

# UCUENCA

## Universidad de Cuenca

Facultad de Ingeniería

Carrera de Ingeniería Civil

### Estudio del perfil de flujo a través de un vertedero lateral en un canal triangular mediante un modelo numérico

Trabajo de titulación previo a la obtención del título de Ingeniero Civil

#### **Autores:**

Bruno Esteban Carchi Andrade

Olga Patricia Ochoa Jiménez

#### **Director:**

Verónica Margarita Carrillo Serrano

ORCID:  0000-0003-3420-0855

Cuenca, Ecuador

2024-09-16

## Resumen

Los vertederos laterales son implementados en sistemas de riego y drenaje, como medio para desviar excesos de flujo de agua hacia canales de alivio. El cálculo del perfil de la superficie de agua sobre el vertedero lateral sigue siendo tema de investigación, debido a que no es posible un análisis completo de las ecuaciones que gobiernan el flujo, por las variables que se ven involucradas. Aunque se han realizado numerosas investigaciones sobre el flujo sobre un vertedero lateral en un canal rectangular, existe poca literatura reportada del comportamiento del flujo en vertederos laterales en un canal triangular.

En este estudio, se obtiene un Método Teórico para la ecuación dinámica del flujo sobre un vertedero lateral en un canal triangular, a partir de la suposición de energía constante y se resuelve por medio de integración numérica, el cual se compara de forma gráfica con los resultados de simulaciones numéricas realizados en el software OpenFOAM. El estudio se centra en el análisis del flujo en régimen supercrítico, para el cual se establecen condiciones entrada como la pendiente del fondo del canal, que debe ser mayor a la pendiente crítica dependiendo del caudal canal de entrada. Se realizaron cinco pruebas con diferentes caudales de entrada manteniendo la geometría del canal, la pendiente de fondo y el coeficiente de rugosidad de Manning iguales para los cinco casos. Los resultados obtenidos presentaron diferencias relativas pequeñas, lo que indica que el Método Teórico obtenido es una buena aproximación al comportamiento de perfil de flujo obtenido mediante simulación numérica.

*Palabras clave del autor:* flujo espacialmente variado, aliviadero lateral, gasto decreciente, sección triangular, modelación numérica



El contenido de esta obra corresponde al derecho de expresión de los autores y no compromete el pensamiento institucional de la Universidad de Cuenca ni desata su responsabilidad frente a terceros. Los autores asumen la responsabilidad por la propiedad intelectual y los derechos de autor.

**Repositorio Institucional:** <https://dspace.ucuenca.edu.ec/>

### Abstract

Side weirs are implemented in irrigation and drainage systems as a means to divert excess water flow into relief channels. The calculation of the water surface profile over the side weir remains a topic of research, as a complete analysis of the governing flow equations is not possible due to the involved variables. Although numerous studies have been conducted on flow over a side weir in a rectangular channel, there is limited literature available on the flow behavior in side weirs in a triangular channel.

In this study, a Theoretical Method is derived for the dynamic equation of flow over a side weir in a triangular channel, based on the assumption of constant energy. The method is solved using numerical integration and graphically compared with the results of numerical simulations performed using the OpenFOAM software. The study focuses on the analysis of flow in the supercritical regime, for which inlet conditions are established, such as the slope of the channel bottom, which must be greater than the critical slope depending on the inlet flow rate. Five tests were conducted with different inlet flow rates, while maintaining the channel geometry, bottom slope, and Manning's roughness coefficient constant for all five cases. The results obtained showed small relative differences, indicating that the derived Theoretical Method is a good approximation of the flow profile behavior obtained through numerical simulation.

*Author Keywords:* spatially varied flow, side weir, decreasing flow rate, triangular section, numerical modeling



The content of this work corresponds to the right of expression of the authors and does not compromise the institutional thinking of the University of Cuenca, nor does it release its responsibility before third parties. The authors assume responsibility for the intellectual property and copyrights.

**Institutional Repository:** <https://dspace.ucuenca.edu.ec/>

## Índice de contenido

Resumen .....	2
Abstract.....	3
Índice de contenido.....	4
Índice de figuras.....	6
Índice de tablas.....	7
Dedicatoria.....	8
Agradecimientos .....	8
1. Introducción .....	9
1.1. Antecedentes y Justificación.....	9
1.2. Objetivos.....	10
1.2.1. Objetivo General.....	10
1.2.2. Objetivos Específicos.....	10
2. Fundamento Teórico.....	10
2.1. Flujo en canales abiertos .....	10
2.1.1. Geometría de un canal .....	11
2.1.2. Tipos de Flujo .....	11
2.2. Flujo Uniforme .....	13
2.2.1. Ecuación de Manning .....	14
2.3. Flujo espacialmente variado .....	15
2.3.1. Flujo sobre un vertedero lateral .....	15
2.3.1.1. Coeficientes de descarga para canales triangulares.....	18
2.3.1.2. Tipos de perfil de flujo sobre un vertedero lateral.....	19
2.4. Método de Runge-Kutta de 4 <sup>to</sup> orden .....	20
2.5. Modelación Numérica .....	21
2.5.1. Software OpenFOAM.....	21
2.5.1.1. Número de Courant y estabilidad de modelo .....	22
3. Metodología del modelamiento .....	22
3.1. Descripción del caso de estudio.....	22
3.2. Formulación para el Método Teórico.....	23
3.3. Configuración del Modelo Numérico .....	24
3.3.1.1. Elaboración y validación de la Malla .....	25
3.3.1.2. Condiciones de frontera.....	25
4. Resultados y Análisis.....	26

4.1.1. Análisis cualitativo .....	26
4.1.2. Perfil de flujo sobre el vertedero: Análisis comparativo (Análisis cuantitativo)	33
5. Conclusiones y Recomendaciones .....	42
Referencias.....	44
Anexos.....	46
Anexo A: Elaboración y generación de la malla en SALOME_MECA 9.3.0 .....	46
Anexo B: Configuración de la estructura de carpetas para la simulación en OpenFOAM	52
Anexo C: Visualización de la simulación obtenida en ParaView .....	60
Anexo D: Tablas de cálculo para los perfiles de flujo por del Método Teórico.....	65
Anexo E: Resultados del Método Numérico para las pruebas 2, 3 y 4.....	70

## Índice de figuras

Figura 2-1. Elementos de la sección transversal del canal de análisis. ....	11
Figura 2-2. Clasificación de flujo uniforme y variado. Fuente (Sotelo, 2002) .....	12
Figura 2-3. Flujo Uniforme.....	14
Figura 2-4. Esquema del flujo en un canal con descarga sobre vertedero lateral.....	17
Figura 2-5. Perfiles de flujo a través de un vertedero lateral. Fuente (Chow, 1994) .....	20
Figura 2-6. Descripción general de la estructura de OpenFOAM. Fuente (Greenshields, 2023).....	21
Figura 4-1. Prueba 1: Fracción de volumen ( $\alpha_{water}$ ), para las distancias a) T/3, b) T/2 y c) 2T/3.....	27
Figura 4-2. Prueba 1: Presión ( $p_{rgh}$ ), para las distancias a) T/3, b) T/2 y c) 2T/3. ....	28
Figura 4-3. Prueba 1: Magnitud de la velocidad (U), para las distancias a) T/3, b) T/2 y c) 2T/3.....	29
Figura 4-4. Prueba 1: Velocidad en dirección del flujo ( $U_x$ ), para las distancias a) T/3, b) T/2 y c) 2T/3.....	30
Figura 4-5. Prueba 5: Fracción de volumen ( $\alpha_{water}$ ), para las distancias a) T/3, b) T/2 y c) 2T/3.....	31
Figura 4-6. Prueba 5: Presión ( $p_{rgh}$ ), para las distancias a) T/3, b) T/2 y c) 2T/3.....	31
Figura 4-7. Prueba 5: Magnitud de la velocidad (U), para las distancias a) T/3, b) T/2 y c) 2T/3.....	32
Figura 4-8. Prueba 5: Velocidad en dirección del flujo ( $U_x$ ), para las distancias a) T/3, b) T/2 y c) 2T/3.....	33
Figura 4-9. Perfil de flujo en la pared vertical con un caudal de 0.197 m <sup>3</sup> /s.....	34
Figura 4-10. Comparación entre Método Teórico y Método Numérico del perfil de flujo sobre el vertedero para Q=0.197 m <sup>3</sup> /s.....	35
Figura 4-11. Perfil de flujo en la pared vertical con un caudal de 0.250 m <sup>3</sup> /s.....	35
Figura 4-12. Perfil de flujo en la pared vertical con un caudal de 0.250 m <sup>3</sup> /s.....	36
Figura 4-13. Perfil de flujo en la pared vertical con un caudal de 0.320 m <sup>3</sup> /s.....	37
Figura 4-14. Perfil de flujo en la pared vertical con un caudal de 0.320 m <sup>3</sup> /s.....	38
Figura 4-15. Perfil de flujo en la pared vertical con un caudal de 0.400 m <sup>3</sup> /s.....	38
Figura 4-16. Perfil de flujo en la pared vertical con un caudal de 0.400 m <sup>3</sup> /s.....	39
Figura 4-17. Perfil de flujo en la pared vertical con un caudal de 0.500 m <sup>3</sup> /s.....	40
Figura 4-18. Perfil de flujo en la pared vertical con un caudal de 0.500 m <sup>3</sup> /s.....	41

## Índice de tablas

Tabla 3-1. Resumen de datos de entrada.....	23
Tabla 4-1. Diferencia relativa entre Método Teórico y Método Numérico, para $Q=0.197 \text{ m}^3/\text{s}$ .....	35
Tabla 4-2. Diferencia relativa entre Método Teórico y Método Numérico, para $Q=0.250 \text{ m}^3/\text{s}$ .....	36
Tabla 4-3. Diferencia relativa entre Método Teórico y Método Numérico, para $Q=0.320 \text{ m}^3/\text{s}$ .....	38
Tabla 4-4. Diferencia relativa entre Método Teórico y Método Numérico, para $Q=0.400 \text{ m}^3/\text{s}$ .....	39
Tabla 4-5. Diferencia relativa entre Método Teórico y Método Numérico, para $Q=0.500 \text{ m}^3/\text{s}$ .....	41
Tabla 4-6. Número de Froude en tramo del resalto hidráulico.....	41
Tabla A-0-1. Obtención de los caldos del perfil de flujo mediante Runge-Kutta para $Q=0.197 \text{ m}^3/\text{s}$ .....	65
Tabla A-0-2. Obtención de los caldos del perfil de flujo mediante Runge-Kutta para $Q=0.250 \text{ m}^3/\text{s}$ .....	66
Tabla A-0-3. Obtención de los caldos del perfil de flujo mediante Runge-Kutta para $Q=0.320 \text{ m}^3/\text{s}$ .....	67
Tabla A-0-4. Obtención de los caldos del perfil de flujo mediante Runge-Kutta para $Q=0.400 \text{ m}^3/\text{s}$ .....	68
Tabla A-0-5. Obtención de los caldos del perfil de flujo mediante Runge-Kutta para $Q=0.500 \text{ m}^3/\text{s}$ .....	69

## Dedicatoria

Quiero dedicar este trabajo de titulación a mis padres Bruno Oswaldo y María del Carmen, por su apoyo incondicional, y alentarme a no rendirme durante toda mi etapa universitaria, a mis hermanos Estefanía y John por estar siempre sacando sonrisas en momentos difíciles, a mi abuelita Lili que sé que desde el cielo me sigue guiando, y a Gabriela que con todo su cariño siempre estuvo a mi lado como un pilar más para culminar esta etapa.

Bruno Esteban Carchi Andrade

A mis queridos abuelitos Miguel e Inés, que desde pequeña hicieron el papel de padres y han sido mi guía, apoyo y motivación en la superación de cada meta trazada, no me han dejado quebrarme en tiempos difíciles brindándome el amor más puro e incondicional en toda mi vida. A mi madre y hermano, aunque hoy ya no se encuentran conmigo, tengo la certeza que me siguen cuidando hasta poder reunirnos y darnos un abrazo nuevamente.

Patricia Ochoa Jiménez

## Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento a todos los docentes de la facultad, que han aportado su conocimiento para mi formación académica, a nuestra directora de tesis Ing. Verónica Carrillo por aclarar y solventar nuestras dudas, de igual manera quiero agradecer a nuestros revisores Ing. Esteban Pacheco y el Ing. Diego Mora destacables docentes de la Facultad de Ingeniería. También quiero agradecer a mis compañeros que estuvieron a mi lado en este viaje universitario y reconocer a Stalin por su colaboración, y un agradecimiento especial a Patricia mi amiga y compañera de tesis con quien fue un placer compartir la etapa final de la carrera.

Bruno Esteban Carchi Andrade

Quiero agradecer a las personas que han formado parte de esta etapa: familia, amigos, compañeros, docentes y a nuestra directora de tesis Ing. Verónica Carrillo. Quiero agradecer particularmente a Claudia, Nancy, Luis B, Luis M, Jonnathan, Stefanny y Soledad que me apoyaron y colaboraron en este proceso y en el transcurso de mi vida universitaria. Finalmente, a mi amigo y compañero de tesis Bruno, con quien fue un gusto compartir esta última etapa de la carrera.

Patricia Ochoa Jiménez

## 1. Introducción

### 1.1. Antecedentes y Justificación

Para el estudio de procesos de flujo históricamente se han utilizado teorías experimentales, que en su gran mayoría han sido desarrolladas bajo condiciones controladas de laboratorio y en la mayoría de los casos asumiendo un flujo unidimensional, por lo que, al ser aplicadas a condiciones más reales de flujo, deben ser verificadas y/o validadas para reducir la incertidumbre en su aplicación para casos específicos. Actualmente es posible desarrollar modelaciones numéricas mediante el uso de programas computacionales, que permiten realizar análisis detallados de los procesos hidráulicos de flujo en obras civiles, que pueden constituir conjuntamente con las simulaciones experimentales y la teoría disponible la definición de una metodología de análisis integral de los complejos procesos de flujo. Dicho análisis integral (teoría experimental, modelación física y modelación numérica) permite la optimización de las condiciones asumidas y parámetros de diseño de las estructuras hidráulicas, mejorando así su desempeño. La modelación numérica ha surgido como una alternativa que entre sus principales ventajas tiene la posibilidad de realizar análisis de varios escenarios con relativa simplicidad, respecto de la modelación física, otra de sus principales ventajas es el nivel de detalle de las variables de flujo que se puede obtener, permitiendo obtener la variabilidad del flujo en tres dimensiones como ocurre en realidad, sin embargo, es importante destacar que un modelo numérico representa una herramienta de análisis poderosa siempre que se haya verificado y validado, ya que los modelos numéricos tienen también simplificaciones que tienen que ser comprobadas.

Un caso particular de aplicación práctica de estructuras hidráulicas de relevancia es el de los vertederos laterales, que son estructuras empleadas generalmente para eliminar excedentes de agua de un canal o conducto. Se sitúan a lo largo de un lado del canal y facilitan la salida controlada del agua del conducto principal cuando su nivel supera un límite específico. Estos vertederos se emplean para regular el flujo de agua y mantener niveles adecuados dentro del canal. El diseño de los vertederos laterales requiere un análisis y la proyección del perfil de flujo a lo largo de la cresta de derrame. Aunque se ha estudiado la influencia de los vertederos laterales en la configuración del flujo en canales con la presencia de este tipo de estructuras, para entender y caracterizar el comportamiento de manera sistemática e integral de dicho flujo tanto aguas arriba de la ubicación del vertedero como a lo largo de la longitud del vertedero y aguas abajo del mismo, se requiere un análisis más detallado que permita identificar las particularidades que con la teoría disponible (relaciones generalmente

unidimensionales) no se logran identificar. Es así que, por medio de la modelación numérica y física, se puede caracterizar de una forma integral, el comportamiento del flujo en un canal triangular con la influencia de un vertedero lateral, considerando que modelación numérica y física son procesos complementarios que contribuyen a un mejor entendimiento de los procesos de flujo, en el presente estudio se propone la simulación numérica en el software OpenFOAM del flujo en un canal de sección triangular con la influencia de un vertedero lateral.

## **1.2. Objetivos**

### **1.2.1. Objetivo General**

Determinar las condiciones de flujo a través de un canal de sección triangular con la influencia de un vertedero lateral mediante la implementación de un modelo numérico.

### **1.2.2. Objetivos Específicos**

- Estimar el perfil de flujo teórico para un canal de sección triangular con la influencia de un vertedero lateral.
- Implementar un modelo numérico para la determinación del perfil de flujo simulado para un canal de sección triangular con la influencia de un vertedero lateral.
- Realizar un análisis comparativo entre las condiciones hidráulicas calculadas de manera teórica y las obtenidas mediante el modelo numérico (simuladas).

## **2. Fundamento Teórico**

### **2.1. Flujo en canales abiertos**

Un canal abierto es un conducto por donde circula un líquido con una superficie libre expuesta a la presión atmosférica. La superficie libre es considerada como la interacción de dos fluidos de diferente densidad, siendo el aire que puede ser estacionario o en movimiento en la parte superior y el líquido (usualmente agua) en la parte inferior. Los canales abiertos pueden ser naturales o artificiales. Los canales naturales se forman sin la intervención humana y engloban a todos los cursos de agua naturales en la Tierra. Por otro lado, los canales artificiales son creados por el ser humano mediante técnicas de ingeniería con el objetivo de garantizar un flujo eficiente y controlado. Los canales naturales generalmente tienen un perfil longitudinal sinuoso, sección transversal irregular, los cuales varían continuamente a lo largo de un tramo. En cambio, los canales artificiales generalmente tienen sección geométrica de forma y dimensiones constantes en tramos más o menos largos. (Sotelo, 2002)

### 2.1.1. Geometría de un canal

La geometría de un canal se refiere a la configuración del mismo tanto en su sentido longitudinal como a su sección transversal. La geometría longitudinal, se refiere a la pendiente de un canal, es decir el desnivel entre dos puntos sobre el perfil de fondo y la distancia horizontal que los separa (Sotelo, 2002); la sección tomada perpendicularmente al movimiento del flujo corresponde a la sección transversal.

Cuando un tramo de canal tiene la sección transversal y pendiente de fondo constantes, se denomina como canal prismático. Este caso se presenta únicamente en canales artificiales.

En el presente estudio se analizará un canal prismático de sección transversal triangular con una pared vertical donde se encuentra el vertedero (Figura 2-1); siendo los principales elementos geométricos de la sección los siguientes:

- Profundidad del flujo ( $y$ ): Es la distancia perpendicular al perfil del fondo del canal, desde el punto más bajo de la sección hasta la superficie libre. También puede denominarse tirante o calado.
- Ancho superficial ( $T$ ): Es el ancho de la sección del canal medido en la superficie libre.
- Área Hidráulica ( $A$ ): Es el área de la sección transversal del flujo.
- Perímetro mojado ( $P$ ): Es la longitud de la línea de contacto entre las paredes del canal y el agua.
- Radio Hidráulico ( $R_h$ ): Es la relación entre el área hidráulica y el perímetro mojado.

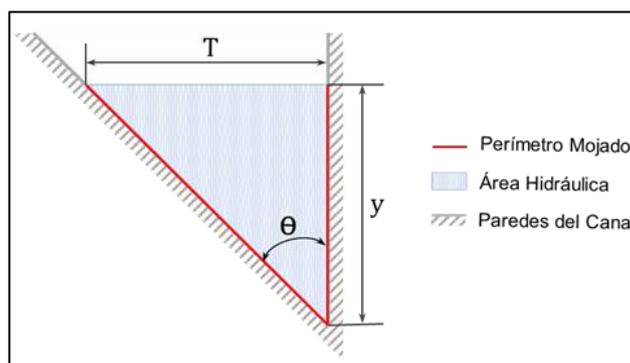


Figura 2-1. Elementos de la sección transversal del canal de análisis.

### 2.1.2. Tipos de Flujo

La clasificación de los diferentes tipos de flujo en canales abiertos está en función de las condiciones de variación de las magnitudes cambiantes del flujo respecto a los criterios de tiempo y espacio. Según (Sotelo, 2002) como principales clasificaciones se tiene:

*a. Flujo permanente y no permanente*

En esta clasificación se toma como criterio de análisis al tiempo. Si el calado no sufre cambios con respecto al tiempo corresponde a un flujo permanente; caso contrario se trata de un flujo no permanente.

*b. Flujo uniforme y variado*

Esta clasificación toma como criterio de análisis al espacio. Si el calado se mantiene constante en cada sección del canal corresponde a un flujo uniforme; mientras si este sufre cambios a lo largo del canal se trata de un flujo variado, y este a su vez puede clasificarse en gradual, rápida y espacialmente variado, dependiendo de cómo cambia el tirante a lo largo del canal. En el espacialmente variado además cambia el gasto. En la Figura 2-2 se observa un cuadro resumen de la clasificación del flujo uniforme y variado:

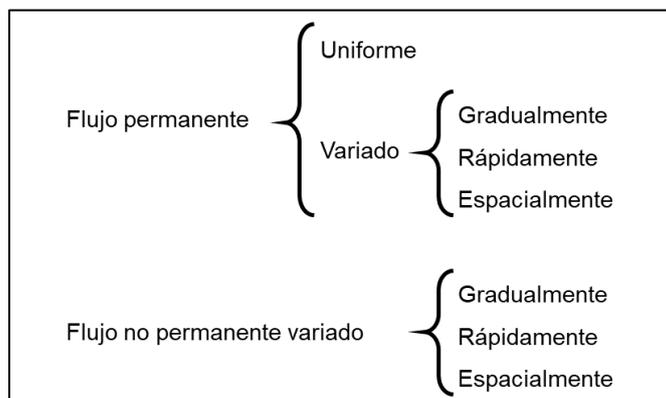


Figura 2-2. Clasificación de flujo uniforme y variado. Fuente (Sotelo, 2002)

*c. Flujo laminar, turbulento y transicional*

Clasificaciones adicionales se establecen considerando las fuerzas fundamentales principales que intervienen en el proceso de flujo, por ejemplo cuando las fuerzas principales son las fuerzas de inercia y las fuerzas de viscosidad, el flujo se clasifica en flujo laminar, turbulento y de transición. El flujo laminar se da cuando las fuerzas de viscosidad significativamente mayores a las fuerzas inerciales; en un flujo turbulento se da lo contrario las fuerzas predominantes son las de inercia, mientras que un flujo de transición es cuando se encuentra entre los límites del laminar y turbulento. La base para esta clasificación es un parámetro adimensional conocido como el número de Reynolds (French, 1988):

$$R = \frac{V \cdot R_h}{\nu} \quad \text{(Ecuación 1)}$$

Donde,

R: Número de Reynolds [adimensional]

V: Velocidad del flujo [m/s]

R<sub>h</sub>: Radio Hidráulico [m]

ν: viscosidad cinemática del fluido [m/s<sup>2</sup>]

Teniendo como límites:

$R \leq 500$	Flujo Laminar
$500 \leq R \leq 12500$	Flujo Transicional
$12500 \geq R$	Flujo Turbulento

#### d. Flujo subcrítico, supercrítico y crítico

Esta clasificación se obtiene cuando las fuerzas principales consideradas son las fuerzas inerciales y las de gravedad, la relación de estas fuerzas se denomina número de Froude:

$$F = \frac{V}{\sqrt{g \cdot A/T}} \quad (\text{Ecuación 2})$$

Donde,

F: Numero de Froude [adimensional]

V: Velocidad del flujo [m/s]

A: Área Hidráulica de la sección [m<sup>2</sup>]

T: Ancho superficial [m]

g: Aceleración de la gravedad [m/s<sup>2</sup>]

Cuando predomina la fuerza de gravedad a la de inercia se da el flujo subcrítico ( $F < 1$ ). Si predomina la fuerza inercial a la de gravedad se establece como flujo supercrítico ( $F > 1$ ). Si las fuerzas de inercia y gravitacionales se mantienen en equilibrio se denomina como flujo crítico ( $F = 1$ ).

## 2.2. Flujo Uniforme

Según (Chow, 1994) el flujo uniforme presenta las siguientes características:

1. El calado, área hidráulica y la velocidad en cada sección transversal se mantienen constantes.

- La línea de energía, la superficie del agua y el fondo del canal son todos paralelos, esto es  $S_f = S_a = S_o = S$ .

Estas características se muestran en la Figura 2-3:

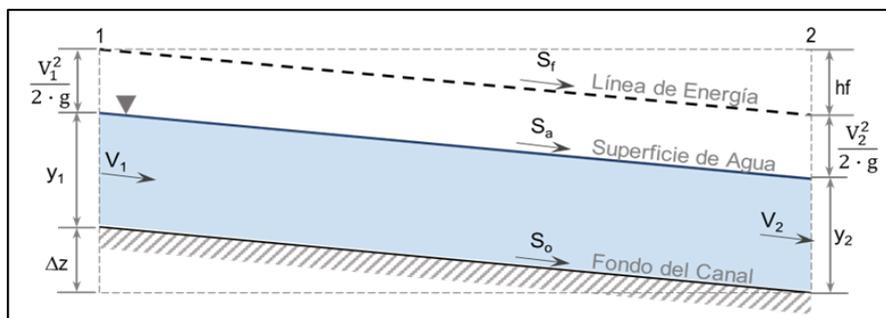


Figura 2-3. Flujo Uniforme.

En canales naturales es muy raro que se produzca un flujo uniforme ya que no son prismáticos. Aun en los prismáticos es poco frecuente debido a la existencia de controles, vertederos, entre otros (Sotelo, 2002), sin embargo, por simplicidad generalmente se asume este tipo de flujo para el diseño de canales abiertos.

### 2.2.1. Ecuación de Manning

La ecuación de Manning es el resultado del proceso de un ajuste de curvas, definidas para la estimación de pérdidas de carga (energía) y por tanto es empírica en su naturaleza (French, 1988). Para el estudio del flujo en canales abiertos es una de las ecuaciones más utilizadas gracias a su formulación simple y la proporción de resultados satisfactorios, ya que para el caso de consideración de flujo uniforme la pendiente de la línea de energía (tasa de pérdida por unidad de longitud) es igual a la pendiente del terreno.

$$V = \frac{1}{\eta} \cdot R_h^{2/3} \cdot S^{1/2} \quad (\text{Ecuación 3})$$

Donde,

- V: Velocidad del flujo [m/s]
- $R_h$ : Radio Hidráulico [m]
- S: Pendiente del canal [adimensional]
- $\eta$ : Coeficiente de rugosidad de Manning

Uno de los mayores desafíos en la aplicación de la ecuación de Manning es la determinación del coeficiente de Manning  $\eta$ , dado que no hay un método preciso para su selección. Al pasar

de los años se han realizado diferentes estudios para su determinación donde se han observado factores que afectan a  $\eta$ , por lo que no va a existir un valor único para todas las situaciones.

### **2.3. Flujo espacialmente variado**

El flujo espacialmente variado es aquel donde el caudal que circula a lo largo del canal sufre variaciones en situaciones como vertederos laterales, rejillas de fondo, canales con bordes permeables, alcantarillas pluviales y estructuras de descarga en el fondo de canales, y como resultado se puede tener una entrada de otro flujo o un desvío de excedente al caudal de diseño.

La adición de un flujo en el canal se conoce como flujo de gasto creciente, donde se puede percibir una pérdida de energía por la mezcla turbulenta de los mismos. Por otro lado, cuando se desvía el flujo se trata de un flujo de gasto decreciente, en el cual no se afecta de manera significativa la altura de la energía, por lo que, se puede estimar la superficie de agua con base en la aplicación del principio de energía (French, 1988).

Según (Chow, 1994) para la deducción de la ecuación de flujo espacialmente variado se hacen las siguientes suposiciones:

1. El flujo es unidireccional.
2. La distribución de velocidades en el canal es constante y uniforme, por lo que, el coeficiente de corrección de energía  $\alpha$  es igual a la unidad.
3. El flujo es uniforme y paralelo, lo que indica que sigue el principio de la presión hidrostática.
4. La pendiente del canal es pequeña, por tanto, el calado es el mismo de forma perpendicular con el fondo.
5. El efecto de atrapamiento del aire es insignificante.

#### **2.3.1. Flujo sobre un vertedero lateral**

Uno de los casos más comunes para que ocurra el flujo con gasto decreciente en un canal es por la implementación de un vertedero lateral. Este caso tiene importantes implicaciones en el diseño y la gestión de sistemas de riego y drenaje, donde a medida que el agua fluye por el canal su caudal disminuye debido a la derivación de agua a través del vertedero lateral.

El flujo sobre un vertedero lateral en un canal rectangular ha sido objeto de varias investigaciones experimentales (Allen, 1957; Coleman y Smith, 1923; Collinge, 1957; Engels,

1920; Forchheimer, 1930; Frazer, 1954; Kumar y Pathak, 1987), sin embargo, la primera aproximación teórica a la hidráulica de un vertedero lateral en un canal rectangular fue realizada por De Marchi (1934). (Uyumaz, 1992)

Para el análisis del flujo espacialmente variado a lo largo de un vertedero lateral se aplica el principio de energía, donde la energía total en una sección transversal del canal con respecto a un plano de referencia es:

$$H = z + y + \frac{\alpha Q^2}{2gA^2} \quad (\text{Ecuación 4})$$

Donde,

- H: Energía específica del flujo [m]
- z: Distancia vertical entre el nivel de referencia y el fondo del canal [m]
- y: Calado de la sección transversal al perfil de fondo [m]
- $\alpha$ : Coeficiente de distribución de velocidades
- Q: Caudal en cualquier punto del flujo principal [m<sup>3</sup>/s]
- g: Aceleración de la gravedad [m/s<sup>2</sup>]
- A: Área de la sección transversal [m<sup>2</sup>]

Al derivar la Ecuación 4 con respecto a la coordenada longitudinal x, se obtiene:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{\alpha}{2g} \left( \frac{2Q}{A^2} \cdot \frac{dQ}{dx} - \frac{2Q^2}{A^2} \cdot \frac{dA}{dx} \right)$$

Donde  $dH/dx = -S_f$ ;  $dz/dx = -S_o$ ;  $dQ/dx = q$  y  $dA/dx = T \frac{dy}{dx}$ , la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f - \frac{\alpha Q}{gA^2} \cdot q}{1 - \frac{\alpha Q^2}{gA^3} \cdot T} \quad (\text{Ecuación 5})$$

Donde,

- S<sub>o</sub>: Pendiente del fondo del canal
- S<sub>f</sub>: Pendiente de fricción
- $\alpha$ : Coeficiente de distribución de velocidades
- Q: Caudal en cualquier punto del flujo principal [m<sup>3</sup>/s]
- A: Área de la sección transversal [m<sup>2</sup>]
- g: Aceleración de la gravedad [m/s<sup>2</sup>]

T: Superficie libre [m]

Tras los nuevos conocimientos integrados para el análisis de los perfiles de flujo, es válido aceptar que el flujo en un canal de gasto decreciente y cualquier forma de sección se analiza en base a las siguientes consideraciones: (Sotelo, 2002)

1. El flujo es aproximadamente bidimensional y la presión es casi hidrostática, si se desprecia la curvatura de la superficie libre.
2. La pendiente del fondo del canal es pequeña e igual a la pendiente de fricción ( $S_o = S_f$ ). Por lo tanto, la energía específica en el tramo del vertedero y el coeficiente  $\alpha$  se mantienen constantes.

