estudiante)

5.1 Realice la gráfica de las siguientes funciones, en un mismo plano cartesiano.

a) $f(x) = 5x - 1$ y $g(x) = 5x + 4$

b) $f(x) = -2x + 1$ y $g(x) = -2x + 4$

- ¿Qué tienen en común cada par de funciones?
- ¿Cómo son las gráficas?
- ¿Qué puede concluir?

5.2. Realice el grafo, en un mismo plano de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 5x - 1$ y $g(x) = - 1/5x + 4$

b) $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = -1/2x + 4$

- ¿Qué tienen en común cada par de funciones?
- ¿Cómo son las gráficas?

- ¿Qué puede concluir?

5.3 ¿Qué ocurre cuando las rectas tienen el mismo valor de la pendiente *m*?, ¿cuándo las gráficas de funciones son perpendiculares entre sí?

Resumiendo.

Pendiente de una recta (m)

La pendiente m de la recta ***f(x) = mx + b*** es la razón de cambio se la altura ***y*** (variable dependiente) respecto a la distancia ***x*** (variable independiente).

Gráficamente la pendiente de una recta es un número que mide que tan inclinada esta la recta y hacia donde esta inclinada:

- La pendiente es positiva cuando la recta esta inclinada hacia la derecha.
- La pendiente es cero cuando la función es constante (la recta es horizontal.
- La pendiente es negativa cuando la recta esta inclinada hacia la izquierda.
- Conforme el valor absoluto de la pendiente es mayor, la recta está más inclinada.

Si la tasa de cambio de una función lineal o de una función afín es negativa (m es negativa), al aumentar *x*, disminuye *f* (*x*) y por tanto la función es decreciente; al disminuir *x*, *f* (*x*) aumenta y la función es creciente.

Cuando los valores de las pendientes de las funciones son iguales ($m_1 = m_2$), entonces las gráficas de las funciones son rectas paralelas.

Ceros de la función lineal.

Recordando.

En matemática se conoce como raíz o ceros de una función *f(x)* a todo elemento *x* que pertenece al dominio de dicha función para el cual el valor de la función es cero (*f(x) = 0)*, es decir el valor de la variable independiente (*x*) para el cual la variable dependiente (*y*) toma el valor de cero. Dicha de otra manera la raíz o cero de una función es el valor de *x* que tiene como imagen al cero. En la gráfica el cero de la función representa un punto que tiene por coordenadas (*x, 0*) y es el punto en donde la gráfica corta al eje de las abscisas *(eje x*).

Geométricamente, la raíz de una función representa el punto en que la gráfica de la función corta al eje de las abscisas o eje *x.*

Actividad 1. (Estudiantes)

Luego de recordar lo que es la raíz o cero de una función, responda:

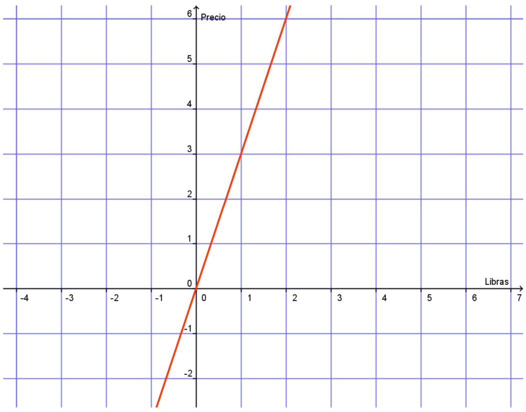
- ¿Cuáles son las coordenadas del punto de corte de la gráfica con el eje de las abscisa de cualquier función lineal?, ¿cuál es el valor de la raíz o cero de la función?

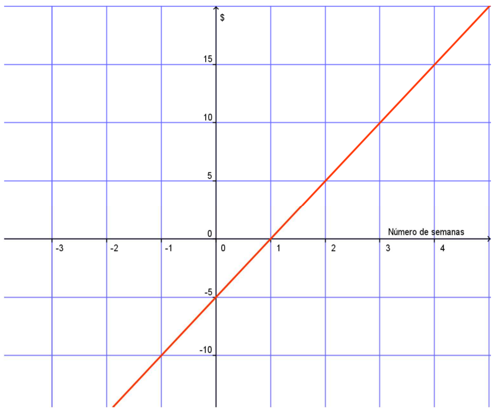
-¿Cuáles son las coordenadas del punto de corte de la gráfica con el eje de las abscisas de cualquier función afín?, ¿cuál es el valor de la raíz o cero de la función?

Ejercicio.

La gráfica (a) representa una función que relaciona el número de libras de un producto con su precio, y la gráfica b) hace referencia al ahorro de Juan, quien decidió ahorra un valor determinado cada semana, pero tuvo que retirar cierta cantidad de dinero para comprar su alcancía.

(a) (b)





- Determine el valor del parámetro b en cada caso.
- Identifique el tipo de función que representa cada gráfica argumentando su respuesta
- Determine las coordenadas del corte de cada gráfica con el eje *x*
- Identifique el cero de cada función y justifique.
- Determine el valor de la constante m, a partir de la razón de cambio y escriba en forma algebraica cada función.
- Indique, ¿cómo procedería para, a partir de las funciones determinadas algebraicamente, encontrar el cero de la función?
- De acuerdo al contexto del problema, ¿cuál es el rango y el dominio de cada una de las funciones?
- En el contexto de cada problema ¿cómo interpretaría el cero de cada función?

Recordando.

Intercepto de los gráficos con los ejes: gráficamente el concepto de intercepto de la gráfica con los ejes cartesianos son los valores donde una de las variables se hace cero, es decir, si la variable independiente es cero entonces corresponde el valor de la otra variable al intercepto con el eje *y*, que está dado por las coordenadas (0, b). Si la variable dependiente es cero entonces corresponde el valor de la otra variable al intercepto con el eje x.

3.2.3.7. Ecuación de la recta

La ecuación de una función es la relación que indica las operaciones que hay que hacer con los valores de la variable independiente *x* (dominio) para obtener la variable dependiente *y* (recorrido).

Profesor

Las funciones cuyas gráficas son una línea rectas ($f(x)= mx + b$) pueden representarse por una ecuación denominada ecuación de la recta cuya forma está dada por $\boldsymbol{y = mx + b}$, en donde m es la pendiente de la recta y b el valor de la ordenada (*y*) en el punto de corte con el eje *y.*

Formas de expresar una ecuación de la recta.

Profesor

Existen varias formas de expresar una ecuación de una recta, en función de diferentes parámetros.

Así tenemos:

Forma explícita. $\boldsymbol{y = mx + b}$

Actividad 1. (Estudiante)

- ¿Qué parámetro determina la expresión de la ecuación en forma explícita?

Profesor.

Se denomina así porque nos permite ver directamente el valor de la pendiente *m* y las coordenadas del punto en donde la gráfica corta al eje *y*, (0, b)

Ejemplo. $y = 2x + 5$

Actividad 2. (Estudiante)

Complete:

Aquí podemos determinar directamente que *m* =……….. y que *b* = ………, lo que indica que representar una función es estrictamente ………………. cuya gráfica es una recta que se inclina ………………………., corta al eje y en el punto de coordenadas (….., ……), es decir, la recta pasa por este el punto.

Ejercicio.

Se sabe que una recta pasa por los puntos de coordenadas P_1 (2,1) y P_2 (3,4), halle la ecuación de la recta en forma explícita y escriba todo lo que sepa con respecto a la gráfica.

Para la solución de este ejercicio el estudiante debe tener claro el significado de pendiente y de parámetro y lo que representan están valores en la gráfica.

