Aplicaciones de la integral definida: Áreas y Volúmenes

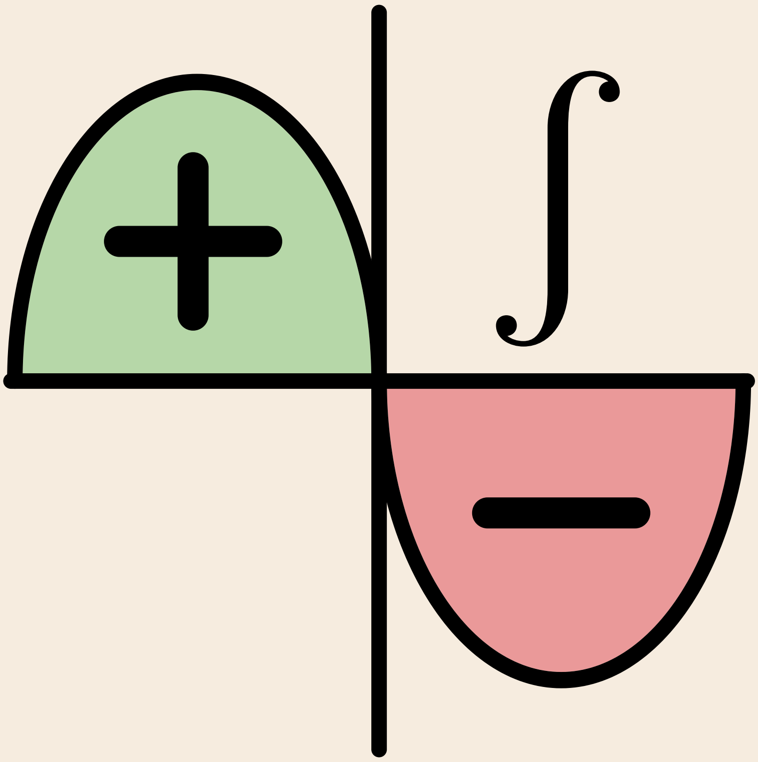
Santiago Ulloa

La Integral Definida

Secuencia didáctica para el docente

Clase 1

LA INTEGRAL DEFINIDA: DEFINICIONES



SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL DOCENTE

LA INTEGRAL DEFINIDA: DEFINICIONES

RESULTADO DE APRENDIZAJE

RdA1. Aplica la Teoría del Cálculo Integral a funciones polinómicas, racionales y algebraicas en sus diferentes capítulos, que son herramientas fundamentales para el Área de
Tecnología

OBJETIVOS:

Construir el concepto de integral "definida" haciendo uso de la definición de sumas de Riemann utilizando el software GeoGebra

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

ACTIVIDADES DE APERTURA

Encontrar las palabras enmarcadas en la siguiente sopa de letras

S	R	P	X	P	T	R	U	F	Q	E	T	T	Z
I	R	F	Z	S	B	R	Y	E	Q	B	L	D	E
N	D	U	O	C	O	N	S	T	A	N	T	E	D
T	A	N	T	I	D	E	R	I	V	A	D	A	W
E	T	C	T	D	F	I	B	J	U	E	D	T	N
R	O	I	P	T	N	K	U	Q	O	Z	V	S	D
V	R	Ó	Q	B	S	D	B	O	U	C	I	U	Z
A	U	N	T	G	M	E	A	K	R	O	J	R	K
L	W	S	N	X	H	R	S	Y	Z	N	I	T	Z
O	T	Y	N	P	Y	I	S	Y	T	T	G	B	J
F	E	G	M	T	N	V	J	B	O	I	F	T	B
M	E	N	K	R	D	A	M	Q	S	N	H	U	U
B	H	H	U	H	J	D	O	J	I	U	D	E	V
W	L	U	K	G	U	A	W	H	G	A	V	J	X

Antiderivada   Constante   Continua   Derivada   Función   Intervalo

Forma grupos de 3 personas, y con ayuda de tus compañeros, crea una definición de integral indefinida con las palabras del anterior crucigrama.

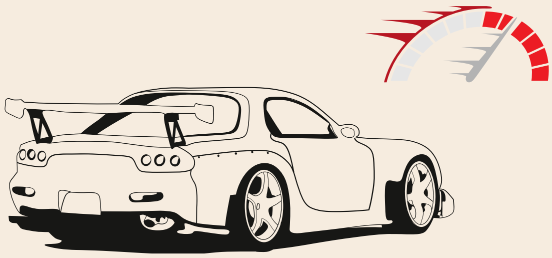
DEFINICIÓN

Compartir la definición elaborada con los compañeros, y a partir de esas elaborar una única definición.

ACTIVIDADES DE DESARROLLO

El docente expone la siguiente idea intuitiva a los estudiantes para construir el concepto de integral definida

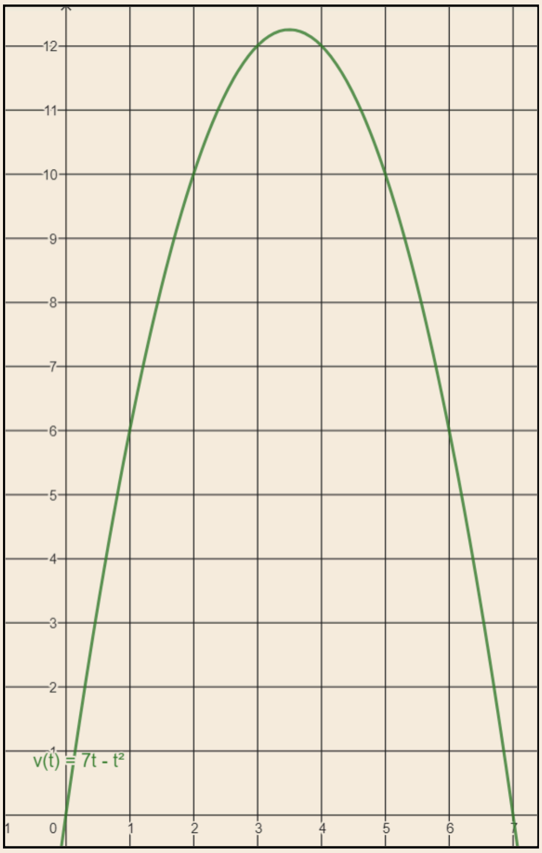
Tenemos un auto que se mueve con una rapidez variable, es decir cambia a medida que transcurre el tiempo. Imagina que ese auto parte del reposo y lentamente la rapidez va aumentando hasta que en un cierto tiempo va frenando hasta que se detiene en un tiempo total de 7 segundos. Ahora **¿Cómo podemos calcular la distancia recorrida por el auto en ese intervalo de tiempo?**



Ahora proceda a presentar la siguiente función, la cual es la que describe la trayectoria del auto (gráfica velocidad vs tiempo).