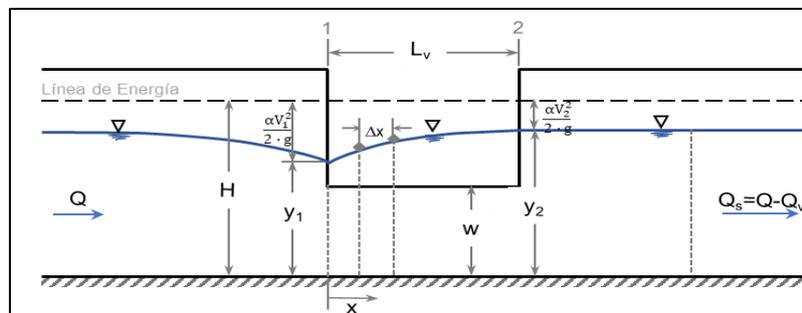


Figura 2-4. Esquema del flujo en un canal con descarga sobre vertedero lateral.

$$H = E = y + \frac{\alpha V^2}{2g} \quad (\text{Ecuación 6})$$

$$E = y + \frac{\alpha Q^2}{2gA^2}$$

$$Q = A \sqrt{\frac{2g}{\alpha} (E - y)} \quad (\text{Ecuación 7})$$

3. El calado varía sólo con la distancia  $x$  sobre el eje del canal, ya que se desprecia la variación en la dirección lateral, debido al comportamiento complejo en esa dirección.

$$-\frac{dQ}{dx} = q = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot (y - w)^{3/2} \quad (\text{Ecuación 8})$$

Donde,

$\mu$ : Coeficiente de descarga del vertedero [adimensional, constante]

$w$ : Altura de la cresta del vertedero respecto al fondo del canal [m]

Al integrar la Ecuación 8 se obtiene el caudal del vertedero lateral de longitud  $L_v$ :

$$Q_v = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot \int_0^{L_v} (y-w)^{3/2} dx$$

$$Q_v = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot L_v \cdot h^{3/2} \quad \text{(Ecuación 9)}$$

Donde h es la carga media en la distancia  $L_v$  definida por:

$$h = \frac{1}{L_v} \cdot \int_0^{L_v} (y-w) dx \approx \frac{1}{L_v} \cdot \sum (y-w)\Delta x$$

Donde,

$y_m$ : es el tirante medio en el tramo  $\Delta x$

Si el cálculo se realiza por métodos numéricos, la Ecuación 9 se expresa en diferencias finitas y el decremento del caudal entre las dos secciones contiguas es:

$$-\Delta Q = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot (y-w)^{3/2} \Delta x \quad \text{(Ecuación 10)}$$

4. La longitud del vertedero no debe ser muy grande. Se debe cumplir una proporción igual o menor a 75% entre el caudal de vertido con el caudal del canal antes del vertedero.

Las Ecuaciones 7 y 8 se reemplazan en la Ecuación 5 y respetando las condiciones antes mencionadas obteniendo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f - \frac{\alpha \left( A \sqrt{\frac{2g}{\alpha}(E-y)} \right) \left( -\frac{2}{3} \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot (y-w)^{3/2} \right)}{gA^2}}{1 - \frac{\alpha \left( A \sqrt{\frac{2g}{\alpha}(E-y)} \right)^2}{gA^3} \cdot T} \quad \text{(Ecuación 11)}$$

La Ecuación 11 es la ecuación dinámica para flujo espacialmente variado de gasto decreciente a través de un vertedero lateral, y es válida para régimen subcrítico y supercrítico en cualquier sección transversal. Para la integración se utilizará el método de Runge Kutta de cuarto orden en el cual el parámetro que varía es el tirante "y" en dirección del flujo en la coordenada x.

### 2.3.1.1. Coeficientes de descarga para canales triangulares

No existen resultados experimentales para vertederos laterales en canales trapeciales ni triangulares. La falta de dicha información obliga a utilizar los de los rectangulares. (Sotelo, 2002). Subramanya y y Awasthy, en 1972 propuso coeficientes para un canal rectangular que están en relación al número de Froude ( $F_1$ ) al comienzo del vertedero lateral en el eje del canal principal.

Para flujo subcrítico:

$$\mu = 0.611 \sqrt{1 - \frac{3F_1^2}{F_1^2 + 2}} \quad (\text{Ecuación 12})$$

Para flujo supercrítico:

$$\mu = 0.36 + 0.008F_1 \quad (\text{Ecuación 13})$$

### 2.3.1.2. Tipos de perfil de flujo sobre un vertedero lateral

De acuerdo a (Frazer, 1957) se pueden producir cinco tipos de perfil de flujo a través de un vertedero lateral:

- Tipo *a*: En el inicio o cerca, entra con condiciones críticas, a lo largo del vertedero el calado disminuye gradualmente, y se mantiene en condiciones supercríticas.
- Tipo *b*: En la entrada el calado de inicio es mayor al calado crítico, a lo largo del vertedero el calado incrementa, es decir en flujo es subcrítico.
- Tipo *c*: En el inicio o cerca, entra con condiciones críticas, en el vertedero se produce un resalto hidráulico, aumentando el calado de forma gradual.
- Tipo *d*: En la entrada el calado es menor al calado crítico, en la sección del vertedero el calado disminuye gradualmente, siendo flujo supercrítico.
- Tipo *e*: En la entrada el calado es menor al calado crítico, en el vertedero se produce un resalto hidráulico, aumentando el calado de forma gradual.

El Tipo *d* y *e* se pueden dar si el flujo es supercrítico, además el caudal se controla desde aguas arriba.

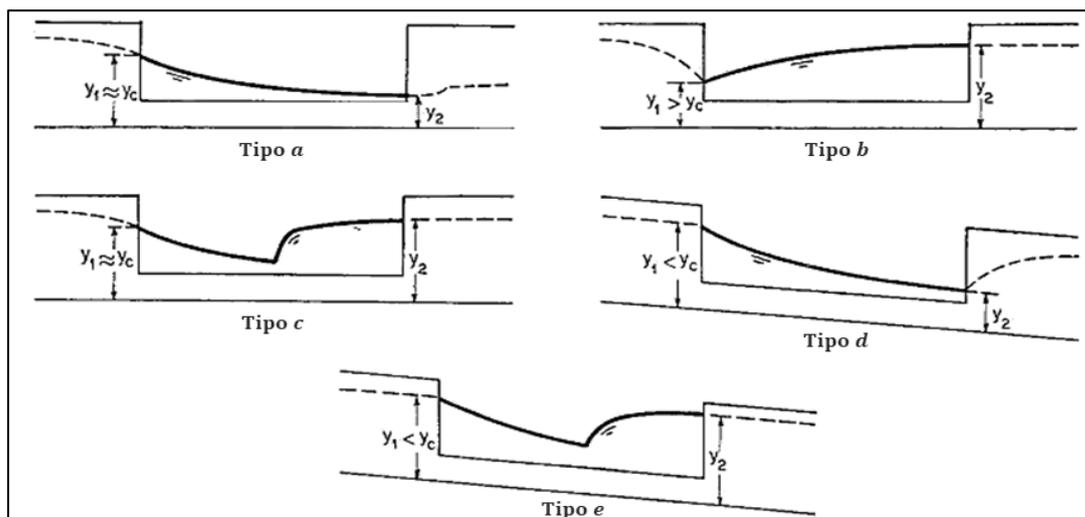


Figura 2-5. Perfiles de flujo a través de un vertedero lateral. Fuente (Chow, 1994)

## 2.4. Método de Runge-Kutta de 4<sup>to</sup> orden

Los Métodos de Runge-Kutta son métodos numéricos utilizados para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ . La estimación de las ecuaciones consiste en la extrapolación de la pendiente  $\emptyset$  de un  $y_i$  (anterior) a un nuevo valor  $y_{i+1}$  en una distancia  $\Delta x$  y así trazar la trayectoria de la solución (Chapra & Canale, 2006).

Uno de los tipos más utilizados es el Método de Runge-Kutta de orden 4, debido a la precisión de aproximación a la solución real y la facilidad de implementación. Dado por la siguiente ecuación:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\Delta x \quad (\text{Ecuación 14})$$

Donde los  $k$  son:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}k_1\Delta x\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}k_2\Delta x\right) \\ k_4 &= f(x_i + \Delta x, y_i + k_3\Delta x) \end{aligned}$$

Este método se puede programar fácilmente para obtener las iteraciones necesarias para llegar a la solución, para el caso de estudio obtener el perfil de flujo sobre el vertedero.

## 2.5. Modelación Numérica

Las modelaciones numéricas constituyen una herramienta que utiliza métodos numéricos y computacionales para modelar, simular y analizar el comportamiento de fluidos fundamentados en la Dinámica de Fluidos Computacional (DFC). Los métodos de discretización, como el método de las diferencias finitas (MDF), el método de los elementos finitos (MEF) y el método de los volúmenes finitos (MVF), permiten el análisis discreto de un fenómeno continuo lo que a su vez posibilita la solución de las ecuaciones de gobierno de una manera factible, ya que la solución completa de las ecuaciones de gobierno (en su forma analítica), no es posible para la mayoría de casos de flujo reales

### 2.5.1. Software OpenFOAM

OpenFOAM es un programa que aplica la dinámica de fluidos computacional y es ampliamente utilizado en la investigación, y para proyectos de desarrollo en diversas industrias, como la automotriz, manufacturera, ingeniería de procesos e ingeniería ambiental. Este software fue lanzado como fuente abierta por OpenCFD Ltd. en 2004, y se utiliza en Linux, empleando el lenguaje C++ para modelar y simular una amplia gama de fenómenos y problemas de ingeniería, en especial para la dinámica de fluidos computacional.

OpenFOAM es principalmente una biblioteca de C++ utilizada para crear ejecutables, que se conocen también como aplicaciones. Estas aplicaciones se dividen en dos categorías: solucionadores, diseñados para resolver problemas específicos en la mecánica continua, y utilidades, diseñadas para realizar tareas que implican la manipulación de datos. (Greenshields, 2023)

OpenFOAM se suministra con entornos de pre y post procesamiento. La estructura general que maneja OpenFOAM para la resolución de un problema. se muestra en la Figura

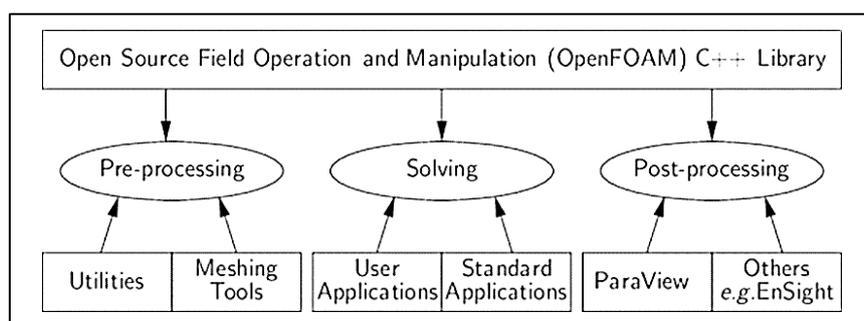


Figura 2-6. Descripción general de la estructura de OpenFOAM. Fuente (Greenshields, 2023)

Algunas de las consideraciones que se establecerán para el modelado en OpenFOAM, son:

- El fluido es incomprensible
- El flujo en el canal es turbulento

Para ello el programa usa o establece las ecuaciones de Navier-Stokes y para el apartado del flujo turbulento parte del modelo  $k - wSST$ .

#### 2.5.1.1. Número de Courant y estabilidad de modelo

Cuando se tiene una solución numérica, una de los principales objetivos es saber si se puede garantizar que la solución se aproxime a la solución exacta, esto es factible gracias a la convergencia, pero no siempre se puede establecer, por lo cual se emplea un parámetro de estabilidad que es indirectamente considerada como la convergencia.

Para el modelo se emplea la estabilidad dada por la condición Courant-Friedrichs-Lewy; que tiene la expresión siguiente:

$$Co = \frac{U \Delta_t}{\Delta_x'} \quad (\text{Ecuación 15})$$

Donde,

Co: Número de Courant.

U: Velocidad de la celda [m/s].

$\Delta_t$ : Paso de tiempo [s].

$\Delta_x'$ : Longitud media de la celda [m].

La expresión debe cumplir que:  $Co < 1$  o  $\Delta_t < \frac{\Delta_x'}{U}$

Denominada también únicamente como número de Courant, que representa la distancia recorrida por la simulación en un intervalo de tiempo, y debe ser menor a la distancia de los elementos de la malla.

### 3. Metodología del modelamiento

#### 3.1. Descripción del caso de estudio

Para la estimación del perfil de flujo de un vertedero lateral en un canal de sección triangular se consideraron diferentes datos de partida.

La Figura 2-1 muestra la geometría de la sección transversal del canal, para el ángulo  $\theta$  se trabajará con un valor de  $45^\circ$ , debido a que la sección óptima del canal se obtiene con una pendiente de la pared de relación 1:1.

Para la pendiente del fondo del canal ( $S_0$ ) se eligió un valor de 1/100 [m/m], debido a que el perfil de flujo sobre el vertedero que se desea obtener es el Tipo d y este se obtiene en régimen supercrítico, por lo que se comprobó que  $S_0$  sea mayor a la pendiente crítica ( $S_c$ ) para cada caudal de entrada. El coeficiente de corrección de energía  $\alpha$  es igual a la unidad, debido a que la distribución de velocidades en el canal es constante y uniforme.

El coeficiente de rugosidad de Manning ( $\eta$ ), está en base al material de las paredes del canal, se escogió concreto al que corresponde un valor de 0.014.

La altura de la cresta del vertedero ( $w$ ) se tomó un valor aproximadamente de un cuarto de la altura del canal, siendo 0.30m. Para la longitud del vertedero se asumió un valor de 0.80m.

Para la altura del canal ( $H_c$ ) se escogió un valor de 1.00m. Los caudales de entrada fueron elegidos en un rango de 0.197 m<sup>3</sup>/s a 0.500 m<sup>3</sup>/s con un total de cinco pruebas.

En la Tabla 3-1 se muestra los datos de entrada que para las diferentes pruebas de análisis.

Tabla 3-1. Resumen de datos de entrada.

Parámetro		Valor
Ángulo de la sección transversal del canal [grados]	$\theta$	45
Altura del canal [m]	$H_c$	1.00
Pendiente de fondo de canal [m/m]	$S_o$	0.01
Coeficiente de rugosidad de Manning	$\eta$	0.014
Altura de la cresta del vertedero [m]	$w$	0.30
Longitud del vertedero [m]	L	0.80
Caudales de entrada [m <sup>3</sup> /s]	Q	0.197 – 0.250 – 0.320 – 0.400 – 0.500

### 3.2. Formulación para el Método Teórico

Para la obtención del modelo teórico del perfil del flujo sobre el vertedero se adapta la Ecuación 11 para la sección trasversal del canal de estudio (Figura 2-1). Para la sección transversal de estudio se tienen los siguientes elementos geométricos:

$$T = y \tan \theta \quad (\text{Ecuación 16})$$

$$A = \frac{y^2 \tan \theta}{2} \quad (\text{Ecuación 17})$$

Reemplazando las Ecuaciones 16 y 17 en la Ecuación 11, y las condiciones de entrada para  $\alpha = 1$  y  $\theta = 45^\circ$  se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\mu\sqrt{1}}{3} \cdot \frac{\sqrt{(E-y)}(y-w)^{3/2}}{\frac{y^2 \tan 45}{2} - 2(E-y) \cdot y \tan 45}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8\mu}{3} \cdot \frac{(E-y)^{1/2}(y-w)^{3/2}}{(y^2 - 4y(E-y))} \quad \text{(Ecuación 18)}$$

Para obtener el perfil de flujo sobre el vertedero, primero se calculan los parámetros que se mantienen invariables en el tramo del vertedero ( $L_v$ ), como la energía específica (según las hipótesis de flujo espacialmente variado) con la Ecuación 6, y el coeficiente de descarga (Ecuación 13) que según (Sotelo, 2002) se mantiene constante, debido a que depende de las condiciones del flujo en la sección del canal donde inicia el vertedero.

Después se procede a integrar la Ecuación 18 con el Método de Runge-Kutta de orden 4 con un paso de 0.02 m, es decir se va a iterar en intervalos  $\Delta x = 0.02m$  hasta llegar a la longitud  $L_v$ ), y el valor inicial de  $y$  es el calado al inicio del vertedero.

### 3.3. Configuración del Modelo Numérico

El canal principal tiene la siguiente disposición, la dirección del flujo está en el eje coordenado  $x$ , la altura del canal con la influencia de la gravedad en el eje  $y$ , y el ancho del canal se encuentra en el eje coordenado  $z$ .

Para realizar los archivos que requiere el programa, se utiliza el tutorial “waterChannel”, que viene desarrollado en el manual de OpenFOAM.

Las condiciones que se establecieron para todo el dominio son las siguientes:

1. A la entrada del canal, se establece un caudal de ingreso, con un valor constante (dependiendo del caso impuesto).
2. En las paredes del canal se le da la condición de que la velocidad es igual a cero.
3. Se asume una presión total uniforme de cero en la parte superior del canal, que representa un canal abierto, es decir se encuentra en contacto con la atmósfera.
4. Tanto en la salida principal del canal, como en la del vertedero se establece una presión igual a cero en el tiempo inicial, ( $t=0$ ).
5. La presión sobre las paredes, sufren modificaciones, a lo largo de la simulación, debido a la interacción que hay entre el agua y el aire.

Se definen en el programa también cada una de las caras del canal, con un nombre específico:

- Inlet: Entrada de agua.
- Walls: Paredes del canal.
- Outlet1: Salida del canal principal.
- Outlet2: Salida del vertedero.
- Atmosphere: Parte superior del canal.

OpenFOAM usa el método de los volúmenes finitos para esta simulación, para el gradiente se usa el esquema lineal de Gauss, divergencia y operadores Laplacianos, a su vez para el componente de gradiente normal sobre una cara de una celda se establece la opción de ortogonalidad.

### 3.3.1.1. Elaboración y validación de la Malla

La malla del canal triangular con vertedero lateral, que se implementa en el modelo, es elaborada en el software SALOME-MECA, cuyo procedimiento se detalla en el Anexo 1.

Según (Villamizar, 2014) es importante revisar que la malla no contenga ningún error, para ello se usa el comando checkMesh en OpenFOAM, que revisa ciertos parámetros que debe de cumplir la malla:

1. No ortogonalidad  $\theta_{no}$ , que puede establecer cuatro consideraciones:
  - $\theta_{no} < 50^\circ$ : La malla es aceptable, no necesita corrección.
  - $50^\circ < \theta_{no} < 70^\circ$ : Se debe realizar una corrección limitada.
  - $70^\circ < \theta_{no} < 80^\circ$ : La simulación puede ser afectada, pero aun así se realiza,
  - $\theta_{no} > 80^\circ$ : Es muy complicado que la simulación continúe.
2. Relación de aspecto: definido como la relación entre el tamaño de la celda máxima y la mínima, se considera una relación alta cuando este excede el valor de 1000.

### 3.3.1.2. Condiciones de frontera

En OpenFOAM es necesario ingresar algunos parámetros sumamente importantes, entre ellos se encuentran las condiciones de frontera o de contorno, las cuales pueden ser numéricas o físicas, las condiciones más comunes y que generalmente definen un caso o problema de estudio son:

- *Entrada*: Denominada inlet. Se establecen condiciones de inicio del fluido, como caudales, presiones, entre otros.
- *Salida*: Denominada outlet. Se debe de considerar, que algunas veces estas condiciones son las que controlan todo el flujo del fluido.
- *Pared*: Conocida como wall. Se considera como sólida, estableciendo el material del que este hecho, y la presión como cero.

#### 4. Resultados y Análisis

Los resultados de la simulación se obtienen mediante la herramienta llamada ParaView que permite realizar una interpretación gráfica de las variables calculadas, como son la velocidad (U), la presión ( $p_{rgh}$ ) y la fracción de volumen de agua ( $\alpha.water$ ), también se puede extraer los perfiles de la lámina de agua que se forma en el vertedero que será comparado posteriormente con los valores obtenidos mediante el Método Teórico.

##### 4.1.1. Análisis cualitativo

Para el análisis cualitativo se obtienen los perfiles de flujo longitudinales a  $T/3$ ;  $T/2$ ;  $2T/3$  partiendo desde la pared vertical del canal. El análisis se realiza para el menor caudal ( $Q=0.197m^3/s$ ) y el mayor caudal ( $Q=0.500m^3/s$ ), ya que el comportamiento de los perfiles de flujo de las pruebas intermedias es similar. En las figuras de resultados la línea negra es el perfil de flujo y las líneas de color mostaza corresponden a la delimitación de la sección del vertedero.

- Prueba 1: Caudal de entrada  $Q=0.197 m^3/s$

En la Figura 4-1 se muestra la fracción de volumen ( $\alpha.water$ ) a diferentes distancias partiendo de la pared vertical, donde el color azul oscuro representa el aire presente a lo largo del canal. La figura a) es el perfil más próximo a la pared a 0.16m, este presenta mayor influencia y un perfil más pronunciado ocasionado por la pérdida de fluido a través del vertedero; con respecto a la figura b) a 0.25m y c) a 0.33m de la pared se observa que mientras se aleja del vertedero el perfil disminuye ya que la influencia es menor.

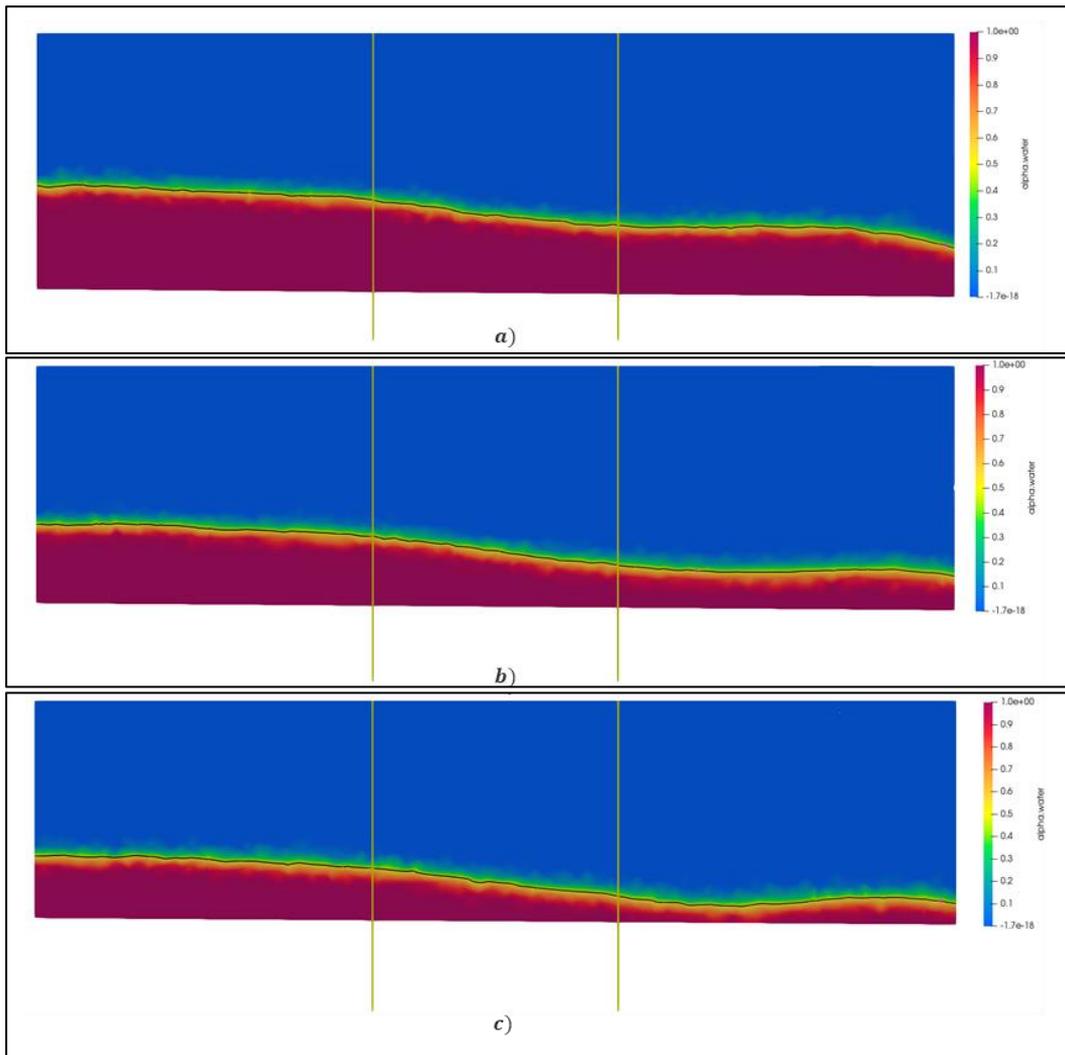


Figura 4-1. Prueba 1: Fracción de volumen (alpha.water), para las distancias a) T/3, b) T/2 y c) 2T/3

En la Figura 4-2 corresponde a la variable de la presión, se observa que los valores más altos de presión están en el fondo del canal y al comienzo justo después del ingreso del agua, luego al pasar el vertedero la presión disminuye, debido a que se divide el flujo una parte va por el vertedero y el resto continua haciendo que la presión en el fondo disminuya, pero la presión más baja se encuentra cerca de la superficie del agua y esta se mantiene igual a lo largo de toda la longitud del canal.

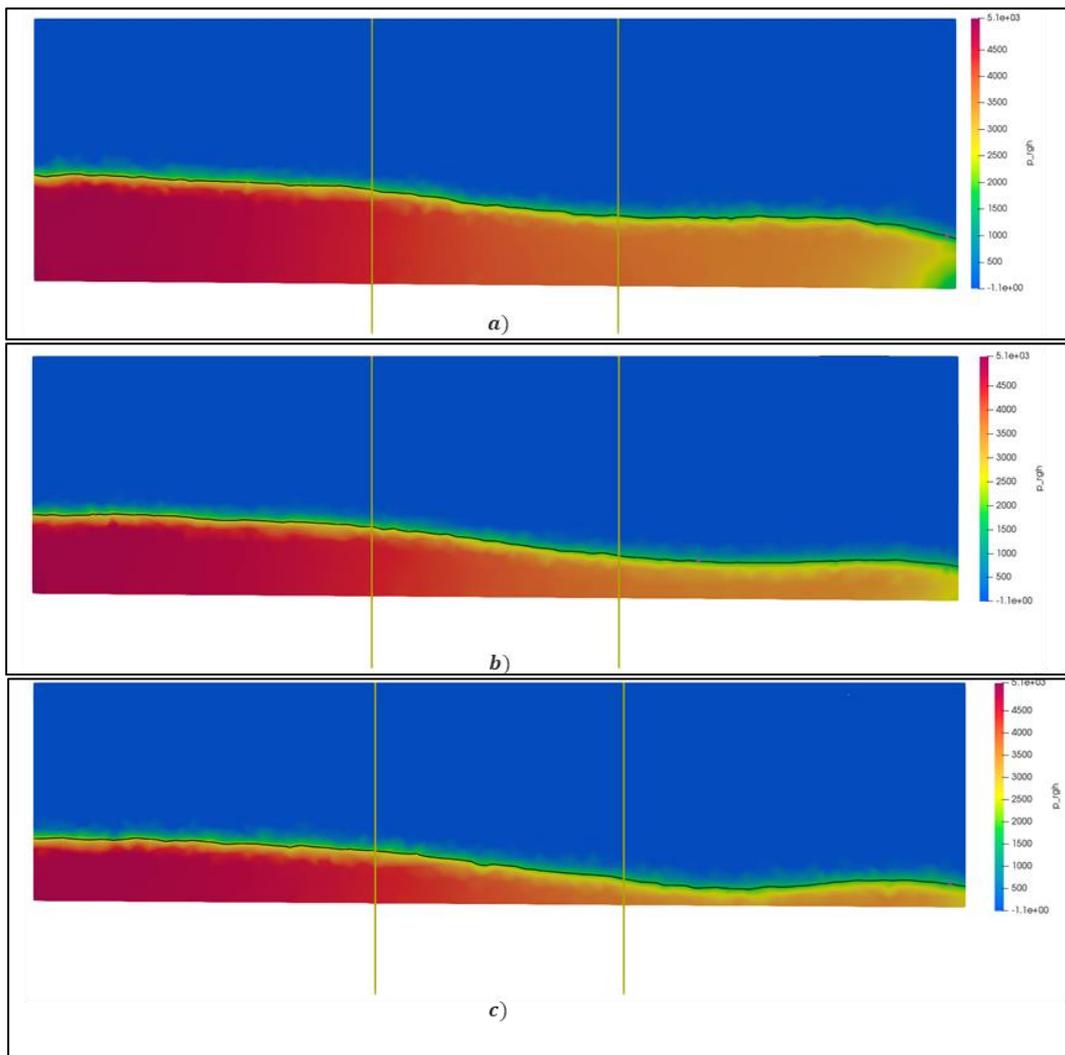
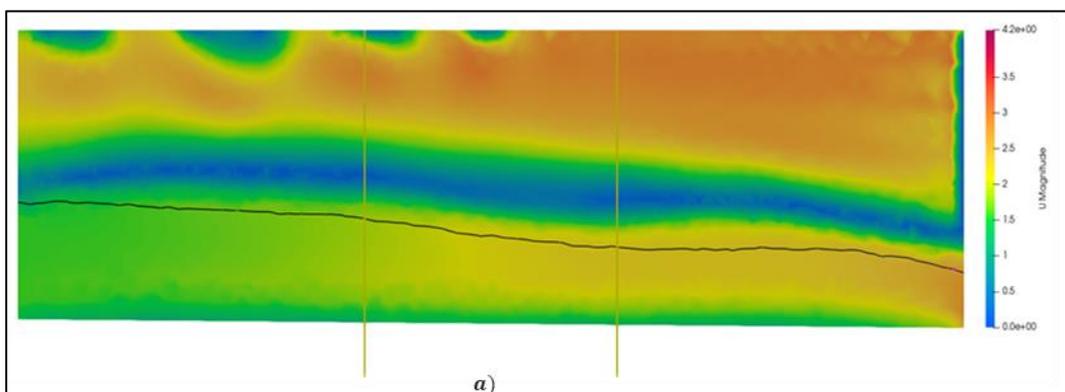


Figura 4-2. Figura 2: Prueba 1: Presión ( $p_{rgh}$ ), para las distancias a) T/3, b) T/2 y c) 2T/3.

Para la magnitud total de la velocidad se observa en la Figura 4-3 que la velocidad aumenta después del vertedero, en cada uno de los cortes longitudinales presenta el mismo comportamiento.