Solución.

Para no llegar a un uso mecánico de fórmulas se debe evitar ejercicios con datos que puedan ser directamente reemplazados en fórmulas y tratar de que cada vez que se use *m*, por ejemplo, se mencione qué es *m,* qué significa y luego cómo se obtiene. Una vez que se determine m, si este valor es positivo, por ejemplo, no quedarse únicamente con el valor, sino explicar qué indica el signo y su valor determinado (saber que la función es creciente y que se inclina hacia la derecha)

1. Saber que se necesita conocer los valores de *m* y *b.*
2. Para determinar *m*, tener claro cuál es el significado de *m*.
3. Determinar el valor de *m*.

Como *m* representa la razón de cambio entre las variables y dado que se conocen dos valores de cada variable, se determina su valor:

$$razón\ \ de\,cambio = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-1}{3-2} = 3$$

4. Por tanto se tiene *y = 3x +b*

5. Ahora se debe determinar el valor de ***b.*** No se conoce la función para determinar ***b*** con *f(0)* = *b*; pero, conocemos los valores de ***y*** para ***x*** = 2, y para

x = 3, siendo 1 y 4, respectivamente; por tanto podemos reemplazar cualquiera de estos valores en *y = 3x +b ,* obteniendo:

1 = *3(2)* + *b,* en esta expresión tenemos un solo dato desconocido, *b,* y por tanto podemos determinar su valor, así:

1 = *6* + *b,* aplicando las reglas de las igualdades, restamos a ambos lados 6.

1 – 6 = *6* - *6* + *b,* realizando las operaciones indicadas, tenemos:

5 = *b.*

6. Ya se conoce *m* y *b*, por tanto la ecuación de la recta solicitada es:

   y = 3x - 5

7. Es necesario interpretar en la ecuación los valores encontrados, es decir si *m* = 3 quiere decir que por cada 3 unidades que varía *y, x* varía sólo una unidad; al ser *m* positiva, la recta es creciente y se inclina hacia la derecha; que la tangente del ángulo de inclinación vale 3 y por tanto se podría conocer éste ángulo y el punto de intersección de la recta con el eje *y* es (0, -5).

Forma punto – pendiente. $y - y_1 = m(x - x_1)$

Profesor.

Se expresa de esta forma cuando conocemos la pendiente de la recta y un punto que pasa por ella.

Si conocemos *m y* P_1 (x_1, y_1)

Actividad 3. (Estudiante)

Escriba la pendiente entre P_1 (x_1, y_1) y un punto cualquiera *P* (x, y) y despeje hasta obtener $y - y_1 = m(x - x_1)$

Solución.

$m = \left(\dfrac{y - y_1}{x - x_1} \right)$, $\;\; de\ donde\ multiplicando\ por\ (x - x_1),\ obtenemos: \;\; m(x - x_1) = y - y_1,$ o

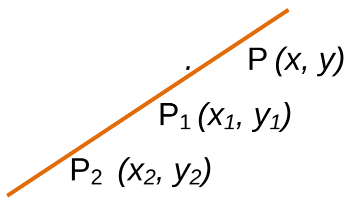
$y - y_1 = m(x - x_1)$

Forma continua. $\left(\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} \right) = \left(\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right)$

Cuando conocemos dos puntos por donde pasa una recta, podemos determinar su ecuación de forma continua.

Profesor y estudiantes

En una recta se conocen dos puntos P_1 *(x_1, y_1)*, y P_2 *(x_2, y_2)*, ahora se considera otro punto P cualquiera sobre la recta, de coordenadas P *(x, y).*



Los puntos P_1, P_2 y P pertenecen a una misma recta, por tanto la pendiente que determinamos entre el punto P_1 y P_2 y la pendiente P_1 y P es la misma, es decir: $m_1 = m_2$

$$\left(\frac{y - y_1}{x - x_1} \right) = \left(\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} \right), \quad de\ donde \left(\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \right) = \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right)$$

Actividad 4. (Estudiante)

Ejercicios.

Si los puntos tienen por coordenadas P_1 *(2,-1)* y P_2 *(4, 2)*, exprese la ecuación de la recta en la forma continua.

Profesor

Forma general o implícita. ***Ax + By + C = 0***

Otra forma de expresar una ecuación es la llamada Forma general, en donde A, B y C son números cualesquiera, tal que, A y/o B deben ser diferentes de cero.
Si tenemos la ecuación *y = 2x + 3,* obtenemos la forma general, igualamos a cero la ecuación, para ello, restamos a ambos miembros de la igualdad:

y-y = 2x + 3 – y

0 = 2x +3 –y, o

2x-y+3=0; *A = 2, B = -1* y *C = 3.*

Forma simétrica. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

Profesor y estudiante

Para obtener la ecuación simétrica procedemos así.

1. Partimos de la forma general y dividimos para el -C

Ax + By + C = 0, dividimos para - C

$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}+\frac{C}{-C}=0,$$ obtenemos

$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}-1=0 \quad \text{o} \quad \frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1$$

Ahora multiplicamos y dividimos para 1/A el primer término y para 1/B el segundo término.

$$\frac{Ax\left(\frac{1}{A}\right)}{-C\left(\frac{1}{A}\right)}+\frac{By\left(\frac{1}{B}\right)}{-C\left(\frac{1}{\mathbf{B}}\right)}=1,$$ que simplificando, tenemos:

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$$

Para expresar en forma más simplificada, reemplacemos – *C/A* por a y, – *C/B* por b y a:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Pero, ¿qué representan a y b?

Si tomamos el valor *x* = 0, tenemos

$$\frac{0}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \text{y} \quad 0+\frac{y}{b}=1 \quad \text{entonces} \quad y=b$$

Es decir *si x = 0, y = b,* por tanto b es lo ordenada del punto de intersección de la recta con el eje *y* (corte con y)

Ahora tomamos el valor *y* = 0 y tenemos

$$\frac{x}{a}+\frac{0}{b}=1 \quad \text{y} \quad \frac{x}{a}+0=1 \quad \text{entonces} \quad x=a$$

Es decir *si y = 0, x = a,* por tanto a es la abscisa del punto de intersección de la recta con el eje *x* (corte con x).

Como podemos ver, esta forma de expresar tiene la ventaja de ver explícitamente los puntos donde la recta corta a los dos ejes, pues si x = 0 y = b y si y = 0 x = a, sólo si A B y C son diferentes de cero.

Ejercicio.

1. Dados dos puntos (5,0) y (0, -3), exprese la ecuación de la recta en forma simétrica.
2. Dada la ecuación de una recta en su forma general, determine el valor de la pendiente m y del parámetro b, en función de las constantes A, B y C.

EJERCICIOS PROPUESTOS.

FUNCIÓN LINEAl, AFÍN Y CONSTANTE.

Se considera fundamentalmente ejercicios que evidencien una comprensión conceptual, poniendo en juego las propiedades de los objetos matemáticos involucrados.

1.