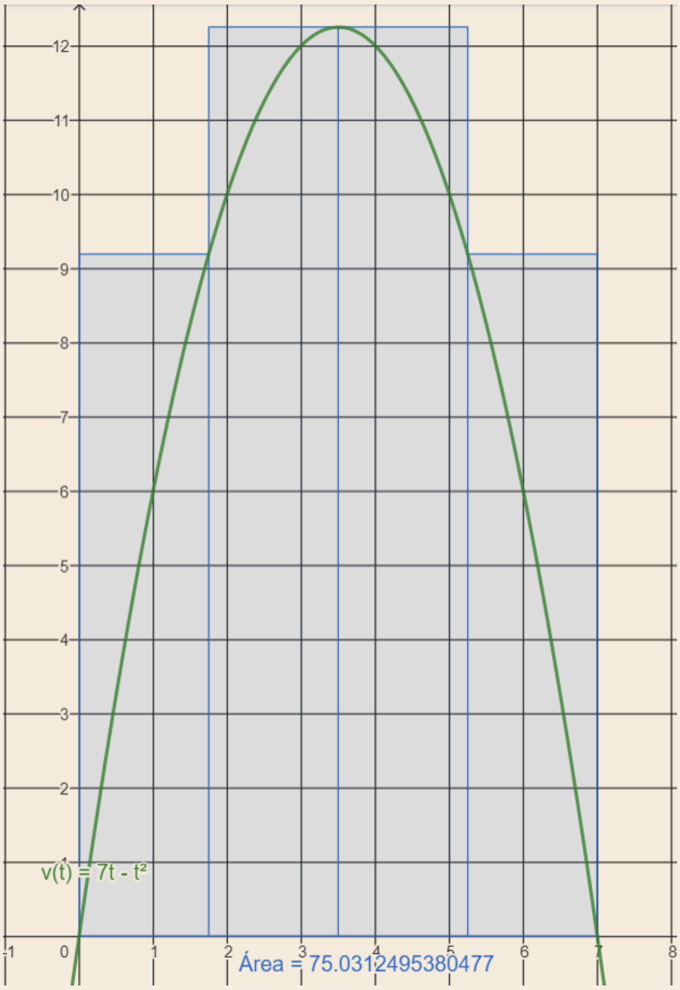
$$v(t) = 7t - t^2$$

Pida a los estudiantes que grafiquen dicha función el software GeoGebra

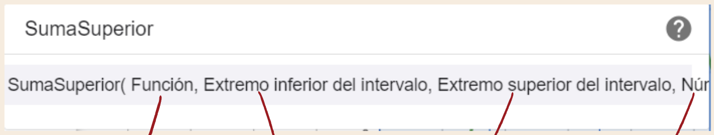


Ahora plantee la siguiente idea a sus estudiantes: **Para encontrar la distancia recorrida tenemos que hallar el área bajo la curva.**
Además, mencione la siguiente cuestión. **Se tiene que hallar esa área haciendo uso de figuras geométricas conocidas (rectángulos)**. Es por ello que se va a dividir al intervalo de tiempo en cuatro intervalos del mismo ancho. El valor del área aproximada será la suma de esos cuatro rectángulos:

$$A_{aproximada} \approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$



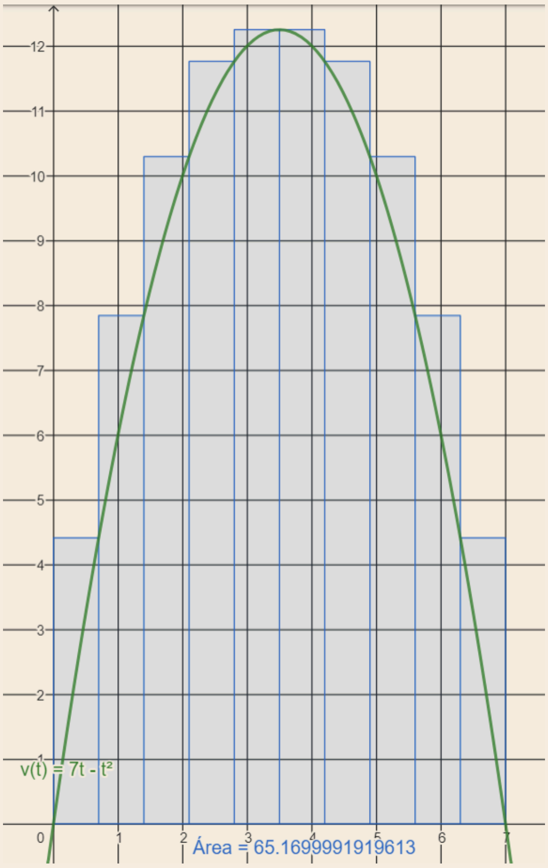
El comando a ingresar en GeoGebra es: **SumaSuperior**