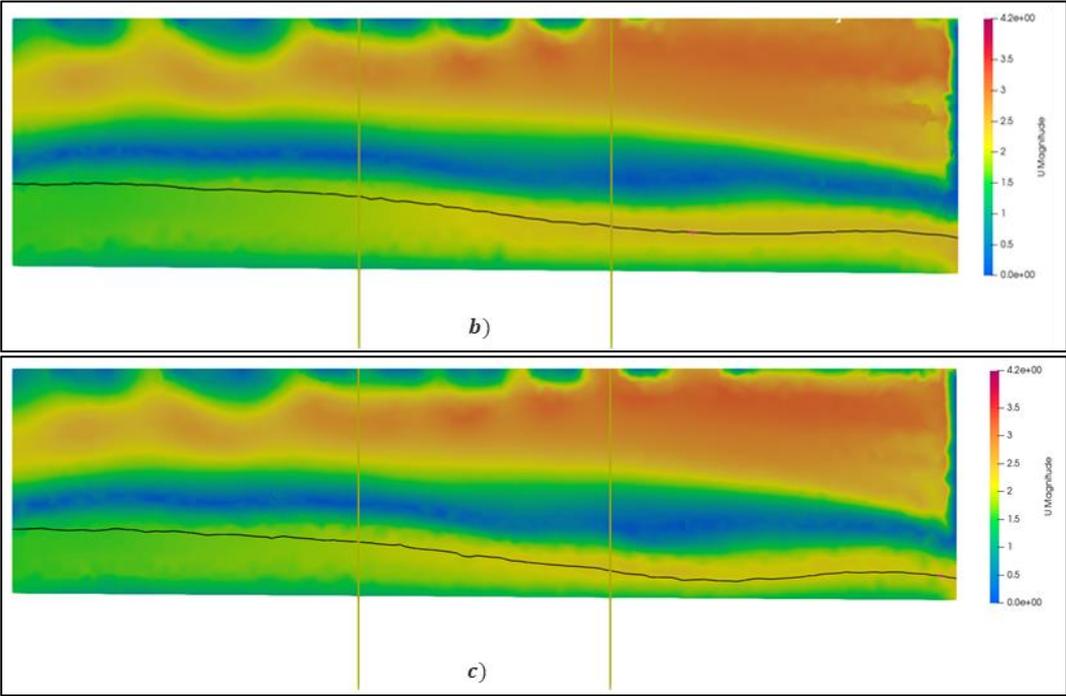
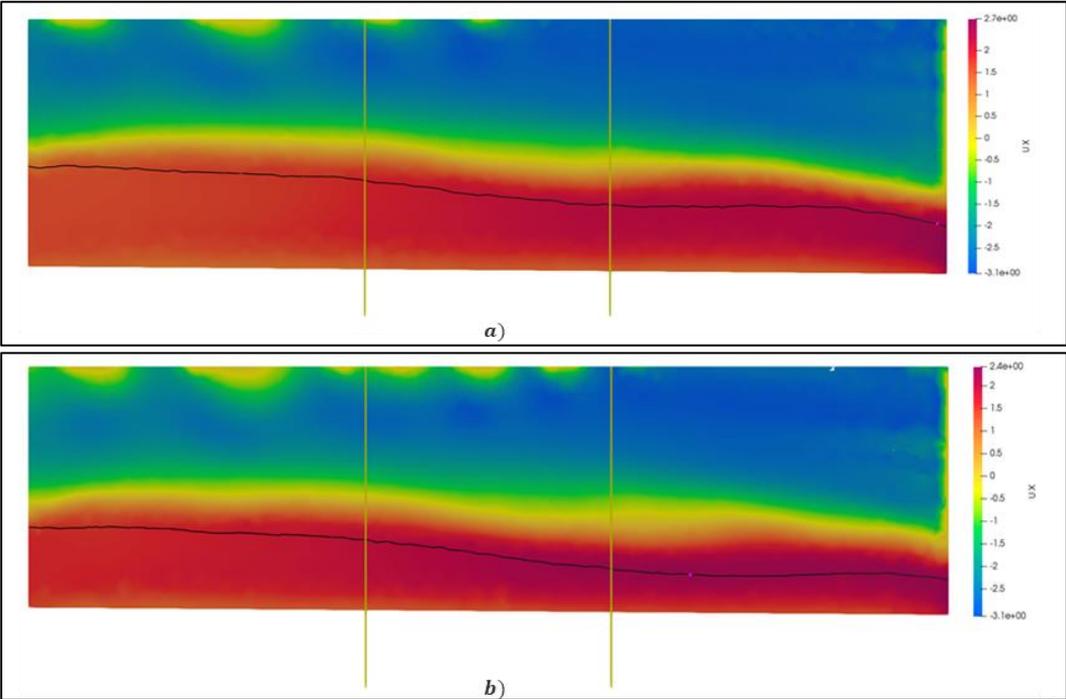


Figura 4-3. Prueba 1: Magnitud de la velocidad (U), para las distancias a) T/3, b) T/2 y c) 2T/3.

La velocidad en la dirección del flujo que corresponde al eje x (dirección longitudinal), es la componente predominante, incluso en la porción de longitud donde se ubica el vertedero condición que se corrobora al comparar las figuras 4-3 y 4-4, condición que soporta la hipótesis de flujo unidimensional.



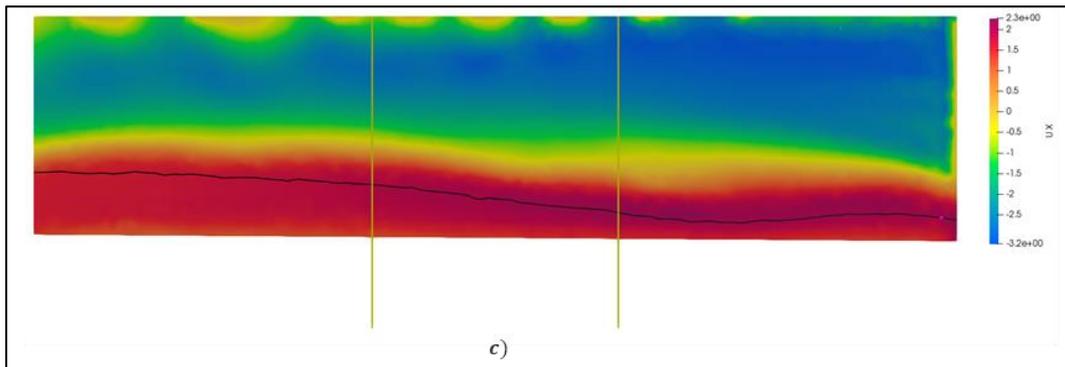
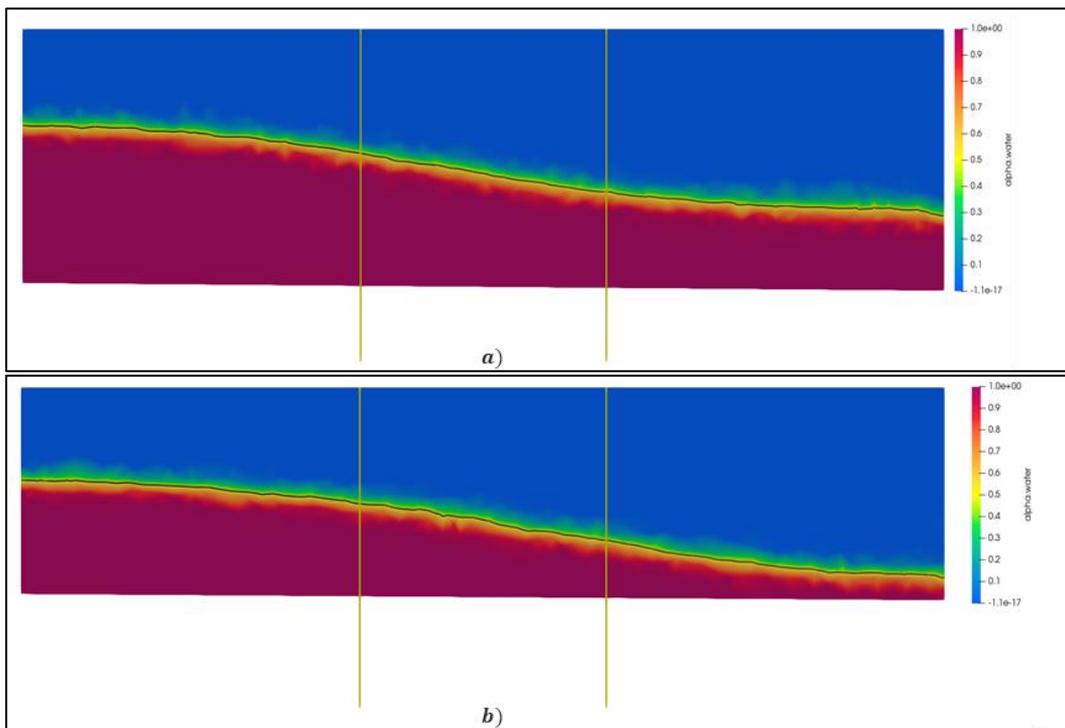


Figura 4-4. Prueba 1: Velocidad en dirección del flujo ( $U_x$ ), para las distancias a)  $T/3$ , b)  $T/2$  y c)  $2T/3$ .

- Prueba 5: Caudal de entrada  $Q=0.500 \text{ m}^3/\text{s}$

En la Figura 4-5 se muestra la fracción de volumen ( $\alpha_{\text{water}}$ ) a diferentes distancias partiendo de la pared vertical, el color azul oscuro representa el aire presente a lo largo del canal. La figura a) es el perfil más próximo a la pared a  $0.24\text{m}$ , se comporta de manera similar a las otras pruebas, en donde se presenta mayor influencia y un perfil más pronunciado ocasionado por la pérdida de fluido a través del vertedero; con respecto a la figura b) a  $0.36\text{m}$  y c) a  $0.47\text{m}$  de la pared, como se esperaba mientras se aleja del vertedero el perfil disminuye ya que la influencia es menor.



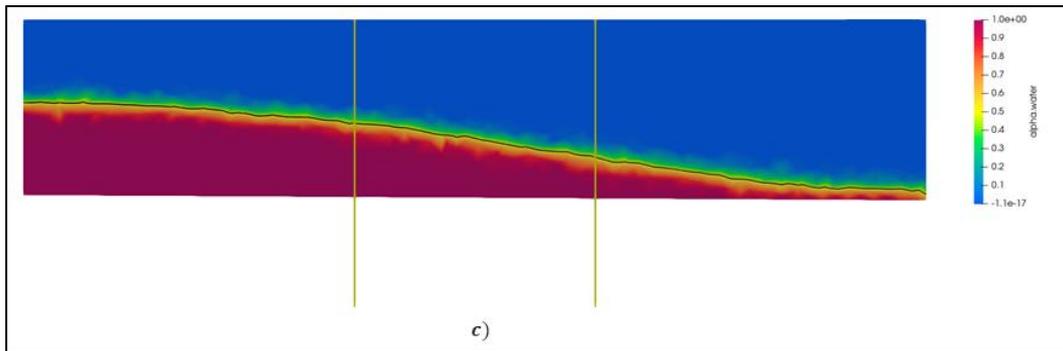


Figura 4-5. Prueba 5: Fracción de volumen (alpha.water), para las distancias a) T/3, b) T/2 y c) 2T/3.

En la Figura 4-6 corresponde a la variable de la presión, se observa que el comportamiento es el mismo con los valores máximos de presión al fondo del canal y los mínimos cercanos a la superficie de agua, se comporta de igual manera en los tres cortes longitudinales.

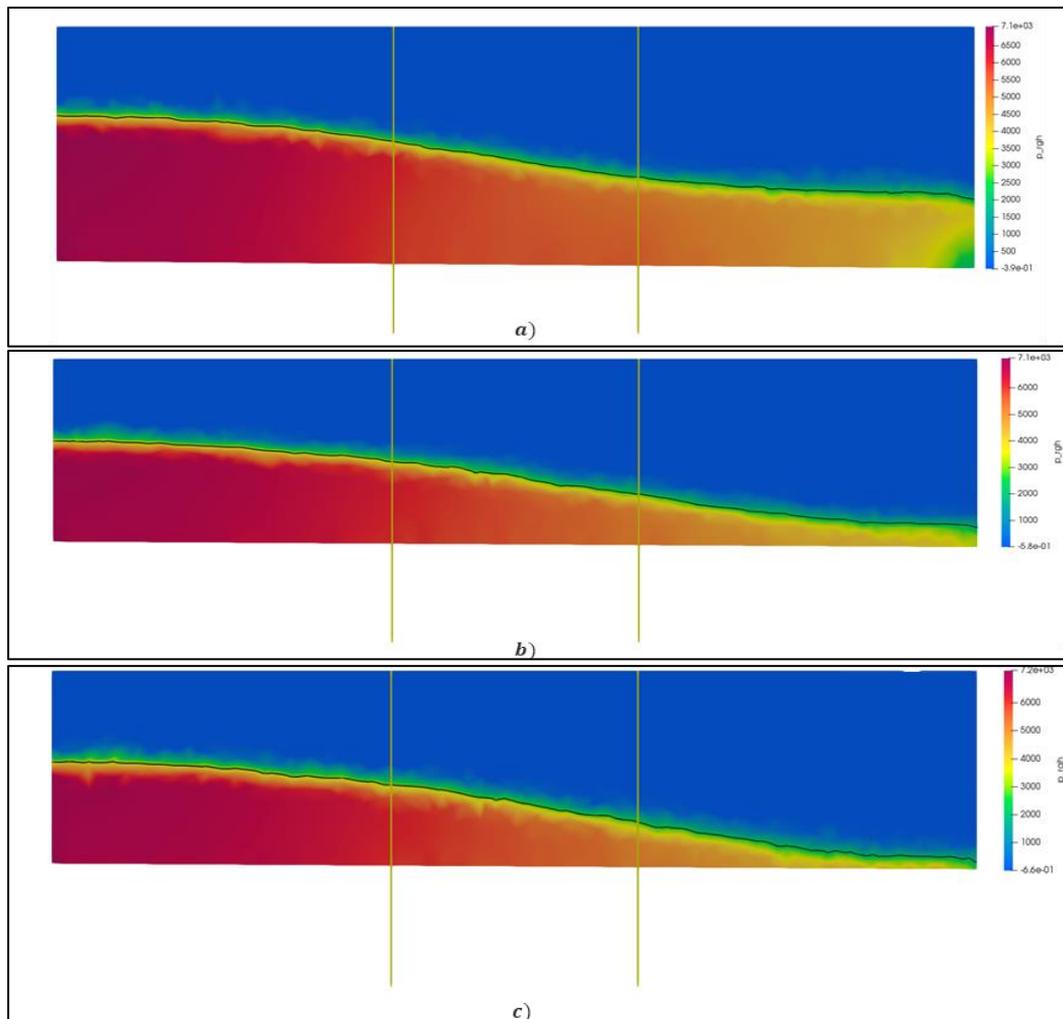


Figura 4-6. Prueba 5: Presión (p\_rgh), para las distancias a) T/3, b) T/2 y c) 2T/3

En la Figura 4-7 la velocidad aumenta después del vertedero al igual que en las otras pruebas, lo único que varía es su magnitud, ya que esta depende del caudal que se utiliza para cada simulación, al igual que en la Figura 4-8 la velocidad en la dirección del flujo aumenta después de cruzar el vertedero.

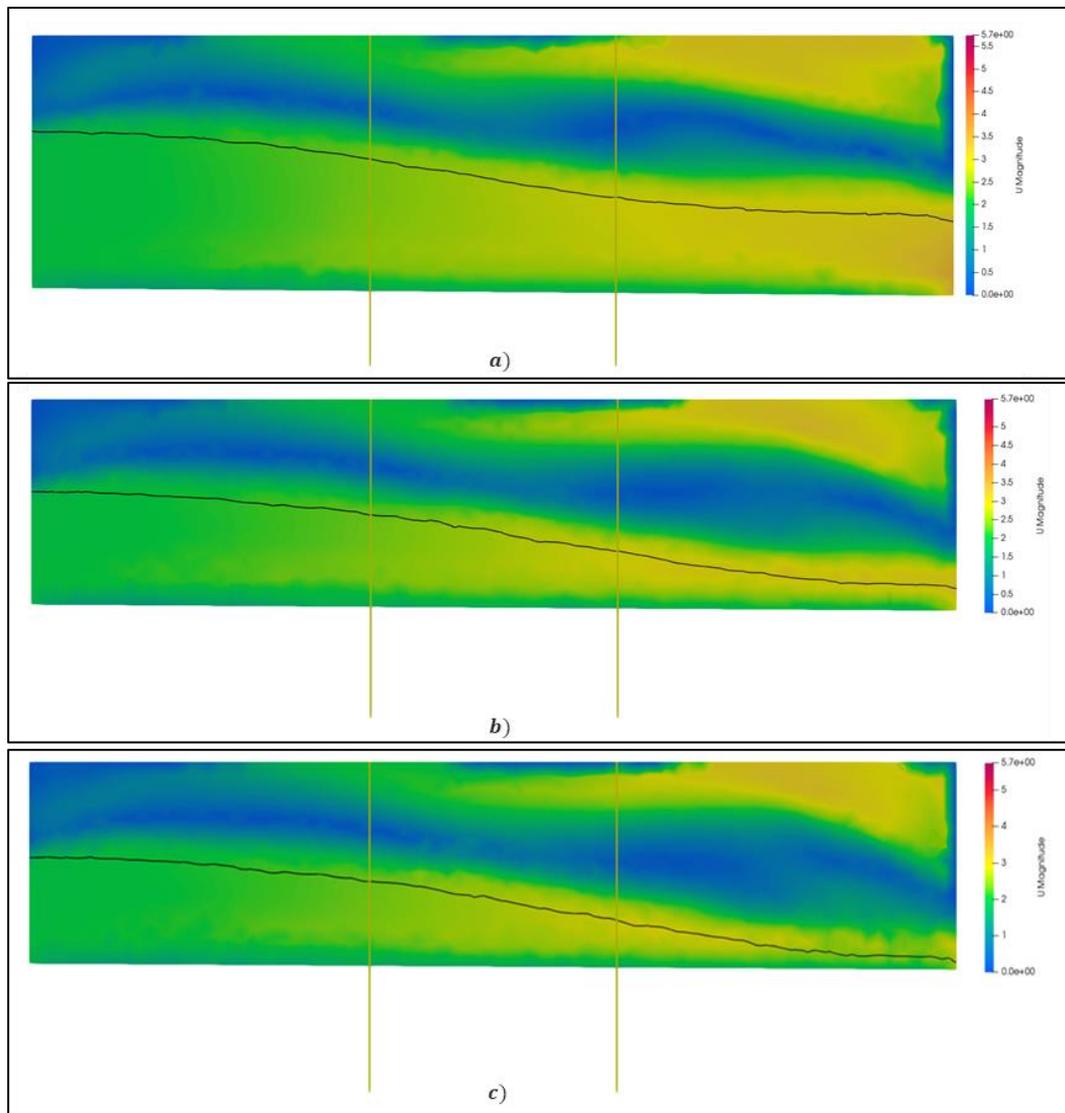


Figura 4-7. Prueba 5: Magnitud de la velocidad (U), para las distancias a) T/3, b) T/2 y c) 2T/3.

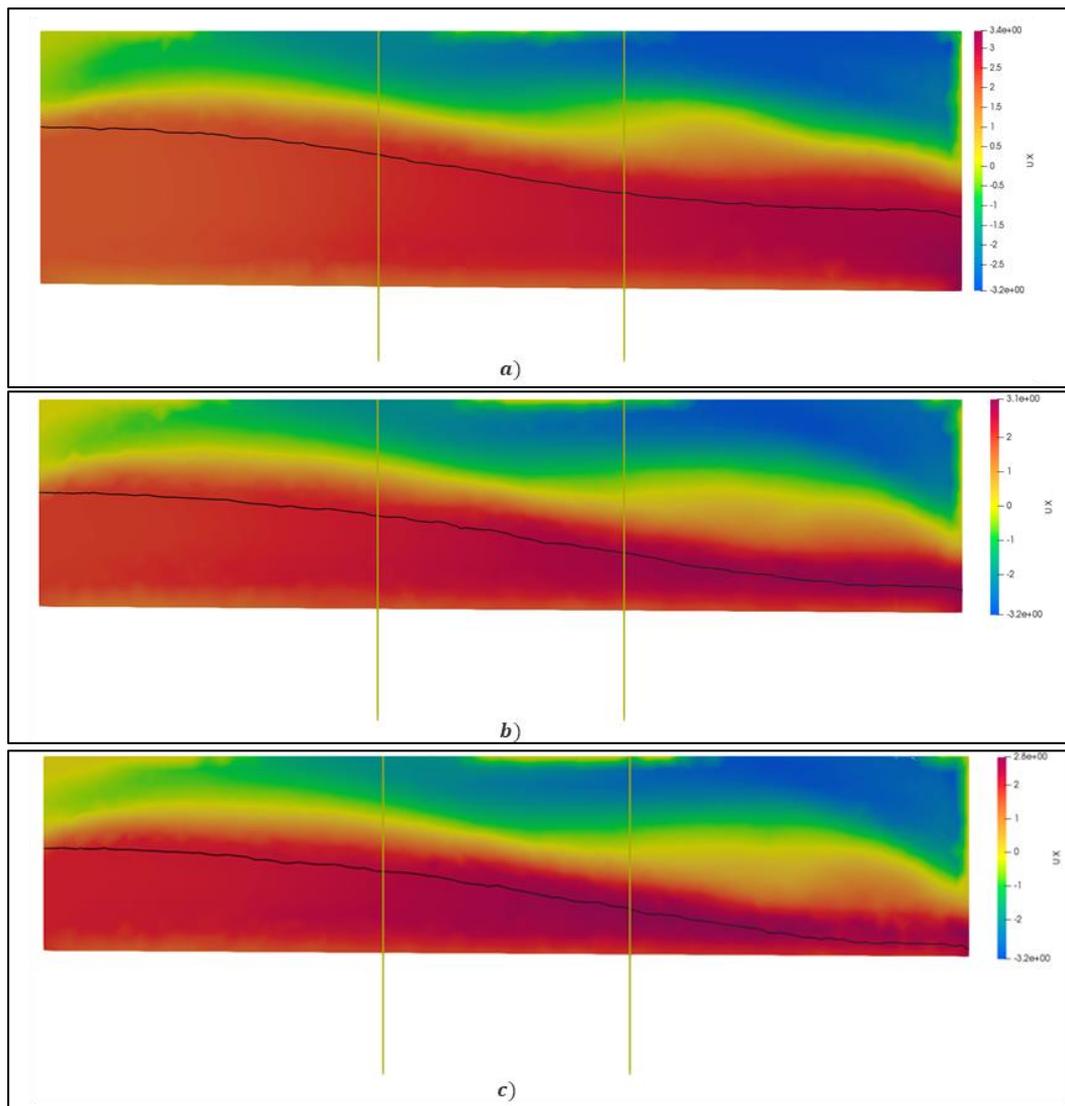


Figura 4-8. Prueba 5: Velocidad en dirección del flujo ( $U_x$ ), para las distancias a)  $T/3$ , b)  $T/2$  y c)  $2T/3$ .

#### 4.1.2. Perfil de flujo sobre el vertedero: Análisis comparativo (Análisis cuantitativo)

Para el análisis cuantitativo para el caudal de cada prueba se muestra una gráfica comparativa entre el Método Teórico (ecuación dinámica) y el Método Numérico (simulación en OpenFOAM) Además, se extrajeron los calados cada 0.10 m para ambos métodos a lo largo del vertedero, y así obtener el porcentaje de diferencia relativa considerando el Método Numérico como el parámetro de comparación.

- Prueba 1: Caudal de entrada  $Q=0.197 \text{ m}^3/\text{s}$

En la Figura 4-9 se muestra el perfil de flujo sobre el vertedero, es decir el corte es en la pared vertical del canal. Este perfil es el que se utiliza para extraer los datos para graficar el perfil mostrado en la Figura 4-10 para la comparación con el Método Teórico.

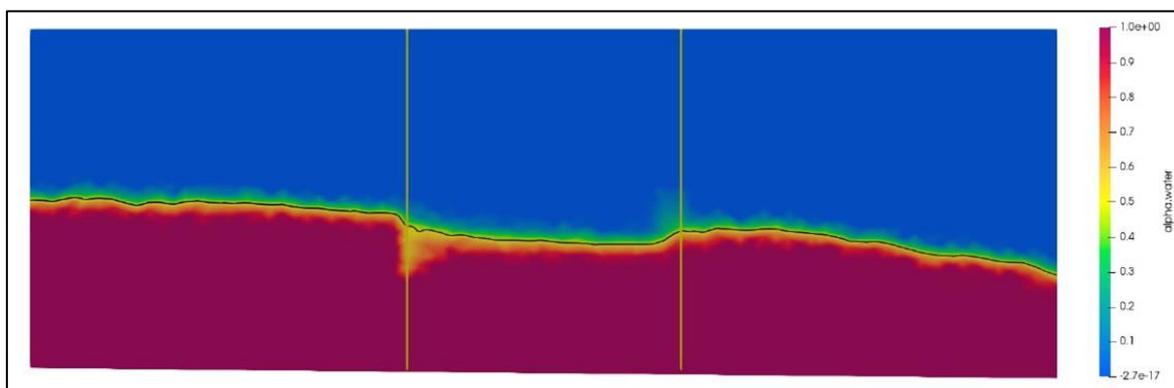


Figura 4-9. Perfil de flujo en la pared vertical con un caudal de  $0.197 \text{ m}^3/\text{s}$ .

En la Figura 4-10 se puede observar que el perfil de flujo obtenido mediante la simulación numérica (Método Numérico) para un caudal de  $0.197 \text{ m}^3/\text{s}$  disminuye gradualmente, sin embargo, aproximadamente  $0.06 \text{ m}$  antes de terminar la sección del vertedero comienza a producirse un resalto hidráulico aumentando el calado, lo que produce una diferencia relativa de  $8.55\%$  en el último punto con respecto a los valores del perfil teórico calculado (con la Ecuación 18). Se observa una diferencia marcada en términos de la regularidad del perfil, el perfil teórico es bastante regular, mientras que el perfil simulado numéricamente presenta un perfil más irregular, esta situación puede obedecer al hecho de que en las simulaciones numéricas se consideran efectos de turbulencia, que son los que precisamente producen estas irregularidades mientras que el modelo teórico (Ecuación 18) no incluye estos efectos. Con respecto a las diferencias relativas (Tabla 4-1) obtenidos sin considerar el último punto del vertedero, en términos generales, se observa que todos son menores al  $5\%$ , valor que para estudios experimentales representa una diferencia admisible o esperable, por lo que podemos decir que el Método Teórico se puede utilizar como una buena aproximación del comportamiento real del flujo obtenido con el Método Numérico Sin embargo, si se considera el último punto, se establece que para las condiciones simuladas existiría la ocurrencia de resalto hidráulico dentro del vertedero, lo que representaría una diferencia importante con respecto del perfil teórico que debería analizarse con mayor detalle.

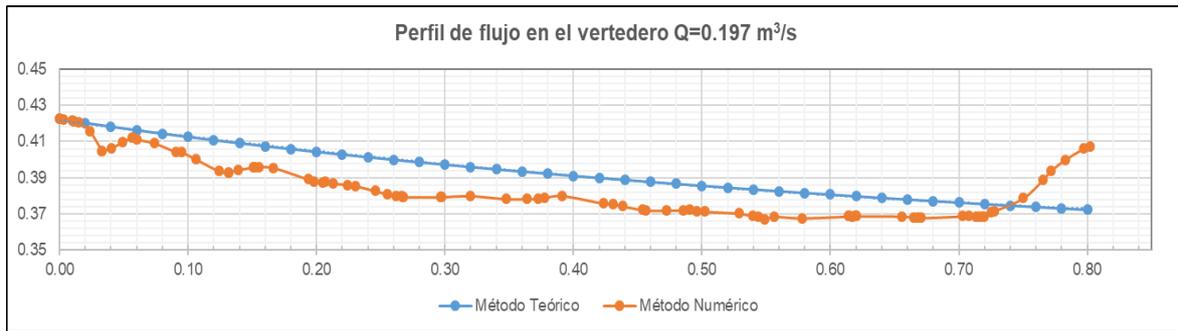


Figura 4-10. Comparación entre Método Teórico y Método Numérico del perfil de flujo sobre el vertedero para  $Q=0.197 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Tabla 4-1. Diferencia relativa entre Método Teórico y Método Numérico, para  $Q=0.197 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Método Teórico		Método Numérico	Diferencia Relativa
x [m]	y [m]	y [m]	[%]
0.000	0.423	0.423	0.000
0.100	0.413	0.400	3.113
0.200	0.404	0.388	4.348
0.300	0.397	0.379	4.726
0.400	0.391	0.380	2.894
0.500	0.386	0.371	3.860
0.600	0.381	0.369	3.252
0.700	0.376	0.369	2.048
0.800	0.372	0.407	8.553

- Prueba 2: Caudal de entrada  $Q=0.250 \text{ m}^3/\text{s}$

En la Figura 4-11 así mismo se muestra el perfil de flujo sobre el vertedero, que se utiliza para extraer los datos para graficar el perfil del Método Numérico de la Figura 4-12.

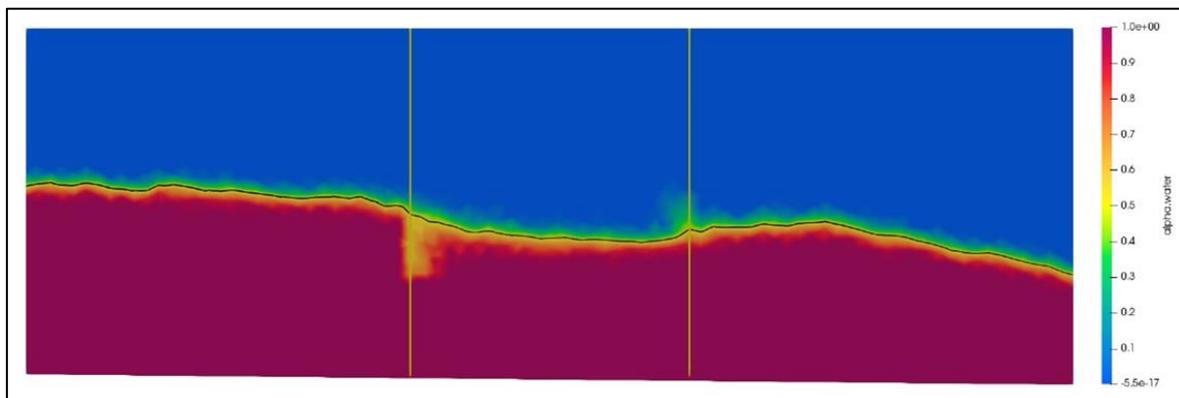


Figura 4-11. Perfil de flujo en la pared vertical con un caudal de  $0.250 \text{ m}^3/\text{s}$

En la Figura 4-12 se puede observar que el perfil de flujo obtenido mediante la simulación numérica (Método Numérico) para un caudal de  $0.250 \text{ m}^3/\text{s}$  disminuye gradualmente, sin embargo, aproximadamente  $0.10 \text{ m}$  antes de terminar la sección del vertedero comienza a producirse un resalto hidráulico aumentando el calado, lo que produce una diferencia relativa de  $10.29\%$  en el último punto con respecto a los valores del perfil teórico calculado (con la Ecuación 18). Se observa una diferencia marcada en términos de la regularidad del perfil, el perfil teórico es bastante regular, mientras que el perfil simulado numéricamente presenta un perfil más irregular, esta situación puede obedecer al hecho de que en las simulaciones numéricas se consideran efectos de turbulencia, que son los que precisamente producen estas irregularidades mientras que el modelo teórico (Ecuación 18) no incluye estos efectos. Con respecto a las diferencias relativas (Tabla 4-2) obtenidos sin considerar el último punto del vertedero, en términos generales, se observa que todos son menores al  $3.5\%$ , valor que para estudios experimentales representa una diferencia admisible o esperable, por lo que podemos decir que el Método Teórico se puede utilizar como una buena aproximación del comportamiento real del flujo obtenido con el Método Numérico. Sin embargo, si se considera el último punto, se establece que para las condiciones simuladas existiría la ocurrencia de resalto hidráulico dentro del vertedero, lo que representaría una diferencia importante con respecto del perfil teórico que debería analizarse con mayor detalle.