1.1. Escriba una semejanza y dos diferencia entre función afín y función lineal.

1.2. Escriba dos características de una función constante e indique por qué se denominan así.

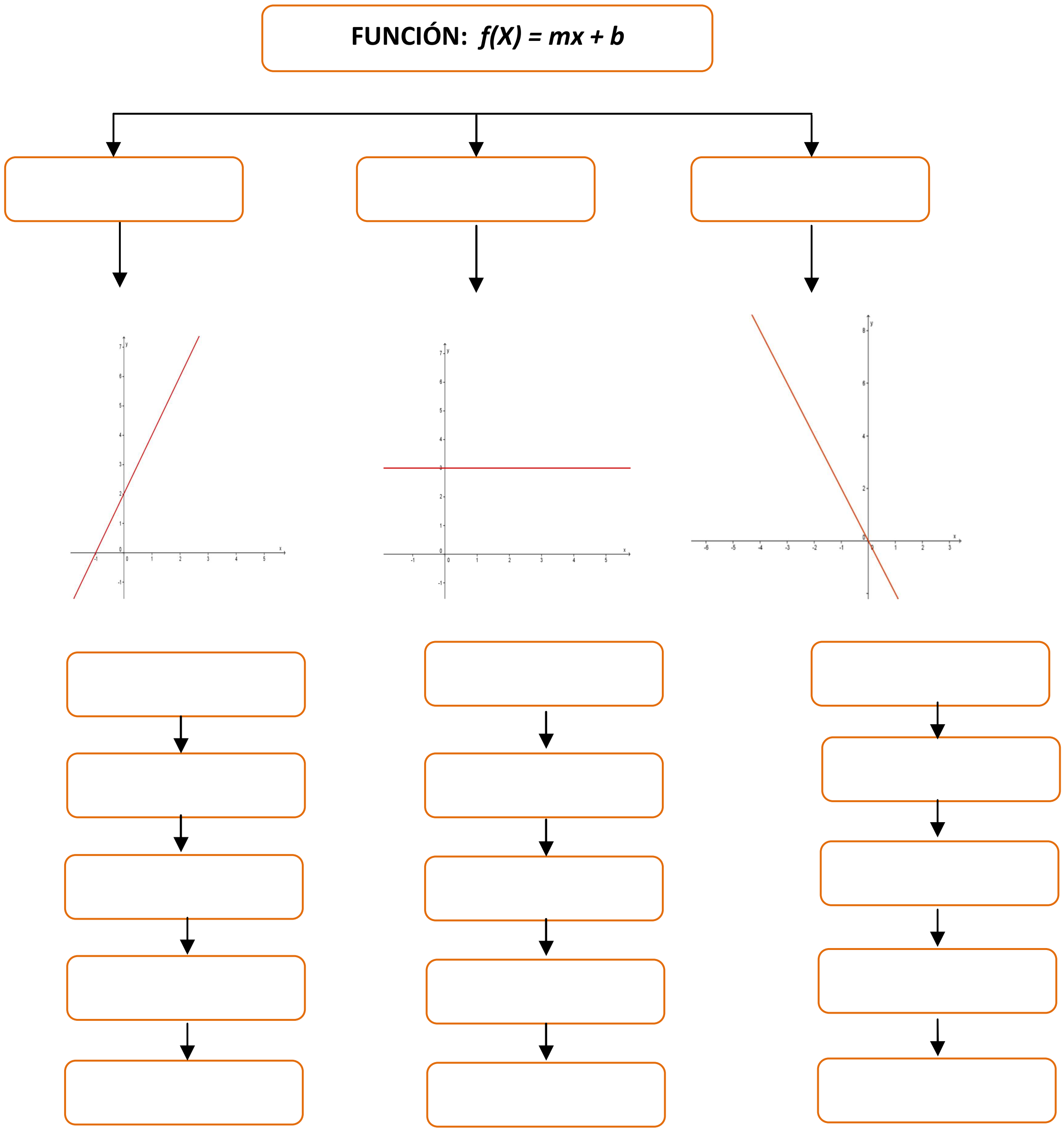
1.3. Se conoce que la razón de cambio entre la velocidad y el tiempo de cierto objeto en movimiento es de $2m/s^2$. Explique el significado de este dato.

1.4. Responda: ¿qué condiciones deben cumplir la pendiente *m* y el parámetro *b* para que una función sea decreciente, su gráfica sea una recta que se incline hacia la izquierda y corte al eje y en la parte negativa de éste eje?

1.5. Los almacenes “Su deporte”, para pedidos al por mayor, ofrece el siguiente presupuesto: 10 dólares por camiseta más 50 dólares, sin importar el tamaño del pedido. Escriba la función que relacione el valor a pagar en función del número de camisetas compradas e indique, sin graficar, ¿cuál es el corte de la gráfica con el eje y, si la gráfica es creciente o decreciente?

1.6. ¿Qué indica el valor de la pendiente *m* en la representación algebraica de la función lineal ($f(x) = mx$) y qué indica *m* en la representación gráfica de la función?

1.7. Arrastre cada palabra de la parte inferior y ubique en el recuadro correspondiente.



F. lineal.	F. Afín	F. Constante	$m < 0$
$m = 0$	$m > 0$	F. decreciente.	$b = 0$
F. creciente.	$b < 0$	$f(x) = b$	$b > 0$
$f(x) = mx$	$f(x) = mx + b$	$F(0) = 0$	$f(0) = b$
$f(0) = b$			

2. Use el Modelo Frayer para los siguientes términos: razón lineal, función afín, función constante, pendiente, parámetro b, forma simétrica de un ecuación, forma punto pendiente, forma explícita, forma continua y forma general.

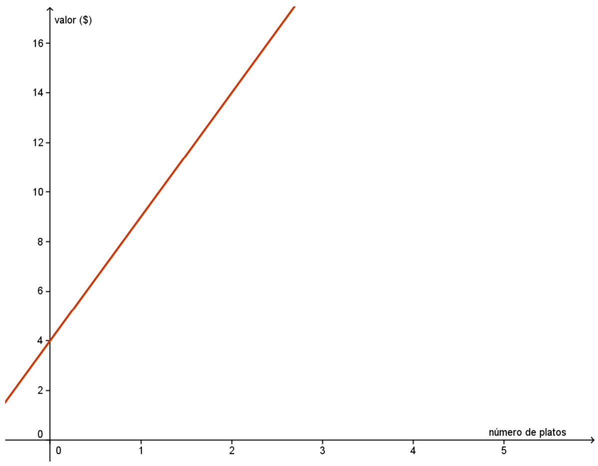
Definición	Características
FUNCIÓN LINEAL	
Ejemplo	No ejemplo

3. Compruebe si las rampas para discapacitados, que existen en su colegio o en alguna institución que conozca, cumplen con cada una de las normas técnicas establecidas para este tipo de rampas. Explique el procedimiento seguido.

Normas técnicas: Localizada dentro de la zona más accesible en dirección al flujo peatonal de mayor intensidad, con un ancho mínimo de 0.90 m y una pendiente máxima de 12.5%, a partir del punto donde se indica la franja para el cruce de peatones.

4. De acuerdo a la gráfica que representa la función entre valor pagado y número de platos solicitados a un restaurante, complete la frase:

Un negocio de comida cobra 6,5 dólares por cada plato especial y un adicional fijo de …………………………..…dólares por entrega a domicilio.



- Escriba la función entre valor pagado y número de platos solicitados.
- Escriba la ecuación de la recta en todas sus formas algebraicas.

5. Dadas dos ecuaciones: $A_1x+B_1y + C = 0$ y $A_2x+B_2y + C = 0$, demuestre si $A_1B_2 = A_2 B_1$, las rectas son paralelas.
   - ¿Cómo deberá ser la relación entre estos valores para que las rectas sean perpendiculares? Explique.

6. ¿Qué cambiaría en una de las siguientes funciones para tener en la gráfica dos rectas paralelas? Explique su respuesta.