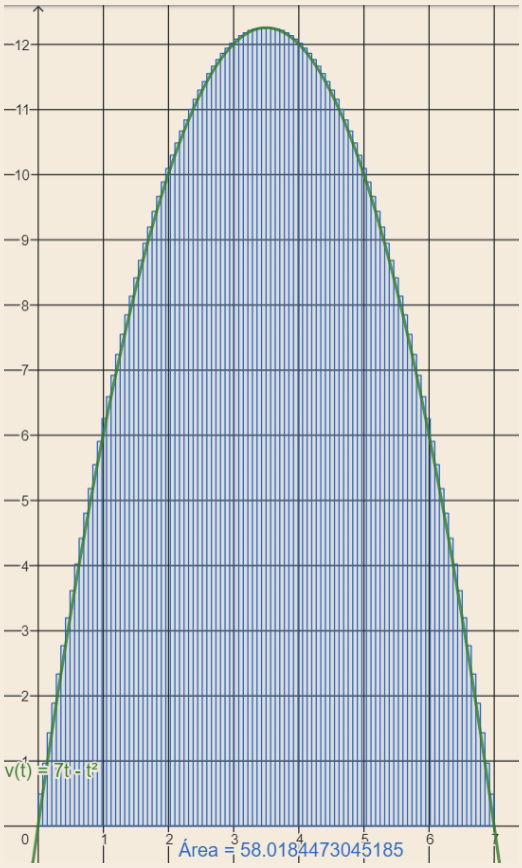
Función dada **Inicio del intervalo** **Fin del intervalo** **Número de rectángulos**

$$A_{aprox} = 75,031u^2$$

Ahora se les pide que incremente el número de rectángulos para encontrar una aproximación mejor:



10 rectángulos



100 rectángulos

$$A_{10} = 65,169u^2$$

$$A_{100} = 58,018u^2$$

Plantee la siguiente pregunta: **¿Qué pasa con el valor del área si el número de rectángulos hacemos tender 1000, 10 000, 1 000 000, hacia el infinito?**

El sumar rectángulos con anchura cada vez menos, es decir tienden a 0 y donde su altura depende del valor de la función en dicho punto se las conoce como **Sumas de Riemann:**

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right) \triangle x$$

Sumar infinitos rectángulos

Altura del rectángulo

Ancho del rectángulo

$$\triangle x = \frac{b-a}{n}$$

Extremos del intervalo

Número de rectángulos

SUMAS DE RIEMANN

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \triangle x$$

Cuando este ancho tiene a cero se lo conoce como dx

A la expresión del límite con la sumatoria se la representa con el símbolo de la **"s alargada"**

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Integral definida

Teniendo en cuenta esto, pida que respondan la siguiente pregunta:

¿Qué es la integral definida?

- ***Definición:*** ______________________
- ______________________
- ______________________
- ______________________

El docente puede complementar la definición señalando que la integral definida representa la suma de los infinitos rectángulos con los que obtenemos el valor del área.

Plantee a sus estudiantes que calcular el valor del área bajo la curva haciendo uso de las sumas de Riemann es una tarea compleja por lo que se obtendrá otra expresión para que facilite estos cálculos

$$A = \int_a^b f(x)dx = \underbrace{F(b) - F(a)}_{\text{Antiderivada evaluada en los extremos del intervalo}}$$

A la expresión anterior se lo conoce como la **Regla de Barrow o El Segundo Teorema Fundamental del Cálculo**

Con esto pida a los estudiantes que respondas las siguientes preguntas:

- **Complete la siguiente tabla haciendo uso de GeoGebra y en relación a la suma de áreas de rectángulos:**

Valor del área	Número de rectángulos
	4
	10
	100
	1000
	1000
	1000000

- **Compare el resultado con el valor de la integral aplicando el segundo teorema fundamental de cálculo, ¿con cuál número de rectángulos se asemeja mejor el valor del área? ¿Cuánta distancia ha recorrido dicho automóvil durante ese intervalo de tiempo?**

Por último, se deja en claro la interpretación de la integral definida.

ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN

- Retroalimentación de los temas tratados.
- Resolución de inquietudes.
- Los estudiantes resolverán el siguiente taller en casa.

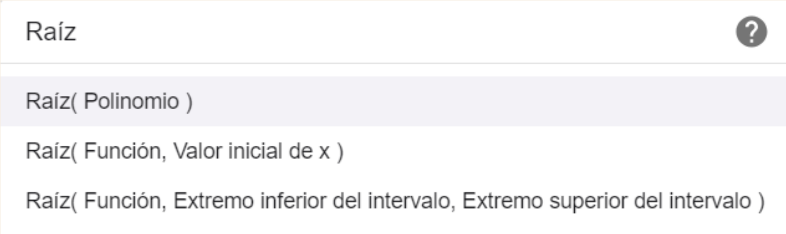
Taller

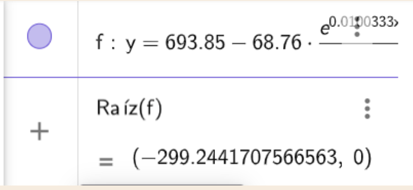
La obra arquitectónica en forma de arco catenario es el Gateway Arch de San Luis (Missouri) diseñada por el arquitecto finlandés Eero Saarinen. Este arco tiene como ecuación la siguiente expresión

$$y = 693,85 - 68,76 \times \left(\frac{e^{0,0100333x} + e^{-0,0100333x}}{2} \right)$$

En base a esto, con ayuda del software GeoGebra, realice las siguientes actividades:

- Ingrese dicha ecuación en GeoGebra y obtenga su respectiva gráfica.
- Obtén las raíces (puntos de corte con el eje x) para obtener los extremos del intervalo. Puedes ayudarte escribiendo en el panel de entrada el comando **Raíz.** En el valor de **polinomio** ingresa la función graficada anteriormente.





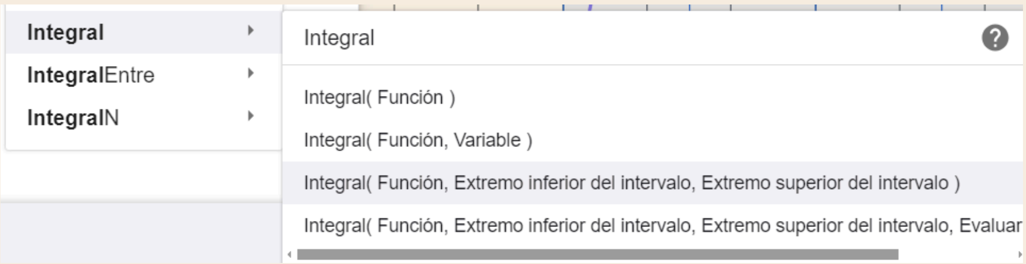
Extremos del intervalo: [...,...] (aproxima a 4 cifras decimales)

- ¿Cuál es la anchura de ese intervalo?