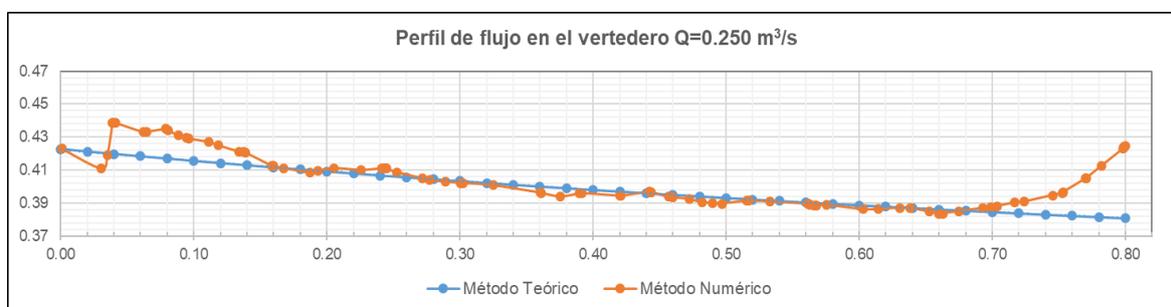


Figura 4-12. Perfil de flujo en la pared vertical con un caudal de  $0.250 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Tabla 4-2. Diferencia relativa entre Método Teórico y Método Numérico, para  $Q=0.250 \text{ m}^3/\text{s}$ .

	<b>Método Teórico</b>	<b>Método Numérico</b>	<b>Diferencia</b>
<b>x [m]</b>	<b>y [m]</b>	<b>y [m]</b>	<b>[%]</b>
0.000	0.423	0.423	0.000
0.100	0.416	0.429	3.169
0.200	0.409	0.411	0.504
0.300	0.403	0.402	0.293
0.400	0.398	0.396	0.504
0.500	0.393	0.390	0.879

0.600	0.389	0.386	0.620
0.700	0.384	0.388	0.922
0.800	0.381	0.425	10.389

- Prueba 3: Caudal de entrada  $Q=0.320 \text{ m}^3/\text{s}$

En la Figura 4-13 así mismo se muestra el perfil de flujo sobre el vertedero, que se utiliza para extraer los datos para graficar el perfil del Método Numérico de la Figura 4-14.

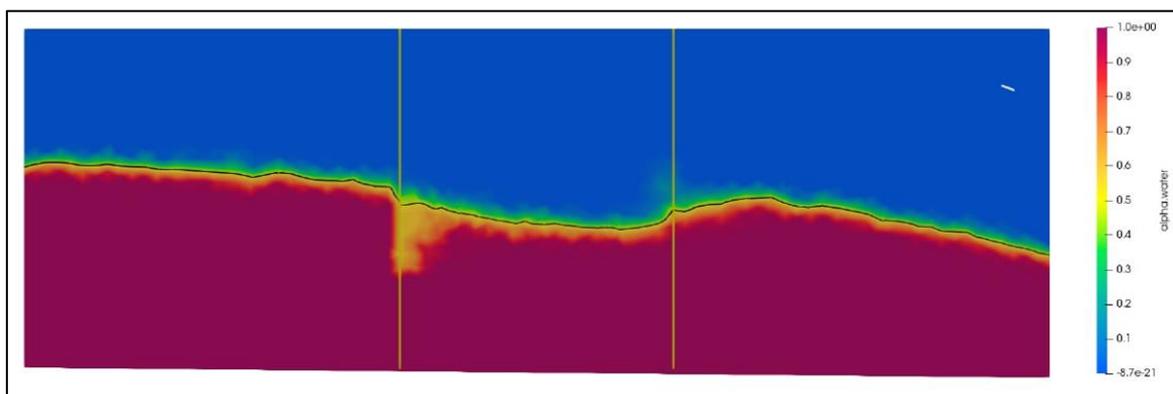


Figura 4-13. Perfil de flujo en la pared vertical con un caudal de  $0.320 \text{ m}^3/\text{s}$

En la Figura 4-13 se puede observar que el perfil de flujo obtenido mediante la simulación numérica (Método Numérico) para un caudal de  $0.320 \text{ m}^3/\text{s}$  disminuye gradualmente, sin embargo, aproximadamente  $0.10 \text{ m}$  antes de terminar la sección del vertedero comienza a producirse un resalto hidráulico aumentando el calado, lo que produce una diferencia relativa de  $13.33\%$  en el último punto con respecto a los valores del perfil teórico calculado (con la Ecuación 18). Se observa una diferencia marcada en términos de la regularidad del perfil, el perfil teórico es bastante regular, mientras que el perfil simulado numéricamente presenta un perfil más irregular, esta situación puede obedecer al hecho de que en las simulaciones numéricas se consideran efectos de turbulencia, que son los que precisamente producen estas irregularidades mientras que el modelo teórico (Ecuación 18) no incluye estos efectos. Con respecto a las diferencias relativas (Tabla 4-3) obtenidos sin considerar el último punto del vertedero, en términos generales, se observa que todos son menores al  $3\%$ , valor que para estudios experimentales representa una diferencia admisible o esperable, por lo que podemos decir que el Método Teórico se puede utilizar como una buena aproximación del comportamiento real del flujo obtenido con el Método Numérico. Sin embargo, si se considera el último punto, se establece que para las condiciones simuladas existiría la ocurrencia de resalto hidráulico dentro del vertedero, lo que representaría una diferencia importante con respecto del perfil teórico que debería analizarse con mayor detalle.

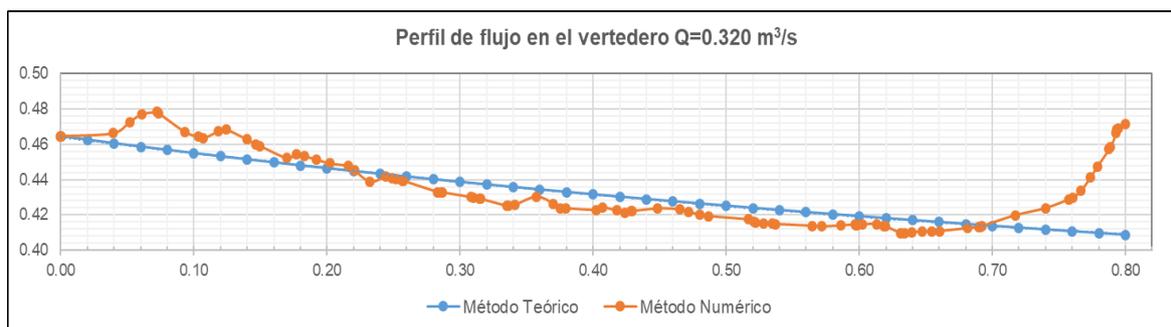


Figura 4-14. Perfil de flujo en la pared vertical con un caudal de 0.320 m<sup>3</sup>/s.

Tabla 4-3. Diferencia relativa entre Método Teórico y Método Numérico, para Q=0.320 m<sup>3</sup>/s.

Método Teórico		Método Numérico	Diferencia
x [m]	y [m]	y [m]	[%]
0.000	0.465	0.465	0.000
0.100	0.455	0.464	2.007
0.200	0.446	0.449	0.617
0.300	0.439	0.430	1.985
0.400	0.432	0.423	2.091
0.500	0.425	0.417	1.854
0.600	0.419	0.415	1.121
0.700	0.414	0.414	0.030
0.800	0.409	0.472	13.327

- Prueba 4: Caudal de entrada Q=0.400 m<sup>3</sup>/s

En la Figura 4-15 así mismo se muestra el perfil de flujo sobre el vertedero, que se utiliza para extraer los datos para graficar el perfil del Método Numérico de la Figura 4-16.

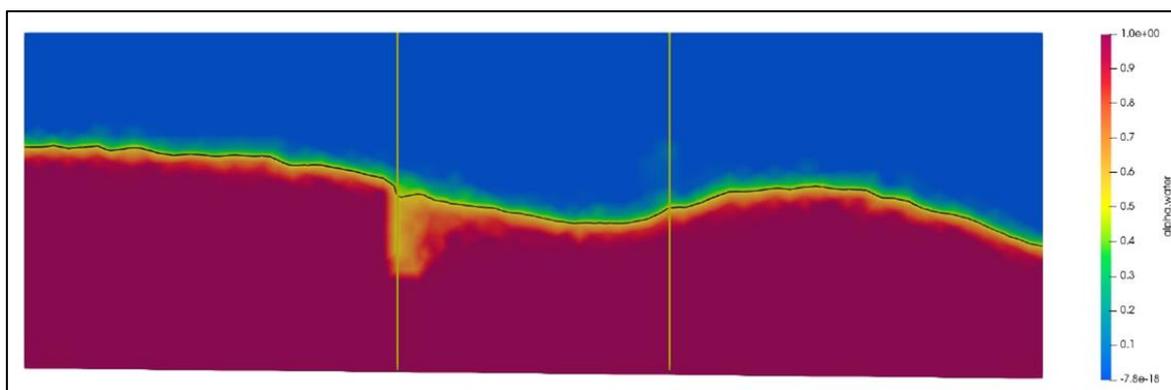


Figura 4-15. Perfil de flujo en la pared vertical con un caudal de 0.400 m<sup>3</sup>/s.

En la Figura 4-15 se puede observar que el perfil de flujo obtenido mediante la simulación numérica (Método Numérico) para un caudal de 0.400 m<sup>3</sup>/s disminuye gradualmente, sin

embargo, aproximadamente 0.08 m antes de terminar la sección del vertedero comienza a producirse un resalto hidráulico aumentando el calado, lo que produce una diferencia relativa de 10.29% en el último punto con respecto a los valores del perfil teórico calculado (con la Ecuación 18). Se observa una diferencia marcada en términos de la regularidad del perfil, el perfil teórico es bastante regular, mientras que el perfil simulado numéricamente presenta un perfil más irregular, esta situación puede obedecer al hecho de que en las simulaciones numéricas se consideran efectos de turbulencia, que son los que precisamente producen estas irregularidades mientras que el modelo teórico (Ecuación 18) no incluye estos efectos. Con respecto a las diferencias relativas (Tabla 4-4) obtenidos sin considerar el último punto del vertedero, en términos generales, se observa que todos son menores al 5%, valor que para estudios experimentales representa una diferencia admisible o esperable, por lo que podemos decir que el Método Teórico se puede utilizar como una buena aproximación del comportamiento real del flujo obtenido con el Método Numérico. Sin embargo, si se considera el último punto, se establece que para las condiciones simuladas existiría la ocurrencia de resalto hidráulico dentro del vertedero, lo que representaría una diferencia importante con respecto del perfil teórico que debería analizarse con mayor detalle.

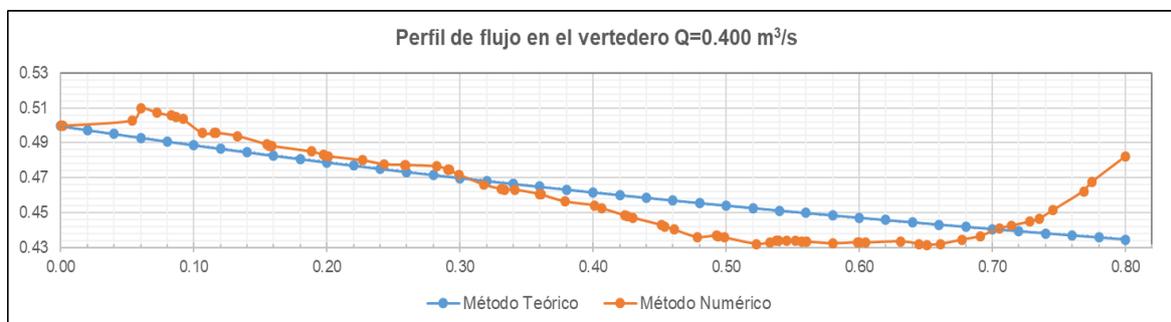


Figura 4-16. Perfil de flujo en la pared vertical con un caudal de 0.400 m<sup>3</sup>/s.

Tabla 4-4. Diferencia relativa entre Método Teórico y Método Numérico, para Q=0.400 m<sup>3</sup>/s.

Método Teórico		Método Numérico	Diferencia
x [m]	y [m]	y [m]	[%]
0.000	0.500	0.500	0.000
0.100	0.489	0.496	1.395
0.200	0.479	0.482	0.723
0.300	0.470	0.472	0.397
0.400	0.462	0.454	1.641

0.500	0.454	0.436	4.214
0.600	0.447	0.433	3.251
0.700	0.441	0.441	0.048
0.800	0.435	0.482	9.859

- Prueba 5: Caudal de entrada  $Q=0.500 \text{ m}^3/\text{s}$

En la Figura 4-17 así mismo se muestra el perfil de flujo sobre el vertedero, que se utiliza para extraer los datos para graficar el perfil del Método Numérico de la Figura 4-18.

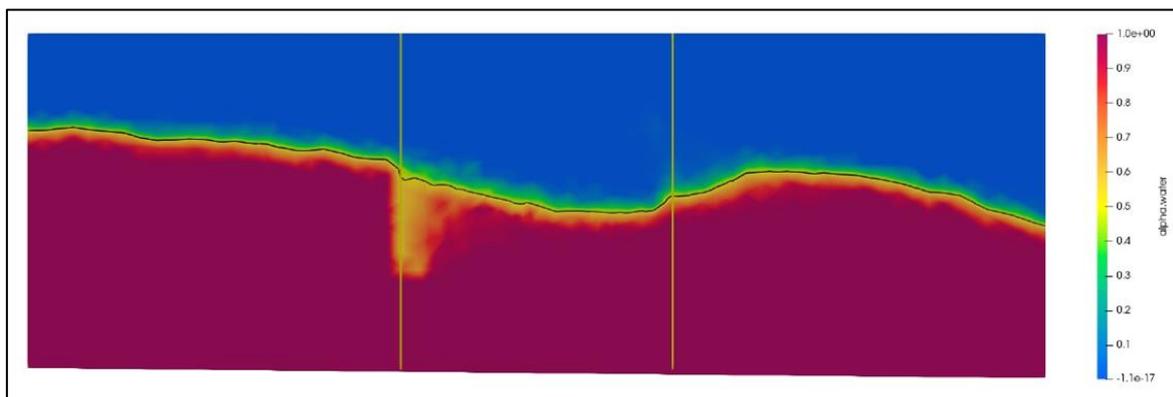


Figura 4-17. Perfil de flujo en la pared vertical con un caudal de  $0.500 \text{ m}^3/\text{s}$

En la Figura 4-17 se puede observar que el perfil de flujo obtenido mediante la simulación numérica (Método Numérico) para un caudal de  $0.500 \text{ m}^3/\text{s}$  disminuye gradualmente, sin embargo, aproximadamente  $0.06 \text{ m}$  antes de terminar la sección del vertedero comienza a producirse un resalto hidráulico aumentando el calado, lo que produce una diferencia relativa de  $9.78\%$  en el último punto con respecto a los valores del perfil teórico calculado (con la Ecuación 18). Se observa una diferencia marcada en términos de la regularidad del perfil, el perfil teórico es bastante regular, mientras que el perfil simulado numéricamente presenta un perfil más irregular, esta situación puede obedecer al hecho de que en las simulaciones numéricas se consideran efectos de turbulencia, que son los que precisamente producen estas irregularidades mientras que el modelo teórico (Ecuación 18) no incluye estos efectos. Con respecto a las diferencias relativas (Tabla 4-5) obtenidos sin considerar el último punto del vertedero, en términos generales, se observa que todos son menores al  $5.5\%$ , valor que para estudios experimentales representa una diferencia admisible o esperable, por lo que podemos decir que el Método Teórico se puede utilizar como una buena aproximación del comportamiento real del flujo obtenido con el Método Numérico. Sin embargo, si se considera el último punto, se establece que para las condiciones simuladas existiría la ocurrencia de

resalto hidráulico dentro del vertedero, lo que representaría una diferencia importante con respecto del perfil teórico que debería analizarse con mayor detalle.

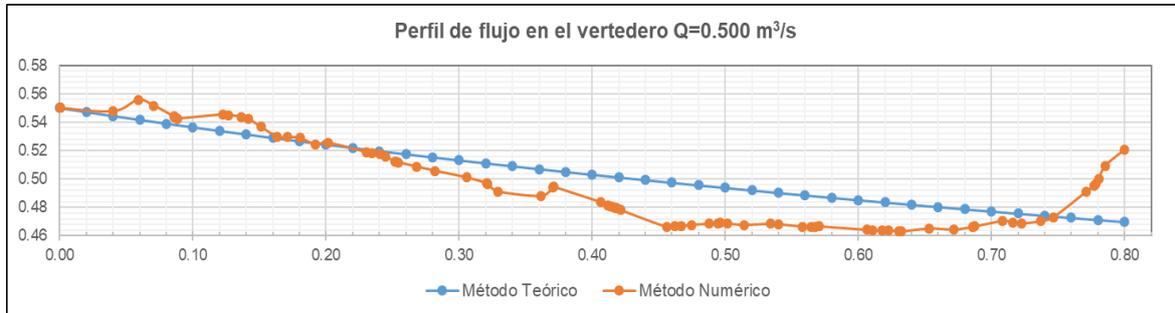


Figura 4-18. Perfil de flujo en la pared vertical con un caudal de 0.500 m³/s.

Tabla 4-5. Diferencia relativa entre Método Teórico y Método Numérico, para Q=0.500 m³/s.

	<b>Método Teórico</b>	<b>Método Numérico</b>	<b>Diferencia</b>
<b>x [m]</b>	<b>y [m]</b>	<b>y [m]</b>	<b>[%]</b>
0.000	0.550	0.550	0.000
0.100	0.536	0.545	1.645
0.200	0.524	0.525	0.231
0.300	0.513	0.501	2.414
0.400	0.503	0.484	4.005
0.500	0.494	0.469	5.358
0.600	0.485	0.464	4.516
0.700	0.477	0.470	1.442
0.800	0.470	0.521	9.775

- Análisis del número de Froude en tramo del resalto hidráulico

En las pruebas al final de la sección del vertedero se presenta un resalto hidráulico, por lo que, se obtienen los valores del número de Froude para poder visualizar si produce un resalto hidráulico o solo está en desarrollo.

Tabla 4-6. Número de Froude en tramo del resalto hidráulico.

<b>Caudal (m³/s)</b>	<b>0.197</b>				<b>0.250</b>			<b>0.320</b>			<b>0.400</b>			<b>0.500</b>		
<b>x (m)</b>	<b>y (m)</b>	<b>v (m/s)</b>	<b>Fr</b>													
<b>1.80</b>	0.37	2.11	1.57	0.39	2.06	1.49	0.41	2.23	1.57	0.44	2.37	1.61	0.47	2.53	1.66	
<b>1.82</b>	0.37	1.98	1.47	0.39	1.83	1.32	0.42	1.87	1.29	0.45	2.21	1.49	0.47	2.42	1.59	
<b>1.84</b>	0.38	1.21	0.89	0.40	1.54	1.11	0.43	1.84	1.27	0.45	1.99	1.34	0.47	2.21	1.45	

<b>1.86</b>	0.38	1.13	0.82	0.41	1.17	0.83	0.43	1.84	1.27	0.46	1.65	1.09	0.49	1.82	1.17
<b>1.88</b>	0.39	0.97	0.69	0.41	1.02	0.72	0.46	1.41	0.94	0.47	1.55	1.03	0.50	1.69	1.08
<b>1.90</b>	0.41	1.03	0.73	0.42	1.06	0.75	0.47	1.19	0.78	0.48	1.34	0.87	0.52	1.56	0.98

En la Tabla 4-6 se presentan los resultados del número de Froude en el tramo final del vertedero, se extrajeron los datos cada 0.02 m empezando en la abscisa 1.80 m del canal, hasta el final del vertedero (abscisa 1.90 m), se observa para cada simulación que se presenta el cambio de régimen de supercrítico a subcrítico, siendo notorio que mientras más aumenta el caudal, el resalto hidráulico empieza más tarde, ya que el cambio de régimen se alcanza prácticamente al final del vertedero, mientras que las simulaciones con los caudales más bajos el cambio empieza más atrás, siendo que para el menor caudal el cambio ya se nota desde la abscisa 1.84 m, en donde el número de Froude ya adquiere un valor menor a la unidad. Por lo tanto, en todas las simulaciones ya se observa el cambio de régimen, lo que nos indica que el resalto ya se ha desarrollado.

## 5. Conclusiones y Recomendaciones

En el presente estudio se llevaron a cabo cinco simulaciones numéricas para la estimación del perfil de flujo en un canal de sección triangular con la influencia de un vertedero lateral, las pruebas se realizaron utilizando la misma geometría del canal y variando únicamente el caudal de ingreso en el canal. Los resultados demostraron que, debido a las condiciones iniciales establecidas, los perfiles de flujo (para todas las simulaciones) que se obtienen al final son prácticamente similares, con cambios solo en los valores de calado, ya que dependiendo del caudal serán mayores o menores .

El programa SALOME-MECA, resultó muy eficiente para la creación de la geometría y la malla del canal, gracias a que su interfaz es muy amigable con el usuario, y facilita la construcción del vertedero lateral en el canal. Además, permite la malla en diferentes formatos incluido el formato .unv que es compatible con el software OpenFOAM, ya que el mallado directo en OpenFOAM comprende el proceso de ingresar las coordenadas X, Y, y Z de cada punto, la utilización de estos programas alternativos representa un considerable ahorro y optimización de los tiempos requeridos para la implementación de una simulación numérica.

Para el correcto funcionamiento del modelo, y obtención de resultados adecuados, es fundamental definir las condiciones de frontera e identificar correctamente cada uno de los elementos del canal a simular en OpenFOAM, esto incluye entrada y salida de agua, paredes del canal y condiciones correspondientes a la atmosfera; caso contrario el programa puede

presentar errores y/o interferencias que pueden comprometer la precisión de los resultados de las simulaciones.

Los perfiles de lámina de agua obtenidos por el Método Teórico, lograron representar en términos generales, la tendencia que el flujo toma cuando se tienen condiciones de flujo supercrítico, ya que como se pueden observar en los resultados presentados, el perfil en el vertedero calculado teóricamente, es prácticamente el mismo al perfil simulado numéricamente.

En las simulaciones se confirmó que el perfil de flujo esperado muestra una tendencia decreciente cuando el flujo es supercrítico, pero a diferencia del perfil teórico en el perfil de las simulaciones numéricas, se observa la presencia de un resalto hidráulico. Todos los perfiles obtenidos presentan esta forma, con la única variación de un pequeño retroceso que hace que el resalto comience centímetros antes de salir del vertedero, obteniéndose por los tanto para el punto final un porcentaje mayor de diferencia relativa con respecto al Modelo Teórico. La ocurrencia del resalto hidráulico indica la necesidad de realizar un análisis más detallado de las condiciones aguas abajo del vertedero lateral para la solución mediante el modelo teórico, para poder establecer si en efecto el fenómeno local observado en las simulaciones numéricas corresponde a un resalto hidráulico.

Los resultados que se obtienen para las simulaciones numéricas muestran que las variables de magnitud de velocidad y velocidad en la dirección de flujo son bastante similares, indicando que la velocidad en dirección de flujo es en efecto la predominante, corroborando la hipótesis de determinación de la ecuación simplificada de gobierno del flujo espacialmente variado con caudal decreciente.

Dado la diferencia presentada a la salida del vertedero lateral del presente estudio para el método teórico y las simulaciones numéricas, que indica la ocurrencia de un resalto hidráulico dentro de la zona del vertedero lateral, se recomienda analizar las condiciones aguas abajo del vertedero para el método teórico para verificar si el resalto se puede verificar también para esta metodología.

### Referencias

- Aguilar, D., & Escobar, V. (2020). *Simulación del flujo de agua sobre un vertedero rectangular, mediante el uso de una herramienta aplicada a la dinámica de fluidos computacional (Tesis pregrado)*. Bogotá: Universidad Católica de Colombia.
- ANSYS, Inc. (2021). *Ansys Fluent Theory Guide*. U.S.A. Recuperado el Junio de 2023, de [https://dl.cfdexperts.net/cfd\\_resources/Ansys\\_Documentation/Fluent/Ansys\\_Fluent\\_Theory\\_Guide.pdf](https://dl.cfdexperts.net/cfd_resources/Ansys_Documentation/Fluent/Ansys_Fluent_Theory_Guide.pdf)
- Azimi, H., & Shabanlou, S. (2015). The flow pattern in triangular channels along the side weir for subcritical flow regime. *Flow Measurement and Instrumentation*, 170-178.
- Chapra, S., & Canale, R. (2006). *Métodos numéricos para ingenieros*. México: McGRAW-HILL.
- Chow, V. (1994). *Hidráulica de canales abiertos*. Bogotá: McGRAW-HILL.
- Corzo Rivera, C., González Casas, F., & Zamudio Huertas, E. (2013). Vertedero lateral, soluciones teóricas verificadas experimentalmente y validadas con base en el análisis dimensional. *Tecnura*, 122-132.
- El-Khashab, A. (1975). *Hydraulics of flow over side weirs*. Southampton: Thesis presented to the University of Southampton, England.
- Frazer, W. (1957). The behaviour of side weir in prismatic rectangular channels. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 305-328.
- French, R. (1988). *Hidráulica de canales abiertos*. México: McGRAW-HILL.
- González-Santander, J., & Castellano, G. (2014). *Fundamentos de mecánica de fluidos*. Alicante: Editorial Club Universitario.
- Greenshields, C. (2023). *OpenFOAM: User Guide (version 11)*. Obtenido de SourceForge: <https://foam.sourceforge.net/docs/Guides-a4/OpenFOAMUserGuide-A4.pdf>
- Mendoza, L. D., & Vera, L. E. (2019). Estudio de diferentes modelos de turbulencia para obtener las curvas características de un perfil naca 2415 mediante la simulación tridimensional de flujos de fluidos. *Revista Bistua Facultad de Ciencias Basicas*, 43-51.

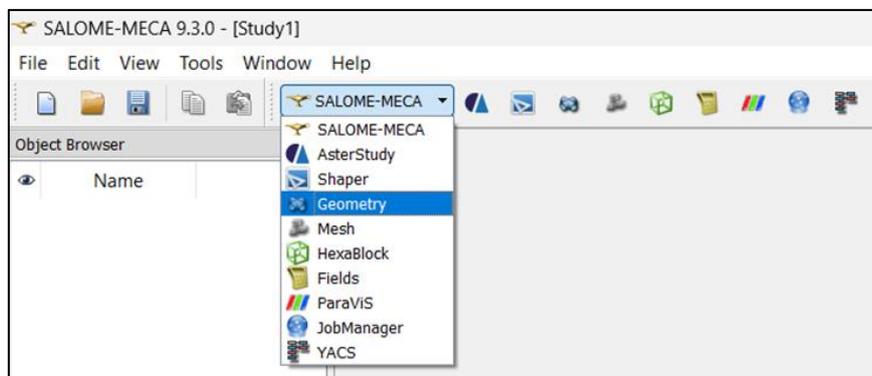
- Moncada, N., & Morales, H. (2003). Aplicación práctica de la dinámica de fluidos computacional (DFC) en la medición de flujo de fluidos. *Tecnología, Ciencia, Educación*, 57-66. Recuperado el Mayo de 2023, de <https://www.redalyc.org/pdf/482/48218203.pdf>
- Niño Vicentes, J. R., & Duarte Agudelo, C. A. (2004). *Introducción a la mecánica de fluidos*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Sotelo, G. (2002). *Hidráulica de canales*. México: UNAM, Facultad de Ingeniería.
- Streeter, V., Wylie, E., & Bedford, K. (2000). *Mecánica de Fluidos* (Novena ed.). Bogotá, Colombia: Mc-GRAW HILL.
- Subramanya, K. (2015). *Flow in open channels* (Cuarta ed.). New Delhi, India: McGRAW-HILL.
- Uyumaz, A. (1992). Side weir in triangular channel. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 965-970.
- Vatankhah, A. (2012). Analytical solution for water surface profile along a side weir in a triangular channel. *Flow Measurement and Instrumentation*, 76-79.
- Villamizar, A. (2014). *Aplicación de un modelo turbulento bidimensional para la simulación de flujo a superficie libre en un canal horizontal (Tesis Postgrado)*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

## Anexos

### Anexo A: Elaboración y generación de la malla en SALOME\_MECA 9.3.0

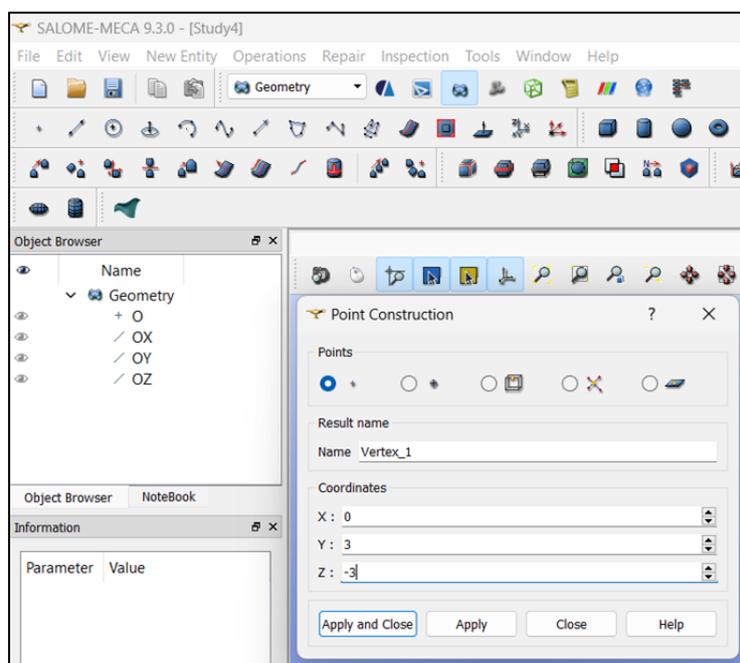
Se detalla la elaboración de la malla mediante el uso del software SALOME\_MECA 9.3.0, que será usada para las simulaciones previamente establecidas.

1. Descargar el software de la página web: <http://www.code-aster.org/>
2. Se abre el programa, se crea un nuevo proyecto, y se selecciona la opción *Geometry*, para crear el proyecto y habilitar los comandos para trabajar.



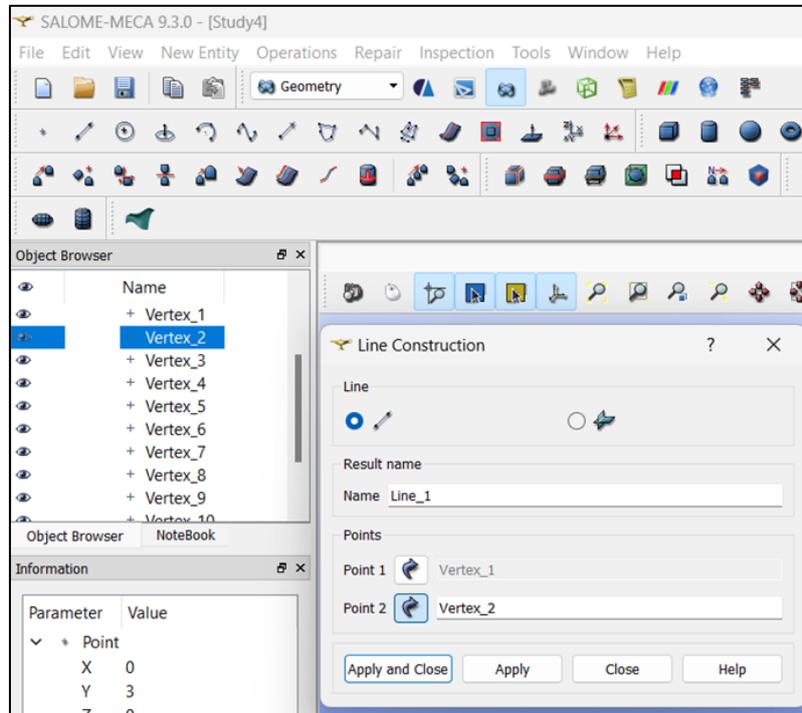
Anexo 1. Selección del espacio de trabajo en Geometry.