   $f(x) = 5x+3 \qquad g(x) = 6x +2$

7. ¿Qué cambiaría en una de las siguientes funciones para tener en la gráfica dos rectas perpendiculares? Explique. $f(x) = 5x+3 \qquad g(x) = 6x +2$

8. Haciendo uso de la razón de cambio, determine si los puntos A (1,3), B(3,5) y C (-1,2) están alineados. Justifique su respuesta.

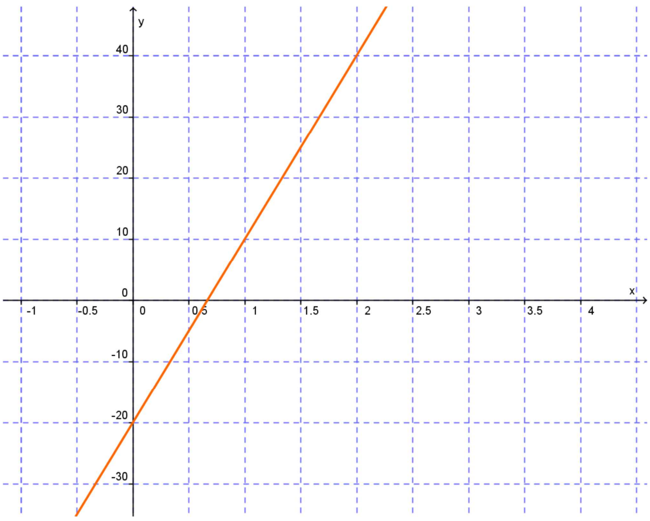
9. Para el tendido de un cableado eléctrico sobre una calle se requieren tres postes. Se ha tomado un punto de referencia, con respecto al cual se ha

ubicado el primer poste en el punto de coordenadas (-10, -30) m y el segundo poste (30,50) m. Si los postes deben están alineados y el tercer poste está ubicado en un punto cuya abscisa es 20 m, encuentre el valor de la coordenada de éste punto.

10. Pablo tiene 50 dólares y ahora quiere incrementar esta cantidad, para ello decide ahorrar una cantidad fija cada mes. Al cabo de tres meses tiene un total de 125 dólares de ahorro.

- Determine el tipo de función existente entre el dinero ahorrado y el número de meses que ahorró.
- Escriba la función correspondiente.
- Indique: ¿qué representa en la gráfica de la función el valor inicial de 50? Argumente la respuesta.
- ¿125 es imagen de qué valor? ¿por qué? Explique.
- Si se ahorró para comprar un televisor que cuesta 800 dólares, ¿en qué tiempo mínimo puede adquirirlo desde que comenzó a ahorrar? Explique.

11. Escribe una situación cuyo modelo gráfico sea el siguiente:



12. Cambie la situación del enunciado para que la función se convierta en una función lineal.

En cierta ciudad el precio de una carrera de taxi se calcula de acuerdo con la siguiente tarifa: $1,25 el arranque y $ 0,25 por cada km recorrido.

13. Los datos presentados en el siguiente grafo corresponden a la fuerza aplicada a un resorte y la deformación provocada.

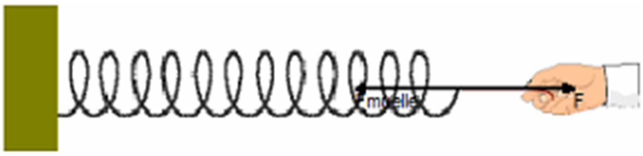


Fig. 3. Intercentres.edu.es

La fuerza aplicada está representada por F y medida de newtonios (N) y la deformación producida representada por Δx y medida en metros (m)

F	Δx
N	M
5	0,02
…………	……….
………….	………..

- Complete la tabla de datos, sabiendo que la relación entre la fuerza aplicada y la deformación producida es una función lineal.

- Encuentre la razón de cambio e interprete su significado.

- Determine el valor del parámetro b y explique la respuesta.

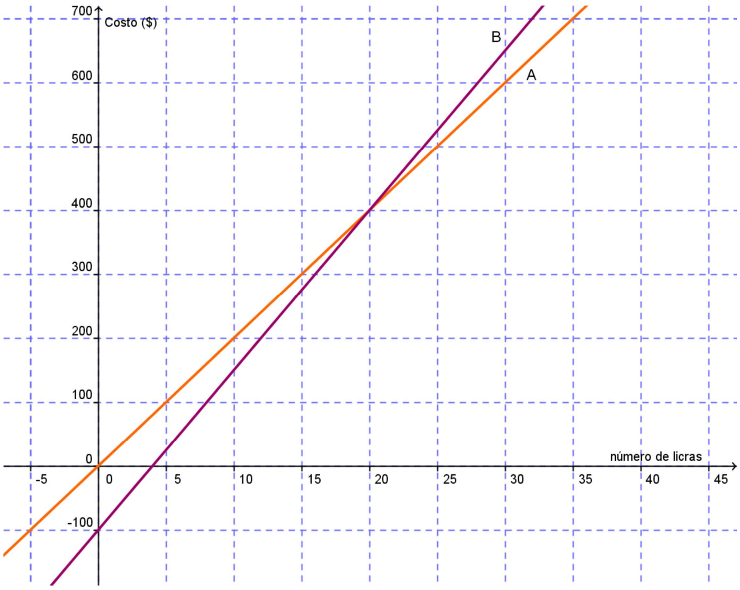
- Escriba la función correspondiente al grafo e indique: ¿qué significa esta función?

- Explique: ¿por qué la expresión obtenida es una cargo?

- Con los datos de la tabla, indique: ¿cuáles serían elementos del dominio y cuáles elementos del rango?

14. Responda a cada uno de las interrogantes presentadas, referentes a la siguiente situación:

Una escuela de gimnasia necesita confeccionar licras para sus alumnas. La gráfica muestra el costo de las licras requeridas, ofertado por dos fábricas.



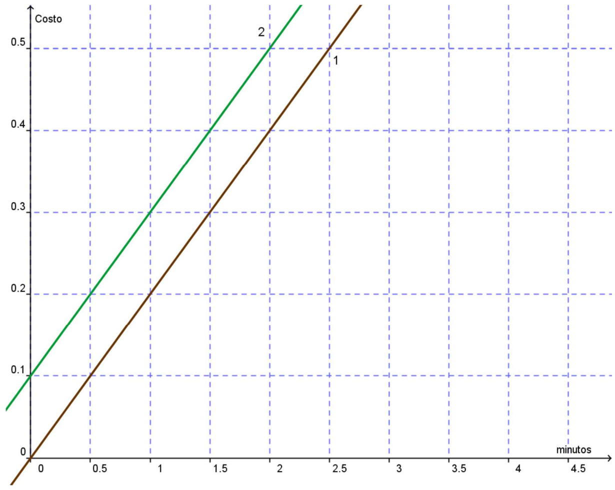
Responda a cada pregunta. Cada respuesta debe ser debidamente argumentada.

- ¿En base a qué se elegiría la fábrica para confeccionar las licras?
- ¿En qué caso le convendría a la escuela adquirir las licras en la fábrica A?
- ¿En qué caso optaría por la fábrica B?
- ¿Para qué número de licras da igual elegir la fábrica A o B?
- ¿En qué casos a la fábrica B no le convendría confeccionar las licras?
- ¿Qué variables están involucradas?
- ¿Cuál es la variable dependiente y cuál es la independiente?
- ¿Esta relación es una función?
- ¿Cuál es el valor de parámetro b para cada gráfica?
- ¿Cuál es la razón de cambio en cada caso y qué significa este resultado?
- Escriba la función correspondiente a cada gráfica e indique el proceso realizado justificando cada paso.