- Ahora con el comando **SumaSuperior** divide a ese intervalo de acuerdo a la siguiente tabla y anota el valor de dicha suma.

Valor del área	Número de rectángulos
	4
	10
	100
	1000
	1000
	100000

- Comprueba con cual valor de número de rectángulo se aproxima mejor el área bajo esa curva. Para ello puedes utilizar el comando **Integral**



Valor del área con el comando Integral	
Valor del área con el comando SumaSuperior	

CONCLUSIONES

- **¿Cuál es la diferencia entre una integral definida y una integral indefinida?**

- **¿Cómo fue tu experiencia aprendiendo este nuevo tema con ayuda de la secuencia didáctica? ¿Qué nuevo aprendizaje obtuve?**

- **Compare sus respuestas con la información mostrada a continuación y analice sus similitudes y diferencias.**

Geométricamente la integral definida representa el área bajo la curva de una función dada. Existen diversas formas para poder calcular:

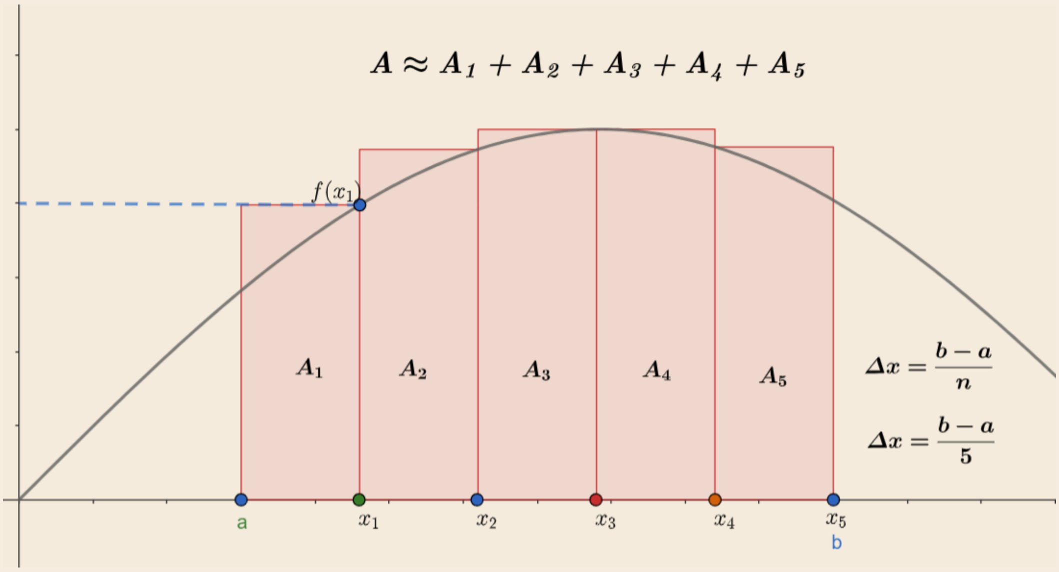
Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo $[a,b]$. La distancia entre intervalo está dada por $|b-a|$ (valor absoluto porque no existe distancias negativas). Dentro de ese intervalo formemos rectángulos de anchura $\triangle x$ donde:

$$\triangle x = \frac{b-a}{n}$$

n hace referencia al número de rectángulos que queremos en dicho intervalo. Si n es muy grande $\triangle x$ tiene a 0, es decir la anchura de los intervalos es cada vez más pequeño

$$\triangle x = \frac{b-a}{n}$$
$$n \rightarrow \infty$$
$$\triangle x \rightarrow 0$$

La altura de los rectángulos serán la función evaluada en dicho valor



El área de dichos rectángulos estará dada por:

$$A \approx f(x_1) \triangle x + f(x_2) \triangle x + f(x_3) \triangle x + f(x_4) \triangle x + f(x_5) \triangle x$$

$$A \approx \sum_{i=1}^{5} f(x_i)\Delta x$$

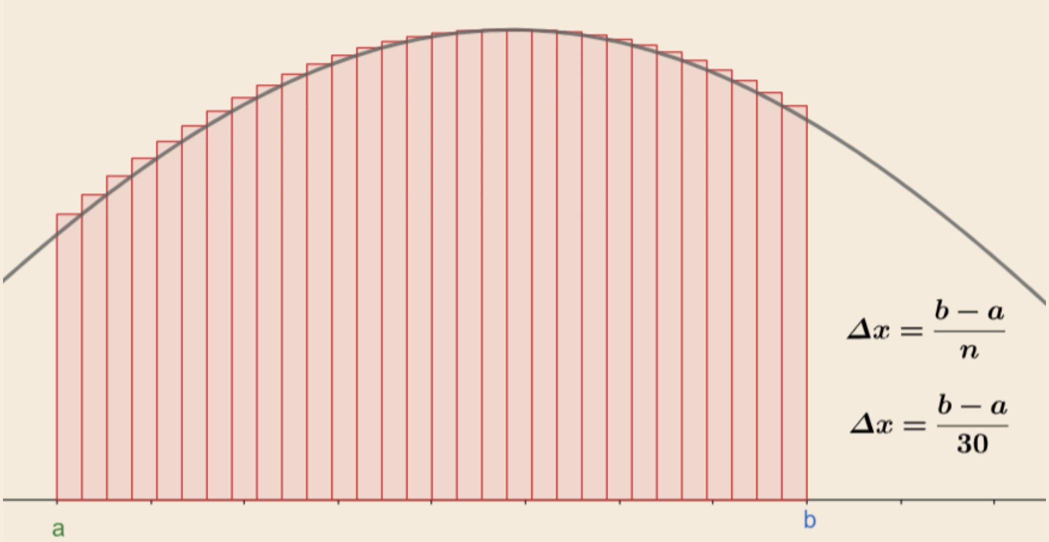
Si tomamos infinitos rectángulos tenemos:

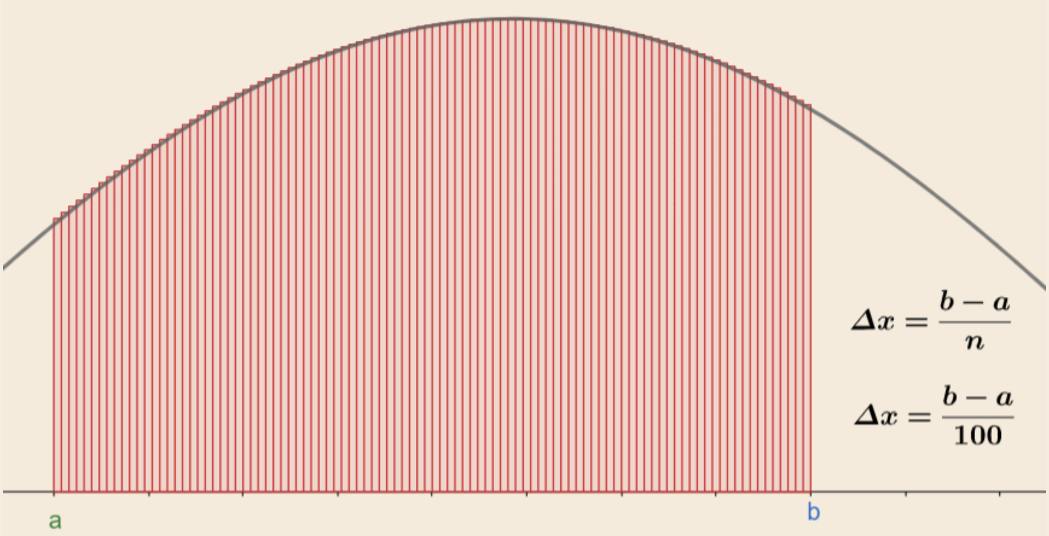
$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \triangle x$$

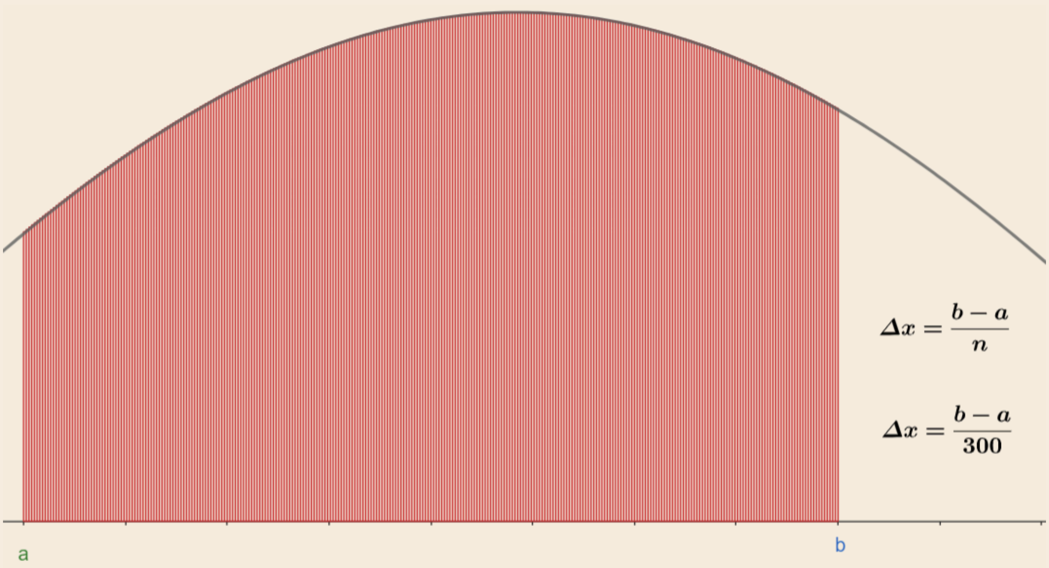
Si reemplazamos la expresión límite de la sumatoria por:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \triangle x$$

$$A = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$


$\Delta x = \frac{b-a}{n}$
$\Delta x = \frac{b-a}{30}$
a
b


$\Delta x = \frac{b-a}{n}$
$\Delta x = \frac{b-a}{100}$
a
b

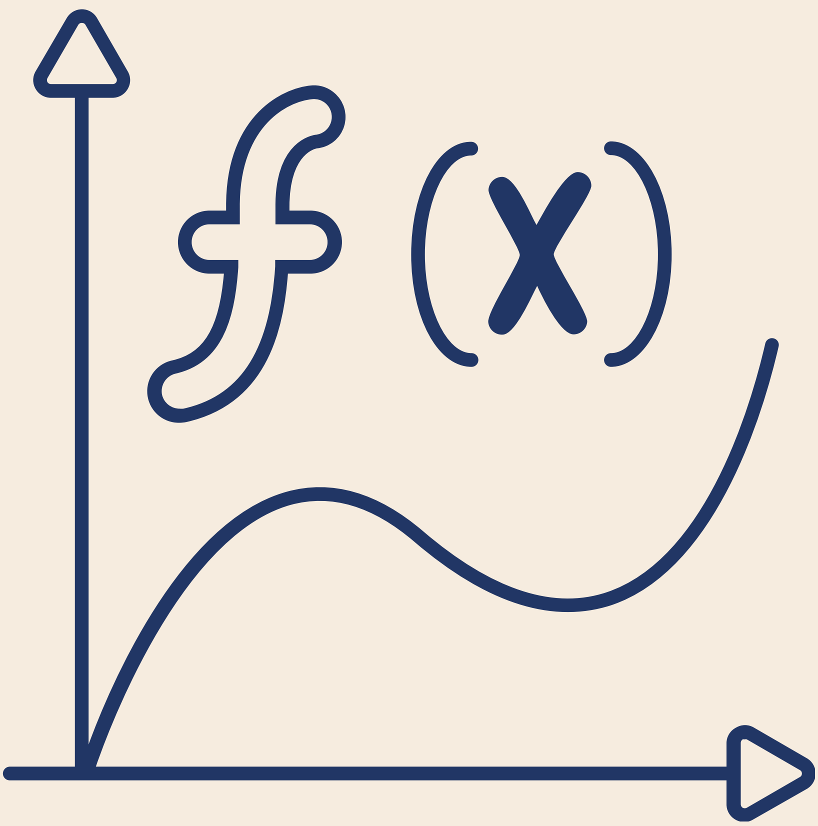

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$
$\Delta x = \frac{b-a}{300}$
a
b