3. Se elige la opción *Create a point*, se ingresan las coordenadas, y se da clic en *Apply*, se repite con cada uno de los puntos necesarios para elaborar la geometría.



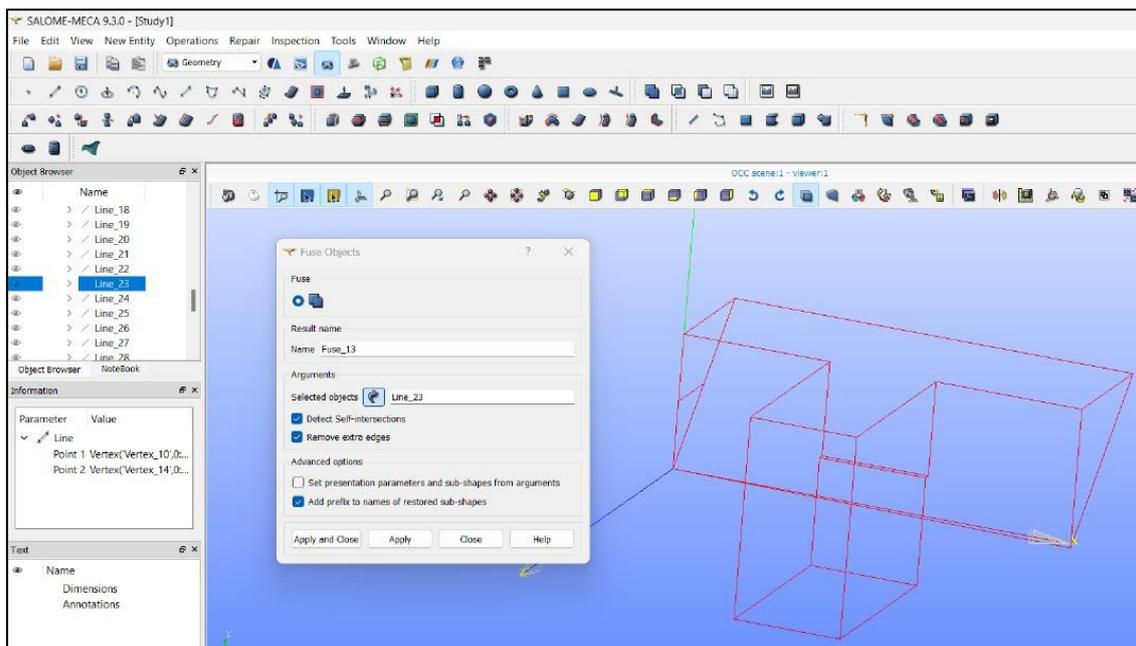
Anexo 2. Construcción de los puntos.

4. Con la opción *Create a line*, se conectan los puntos que forman una línea correspondiente al canal.



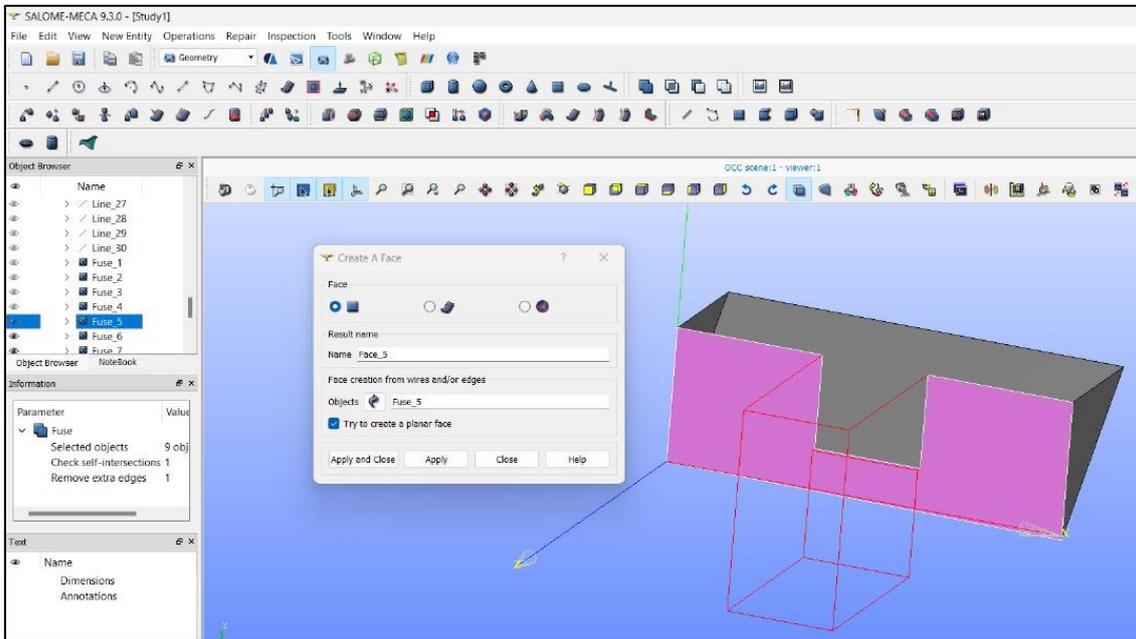
Anexo 3. Creación de líneas.

5. Seleccionando la opción *Fuse*, que procede a fusionar las líneas que pertenecen a una cara del canal.



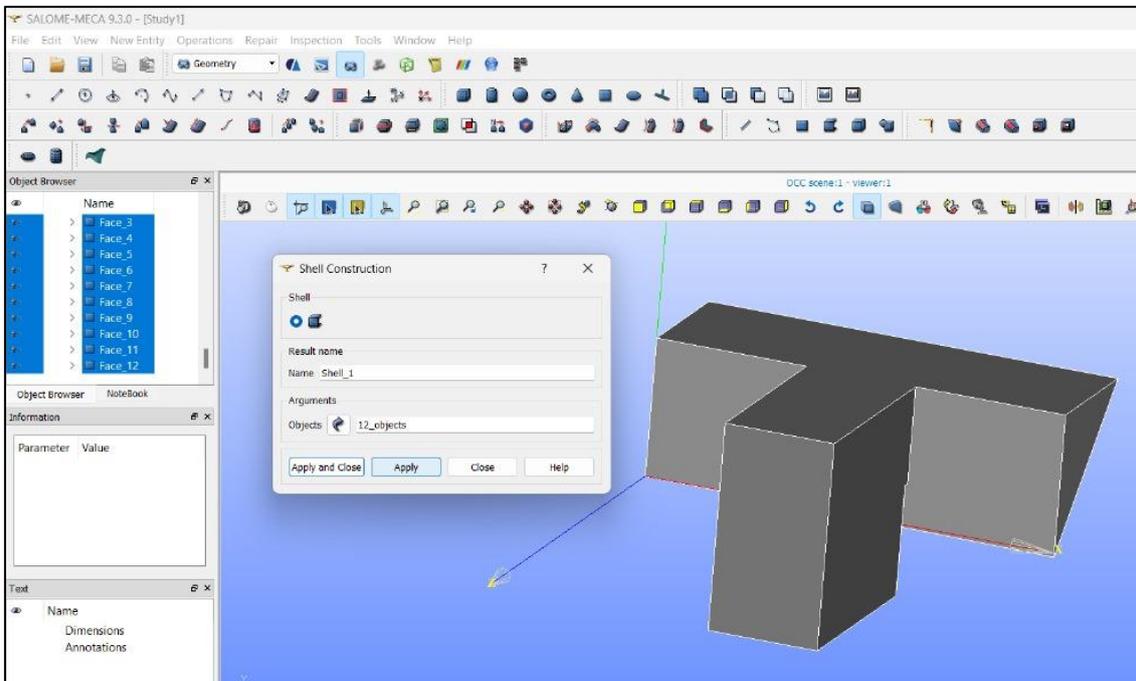
Anexo 4. Fusión de líneas del canal

6. Se genera las caras del canal con ayuda de la opción *Build face*, y seleccionando cada una de las fusiones que se elaboraron en el paso anterior.



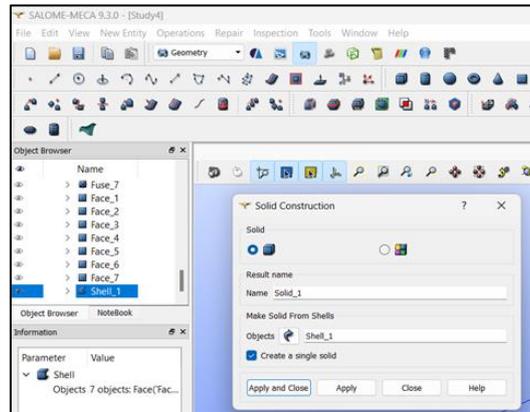
Anexo 5. Elaboración de las caras del canal.

7. Se crea el cascarón de la figura seleccionando todas las caras generadas, para ello se da clic en el botón *Build shell*.



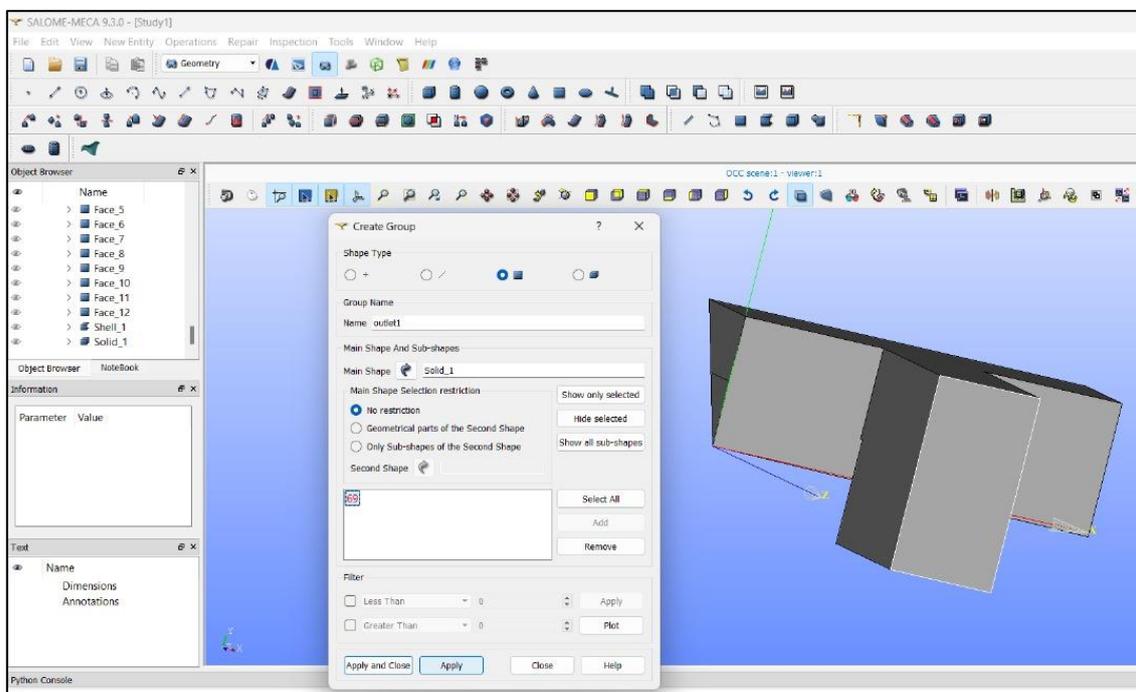
Anexo 6. Generación del cascarón.

8. Seleccionando el shell creado, y dando clic en *Build solid*, se establece el cuerpo del canal.



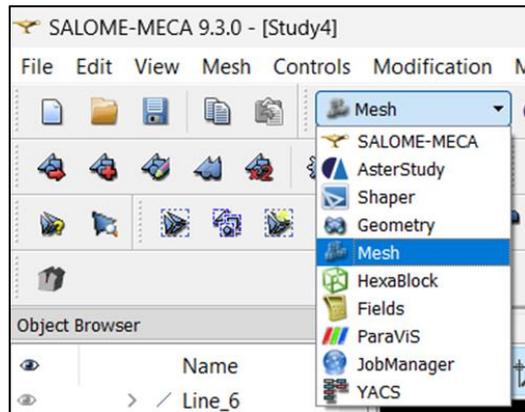
Anexo 7. Cuerpo del canal sólido.

9. Se establecen los nombres de las caras del sólido, para nuestro caso son: inlet, outlet1, outlet2, atmosphere y walls, para lo cual, en la barra de herramientas seleccionar *New Entity* → *Group* → *Create a group*. En el menú desplegable, se selecciona la opción *face*, se señala el elemento y se da el nombre de la cara, por último, se selecciona la cara, se da clic en *Add* y en *Apply*. Se repite el procedimiento para cada cara.



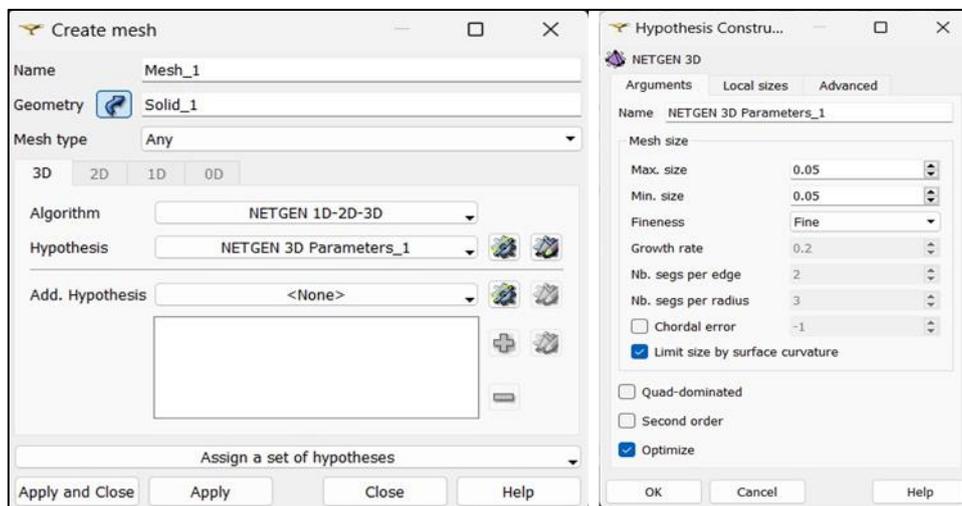
Anexo 8. Establecimiento de cada cara del sólido.

10. Ahora se selecciona la opción *Mesh*, para la posterior generación de la malla.



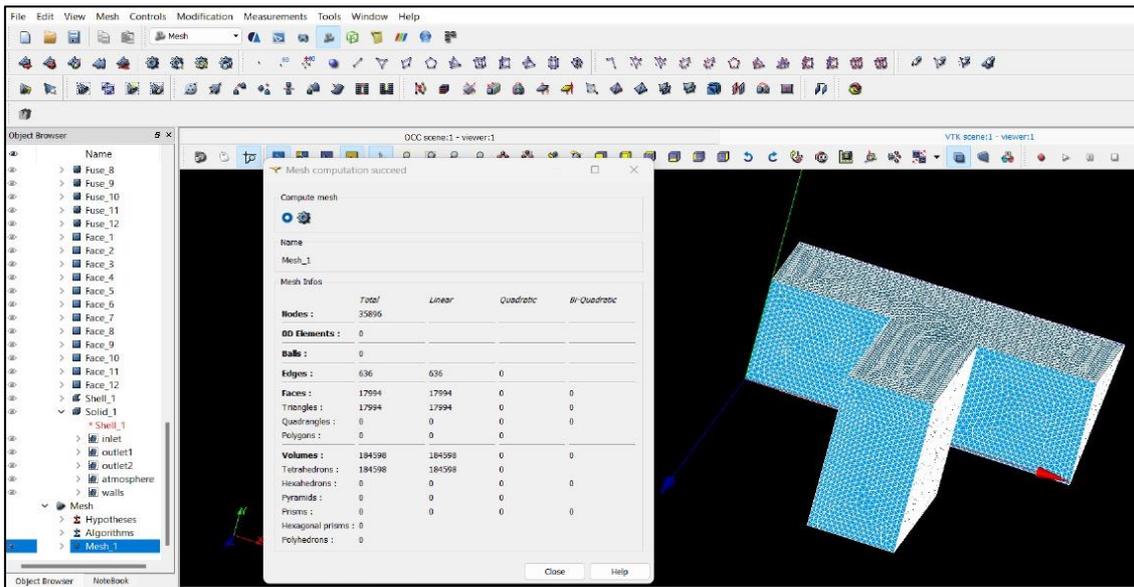
Anexo 9. Campo de elaboración de Malla.

11. En la barra de herramientas, se da clic en *Mesh*→ *Create Mesh*, en el menú desplegable, se selecciona la geometría, el tipo de Malla se establece como *3D*, en el algoritmo se establece *NETGEN 1D-2D-3D*, y en la opción de hipótesis, se escoge *NETGEN 3D Parameters*, se despliega un nuevo menú, en el que se establece el tamaño máximo y mínimo de las celdas, y el grado de refinación de la malla en nuestro caso *Fine*.



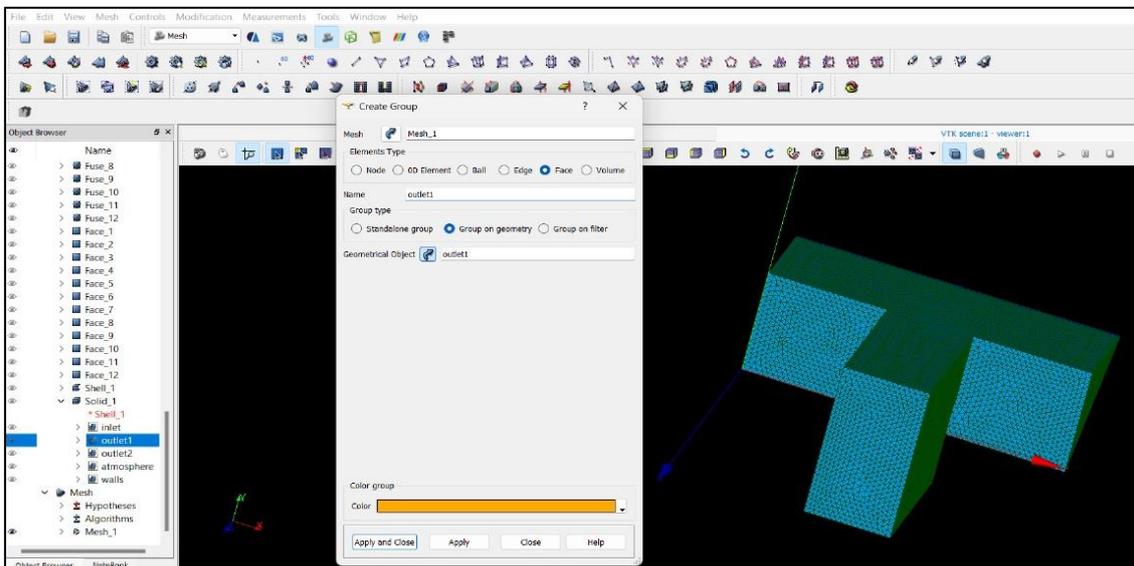
Anexo 10. Parámetros y generación de la malla.

12. Se da clic en el botón *Compute*, para que se genere la malla.



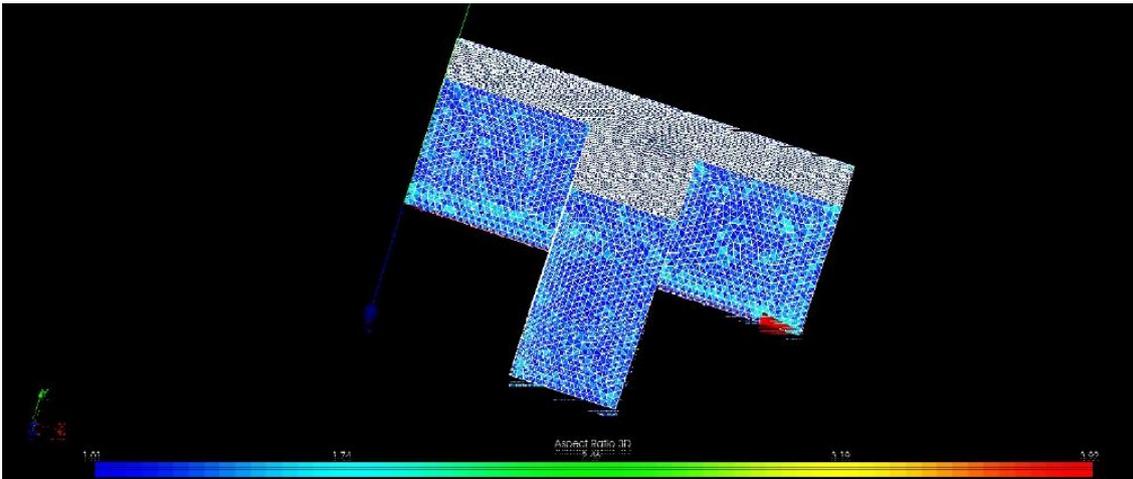
Anexo 11. Cálculo y generación de la malla.

13. Por último, se escoge la opción *Create Group*, en el menú desplegado escogemos: en *Element Type*→ *Face*, en *Group type*→ *Group on geometry*, y en *Geometrical Object*→ *Direct geometry selection*, se escoge el grupo generado en Geometry y se establece el mismo nombre, damos clic en *Apply*.



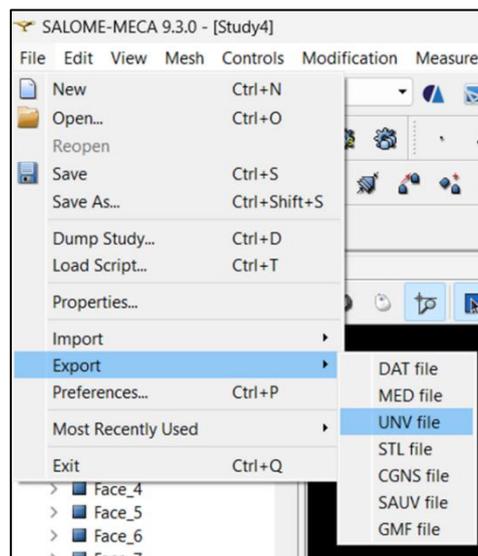
Anexo 12. Creación de cada grupo.

14. Para revisar el mallado en la barra de herramientas seleccionar *Controls*→ *Volume Controls*→ *Aspect Ratio 3D*, se genera colores en cada celda. Para una buena concordancia con OpenFOAM es recomendable que las celdas se encuentren en un valor inferior a 10.



Anexo 13. Revisión del mallado en SALOME-MECA.

15. Para finalizar se exporta la malla, para ello dirigirse a *File* → *Export* → *UNV file*, se genera un documento que es el usado en OpenFOAM.



Anexo 14. Malla exportada en formato UNV.

## Anexo B: Configuración de la estructura de carpetas para la simulación en OpenFOAM

Para que una simulación se lleve a cabo, OpenFOAM requiere una configuración especial, la cual, consta de carpetas que son conocidos como directorios. Para que el software pueda realizar cualquier simulación, siempre es necesario que contenga tres directorios:

1. *Directorio time (0)*: En su interior se encuentran los archivos con los datos de las condiciones iniciales y de frontera.

2. **Directorio *constant***: Contiene dos subdirectorios muy importantes, la carpeta llamada *polyMesh*, donde consta toda la información de la malla, y el archivo *transportProperties* en la que se ingresan las propiedades físicas del sistema, también pueden contener archivos con diferentes propiedades, como modelos de turbulencia, propiedades térmicas, entre otros.
3. **Directorio *system***: Está compuesto de archivos que controlan el proceso para la solución, el de mayor importancia es el denominado *controlDict*, en donde se establece los tiempos de duración y parámetros de control de la simulación, también están los archivos *fvSchemes* que contiene los esquemas de discretización, y el archivo *fvSolution* que contiene algoritmos de control para las variables de la simulación.

Partiendo del tutorial *waterChannel* de OpenFOAM, se realiza los siguientes cambios en los directorios.

### Directorio 0

- Archivo “alpha.water”

Se establece para la entrada *inlet* un valor de 1, ya que significa que solo por esa condición ingresa agua, si el valor es 0 significa que solo ingresa aire, y se añade las caras extras creadas en SALOME – MECA, para nuestro caso, *outlet1* y *outlet2*.

```
inlet
{
    type      fixedValue;
    value     uniform 1;
}

walls
{
    type      zeroGradient;
}

outlet1
{
    type      zeroGradient;
    value     uniform 0;
}

outlet2
{
    type      zeroGradient;
    value     uniform 0;
}
```

Anexo 15. Configuración del archivo *alpha.water*

- Archivo “k”

En este archivo se establece la energía turbulenta, se debe considerar la intensidad para la entrada, y establecer la función en las paredes del canal.

```

inlet
{
    type          fixedValue;
    intensity     0.05;
    value        $internalField;
}

walls
{
    type          kqRWallFunction;
    value        $internalField;
}
    
```

Anexo 16. Configuración del archivo k.

- Archivo “nut”

Este archivo corresponde a la rugosidad de las paredes, se establece el valor de  $K_s$ , que es el valor de la rugosidad absoluta, y  $C_s$  que es la uniformidad de la rugosidad, como la pared del concreto es uniforme entonces corresponde un valor de 0.5.

```

boundaryField
{
    walls
    {
        type          nutkRoughWallFunction;
        Ks            uniform 0.002;
        Cs            uniform 0.5;
        value        $internalField;
    }

    ".*"
    {
        type          calculated;
        value        uniform 0;
    }
}
    
```

Anexo 17. Configuración del archivo nut.

- Archivo “omega”

Este archivo corresponde al modelo de turbulencia omega, el cual lo único que se debería modificar es el nombre de la cara de entrada el agua, caso contrario se lo deja por defecto.

```

dimensions      [0 0 -1 0 0 0 0];
internalField   uniform 0.003;
boundaryField
{
    inlet
    {
        type      fixedValue;
        value     $internalField;
    }

    walls
    {
        type      omegaWallFunction;
        value     $internalField;
    }

    ".*"
    {
        type      inletOutlet;
        inletValue $internalField;
        value     $internalField;
    }
}

```

Anexo 18. Configuración archivo omega.

- Archivo “p\_rgh”

Este archivo corresponde a la presión, como se simula un canal abierto se establece una presión igual a cero en la cara *atmosphere*, se añade la salida del canal outlet2 y se modifica el tipo; y para el resto de caras se considera una mezcla de agua y aire que se mantiene constante en el archivo.

```

dimensions      [1 -1 -2 0 0 0 0];
internalField   uniform 0;
boundaryField
{
    atmosphere
    {
        type      totalPressure;
        p0       uniform 0;
    }

    outlet2
    {
        type      prghTotalPressure;
        p0       uniform 0;
    }

    ".*"
    {
        type      fixedFluxPressure;
        value     uniform 0;
    }
}

```

Anexo 19. Configuración archivo p\_rgh.

- Archivo “U”

En este archivo se establece en el apartado de *internalField* la dirección con la que ingresa el flujo, para nuestro caso es en el eje x, de la misma manera se ingresa el valor del caudal para ello se establece el comando *flowRateInletVelocity*, y para ingresar el valor numérico en  $m^3/s$  se usa el código *volumetricFlowRate* y se especifica que es constante. Se cambian el número dependiendo del caudal que requiera cada simulación.

```

dimensions      [0 1 -1 0 0 0];
internalField   uniform (1 0 0);
boundaryField
{
    inlet
    {
        type      flowRateInletVelocity;
        volumetricFlowRate constant 0.1969;
    }

    walls
    {
        type      noSlip;
    }

    atmosphere
    {
        type      pressureInletOutletVelocity;
        value     uniform (0 0 0);
    }

    outlet1
    {
        type      inletOutlet;
        inletValue uniform (0 0 0);
        value     $internalField;
    }

    outlet2
    {
        type      inletOutlet;
        inletValue uniform (0 0 0);
        value     $internalField;
    }
}

```

Anexo 20. Configuración del archivo U.

## Directorio constant

- Archivo “g”

En este archivo se configura la gravedad, y se le asigna su valor en el eje correspondiente, como ya se mencionó anteriormente se establece en el eje y.

```

/*-----*- C++ -*-----*/
=====
\\  /  F ield      | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
\\  /  O peration  | Website: https://openfoam.org
\\  /  A nd        | Version: 8
\\  /  M anipulation|
-----*/

FoamFile
{
  version      2.0;
  format       ascii;
  class        uniformDimensionedVectorField;
  location     "constant";
  object       g;
}
// ***** //

dimensions    [0 1 -2 0 0 0];
value         (0 -9.81 0);
// ***** //

```

Anexo 21. Configuración del archivo g.

- Archivo “momentumTransport”

En este archivo se especifica el modelo que se usa para la turbulencia, para nuestro estudio es el modelo *kOmegaSST*.

```

/*-----*- C++ -*-----*/
=====
\\  /  F ield      | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
\\  /  O peration  | Website: https://openfoam.org
\\  /  A nd        | Version: 8
\\  /  M anipulation|
-----*/

FoamFile
{
  version      2.0;
  format       ascii;
  class        dictionary;
  location     "constant";
  object       momentumTransport;
}
// ***** //

simulationType RAS;

RAS
{
  model        kOmegaSST;

  turbulence   on;

  printCoeffs  on;
}

```

Anexo 22. Configuración del archivo momentumTransport.

- Archivo “transportProperties”

En este archivo se configura los parámetros del fluido de transporte, en este caso tenemos dos fluidos agua y aire, y se establecen los valores para las condiciones ideales, temperatura de 20°C y presión de una atmósfera.

```
phases (water air);  
  
water  
{  
    transportModel Newtonian;  
    nu              1e-06;  
    rho             1000;  
}  
  
air  
{  
    transportModel Newtonian;  
    nu              1.48e-05;  
    rho             1;  
}  
  
sigma              0.07;
```

Anexo 23. Configuración del archivo transportProperties.

### Directorio system

- Archivo “controlDict”

En este archivo se incluye: el tiempo de la simulación, el modelo de solucionador que se usa, se establece el número de Courant que controla la estabilidad de la simulación, se indica los intervalos de tiempo en los que el programa guarde información, se indica si el fluido es compresible.

```
application      interFoam;
startFrom        startTime;
startTime        0;
stopAt           endTime;
endTime          40;
deltaT           0.01;
writeControl     adjustableRunTime;
writeInterval    0.1;
purgeWrite       0;
writeFormat      ascii;
writePrecision   6;
writeCompression off;
timeFormat       general;
timePrecision    6;
runTimeModifiable yes;
adjustTimeStep   yes;
maxCo            5;
maxAlphaCo       5;
maxDeltaT        1;
```

Anexo 24. Configuración del archivo controlDict.

- Archivo “setFieldsDict”

En este archivo se define un volumen inicial de agua que tendrá la geometría antes de iniciar la simulación, esto ayuda a disminuir el consumo del dominio computacional, y permite un poco menos de tiempo para que concluya la simulación.

```
defaultFieldValues
(
    volScalarFieldValue alpha.water 0
);

regions
(
    boxToCell
    {
        box (-1 -1 -1.5) (4 0.5 0.5);
        fieldValues
        (
            volScalarFieldValue alpha.water 1
        );
    }
);
```

Anexo 25. Configuración del archivo setFieldsDict.