- Si el número de licras requeridas es 100, ¿cómo podría cambiar la función para que mejore la oferta la fábrica A, de manera que se pueda optar por ella?

15. Las gráficas muestran las tarifas de dos compañías telefónicas.

    Una de ellas tiene las siguientes tarifas: $ 0,1 por conexión y $ 0,20 por cada minuto.



Responda las siguientes preguntas referentes a la situación planteada. Cada respuesta debe estar debidamente argumentada.

- ¿Cuánto es el costo que se paga por minuto en cada empresa?
- ¿Son distintos los incrementos por minuto consumido en las dos empresas?
- ¿Son los costos distintos en las dos empresas? ¿Por qué?
- ¿Cuál es el costo por 1,5 minutos en cada empresa?
- ¿Qué tienen en común las funciones representadas en las gráficas y en qué difieren?
- Escriba las funciones correspondientes a cada gráfica.

16. La entrada a tribuna para cada partido de fútbol tiene un valor de 12 dólares, pero se ofrece una tarifa especial que consiste en comprar una tarjeta por 20 dólares al año y pagar 8 dólares cada vez que se ingrese a ver un partido.

Exprese la cantidad de dinero que gastaría al año en función del número de partidos. ¿En qué casos le convendría adquirir la tarjeta?

17. Responda argumentando cada respuesta.

Ana ha terminada su bachillerato y para pagarse sus estudios en la universidad ha decidido buscar trabajo y se le presentan dos oportunidades: el Banco "Amigos" le ofrece un sueldo fijo de 600 dólares más 12 dólares por cada tarjeta de crédito vendida, mientras que en el Banco " Su Ahorro" el sueldo fijo es de 800 dólares más 6 dólares por cada tarjeta vendida.

- ¿Cómo ayudaría a Ana a elegir la mejor opción de trabajo?
- ¿De qué depende el sueldo de Ana?
- ¿Cuál sería la variable dependiente e independiente es esta situación?
- Escriba la función para expresar cada situación y grafíquela.

CONCLUSIONES.

Del estudio realizado se puede concluir que:
La importancia de las funciones matemáticas por su gran aplicación en diversas situaciones de la vida se ve opacado cuando el estudiante no llega a tener una comprensión clara de este objeto matemático, lo que ha llevado a una pérdida de interés en este estudio, porque el estudiante termina manipulando signos sin alcanzar su significado real.

Frente a este problema se ha elaborado una propuesta con el objetivo de dar significado a los contenidos, para ello se ha considerado necesario introducir el concepto de función como red conceptual, teniendo en cuenta las distintas formas de representar una función (verbal, gráfica, tabular y algebraica) lo que permite dar un sustento semántico más amplio, lo que junto con la aplicación a situaciones reales pretende despertar el interés por su estudio.

De tal manera que al ser los significados de los objetos matemáticos claramente entendidos los estudiantes, desarrollarán sus capacidades de razonamiento y podrán expresar sus argumentos en forma clara y correcta. No expondrán únicamente la solución del problema sino que podrán explicar los procedimientos que han utilizado y analizar los resultados obtenidos, que es precisamente lo que persigue la Nueva actualización Curricular.

Para termina se cita un pensamiento de José Gregorio, que nos permite ver la importancia de trabajar en la comprensión de los conceptos matemáticos.

> Debemos pensar, para terminar, que sólo se construye lo que se comprende y que sólo se interioriza cuando se comprende. Y esta es la base de todo el aprendizaje matemático. El resto es sumar alumnos al conjunto de analfabetos funcionales, matemáticamente hablando, o como

decía un buen amigo, `el resto es desierto curricular`, un largo desierto algorítmico, vacío de oasis y que no lleva a ninguna parte. (128)

RECOMENDACIONES.

Al terminar este estudio, se anotan algunas recomendaciones, las mismas que se han considerado en la propuesta y que pueden extenderse al desarrollo de cada que uno de los bloques presentes en los diversos año de estudio del bachillerato.

- Si bien los contenidos están en muchas fuentes, sin embargo es indispensable que el docente tenga un dominio sobre los mismos, una comprensión clara de cada concepto para entonces asumir el papel de mediador y guía del proceso de aprendizaje.

- Es fundamental que el docente enfatice en el uso adecuado del lenguaje y no se limite únicamente a los significantes, sino que solicite argumentar los procesos seguidos y las respuesta obtenidas en cada uno de los bloques de estudio.

- El docente debe tener la suficiente paciencia para dejar que sean los estudiantes quienes construyan su aprendizaje, convirtiéndolo en un conocimiento útil y funcional, pleno de sentido y significado y que sirvan para resolver distintos tipos de problemas y en diferentes contextos.

- Durante el desarrollo de los conocimientos es necesario hacer referencias, las veces que sean necesarias, a los conceptos para que el estudiante se apropie de los mismos.

- Trabajar en equipos ejercicios de funciones lineales utilizando diferentes registros en cada grupo y luego intercambiar los trabajos de manera que puedan comparar soluciones, y responder diferentes preguntas que reflejen comprender lo trabajado.

- Trabajar ejercicios que requieran procesos heurísticos antes que algorítmicos que ayuden a comprender los conceptos y que requieran un esfuerzo significativo, no menospreciando la capacidad del estudiante.

- Cada vez que hablamos de un nuevo tema se debe hacerlo de la manera más amplia posible, manifestando de qué se trata, por qué es importante y cómo aplicarlo para despertar el interés en el estudiante.

- Si bien la definición (expresión formal de un concepto) es importante, sin embargo mayor importancia tienen los propios conceptos que tiene los estudiantes (representación mental que crean los individuos a cerca de un objeto o fenómeno), por lo que necesario trabajar significativamente los conceptos, dando una información semántica completa y correcta. El poco trabajo en los conceptos provoca una ausencia del concepto en la mente del estudiante.

BIBLIOGRAFÍA

Benveniste, Emile. *Problemas linguisticos generales II* . Mexico, 1977.

Blauberg, I. et. al. *Diccionario Filosófico Marxista.* Madrid: Ediciones Alcaraván, 1995.

Bréal Michel. *La Semántica ciencia de la significación.* México: Editorial Cultura, 1997.

Caranp, Rudolp. *Introducción a la Semántica*. Madrid: Ariel, 1975.

Carretero, Mario. «Constructivismo y educación.» Carretero, Mario. *Constructivismo y educación*. Buenos Aires: Paidós, 2 009. 17 - 36.

Chandler, Daniel. *Semiótica para Principiantes*. Ecuador: Abya. Yala, 1999.

De la Rosa, Adrián. *El concepto de función en secundaria: Conocer el grado de visualización de función lineal en el alumno, Experimentaciones en Educación Matemática en los Niveles Medio Superior y Universitario.*México: Editores F. Hitt y G. Hernández, Cinvestav-IPN, 2 000

Delgado, Juan. *Acta latinoamericana de Matemática Educativa.* tomo II Chile: Lorena Impresores L.tda, 2 003

De Saussure, Ferdinand (1916), *Curso de Lingüística General,* Barcelona, Planeta Agostini, 1984.

Díaz, D, J Palomino y F Primero. *El lenguaje matemático y su implicación en el aprendizaje de esta disciplina*. Colombia, 2 009.

Dummett, M.A.E. ¿*Qué es una teoría del signific*ado?. Madrid: Editorial Tecnos, 1991 [original en inglés publicado en 1975]

Duval, Raymond. Semiosis y noesis. En E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), *Lecturas en didáctica de la matemática: Escuela Francesa* (pp. 118-144). México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, 1993

Duval, Raymond. *Registro de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. México: Grupo EditorialIberoamérica., 1998.