Área de figuras planas

Secuencia didáctica para el docente

Clase 2

LA INTEGRAL DEFINIDA: ÁREA DE FIGURAS PLANAS



SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL DOCENTE

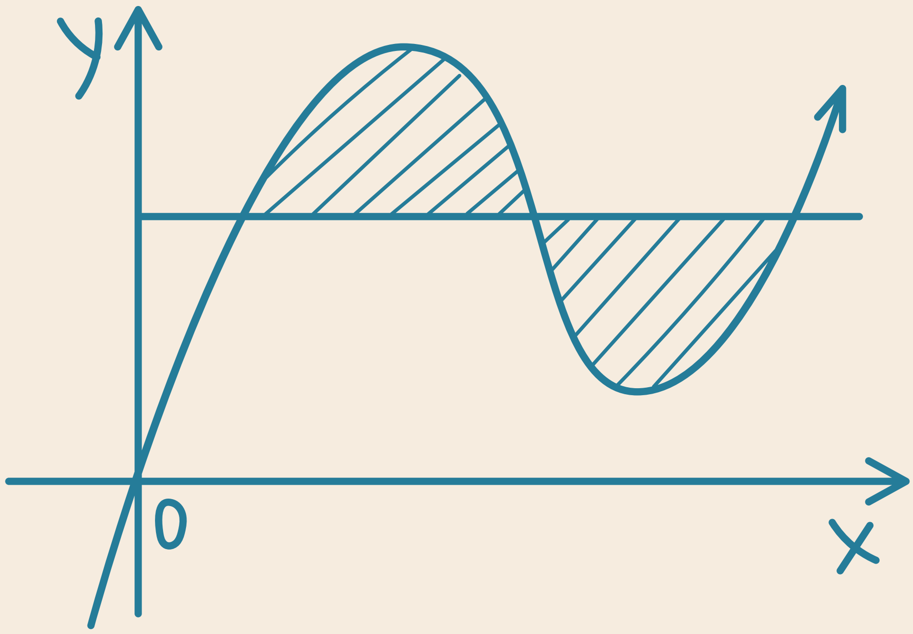
ÁREA DE FIGURAS PLANAS

RESULTADO DE APRENDIZAJE

RdA2. Calcula mediante integrales, áreas de superficies planas y volúmenes de sólidos de revolución, Calcula centros de masa y momentos de inercia

OBJETIVO:

Calcular el área de regiones planas limitada por curvas haciendo uso de la integral definida con ayuda del software GeoGebra.

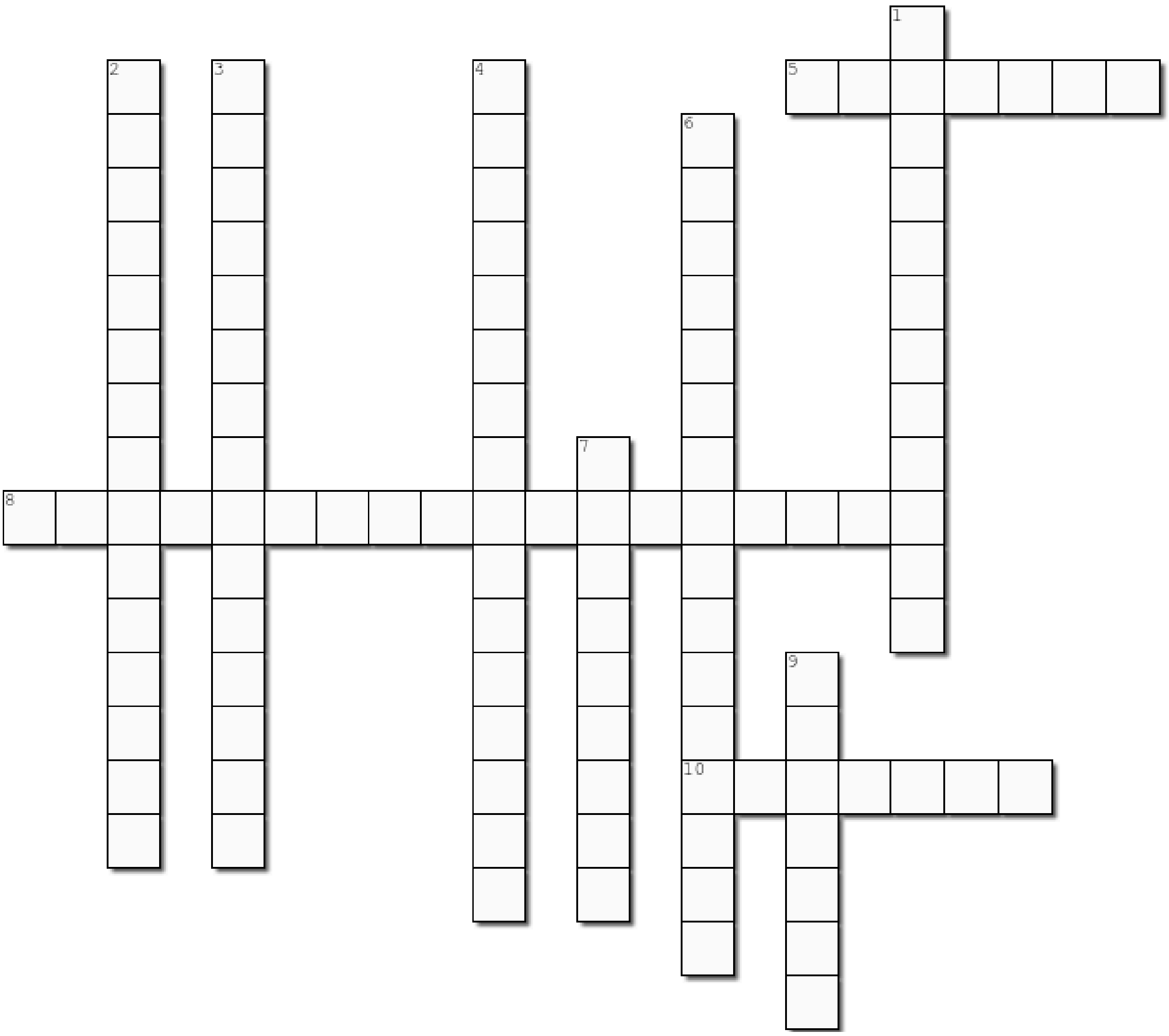


ACTIVIDADES DE APERTURA

Formar parejas y realizar la siguiente actividad

La integral definida

Complete el crucigrama



Horizontal

5. Una regla que asigna a cada elemento de un conjunto exactamente un elemento de otro conjunto.
8. El valor numérico obtenido al calcular la integral definida.
10. Representa un cambio finito en la variable independiente.