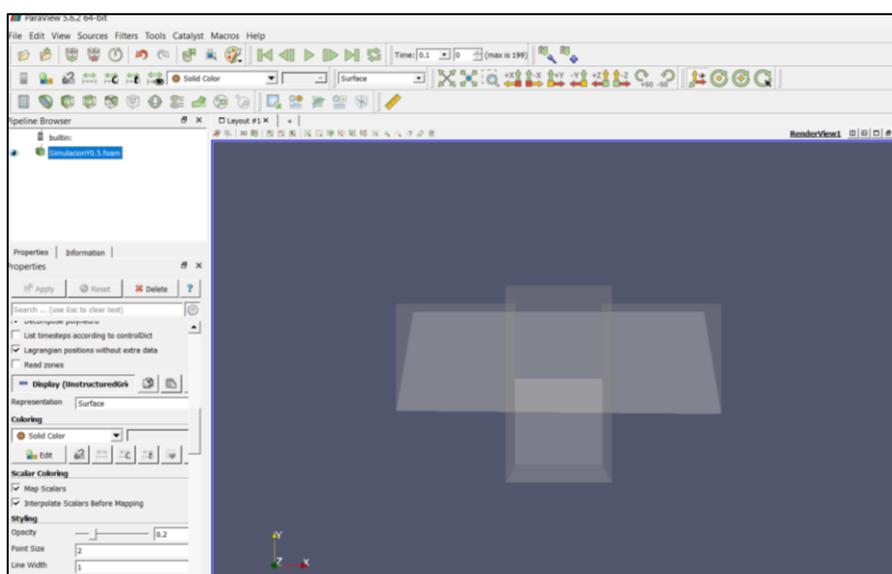
- Archivo “fvSchemes” y “fvSolution”

Estos archivos especifican los esquemas de discretización y solución de las ecuaciones que usa OpenFOAM, toda la caracterización y configuración se encuentra en los manuales de OpenFOAM y no se modifican ningún símbolo.

### Anexo C: Visualización de la simulación obtenida en ParaView

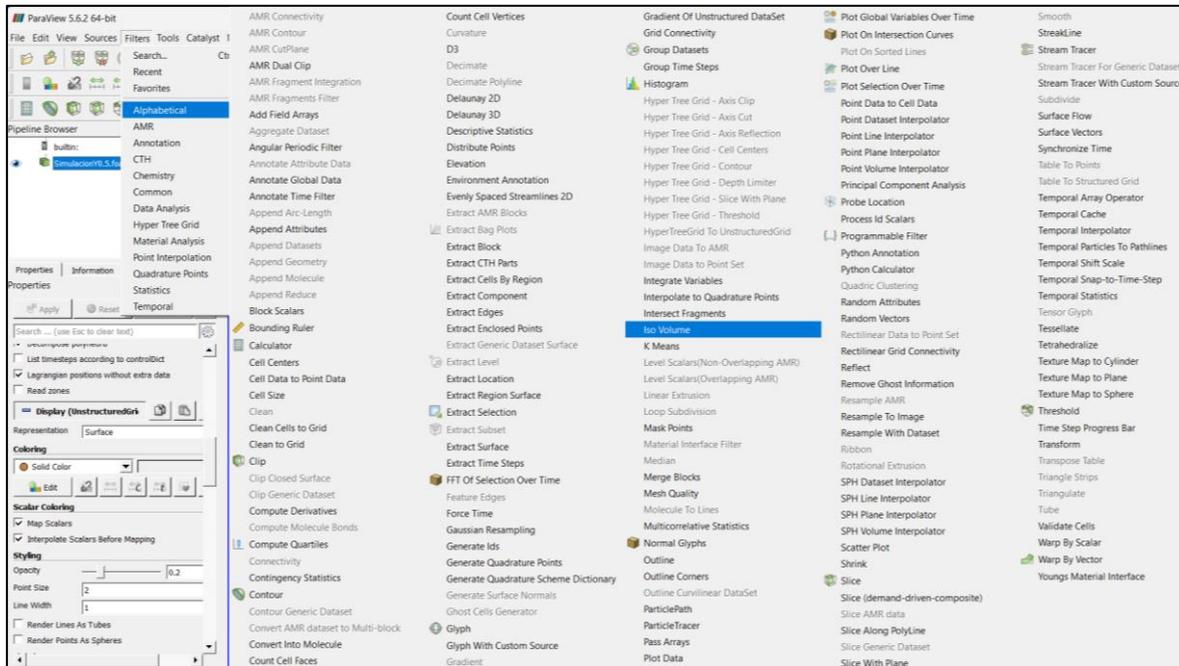
Luego de que la simulación finalice en OpenFOAM se ingresa el comando paraFoam, el cual abre la interfase de ParaView.

1. Se da clic en *Apply* para cargar la simulación. Para visualizar el flujo del fluido se selecciona en las opciones *Solid Color* y se establece una opacidad baja.



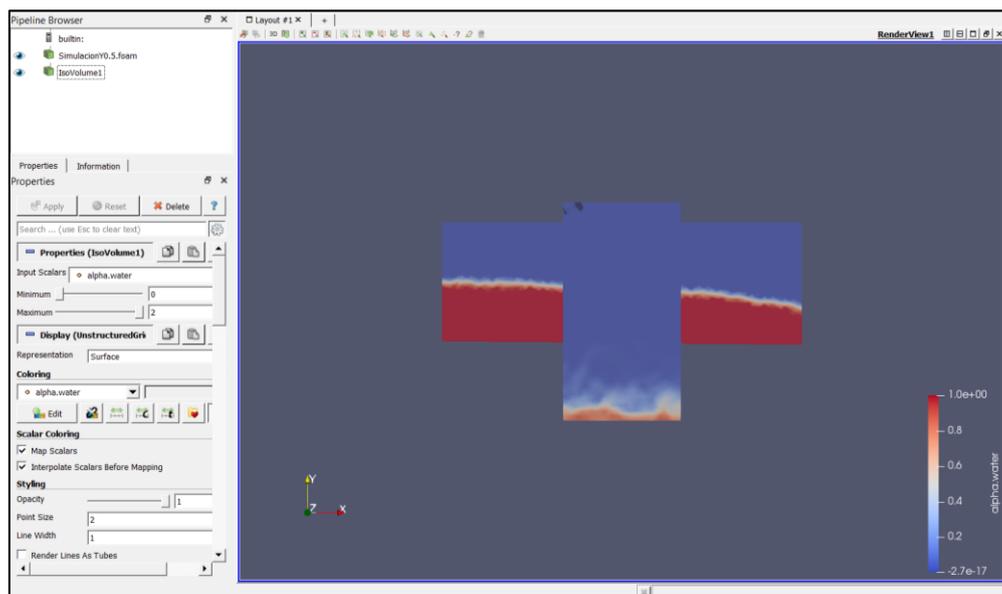
Anexo 26. Opacidad de la geometría del canal

- En la barra de herramientas se escoge la opción *Filters* → *Alphabetical* → *Iso volumen*, para generar la fracción de volumen.



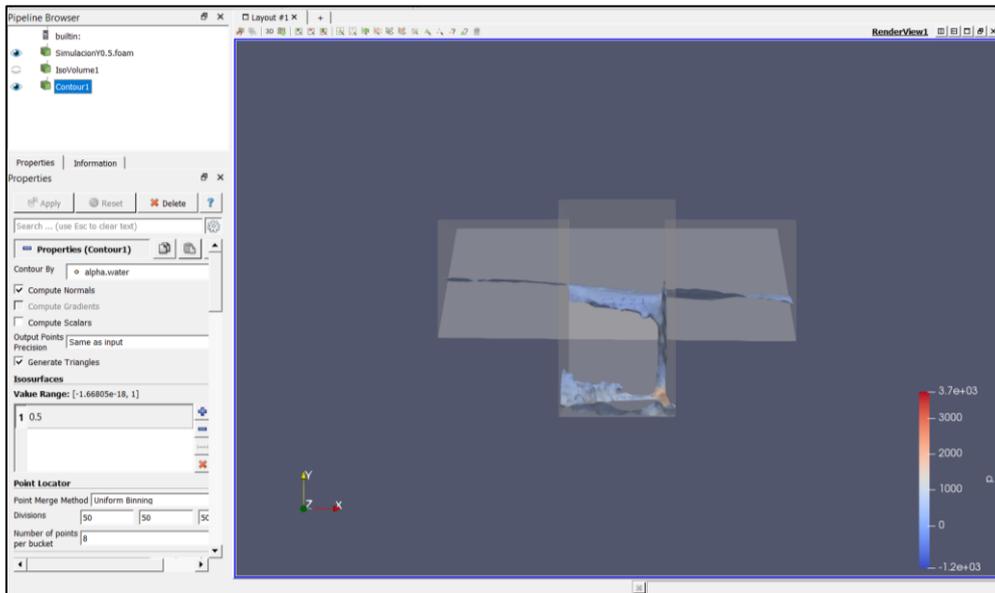
Anexo 27. Creación de Iso Volumen.

- En el menú se establecen las condiciones de valor máximo y mínimo que se requiera visualizar. En la fracción de volumen (*alpha.water*), se establece como valor mínimo 0 se muestra todos los componentes tanto el aire representado de color azul oscuro, y el agua representado por el momento con la tonalidad roja.



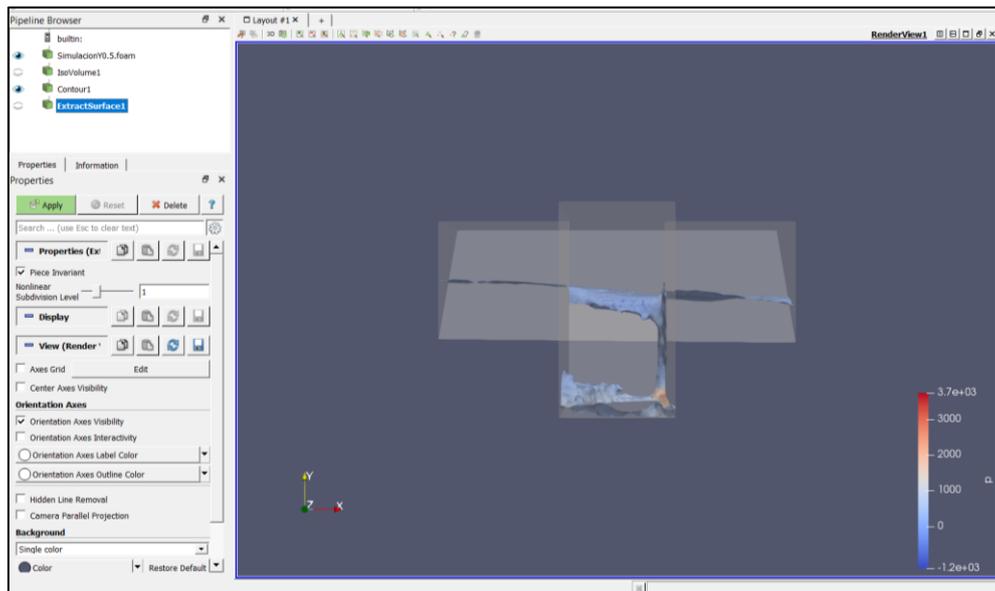
Anexo 28. Condiciones para la visualización del Iso Volumen.

- Para extraer el perfil longitudinal del agua, primero se selecciona la opción de *Contour*, se establece que sea de *alpha.water* y se le ajusta a un valor de 0.5. Finalmente, se da clic en *Apply* para generar el contorno.



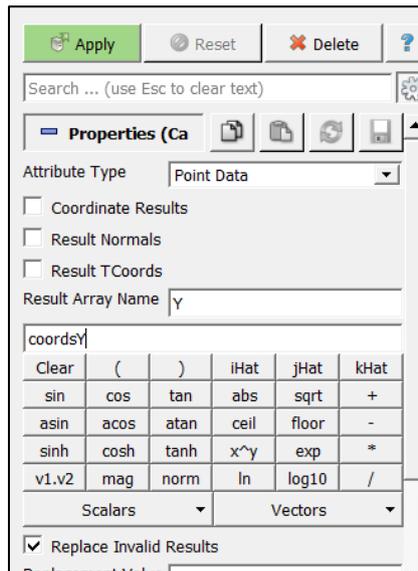
Anexo 29. Generación del contorno del perfil.

- Para extraer la superficie de agua se escoge en la barra de herramientas *Filters* → *Alphabetical* → *ExtractSurface*, y se da clic en *Apply*.



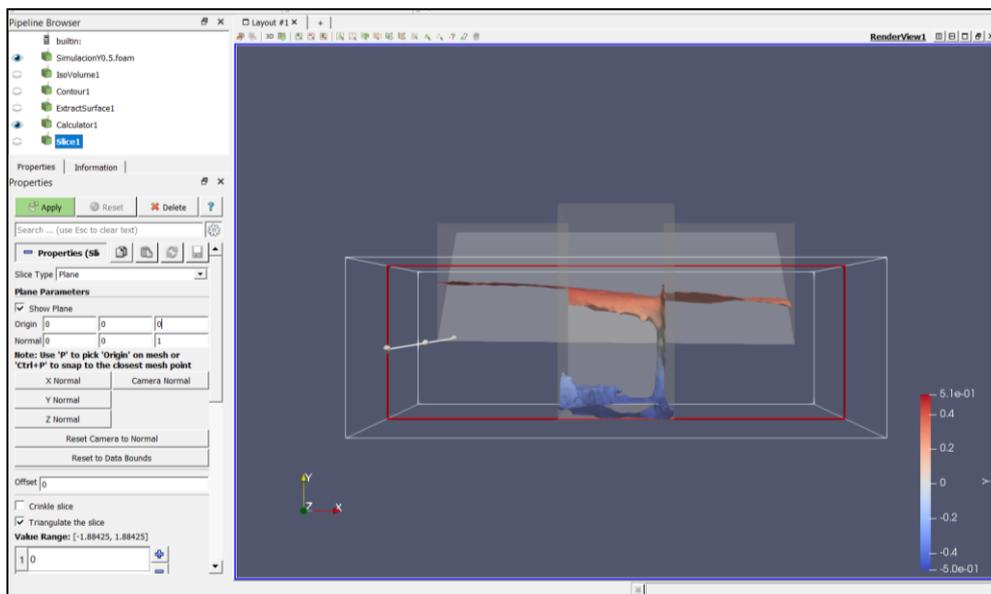
Anexo 30. Extracción de la superficie para el perfil.

- Para el cálculo de los calados en todo el canal, se selecciona *Calculator*, dentro de las opciones se escribe el comando "coordsY", y se da clic en *Apply*.



Anexo 31. Condiciones y comando para calcular las coordenadas.

- Para la obtención del perfil generado, se extrae un corte con la opción *Slice*, para lo cual se establecen las coordenadas de los tres ejes, se puede observar que se genera un recuadro de color rojo que sirve de guía. Finalmente se da clic en *Apply*.



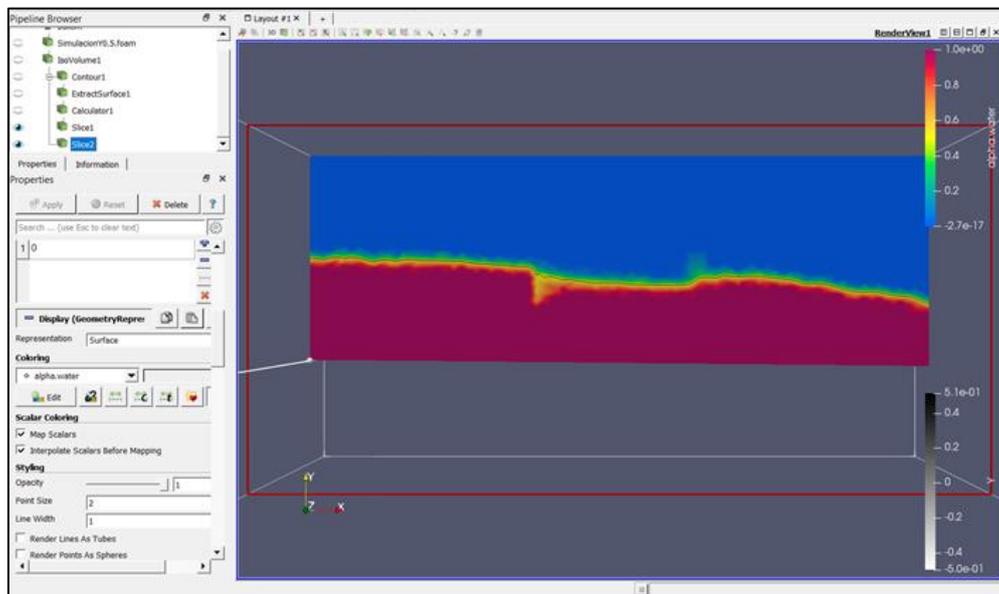
Anexo 32. Elaboración del corte del perfil.

- Para exportar los datos, se da clic en *Split Horizontal* → *SpreadSheet View*, se abre una ventana lateral con todos los datos, se ordenan los puntos y se selecciona *Export Spreadsheet*, se selecciona la ubicación en el ordenador en el cual se crea un archivo CSV.

Block Number	Point ID	Normals	Points
0	1	0.31735, 0.948147, -0.0126366	3, 0.277137, -0.005
1	1	0.305, 0.952026, -0.024891	2.99228, 0.279771, -0.005
2	1	0.30494, 0.951986, -0.0266575	2.98646, 0.281541, -0.005
3	1	0.3432, 0.938202, -0.040526	2.9658, 0.288133, -0.005
4	1	0.354596, 0.934109, -0.0390104	2.96494, 0.288408, -0.005
5	1	0.418076, 0.906762, -0.0519272	2.94995, 0.295774, -0.005
6	1	0.354782, 0.927086, -0.115449	2.93456, 0.302609, -0.005
7	1	0.350932, 0.928545, -0.117268	2.9341, 0.302809, -0.005
8	1	0.332793, 0.934357, -0.122019	2.92861, 0.304312, -0.005
9	1	0.283856, 0.93918, -0.187094	2.91069, 0.310651, -0.005
10	1	0.272939, 0.939324, -0.20247	2.90802, 0.311487, -0.005
11	1	0.246504, 0.942256, -0.223952	2.90301, 0.313054, -0.005
12	1	0.184916, 0.959177, -0.207366	2.89837, 0.314219, -0.005
13	1	0.129886, 0.97307, -0.189451	2.89225, 0.315292, -0.005
14	1	0.0650025, 0.984545, -0.133064	2.88346, 0.315224, -0.005
15	1	0.0307245, 0.996465, -0.0594...	2.87632, 0.315417, -0.005
16	1	0.0385222, 0.997383, -0.0482...	2.86939, 0.315603, -0.005
17	1	0.0503982, 0.998151, -0.0251...	2.8591, 0.315545, -0.005
18	1	0.0825996, 0.996413, -0.0116...	2.85028, 0.31614, -0.005
19	1	0.104165, 0.994215, 0.004269...	2.83946, 0.31734, -0.005

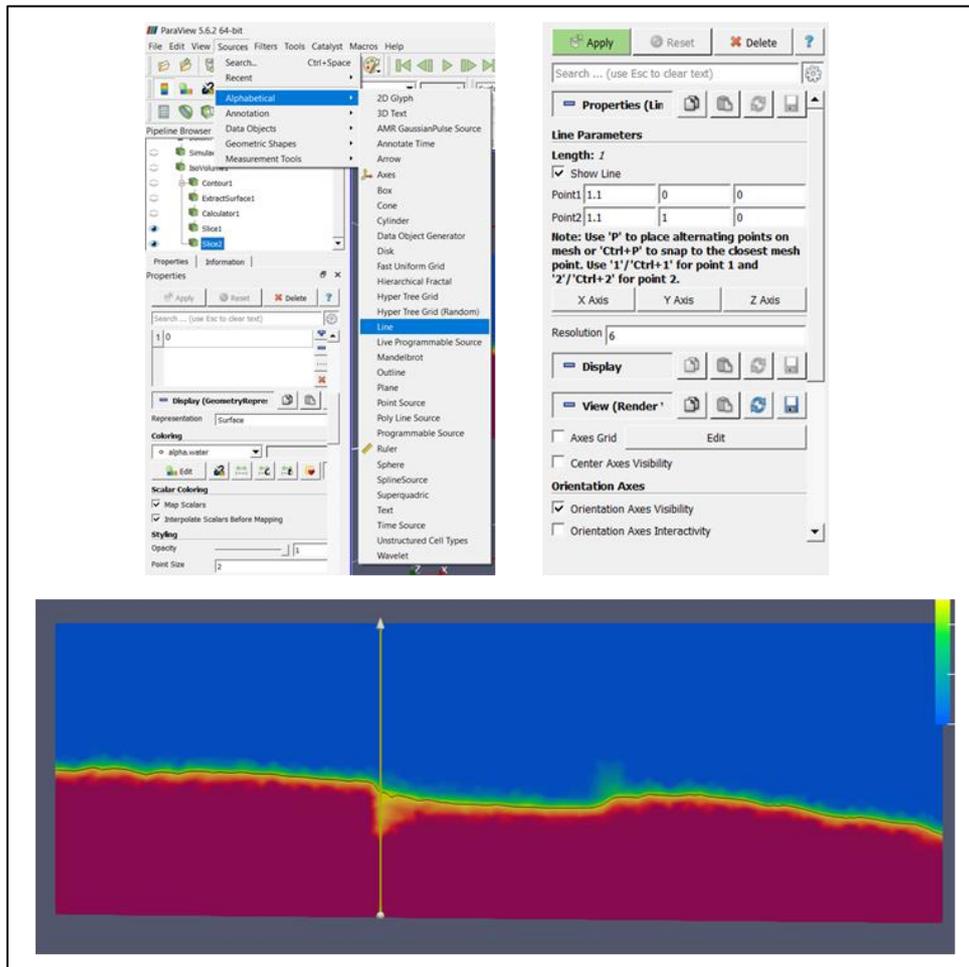
Anexo 33. Campo con los datos para extraer en archivo csv.

- Se realiza un segundo corte, con la opción *Slice* desde *Iso volumen* para generar una vista del perfil del agua en una coordenada requerida, que coincida con la del primer corte.



Anexo 34. Vista del perfil de agua.

- Se crean líneas que representen la ubicación del vertedero, para ello en la barra de herramientas en la opción *Sources*→ *Alphabetical*→ *Line* se crea una línea, se establecen las coordenadas del punto inicial y final de la línea, y se le da clic en *Apply*



Anexo 35. Crear una línea en ParaView.

## Anexo D: Tablas de cálculo para los perfiles de flujo por del Método Teórico.

- Prueba 1:  $Q=0.197 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Tabla A-0-1. Obtención de los caldos del perfil de flujo mediante Runge-Kutta para  $Q=0.197 \text{ m}^3/\text{s}$ .

x [m]	y [m]	k <sub>1</sub>	k <sub>2</sub>	k <sub>3</sub>	k <sub>4</sub>	y <sub>m</sub> [m]	ΔQ	Q <sub>v</sub> [m <sup>3</sup> /s]	Q [m <sup>3</sup> /s]	V [m/s]	Q <sub>v</sub> /Q
0.000	0.423	-0.109	-0.107	-0.107	-0.105			0.000	0.197	2.206	0.000
0.020	0.420	-0.105	-0.103	-0.103	-0.101	0.421	0.0009	0.001	0.196	2.219	0.004
0.040	0.418	-0.101	-0.099	-0.099	-0.097	0.419	0.0009	0.002	0.195	2.231	0.009
0.060	0.416	-0.097	-0.095	-0.095	-0.093	0.417	0.0008	0.003	0.194	2.242	0.013
0.080	0.414	-0.093	-0.091	-0.091	-0.090	0.415	0.0008	0.003	0.194	2.253	0.017
0.100	0.413	-0.090	-0.088	-0.088	-0.087	0.414	0.0008	0.004	0.193	2.264	0.021
0.120	0.411	-0.087	-0.085	-0.085	-0.084	0.412	0.0008	0.005	0.192	2.274	0.025

0.140	0.409	-0.084	-0.082	-0.082	-0.081	0.410	0.0008	0.006	0.191	2.284	0.029
0.160	0.407	-0.081	-0.080	-0.080	-0.079	0.408	0.0007	0.006	0.190	2.294	0.033
0.180	0.406	-0.079	-0.077	-0.077	-0.076	0.407	0.0007	0.007	0.190	2.303	0.036
0.200	0.404	-0.076	-0.075	-0.075	-0.074	0.405	0.0007	0.008	0.189	2.312	0.040
0.220	0.403	-0.074	-0.073	-0.073	-0.072	0.404	0.0007	0.009	0.188	2.321	0.044
0.240	0.401	-0.072	-0.071	-0.071	-0.070	0.402	0.0007	0.009	0.188	2.329	0.047
0.260	0.400	-0.070	-0.069	-0.069	-0.068	0.401	0.0007	0.010	0.187	2.337	0.050
0.280	0.399	-0.068	-0.067	-0.067	-0.066	0.399	0.0007	0.011	0.186	2.345	0.054
0.300	0.397	-0.066	-0.065	-0.065	-0.064	0.398	0.0006	0.011	0.186	2.353	0.057
0.320	0.396	-0.064	-0.063	-0.063	-0.063	0.397	0.0006	0.012	0.185	2.361	0.060
0.340	0.395	-0.063	-0.062	-0.062	-0.061	0.395	0.0006	0.012	0.184	2.368	0.063
0.360	0.393	-0.061	-0.060	-0.060	-0.060	0.394	0.0006	0.013	0.184	2.375	0.066
0.380	0.392	-0.060	-0.059	-0.059	-0.058	0.393	0.0006	0.014	0.183	2.382	0.069
0.400	0.391	-0.058	-0.057	-0.057	-0.057	0.392	0.0006	0.014	0.183	2.389	0.072
0.420	0.390	-0.057	-0.056	-0.056	-0.055	0.390	0.0006	0.015	0.182	2.396	0.075
0.440	0.389	-0.055	-0.055	-0.055	-0.054	0.389	0.0006	0.014	0.182	2.414	0.073
0.460	0.388	-0.054	-0.054	-0.054	-0.053	0.388	0.0005	0.014	0.183	2.432	0.072
0.480	0.387	-0.053	-0.052	-0.052	-0.052	0.387	0.0005	0.014	0.183	2.449	0.070
0.500	0.386	-0.052	-0.051	-0.051	-0.051	0.386	0.0005	0.014	0.183	2.466	0.069
0.520	0.385	-0.051	-0.050	-0.050	-0.050	0.385	0.0005	0.013	0.184	2.483	0.067
0.540	0.384	-0.050	-0.049	-0.049	-0.048	0.384	0.0005	0.013	0.184	2.500	0.066
0.560	0.383	-0.048	-0.048	-0.048	-0.047	0.383	0.0005	0.013	0.184	2.516	0.065
0.580	0.382	-0.047	-0.047	-0.047	-0.046	0.382	0.0005	0.012	0.184	2.532	0.063
0.600	0.381	-0.046	-0.046	-0.046	-0.046	0.381	0.0005	0.012	0.185	2.548	0.062
0.620	0.380	-0.046	-0.045	-0.045	-0.045	0.380	0.0005	0.012	0.185	2.564	0.061
0.640	0.379	-0.045	-0.044	-0.044	-0.044	0.379	0.0005	0.012	0.185	2.579	0.060
0.660	0.378	-0.044	-0.043	-0.043	-0.043	0.378	0.0005	0.012	0.185	2.594	0.059
0.680	0.377	-0.043	-0.042	-0.042	-0.042	0.378	0.0004	0.011	0.186	2.609	0.058
0.700	0.376	-0.042	-0.042	-0.042	-0.041	0.377	0.0004	0.011	0.186	2.624	0.057
0.720	0.375	-0.041	-0.041	-0.041	-0.040	0.376	0.0004	0.011	0.186	2.639	0.056
0.740	0.375	-0.040	-0.040	-0.040	-0.040	0.375	0.0004	0.011	0.186	2.653	0.055
0.760	0.374	-0.040	-0.039	-0.039	-0.039	0.374	0.0004	0.011	0.186	2.667	0.054
0.780	0.373	-0.039	-0.039	-0.039	-0.038	0.373	0.0004	0.010	0.187	2.681	0.053
0.800	0.372	-0.038	-0.038	-0.038	-0.038	0.373	0.0004	0.010	0.187	2.695	0.052

- Prueba 2:  $Q=0.250 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Tabla A-0-2. Obtención de los caldos del perfil de flujo mediante Runge-Kutta para  $Q=0.250 \text{ m}^3/\text{s}$ .

x [m]	y [m]	k <sub>1</sub>	k <sub>2</sub>	k <sub>3</sub>	k <sub>4</sub>	y <sub>m</sub> [m]	ΔQ	Q <sub>v</sub> [m <sup>3</sup> /s]	Q [m <sup>3</sup> /s]	V [m/s]	Q <sub>v</sub> /Q
0.000	0.423	-0.077	-0.076	-0.076	-0.075			0.000	0.250	2.799	0.000
0.020	0.421	-0.075	-0.074	-0.074	-0.073	0.422	0.0009	0.001	0.249	2.809	0.004
0.040	0.420	-0.073	-0.072	-0.072	-0.071	0.421	0.0009	0.002	0.248	2.819	0.007
0.060	0.418	-0.071	-0.071	-0.071	-0.070	0.419	0.0009	0.003	0.248	2.829	0.010
0.080	0.417	-0.070	-0.069	-0.069	-0.068	0.418	0.0008	0.003	0.247	2.839	0.014
0.100	0.416	-0.068	-0.068	-0.068	-0.067	0.416	0.0008	0.004	0.246	2.848	0.017
0.120	0.414	-0.067	-0.066	-0.066	-0.065	0.415	0.0008	0.005	0.245	2.857	0.020
0.140	0.413	-0.065	-0.065	-0.065	-0.064	0.414	0.0008	0.006	0.244	2.866	0.023