Eco, Umberto. *Tratado de semiótica general*. Tercera Edición. Barcelona: Montesinos, 2000.

Equipo Pedagógico del grupo Editorial Norma, *Guía de aplicación curricular*. Quito: Editorial Norma, 2 011

Ferrater, José. *Diccionario de Filosofía*. Texto preparado por Eduardo Garc A Belsunce e Ezequiel Olaso . Traduzido do espanhol por António José Massano e Manuel Palmeirim. Publicações dom quixote, L Lisboa, 1978

Godino, J. *Significado y comprensión de los conceptos Matemáticos*. España: Universidad de Valencia, 2000.

González, Francisco. *Apuntes de Lógica Matemática*. Cádiz, 2005.

Grossman, S. *Algebra Lineal*. Colombia: McGraw - Hill, 2 006.

Guiraud, Pierre, *La Semántica.* Barcelona: Editorial Ariel, 2005.

Habermas, J. *Teoría de la acción comunicativa*: Complementos y estudios previos. Cátedra, Madrid. 1989.

Halliday, M. *Lenguaje como Semiotica Social*. London, 1 978.

Hitt, Fernando. *Sistemas semióticos de representaciones del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos*. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1 996.

Janvier, C. *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated, 1987.

Kutschera, F. *Filosofía del lenguaje*. Madrid: Gredos, 1971.

Leech, G et al. *Pragmática. Conceptos claves*. Quito: Ediciones Anya .- Yala, 2 000

Ministerio De Educación. *El área de matemática en el nuevo Currículo del 2010*. Quito: Editorial Norma, 2011.

Ministerio De educación. *Recursos didácticos para el primer año de bachillerato*. Dirección Nacional de Currículo, Bloque 1. Quito, 2 012

Morris, Charles. *Fundamentos de la teoría de los signos*. México: Editorial Grijalbo, 1998

Oliveros, Eladio. *Metodología de la Enseñanza de la Matemática*. Quito: Editorial Santillana, 2002.

Ordoñez, C . ´´Pensar pedagógicamente, de nuevo, desde el constructivismo´´ *Revista Ciencia de la salud,* N_o 4, 2006

Ortega, J. *Matemática, ¿Un problema de lenguaje?* Castilla - La Mancha: Facultad de CC. Económicas y Empresariales de Albacete, s.f.

Palarea M, M Socas. «Algunos obstáculos cognitivos en el apendizaje del lenguaje algebraico .» *Suma. Monográfico Lenguaje y Mastemática. 16* (1 994): 91 - 98.

Peirce, C. *Obra lógico - semiótica.* Madrid: Taurus: Ediciones de Armandp Sercovich, 1987.

Peirce, C. *Fundmento, Objeto e interpretante.* Traducción castellana de Mariluz Restrepo (2003) *Texto tomado de* MS *798 [On Signs] c.1897, 5 pp. Fue publicado como* CP *2.227-229 y 2.444n1.*

Piaget, J. *Psicología y epistemología*. España: Ariel, 1979.

Pimm, D. *El Lenguaje Matemático en el Aula*. Madrid: Morata, 1999.

Pozo J, Gomez M. *Aprender y enseñar ciencia*. Madrid: Morata, 2 000.

Razinkov, O et. al. *Diccionario de Filosofía.* Moscú: Editorial Progreso, 1984.

Rosental, M. *Diccionario de Filosofía.* Madrid: Akal editor, 1998.

Sanz, I. C*omunicación, lenguaje y matemáticas. Teoría y práctica de la educación matemática.* Sevilla, 1990: 173-235

Sierpinska, A. *Some remarks on understanding in mathematics*. For the Learning of Mathematics, (1990)

Stone, M. *¿Qué es la Enseñanza para la Comprensión?.* Buenos Aires: Editorial Paidós, 1999: 95 – 126.

Rico, L. *Errores y Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas*. s.f.

Rodriguez, Alejandro. *Redes semánticas y comprensión de interrogantes matemáticas en estudiantes de secundaria.* México: Coordinación de Educación Básica., 2 007.

Ullman, Stephen. *Semántica.Introducción a la Ciencia del Significado*. Madrid: Aguilar, 1 978.

Wittgenstein, L. *Investigaciones Filosóficas*. Barcelona: Crítica, 1 953.

Websites:

"Aplicacion Lineal" BuenasTareas.com. 10 2012. 2012. 10 2012 <http://www.buenastareas.com/ensayos/Aplicacion-Lineal/6021953.html>. (20 de septiembre de 2012)

D´Amore, Bruno. ´´Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido´´. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa [Comité Latinoamericano de Matemática Educativa/México] No. 1665 - 2436 (2006): 177-195. http://www.clame.org.mx/relime/200608d.pdf (15 de junio de 2 012)

D´Amore, Bruno. *Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución.* R*evistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/article/download/.../648* http://www.google.com.ec/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CCsQFjAA&url=http%3A%2F%2Frevistas.udistrital.edu.co%2Fojs%2Findex.php%2Frevcie%2Farticle%2Fdownload%2F419%2F648&ei=OwpjUpe5FK7c4APmzoCoDw&usg=AFQjCNFRpsd7e99AGFDNQee5BONpRr30gw (15 de junio de 2 012)

"Custiones Matemáticas De Hace Tiempo" BuenasTareas.com. 11 2012. 2012. 11 2012 http://www.buenastareas.com/ensayos/Custiones-Matem%C3%A1ticas-De-Hace-tiempo/6210037.html (5 de enero de 2 013)

Díaz, J Palomino y F. primero. ´´El lenguaje matemático y su implicación en el aprendizaje de esta disciplina``.Tesis de licenciatura. Universidad de Sucre. Colombia, 2 009. http://biblioteca.unisucre.edu.co:8080/dspace/bitstream/123456789/619/1/T500.7D542e.pdf (22 septiembre de 2 012)

Dominguez, Josefa. ``La resolución de problemas aritméticos verbales y los sistemas de representación semiótica´´. Revista de didáctica de las matemáticas. No. 29. (1 997): 19-34. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/29/Articulo02.pdf (15 de junio de 2 012)

Frías, Xavier. *Introducción a la semántica de la oración del español..* *www.romaniaminor.net/ianua/sup/sup03.pdf*. 2001. 20 de diciembre de 2012.

Godino, J. *Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática*. México: Recherches en Didactiques des Mathematiques 2 002. http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf (22 de agosto de 2 012)

Godino, J. *Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático*. Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Granada, 2 010. http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/marcos_teoricos_ddm.pdf. (12 de febrero de 2013)

Godino, J. y Recio, M.A. *Un modelo semiótico para el análisis de las relaciones entre pensamiento, lenguaje y contexto en educación matemática*. ´ResearchReportPropesal´. Presentado a la 22 Conferencia, MPE (Sudafrica). http://www.ugr.es/~jgodino/semioesp/pme22es.htm. (12 de febrero de 2 012)

Godino J. *Didáctica de las Matemáticas para Maestros*. http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf (5 de agosto de 2 013)

Gregorio, José Ramón. "El constructivismo y las matemáticas". Revista SIGMA. No. 21 (2 002): 113-129. http://www.juntadeandalucia.es/averroes/~cepco3/competencias/mates/aspgenerales/el%20constructivismo%20y%20las%20matematicas.pdf (17 de junio de 2 012)

Juarez, José. ´´Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de Matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV´´ *Revista Números*. Vol 76. (2011): 83-103. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/76/Articulos_04.pdf (10 de febrero de 2013)

Lávque, J , Nilda Mendez y Y. Villarroel. *Concepción de los alumnos de la noción de Función*. http://www2.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_21/pro_2.pdf (12 de bebrero de 2 013).