0.160	0.412	-0.064	-0.063	-0.063	-0.063	0.412	0.0008	0.007	0.244	2.875	0.027
0.180	0.410	-0.063	-0.062	-0.062	-0.061	0.411	0.0008	0.007	0.243	2.884	0.030
0.200	0.409	-0.061	-0.061	-0.061	-0.060	0.410	0.0008	0.008	0.242	2.892	0.033
0.220	0.408	-0.060	-0.060	-0.060	-0.059	0.408	0.0007	0.009	0.241	2.900	0.036
0.240	0.407	-0.059	-0.058	-0.058	-0.058	0.407	0.0007	0.010	0.241	2.909	0.039
0.260	0.406	-0.058	-0.057	-0.057	-0.057	0.406	0.0007	0.010	0.240	2.917	0.041
0.280	0.404	-0.057	-0.056	-0.056	-0.056	0.405	0.0007	0.011	0.239	2.925	0.044
0.300	0.403	-0.056	-0.055	-0.055	-0.055	0.404	0.0007	0.012	0.238	2.932	0.047
0.320	0.402	-0.055	-0.054	-0.054	-0.054	0.403	0.0007	0.012	0.238	2.940	0.050
0.340	0.401	-0.054	-0.053	-0.053	-0.053	0.402	0.0007	0.013	0.237	2.947	0.052
0.360	0.400	-0.053	-0.052	-0.052	-0.052	0.401	0.0007	0.014	0.236	2.955	0.055
0.380	0.399	-0.052	-0.051	-0.051	-0.051	0.399	0.0007	0.014	0.236	2.962	0.058
0.400	0.398	-0.051	-0.050	-0.050	-0.050	0.398	0.0006	0.015	0.235	2.969	0.060
0.420	0.397	-0.050	-0.049	-0.049	-0.049	0.397	0.0006	0.016	0.234	2.976	0.063
0.440	0.396	-0.049	-0.049	-0.049	-0.048	0.396	0.0006	0.015	0.235	2.995	0.062
0.460	0.395	-0.048	-0.048	-0.048	-0.047	0.395	0.0006	0.015	0.235	3.013	0.061
0.480	0.394	-0.047	-0.047	-0.047	-0.047	0.394	0.0006	0.015	0.235	3.031	0.060
0.500	0.393	-0.047	-0.046	-0.046	-0.046	0.394	0.0006	0.015	0.235	3.048	0.059
0.520	0.392	-0.046	-0.045	-0.045	-0.045	0.393	0.0006	0.014	0.236	3.066	0.058
0.540	0.391	-0.045	-0.045	-0.045	-0.044	0.392	0.0006	0.014	0.236	3.083	0.057
0.560	0.390	-0.044	-0.044	-0.044	-0.044	0.391	0.0006	0.014	0.236	3.100	0.056
0.580	0.389	-0.044	-0.043	-0.043	-0.043	0.390	0.0006	0.014	0.236	3.117	0.055
0.600	0.389	-0.043	-0.043	-0.043	-0.042	0.389	0.0006	0.014	0.237	3.134	0.054
0.620	0.388	-0.042	-0.042	-0.042	-0.042	0.388	0.0005	0.013	0.237	3.150	0.053
0.640	0.387	-0.042	-0.041	-0.041	-0.041	0.387	0.0005	0.013	0.237	3.167	0.053
0.660	0.386	-0.041	-0.041	-0.041	-0.040	0.387	0.0005	0.013	0.237	3.183	0.052
0.680	0.385	-0.040	-0.040	-0.040	-0.040	0.386	0.0005	0.013	0.237	3.199	0.051
0.700	0.384	-0.040	-0.039	-0.039	-0.039	0.385	0.0005	0.013	0.238	3.215	0.050
0.720	0.384	-0.039	-0.039	-0.039	-0.038	0.384	0.0005	0.012	0.238	3.231	0.049
0.740	0.383	-0.038	-0.038	-0.038	-0.038	0.383	0.0005	0.012	0.238	3.246	0.049
0.760	0.382	-0.038	-0.038	-0.038	-0.037	0.383	0.0005	0.012	0.238	3.262	0.048
0.780	0.381	-0.037	-0.037	-0.037	-0.037	0.382	0.0005	0.012	0.238	3.277	0.047
0.800	0.381	-0.037	-0.036	-0.036	-0.036	0.381	0.0005	0.012	0.239	3.292	0.047

- Prueba 3:  $Q=0.320 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Tabla A-0-3. Obtención de los caldos del perfil de flujo mediante Runge-Kutta para  $Q=0.320 \text{ m}^3/\text{s}$ .

x [m]	y [m]	k <sub>1</sub>	k <sub>2</sub>	k <sub>3</sub>	k <sub>4</sub>	y <sub>m</sub> [m]	ΔQ	Q <sub>v</sub> [m <sup>3</sup> /s]	Q [m <sup>3</sup> /s]	V [m/s]	Q <sub>v</sub> /Q
0.000	0.465	-0.102	-0.100	-0.100	-0.099			0.000	0.320	2.968	0.000
0.020	0.462	-0.099	-0.098	-0.098	-0.097	0.463	0.0014	0.001	0.319	2.981	0.004
0.040	0.461	-0.097	-0.096	-0.096	-0.095	0.462	0.0013	0.003	0.317	2.993	0.009
0.060	0.459	-0.095	-0.093	-0.093	-0.092	0.460	0.0013	0.004	0.316	3.006	0.013
0.080	0.457	-0.092	-0.091	-0.091	-0.090	0.458	0.0013	0.005	0.315	3.018	0.017
0.100	0.455	-0.090	-0.089	-0.089	-0.088	0.456	0.0013	0.007	0.314	3.030	0.021
0.120	0.453	-0.088	-0.087	-0.087	-0.086	0.454	0.0013	0.008	0.312	3.042	0.025
0.140	0.451	-0.086	-0.086	-0.086	-0.085	0.452	0.0012	0.009	0.311	3.053	0.028
0.160	0.450	-0.085	-0.084	-0.084	-0.083	0.451	0.0012	0.010	0.310	3.064	0.032
0.180	0.448	-0.083	-0.082	-0.082	-0.081	0.449	0.0012	0.012	0.309	3.076	0.036

0.200	0.446	-0.081	-0.080	-0.080	-0.080	0.447	0.0012	0.013	0.307	3.086	0.040
0.220	0.445	-0.080	-0.079	-0.079	-0.078	0.446	0.0012	0.014	0.306	3.097	0.043
0.240	0.443	-0.078	-0.077	-0.077	-0.076	0.444	0.0011	0.015	0.305	3.108	0.047
0.260	0.442	-0.076	-0.076	-0.076	-0.075	0.442	0.0011	0.016	0.304	3.118	0.050
0.280	0.440	-0.075	-0.074	-0.074	-0.074	0.441	0.0011	0.017	0.303	3.128	0.054
0.300	0.439	-0.074	-0.073	-0.073	-0.072	0.439	0.0011	0.018	0.302	3.138	0.057
0.320	0.437	-0.072	-0.072	-0.072	-0.071	0.438	0.0011	0.019	0.301	3.148	0.060
0.340	0.436	-0.071	-0.070	-0.070	-0.070	0.436	0.0010	0.020	0.300	3.158	0.064
0.360	0.434	-0.070	-0.069	-0.069	-0.068	0.435	0.0010	0.021	0.299	3.167	0.067
0.380	0.433	-0.068	-0.068	-0.068	-0.067	0.434	0.0010	0.022	0.298	3.177	0.070
0.400	0.432	-0.067	-0.067	-0.067	-0.066	0.432	0.0010	0.023	0.297	3.186	0.073
0.420	0.430	-0.066	-0.065	-0.065	-0.065	0.431	0.0010	0.024	0.296	3.195	0.076
0.440	0.429	-0.065	-0.064	-0.064	-0.064	0.430	0.0010	0.024	0.296	3.219	0.075
0.460	0.428	-0.064	-0.063	-0.063	-0.063	0.428	0.0010	0.024	0.297	3.242	0.074
0.480	0.426	-0.063	-0.062	-0.062	-0.062	0.427	0.0009	0.023	0.297	3.266	0.073
0.500	0.425	-0.062	-0.061	-0.061	-0.061	0.426	0.0009	0.023	0.297	3.289	0.071
0.520	0.424	-0.061	-0.060	-0.060	-0.060	0.425	0.0009	0.022	0.298	3.312	0.070
0.540	0.423	-0.060	-0.059	-0.059	-0.059	0.423	0.0009	0.022	0.298	3.335	0.069
0.560	0.422	-0.059	-0.058	-0.058	-0.058	0.422	0.0009	0.022	0.298	3.358	0.068
0.580	0.420	-0.058	-0.057	-0.057	-0.057	0.421	0.0009	0.021	0.299	3.380	0.067
0.600	0.419	-0.057	-0.056	-0.056	-0.056	0.420	0.0009	0.021	0.299	3.402	0.066
0.620	0.418	-0.056	-0.055	-0.055	-0.055	0.419	0.0008	0.021	0.299	3.425	0.065
0.640	0.417	-0.055	-0.055	-0.055	-0.054	0.418	0.0008	0.020	0.300	3.446	0.064
0.660	0.416	-0.054	-0.054	-0.054	-0.053	0.416	0.0008	0.020	0.300	3.468	0.063
0.680	0.415	-0.053	-0.053	-0.053	-0.053	0.415	0.0008	0.020	0.300	3.490	0.062
0.700	0.414	-0.053	-0.052	-0.052	-0.052	0.414	0.0008	0.020	0.301	3.511	0.061
0.720	0.413	-0.052	-0.051	-0.051	-0.051	0.413	0.0008	0.019	0.301	3.532	0.060
0.740	0.412	-0.051	-0.051	-0.051	-0.050	0.412	0.0008	0.019	0.301	3.553	0.059
0.760	0.411	-0.050	-0.050	-0.050	-0.050	0.411	0.0008	0.019	0.301	3.574	0.059
0.780	0.410	-0.050	-0.049	-0.049	-0.049	0.410	0.0008	0.018	0.302	3.595	0.058
0.800	0.409	-0.049	-0.048	-0.048	-0.048	0.409	0.0007	0.018	0.302	3.615	0.057

- Prueba 4:  $Q=0.400 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Tabla A-0-4. Obtención de los caldos del perfil de flujo mediante Runge-Kutta para  $Q=0.400 \text{ m}^3/\text{s}$ .

x [m]	y [m]	k <sub>1</sub>	k <sub>2</sub>	k <sub>3</sub>	k <sub>4</sub>	y <sub>m</sub> [m]	ΔQ	Q <sub>v</sub> [m <sup>3</sup> /s]	Q [m <sup>3</sup> /s]	V [m/s]	Q <sub>v</sub> /Q
0.000	0.500	-0.116	-0.115	-0.115	-0.114			0.000	0.400	3.207	0.000
0.020	0.497	-0.114	-0.112	-0.112	-0.111	0.499	0.0018	0.002	0.399	3.222	0.005
0.040	0.495	-0.111	-0.110	-0.110	-0.109	0.496	0.0018	0.004	0.397	3.237	0.009
0.060	0.493	-0.109	-0.107	-0.107	-0.106	0.494	0.0018	0.005	0.395	3.251	0.014
0.080	0.491	-0.106	-0.105	-0.105	-0.104	0.492	0.0017	0.007	0.393	3.265	0.018
0.100	0.489	-0.104	-0.103	-0.103	-0.102	0.490	0.0017	0.009	0.392	3.279	0.022
0.120	0.487	-0.102	-0.101	-0.101	-0.100	0.488	0.0017	0.011	0.390	3.292	0.026
0.140	0.485	-0.100	-0.099	-0.099	-0.098	0.486	0.0017	0.012	0.388	3.305	0.031
0.160	0.483	-0.098	-0.097	-0.097	-0.096	0.484	0.0016	0.014	0.387	3.319	0.035
0.180	0.481	-0.096	-0.095	-0.095	-0.094	0.482	0.0016	0.015	0.385	3.331	0.039
0.200	0.479	-0.094	-0.093	-0.093	-0.092	0.480	0.0016	0.017	0.383	3.344	0.043
0.220	0.477	-0.092	-0.091	-0.091	-0.091	0.478	0.0016	0.019	0.382	3.357	0.047

0.240	0.475	-0.091	-0.090	-0.090	-0.089	0.476	0.0015	0.020	0.380	3.369	0.050
0.260	0.473	-0.089	-0.088	-0.088	-0.087	0.474	0.0015	0.022	0.379	3.381	0.054
0.280	0.472	-0.087	-0.087	-0.087	-0.086	0.472	0.0015	0.023	0.377	3.393	0.058
0.300	0.470	-0.086	-0.085	-0.085	-0.084	0.471	0.0015	0.025	0.376	3.405	0.062
0.320	0.468	-0.084	-0.084	-0.084	-0.083	0.469	0.0014	0.026	0.374	3.416	0.065
0.340	0.466	-0.083	-0.082	-0.082	-0.081	0.467	0.0014	0.027	0.373	3.428	0.069
0.360	0.465	-0.081	-0.081	-0.081	-0.080	0.466	0.0014	0.029	0.372	3.439	0.072
0.380	0.463	-0.080	-0.079	-0.079	-0.079	0.464	0.0014	0.030	0.370	3.450	0.076
0.400	0.462	-0.079	-0.078	-0.078	-0.077	0.462	0.0014	0.032	0.369	3.461	0.079
0.420	0.460	-0.077	-0.077	-0.077	-0.076	0.461	0.0013	0.033	0.367	3.472	0.082
0.440	0.459	-0.076	-0.075	-0.075	-0.075	0.459	0.0013	0.032	0.368	3.500	0.081
0.460	0.457	-0.075	-0.074	-0.074	-0.074	0.458	0.0013	0.032	0.368	3.528	0.080
0.480	0.456	-0.074	-0.073	-0.073	-0.073	0.456	0.0013	0.031	0.369	3.556	0.079
0.500	0.454	-0.073	-0.072	-0.072	-0.071	0.455	0.0013	0.031	0.369	3.584	0.077
0.520	0.453	-0.071	-0.071	-0.071	-0.070	0.453	0.0012	0.031	0.370	3.611	0.076
0.540	0.451	-0.070	-0.070	-0.070	-0.069	0.452	0.0012	0.030	0.370	3.638	0.075
0.560	0.450	-0.069	-0.069	-0.069	-0.068	0.451	0.0012	0.030	0.371	3.665	0.074
0.580	0.448	-0.068	-0.068	-0.068	-0.067	0.449	0.0012	0.029	0.371	3.692	0.073
0.600	0.447	-0.067	-0.067	-0.067	-0.066	0.448	0.0012	0.029	0.372	3.719	0.072
0.620	0.446	-0.066	-0.066	-0.066	-0.065	0.446	0.0012	0.028	0.372	3.745	0.071
0.640	0.444	-0.065	-0.065	-0.065	-0.064	0.445	0.0011	0.028	0.373	3.772	0.070
0.660	0.443	-0.064	-0.064	-0.064	-0.063	0.444	0.0011	0.028	0.373	3.798	0.069
0.680	0.442	-0.063	-0.063	-0.063	-0.062	0.443	0.0011	0.027	0.373	3.824	0.068
0.700	0.441	-0.062	-0.062	-0.062	-0.061	0.441	0.0011	0.027	0.374	3.849	0.067
0.720	0.439	-0.061	-0.061	-0.061	-0.061	0.440	0.0011	0.026	0.374	3.875	0.066
0.740	0.438	-0.061	-0.060	-0.060	-0.060	0.439	0.0011	0.026	0.374	3.901	0.065
0.760	0.437	-0.060	-0.059	-0.059	-0.059	0.438	0.0011	0.026	0.375	3.926	0.064
0.780	0.436	-0.059	-0.059	-0.059	-0.058	0.436	0.0010	0.025	0.375	3.951	0.063
0.800	0.435	-0.058	-0.058	-0.058	-0.057	0.435	0.0010	0.025	0.376	3.976	0.062

- Prueba 5:  $Q=0.500 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Tabla A-0-5. Obtención de los caldos del perfil de flujo mediante Runge-Kutta para  $Q=0.500 \text{ m}^3/\text{s}$ .

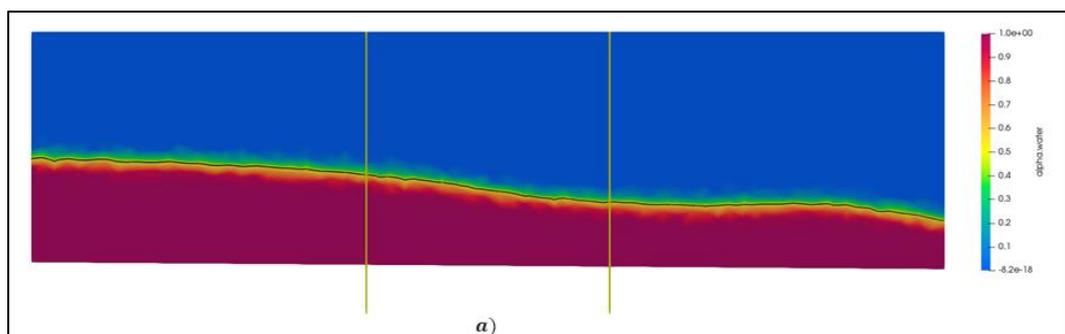
x [m]	y [m]	k <sub>1</sub>	k <sub>2</sub>	k <sub>3</sub>	k <sub>4</sub>	y <sub>m</sub> [m]	ΔQ	Q <sub>v</sub> [m <sup>3</sup> /s]	Q [m <sup>3</sup> /s]	V [m/s]	Q <sub>v</sub> /Q
0.000	0.550	-0.143	-0.142	-0.142	-0.140			0.000	0.500	3.309	0.000
0.020	0.547	-0.140	-0.138	-0.138	-0.137	0.548	0.0026	0.003	0.498	3.326	0.005
0.040	0.544	-0.137	-0.135	-0.135	-0.134	0.546	0.0025	0.005	0.495	3.343	0.010
0.060	0.542	-0.134	-0.132	-0.132	-0.131	0.543	0.0025	0.008	0.493	3.359	0.015
0.080	0.539	-0.131	-0.129	-0.129	-0.128	0.540	0.0024	0.010	0.490	3.375	0.020
0.100	0.536	-0.128	-0.127	-0.127	-0.125	0.538	0.0024	0.012	0.488	3.391	0.025
0.120	0.534	-0.125	-0.124	-0.124	-0.123	0.535	0.0024	0.015	0.485	3.407	0.030
0.140	0.531	-0.123	-0.121	-0.121	-0.120	0.533	0.0023	0.017	0.483	3.422	0.034
0.160	0.529	-0.120	-0.119	-0.119	-0.118	0.530	0.0023	0.019	0.481	3.437	0.039
0.180	0.527	-0.118	-0.117	-0.117	-0.116	0.528	0.0023	0.022	0.479	3.452	0.043
0.200	0.524	-0.116	-0.114	-0.114	-0.113	0.525	0.0022	0.024	0.476	3.467	0.048
0.220	0.522	-0.113	-0.112	-0.112	-0.111	0.523	0.0022	0.026	0.474	3.481	0.052
0.240	0.520	-0.111	-0.110	-0.110	-0.109	0.521	0.0022	0.028	0.472	3.495	0.057
0.260	0.517	-0.109	-0.108	-0.108	-0.107	0.519	0.0021	0.030	0.470	3.509	0.061

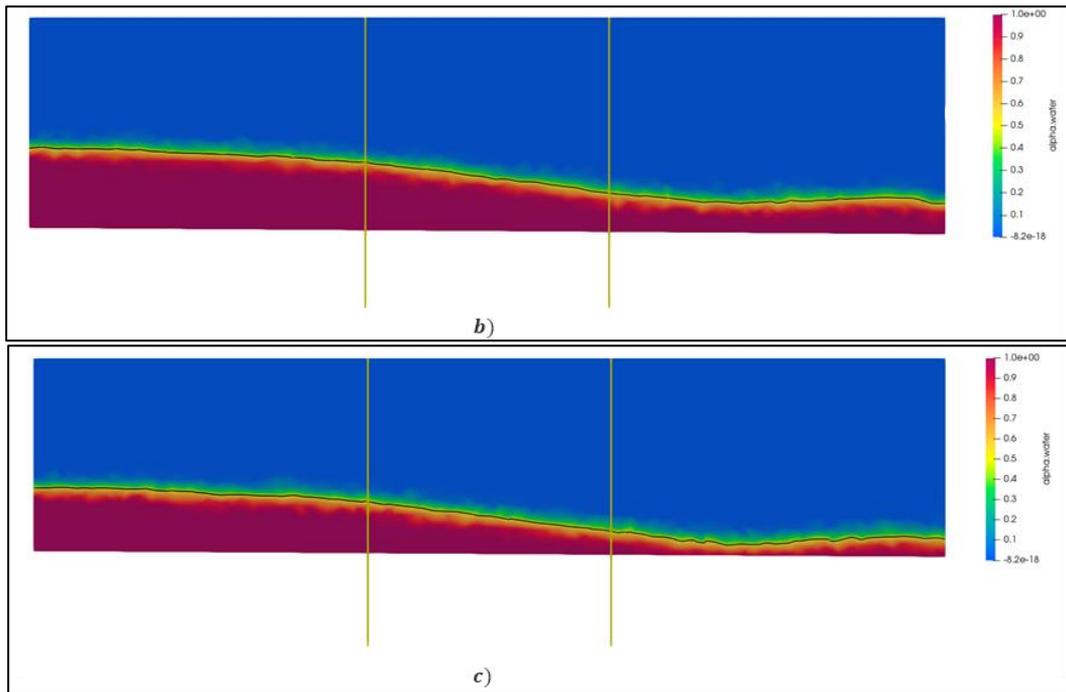
0.280	0.515	-0.107	-0.106	-0.106	-0.105	0.516	0.0021	0.032	0.468	3.523	0.065
0.300	0.513	-0.105	-0.104	-0.104	-0.103	0.514	0.0021	0.035	0.466	3.537	0.069
0.320	0.511	-0.103	-0.103	-0.103	-0.102	0.512	0.0020	0.037	0.464	3.550	0.073
0.340	0.509	-0.102	-0.101	-0.101	-0.100	0.510	0.0020	0.039	0.462	3.563	0.077
0.360	0.507	-0.100	-0.099	-0.099	-0.098	0.508	0.0020	0.041	0.460	3.576	0.081
0.380	0.505	-0.098	-0.097	-0.097	-0.097	0.506	0.0019	0.042	0.458	3.589	0.085
0.400	0.503	-0.097	-0.096	-0.096	-0.095	0.504	0.0019	0.044	0.456	3.602	0.089
0.420	0.501	-0.095	-0.094	-0.094	-0.094	0.502	0.0019	0.046	0.454	3.614	0.093
0.440	0.499	-0.094	-0.093	-0.093	-0.092	0.500	0.0019	0.046	0.455	3.648	0.091
0.460	0.497	-0.092	-0.091	-0.091	-0.091	0.498	0.0018	0.045	0.455	3.680	0.090
0.480	0.496	-0.091	-0.090	-0.090	-0.089	0.497	0.0018	0.044	0.456	3.713	0.088
0.500	0.494	-0.089	-0.088	-0.088	-0.088	0.495	0.0018	0.044	0.457	3.746	0.087
0.520	0.492	-0.088	-0.087	-0.087	-0.086	0.493	0.0018	0.043	0.457	3.778	0.086
0.540	0.490	-0.086	-0.086	-0.086	-0.085	0.491	0.0017	0.042	0.458	3.810	0.084
0.560	0.489	-0.085	-0.084	-0.084	-0.084	0.489	0.0017	0.042	0.459	3.842	0.083
0.580	0.487	-0.084	-0.083	-0.083	-0.083	0.488	0.0017	0.041	0.459	3.874	0.082
0.600	0.485	-0.083	-0.082	-0.082	-0.081	0.486	0.0017	0.040	0.460	3.906	0.081
0.620	0.484	-0.081	-0.081	-0.081	-0.080	0.484	0.0016	0.040	0.460	3.937	0.080
0.640	0.482	-0.080	-0.080	-0.080	-0.079	0.483	0.0016	0.039	0.461	3.968	0.079
0.660	0.480	-0.079	-0.079	-0.079	-0.078	0.481	0.0016	0.039	0.461	3.999	0.077
0.680	0.479	-0.078	-0.077	-0.077	-0.077	0.480	0.0016	0.038	0.462	4.030	0.076
0.700	0.477	-0.077	-0.076	-0.076	-0.076	0.478	0.0016	0.038	0.463	4.061	0.075
0.720	0.476	-0.076	-0.075	-0.075	-0.075	0.477	0.0015	0.037	0.463	4.092	0.074
0.740	0.474	-0.075	-0.074	-0.074	-0.074	0.475	0.0015	0.037	0.464	4.123	0.073
0.760	0.473	-0.074	-0.073	-0.073	-0.073	0.473	0.0015	0.036	0.464	4.153	0.072
0.780	0.471	-0.073	-0.072	-0.072	-0.072	0.472	0.0015	0.036	0.465	4.183	0.071
0.800	0.470	-0.072	-0.071	-0.071	-0.071	0.471	0.0015	0.035	0.465	4.213	0.070

## Anexo E: Resultados del Método Numérico para las pruebas 2, 3 y 4

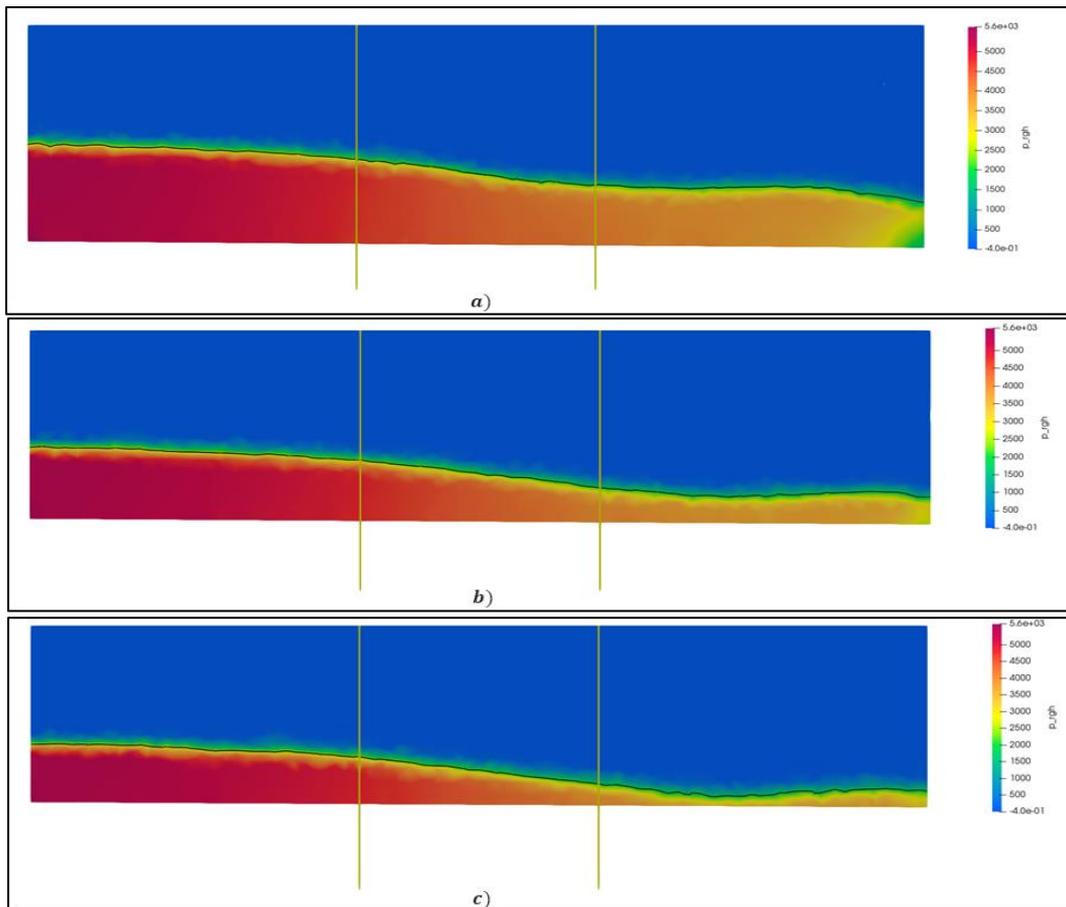
En este anexo se muestran los resultados obtenidos de la simulación en el software OpenFOAM para la Prueba 2, Prueba 3, y Prueba 4. Las gráficas muestran el perfil longitudinal a  $T/3$ ;  $T/2$ ;  $2T/3$  tomando como referencia la pared vertical del canal para las variables de Fracción de Volumen, Presión, Magnitud de la Velocidad y la Velocidad en el sentido del flujo.

- Prueba 1:  $Q=0.250 \text{ m}^3/\text{s}$

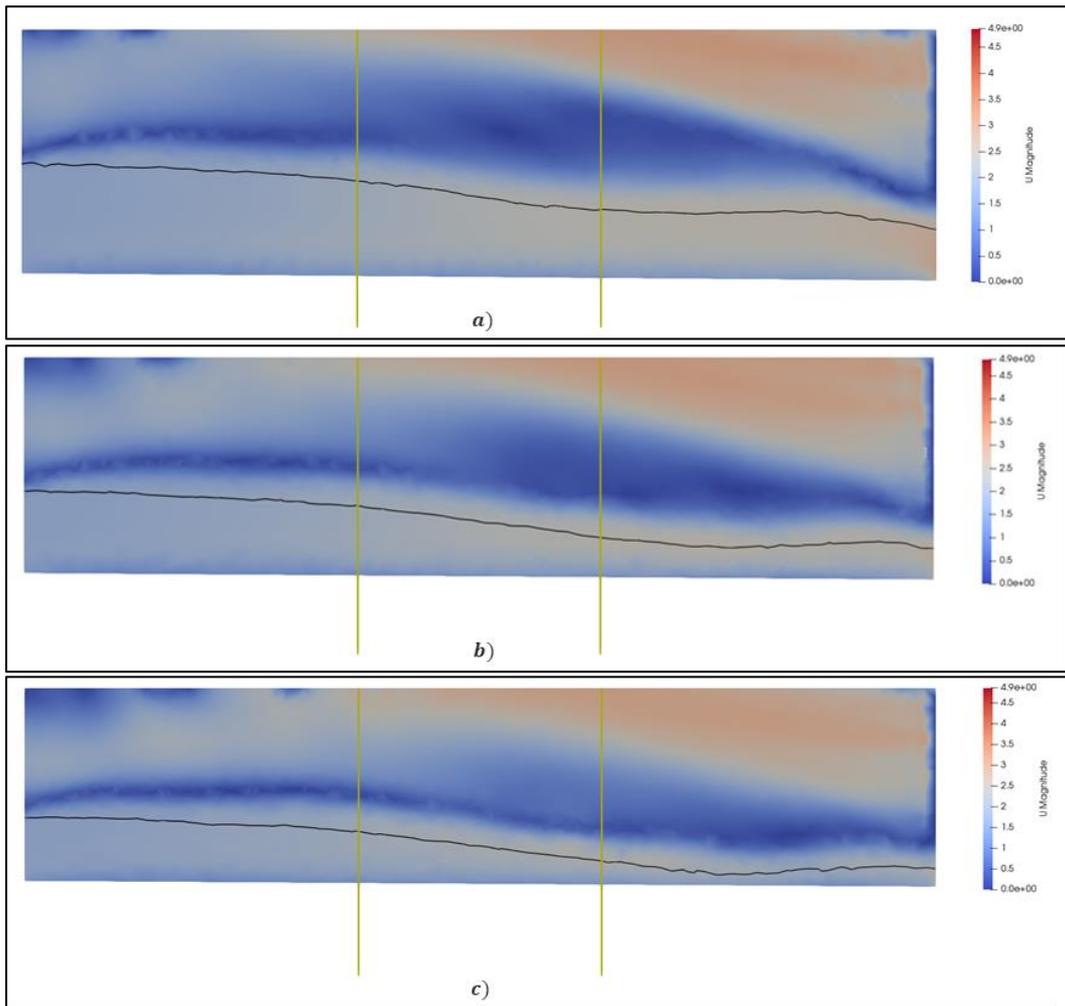




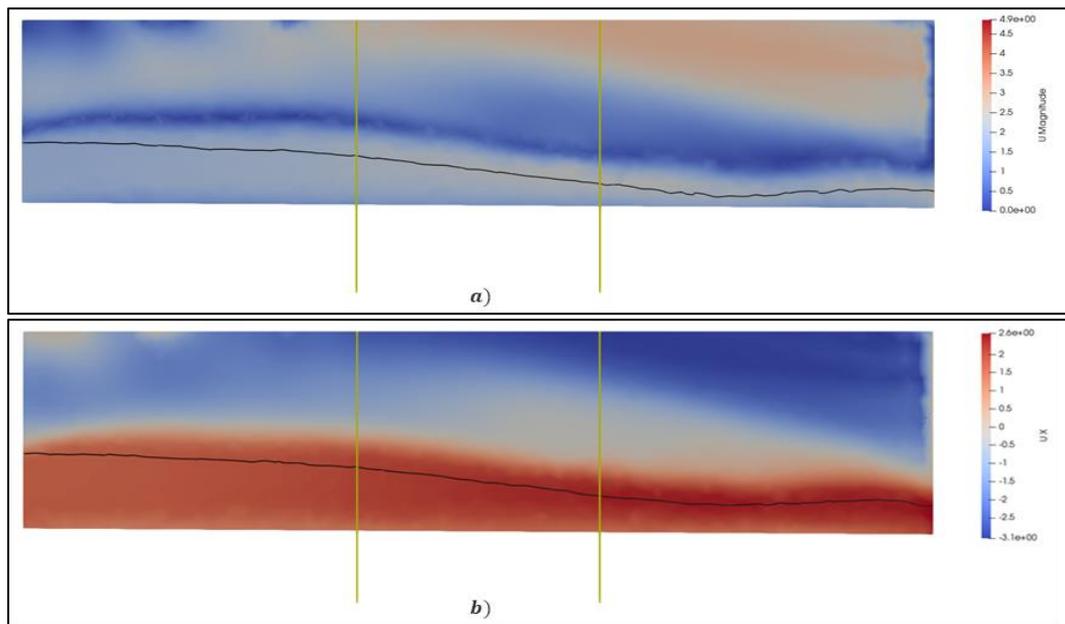
Anexo 36. Prueba 2: Fracción de volumen (alpha.water), para las distancias a) T/3, b) T/2 y c) 2T/3

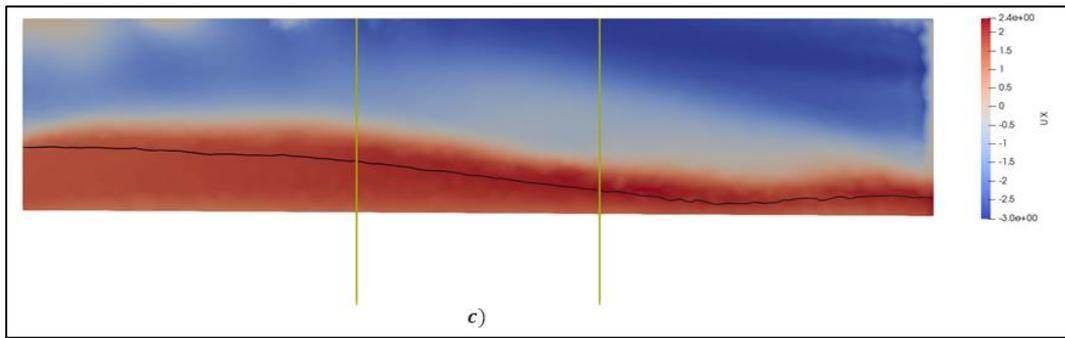


Anexo 37. Prueba 2: Presión (p\_rgh), para las distancias a) T/3, b) T/2 y c) 2T/3.



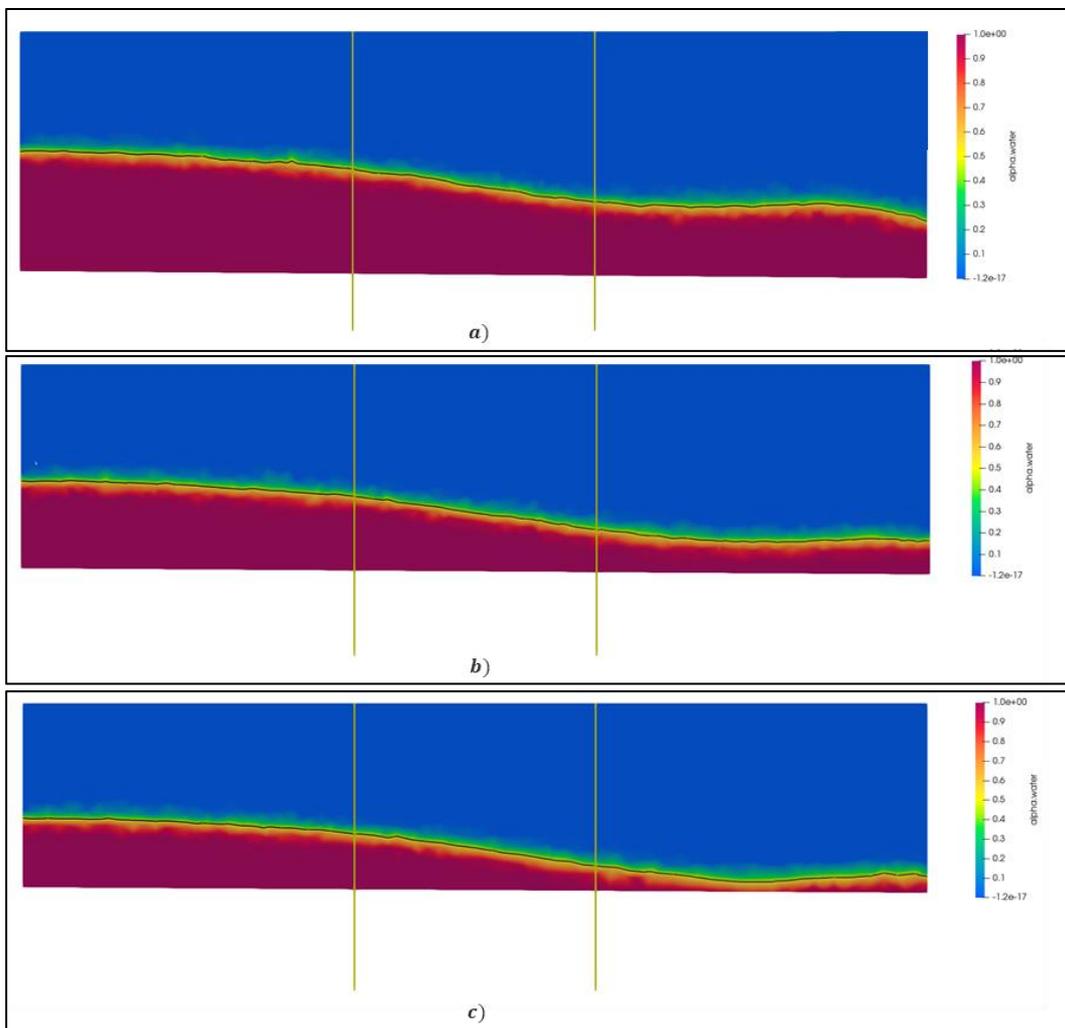
Anexo 38. Prueba 2: Magnitud de la velocidad (U), para las distancias a) T/3, b) T/2 y c) 2T/3.



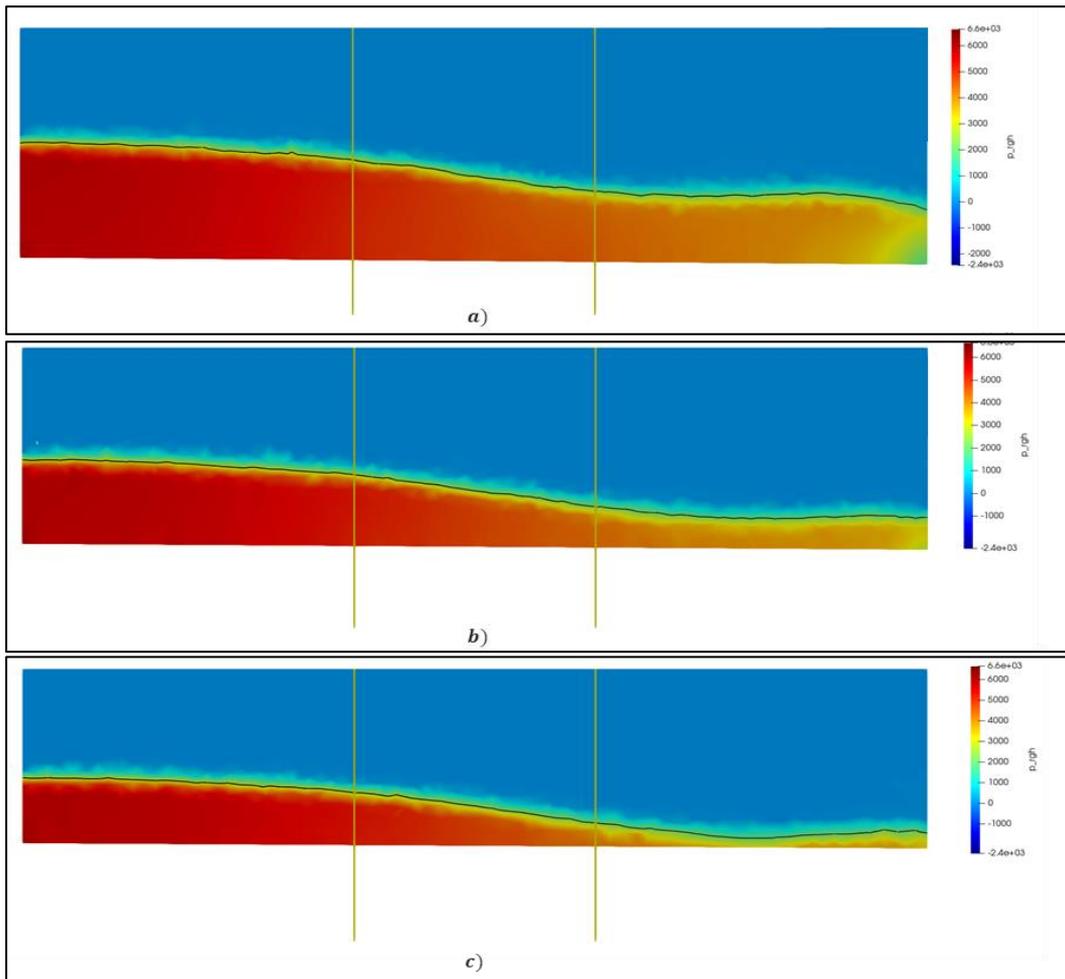


Anexo 39. Prueba 2: Velocidad en dirección del flujo ( $U_x$ ), para las distancias a)  $T/3$ , b)  $T/2$  y c)  $2T/3$ .

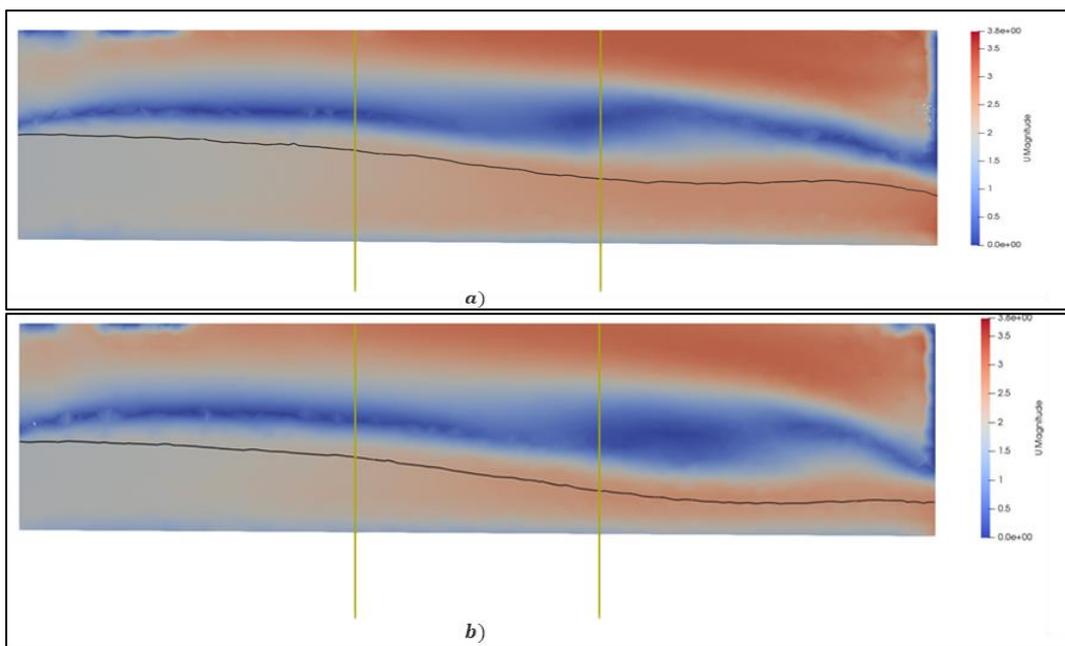
- Prueba 3:  $Q=0.320 \text{ m}^3/\text{s}$

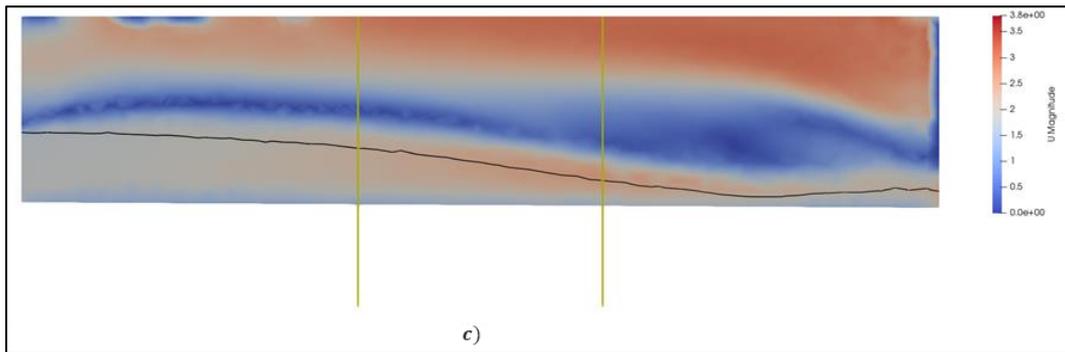


Anexo 40. Prueba 3: Fracción de volumen ( $\alpha_{\text{water}}$ ), para las distancias a)  $T/3$ , b)  $T/2$  y c)  $2T/3$

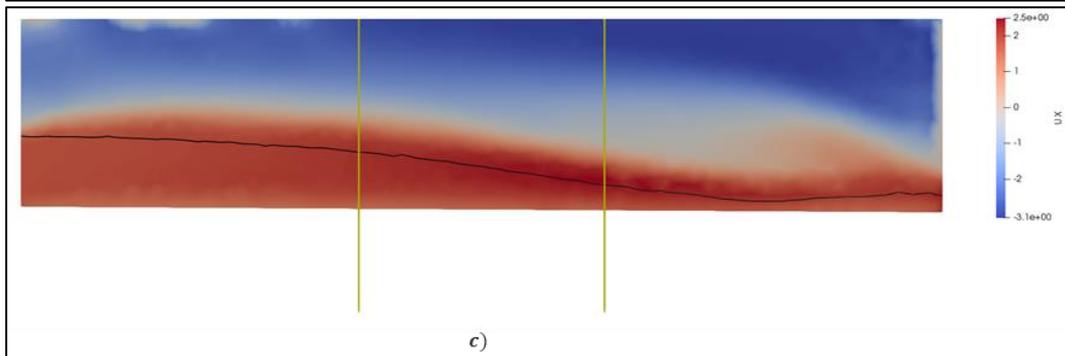
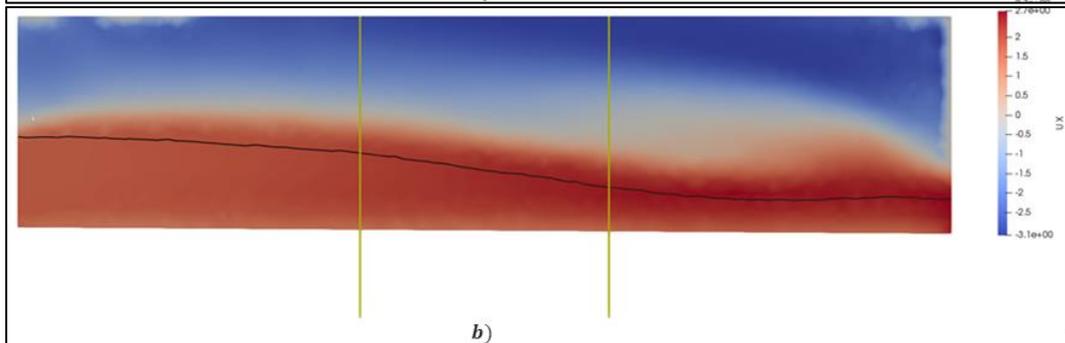
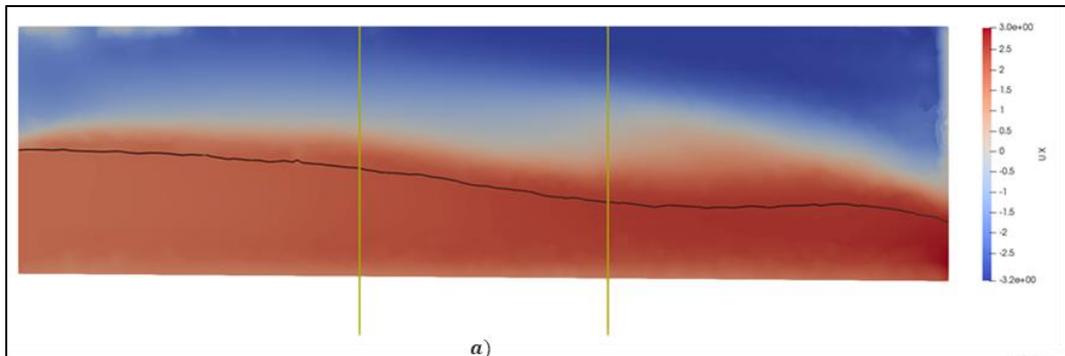


Anexo 41. Prueba 3: Presión ( $p_rgh$ ), para las distancias a) T/3, b) T/2 y c) 2T/3.



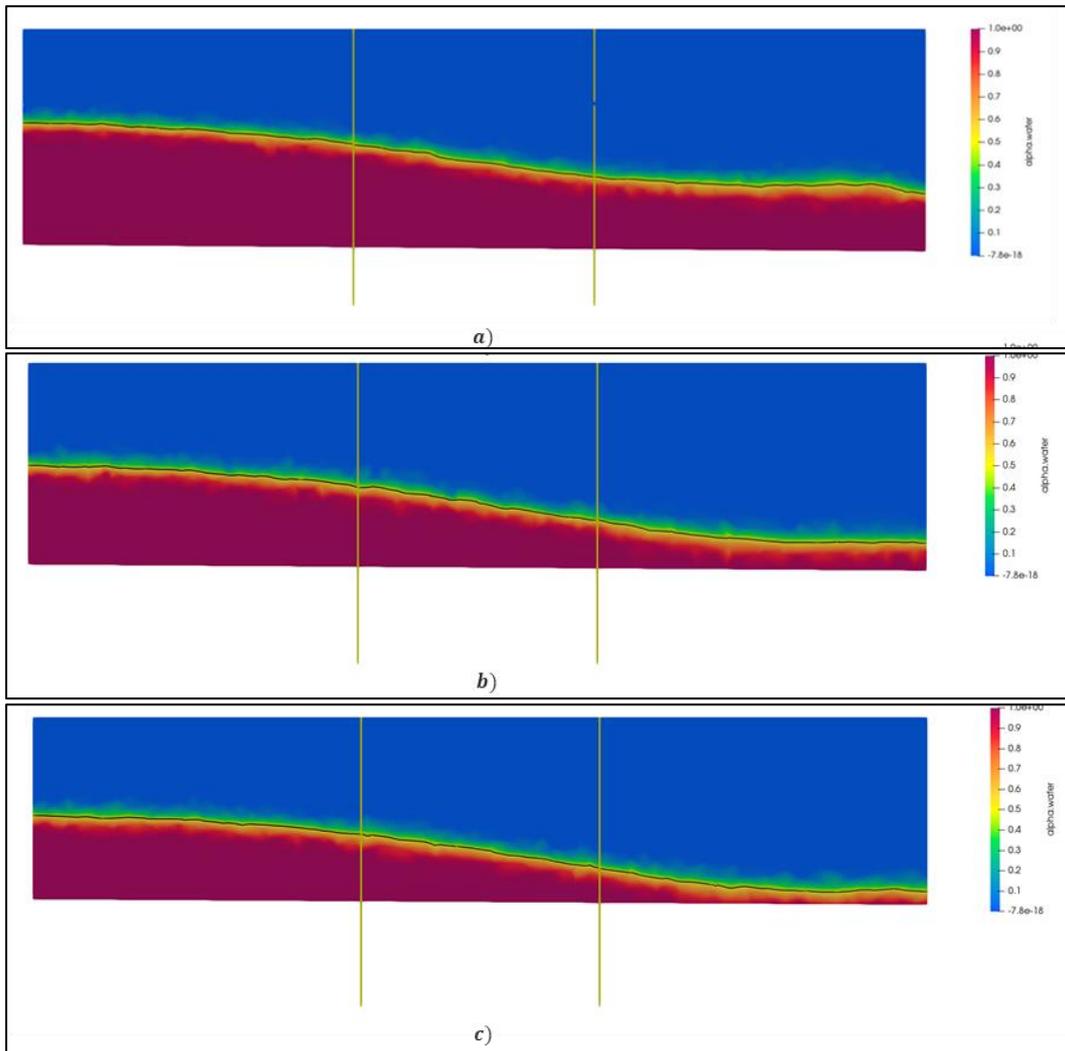


Anexo 42. Prueba 3: Magnitud de la velocidad (U), para las distancias a)  $T/3$ , b)  $T/2$  y c)  $2T/3$ .

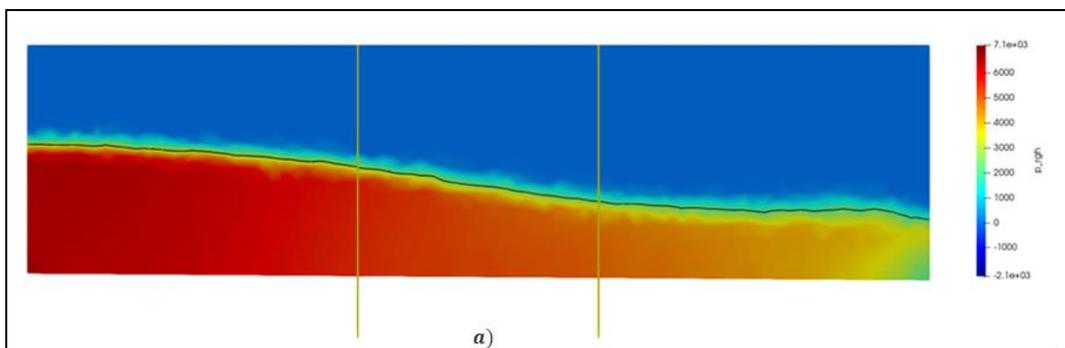


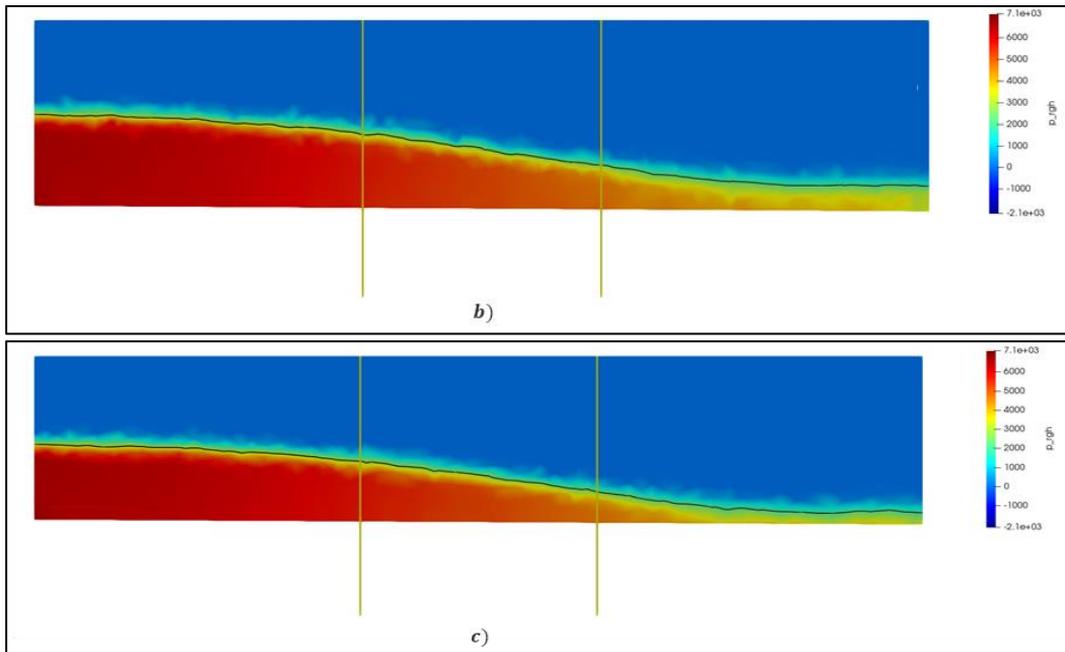
Anexo 43. Prueba 3: Velocidad en dirección del flujo ( $U_x$ ), para las distancias a)  $T/3$ , b)  $T/2$  y c)  $2T/3$ .

- Prueba 4:  $Q=0.400 \text{ m}^3/\text{s}$

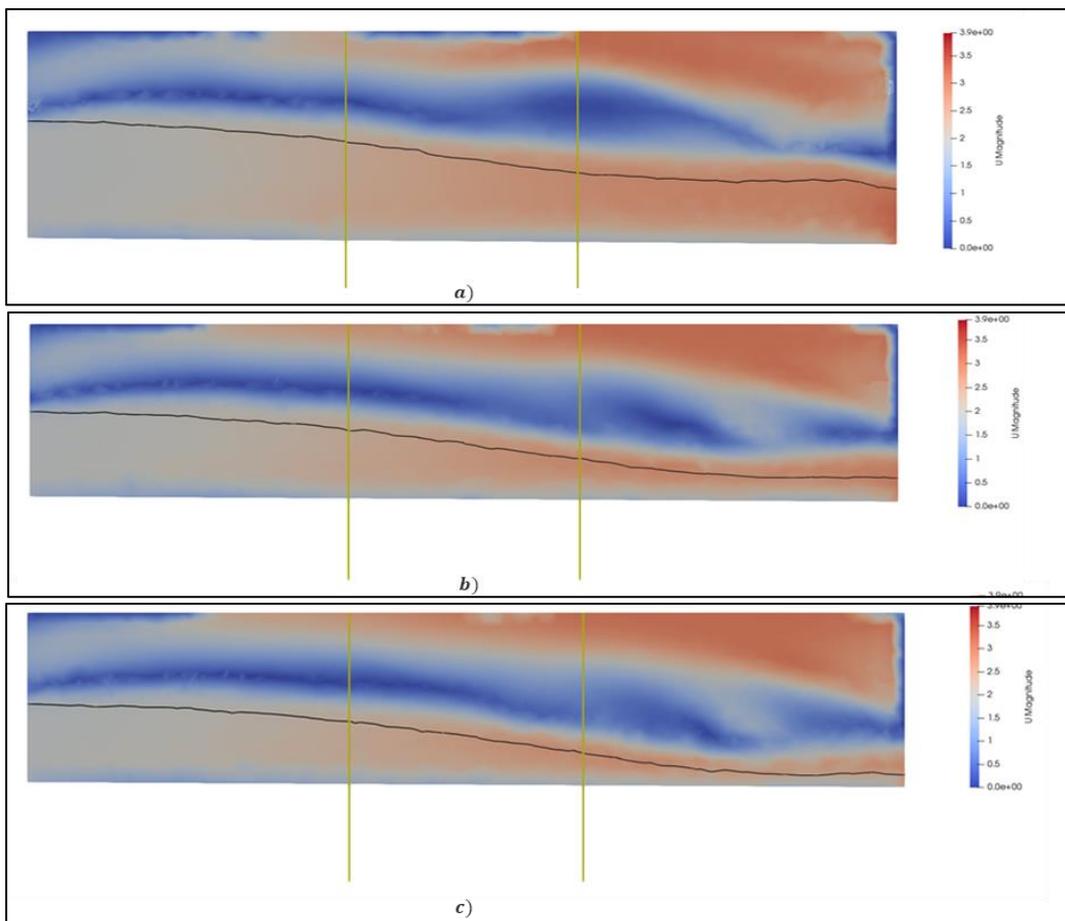


Anexo 44. Prueba 4: Fracción de volumen (alpha.water), para las distancias a) T/3, b) T/2 y c) 2T/3

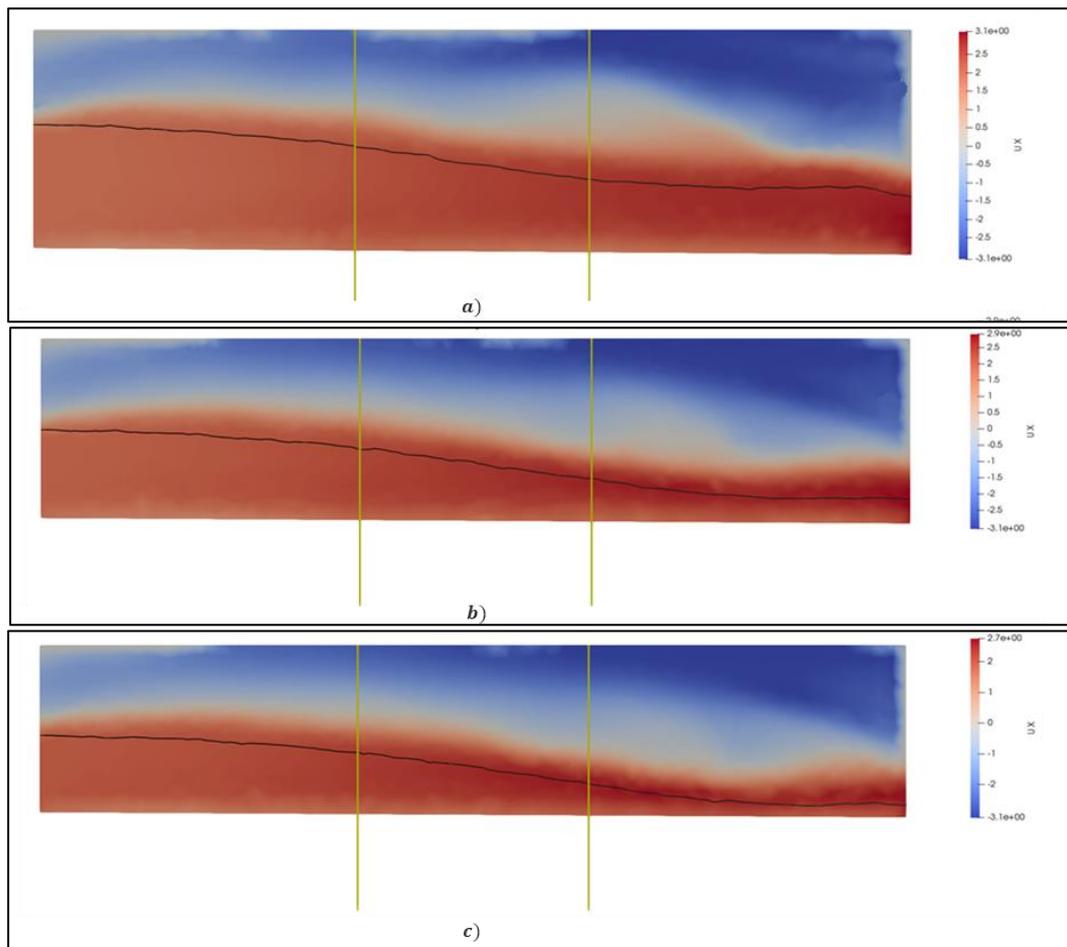




Anexo 45. Prueba 3: Presión ( $p_{rgh}$ ), para las distancias a) T/3, b) T/2 y c) 2T/3.



Anexo 46. Prueba 4: Magnitud de la velocidad ( $U$ ), para las distancias a) T/3, b) T/2 y c) 2T/3.



Anexo 47. Prueba 4: Velocidad en dirección del flujo ( $U_x$ ), para las distancias a)  $T/3$ , b)  $T/2$  y c)  $2T/3$ .