Leymonié, Julia. ´´Enseñanza para la comprensión: algunos apuntes sobre las ideas de Gardner, Perkins y otros investigadores del proyecto cero´´ http://es.scribd.com/doc/17441252/apuntes-sobre-ensenanza-para-la-comprension. (6 de noviembre de 2 012)

Mapas Conceptuales, Mapas Mentales y Otras Formas de Representación del Conocimiento, de Agustin Campos Arenas , 2005. *Colección Aula Abierta, Aula Abierta Cooperativa Editorial magisterio. Colombia.* (20 de septiembre de 2 012)

Meel, David E. ``Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE``. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. [Comité latinoamericano de matemática educativa/México] No. 003 (2003): 221-278. http://www.clame.org.mx/relime/200303c.pdf (15 de agosto de 2012)

Ministerio de Educación del Ecuador. *Lineamientos Curriculares para el Bachillerato General Unificado*, Ecuador, 2012, http://www.educación.gov.ec/. pdf (Consulta: 21 de 0ctubre de 2012)

Monzóy, José. ´´El estudio del concepto de función en el nivel medio superior mediante la simulación de un contexto´´. http://polya.dme.umich.mx/Carlos/mem9sem/monsoy/monsoy.htm (25 de e enero de 2013)

Planchart, Orlando. L*a visualización y la modelación en la adquisición del concepto de función.* Tesis de doctorado. Universidad Autónoma del Estado de Morelos . http://ponce.inter.edu/cai/tesis/oplanchart/inicio.pdf (10 de febrero de 2 013)

Puig, Luis. *Signos, textos y sistemas matemáticos de signos.* México, D.F:Universitat de Valéncia. http://www.uv.es/puigl/mexico00.pdf (26 de junio de 2 012)

Rico, L. *Errores y Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas*. s.f. http://funes.uniandes.edu.co/470/1/RicoL00-39.PDF (24 de agosto de 2 012)

Rico, L**.** *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática*, IV Simposio SEIEM, U. de Granada, España. 2000 http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Rico2009Sobre.pdf (22 de junio de 2 012)

Rosas, A y Zuñiga J. *Matemática II.* Colegio de Bachilleres. http://www.mat.uson.mx/~jldiaz/Documents/Funcion/funciones-Bachilleres.pdf (3 de marzo de 2013)

Ursini, S. y Trigueros, M. ´´¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas?´´. *Educación Matemática*. [Santillana/México] No.003. (2 006): 5-38. http://repensarlasmatematicas.files.wordpress.com/2012/09/srm-s53-trigueros-2006.pdf (10 de febrero de 2 013)

ANEXOS

Anexo 1

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN APLICADO

Este instrumento está elaborado para recoger información que nos permita determinar el nivel de comprensión que los estudiantes del primer año de Bachillerato General Unificado (B.G.U) del la Unidad Educativa Central la Inmaculada presentan en el tema referente a funciones lineales.

Este cuestionario aplicado no será para asignarle una calificación, el único propósito es obtener información para mejorar su aprendizaje.

1. Indique en qué porcentaje se desarrollan, en la clase de matemáticas, cada uno de las tipos de ejercicios indicados.

Opción	**%**
a) De razonamiento.	**…………………………..**
b) Mecánicos (procesos repetitivos)	**…………………………..**
c) Relacionados con situaciones reales que me permiten ver la utilidad del tema estudiado.	**…………………………..**

2. Cree que la matemática sólo es memorización y seguimiento de reglas.

Sí ………….. No …………

Funciones Lineales.

3. Expresen con sus palabras:

a) Qué es una **función.**

……………………………………………………………………………………………………

………………………………..……………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………….

b) Qué es el **dominio** de una función.
…………………………………………………………………………… …..…………………..
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

c) Qué es el **rango** de una función
………………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………..………………….

4. Indique cómo se lee la siguiente expresión y qué significa:

f(x), se lee ………………………………………………………………………………………

Quiere decir ……………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………….

5. Escriba F si es falso o V si es verdadero. En una **función**:

- Un elemento del **Dominio** está relacionado con uno del **Rango** ………………..
- Un elemento del **Dominio** está relacionado con al menos un elemento del **Rango** ……………
- Dos elementos del **Dominio** están relacionados con uno del **Rango** ………………..
- Dos elementos del **Rango** pueden estar relacionados con un elemento del **Dominio** …………..
- A cada elemento del **Rango** le corresponde al menos un elemento del **Dominio** …………..

6. Escriba un ejemplo que represente una función y explique por qué es función.

....

7. Complete. Si A = {2, 4, 5}, B = { 1, 3, 5} y la relación entre A y B está dada por: R = { (x, y)/ x + y es un número primo}, entonces:

R = { (…… ,…..); (…… ,……); (…… ,……); (…… ,……); (….., …..) }

Dominio. { ……. , …… } ; Rango. { …… , ……. , …….. }

8. ¿Las siguientes expresión, son ecuaciones?

a) $(a + b)^2 = a^2+2ab+b^2$ Si …………… No …………

¿Por qué? ……………………………………………………………………………………………

b) a - 2 = 17, Si ………………….. No ……………

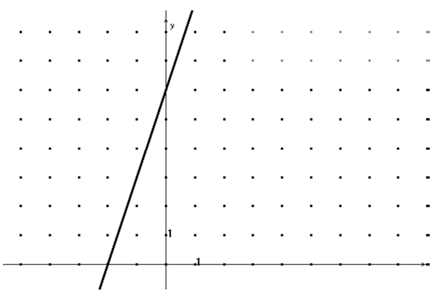
¿Por qué? …………………………………………………………………………………………..

c) Resuelva: a – 2 = 17

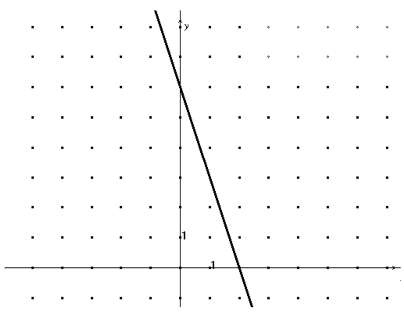
9. Analice las siguientes tablas de valores, determine cómo se relacionan las variables **x** y **y,** y escriba la función correspondiente.

X	Y
- 4	-16
- 2	-10
0	-4
4	8
5	11
7	17
Función ……………..	

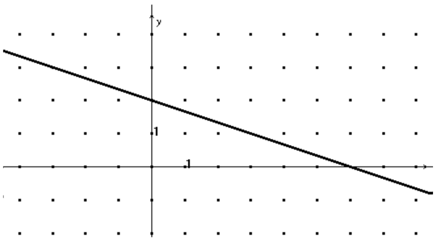
10. Identifique cuál de las siguientes gráficas corresponde a la función y =- 3x + 6.



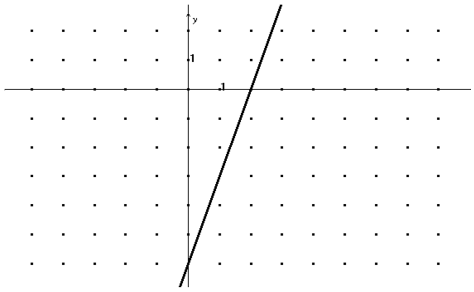
(a)



(b)



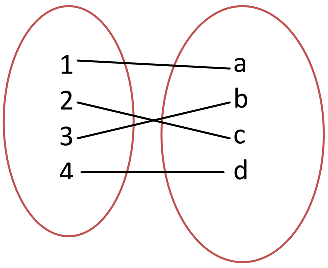
(c)



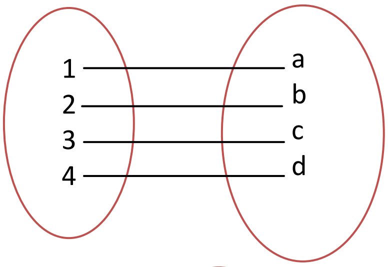
(d)

Resp. ________________________________

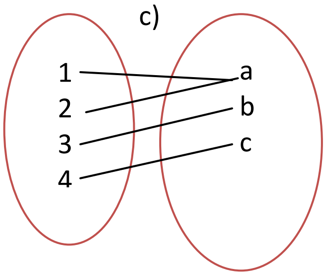
11. ¿Cuál o cuáles de las siguientes relaciones es una función?



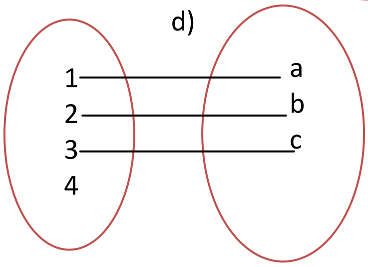
b)



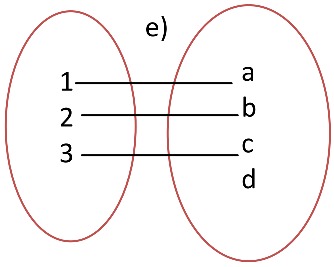
c)



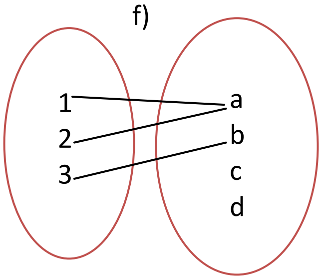
d)



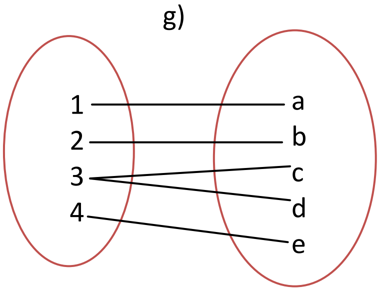
e)



f)



g)



12. Si f(x) = 2 + x , cuál es el valor de f(x) para x = 1?, para estos valores, cuál es imagen y cuál es dominio?, ¿cuál es variable dependiente y cuál es variable independiente?

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

13. En la siguiente función f(x) = ax + b ¿Cuánto vale a y cuánto vale b?

14. Exprese mediante una función el ingreso que resulta de la venta de un determinado número de artículos vendidos a $ 5 cada uno.

…………………………………………………………………………………………………..

15. Traduzcan al lenguaje álgebra el siguiente enunciado: Hay seis veces tantos estudiantes como profesores.

……………………………………………………………………………………………………

16. Ponga un enunciado para la siguiente función f(x) = 2x -3

……………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

17. Dados los puntos de coordenadas (1,4) y (3,5):

a) Graficar la recta que pasa por los dos puntos.

b) ¿Qué signo tiene la pendiente de esta recta? y ¿por qué?

…………………………………………………………………………………………………..

c) Calcular el valor de la pendiente de la recta.

……………………………………………………………………………………………………

d) ¿Qué entiende por pendiente de una recta?

…………………………………………………………………………………………………..

18. Dada la siguiente tabla de datos, determinar si pertenece a una función lineal. ¿Por qué?

X	*Y*
10	4
20	8
30	12
40	16
50	20

GRACIAS POR SU COLABORACIÓN.

Anexo 2.

Socialización de la propuesta.

Fechas: 1 de octubre 2 013.

Lugar: Unidad Educativa ´´Central la Inmaculada´´

Objetivos:

- Dar a conocer los resultados del diagnóstico aplicado a los estudiantes del primero año de Bachillerato General Unificado de la Institución.
- Presentar la propuesta planteada que tiene como propósito mejorar la comprensión semántica sobre Funciones Lineales en matemática a través de la construcción de significados de los diversos objetos matemáticos involucrados para general aprendizajes significativos.

Temas:

- Antecedentes y justificación.
- Comprensión semántica.
- Importancia de la semántica en matemática
- Estructura de la propuesta: definición de términos sobre funciones, actividades de diagnóstico, desarrollo de contenidos sobre funciones lineales mediante la construcción de significados en base a diversas actividades planteadas y presentación de ejercicios de aplicación.

Recursos:

- Computador.
- Proyector.
- Marcador
- Pizarra

Estrategias:

- Dar a conocer la propuesta planteada a través de una presentación en PowerPoint.
- Recepción de preguntas y observaciones sobre la propuesta planteada.

- Contestación de las preguntas realizadas.
- Discusión de la propuesta a través de preguntas planteadas y receptadas.

La socialización se desarrolló el día 1 de octubre de 2 013, con la participación de todos los docentes del Área de Matemática de la Unidad Educativas y con la presencia de la Señora Vicerrectora del plantel.

Se inició la presentación con los antecedentes y justificaciones que llevaron a plantear la propuesta para luego dar a conocer los resultados del diagnóstico aplicado a los estudiantes, haciendo hincapié en que éste refleja una falta de comprensión de los significados de diversos objetos matemáticos involucrados en el tema. A continuación se dio a conocer la propuesta.

Finalmente se da lugar a plantear y responder las inquietudes presentadas por los docentes quienes demostraron interés por la propuesta y solicitaron se les entregue un archivo con la propuesta para aplicarla en ese año lectivo.

Una de las inquietudes y preocupaciones planteadas por los docente durante la socialización fue con respecto al tiempo que les llevaría abordar el tema con esta propuesta, ya que manifestaban, de acuerdo al nuevo pensum hay que abordar muchos conocimientos, por lo que el docente en cierta forma se ve obligado a avanzar lo más rápido posible para abordar lo correspondiente a cada a cada año lectivo. Ante este inquietud se manifestó que si bien es cierto nos lleva más tiempo el hacer que el estudiante sea quien desarrolle las actividades para construir su propio conocimiento, antes que dar toda la información por parte del docente, sin embargo al ser los conceptos claramente entendidos se generará aprendizajes significativos lo que ayudará a avanzar más rápidos otros temas relacionados, evitando que el docente tenga que repetir este tema cada vez que se va a iniciar un nuevo tema relacionado.

Hoja de asistencia.

Fechas: 1 de octubre 2 013.

Lugar: Unidad Educativa ´´Central la Inmaculada´´

Asistentes: Docentes del Área de Matemática.

Tema: ´´Propuesta para mejorar la comprensión del lenguaje matemático de funciones lineales mediante el manejo de terminología especializada con perspectiva semántica´´

Asistentes.	C.I	Firma.
…………………………………………	……………………………	………………………
…………………………………………	……………………………	………………………
…………………………………………	……………………………	………………………
…………………………………………	……………………………	………………………
…………………………………………	……………………………	………………………
…………………………………………	……………………………	………………………
…………………………………………	……………………………	………………………
…………………………………………	……………………………	……………………

Observaciones.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Anexo 3

Sitio web.

http://docenciamatematica.wordpress.com/