Vertical

1. Es una función cuya derivada es igual a la función dada.
2. Permite calcular el área bajo una curva utilizando un numero infinito de rectángulos de anchura infinitesimal.
3. Establece la relación entre la integral definida de una función y su antiderivada
4. Dividen el intervalo de integración en subintervalos más pequeños y luego aproximan el área bajo la curva dentro de cada subintervalo.
6. Representa un incremento infinitesimal en la variable independiente x.
7. La división de un intervalo en subintervalos más pequeños, utilizada en las sumas de Riemann para calcular la integral.
9. Se centra en el análisis de funciones y sus propiedades, como la tasa de cambio, áreas bajo curvas y volúmenes.

ACTIVIDADES DE DESARROLLO

El docente plantea el siguiente problema para introducir el tema del cálculo de áreas

Félix Candela fue un arquitecto español-mexicano famoso por diseñar obras haciendo uso del paraboloide hiperbólico. Una de sus obras fue L'Oceanogràfic, el cual está ubicada en Valencia, España.

Nos vamos a centrar en la forma de la fachada de la puerta principal, las cuales vamos a suponer que tienen forma de una parábola de pendiente negativa.

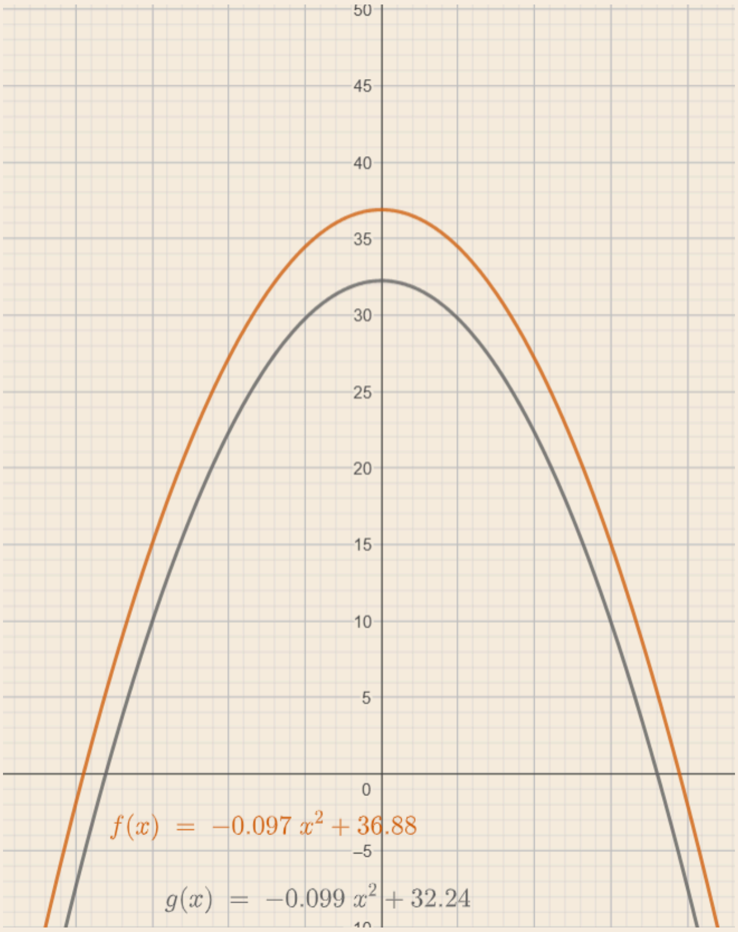
Plantee a sus estudiantes que el problema a resolver es calcular la cantidad de material que necesitó para enlucir las paredes de dicha fachada.

Mencione a los estudiantes que las funciones que modelizan dicha estructura son las siguientes:

$$f(x) = -0.097x^2 + 36.88$$

$$g(x) = -0.099x^2 + 32.24$$

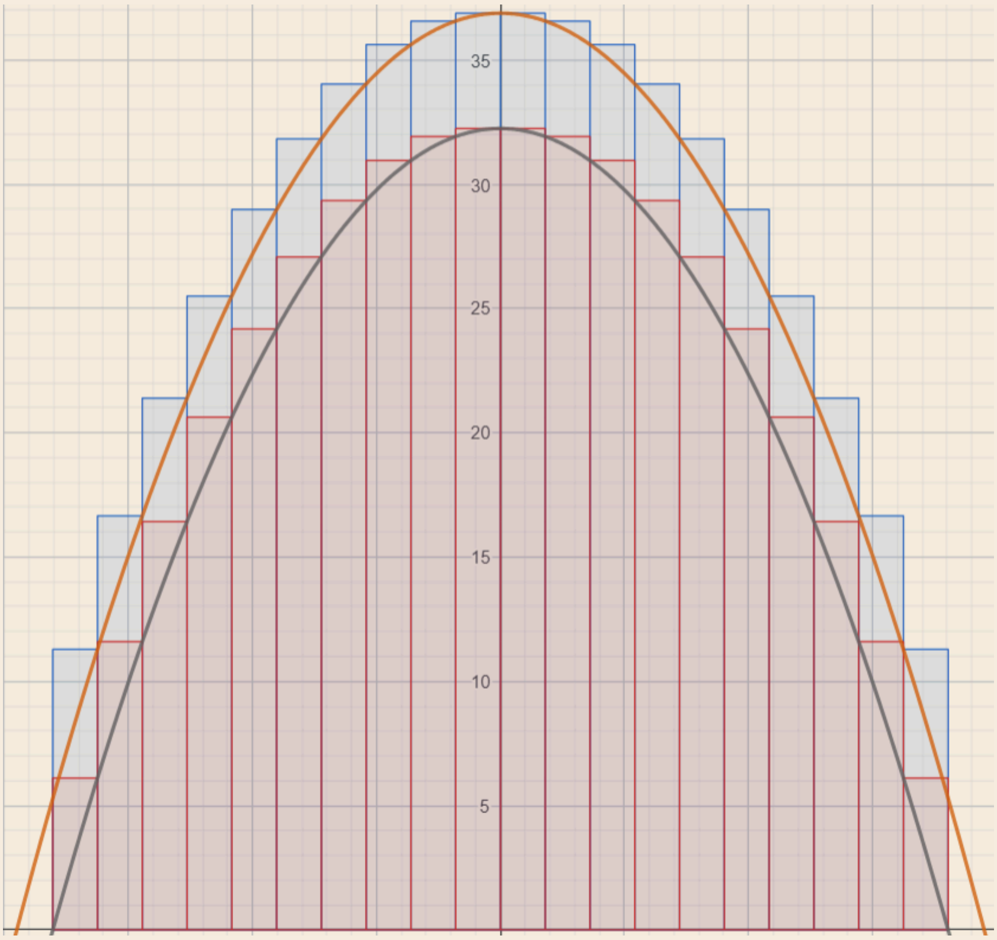
Pida a los estudiantes que grafiquen dicha función el software GeoGebra



Señale a los alumnos la siguiente idea:

Para calcular el área bajo es curva procedemos como en la clase anterior, **dividimos al intervalo en subintervalos (particiones) para formar rectángulos**. Sabemos que la base de esos rectángulos será siempre igual, pero la altura cambiará conforme nos vamos moviendo dentro del intervalo

Con el comando **SumaSuperior** en GeoGebra graficamos dichos rectángulos para cada una de esas funciones. Recuerde que se tiene que escoger un intervalo en común para esas dos funciones, en este caso **[-18.05,18.05]** (este valor son los cortes o raíces de la función "gris" con el eje x. Si hacemos lo anterior nos debe quedar una figura como la siguiente:

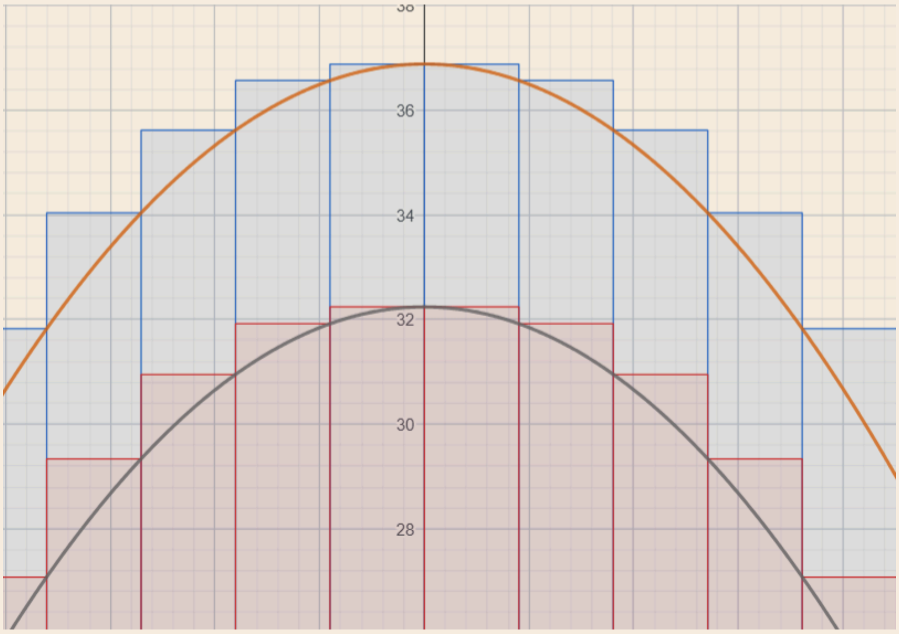


Ahora el docente debe recalcar que **el área a encontrar es la que esta encerrada entre esas dos curvas y con el eje x.** Para ello debemos encontrar la altura de los nuevos rectángulos ya que la base siempre será la misma.

Plantee la siguiente idea:

Para hallar las alturas de los nuevos rectángulos tenemos que la altura del rectángulo azul restar la altura del rectángulo rojo, es decir:

$$Altura_{restante} = Altura_{azul} - Altura_{rojo}$$



Por lo tanto el área aproximada entre esas dos curvas será:

$$A \approx (f(x_1) - g(x_1)) \triangle x + (f(x_2) - g(x_2)) \triangle x + (f(x_3) - g(x_3)) \triangle x + \ldots + (f(x_n) - g(x_n)) \triangle x$$

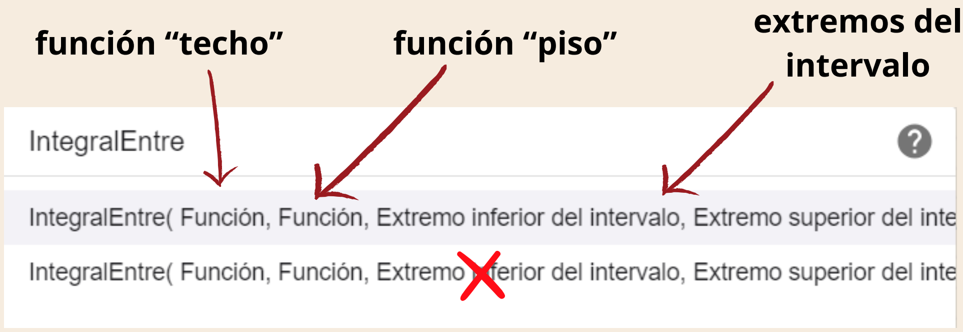
$$A \approx \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)] \Delta x$$

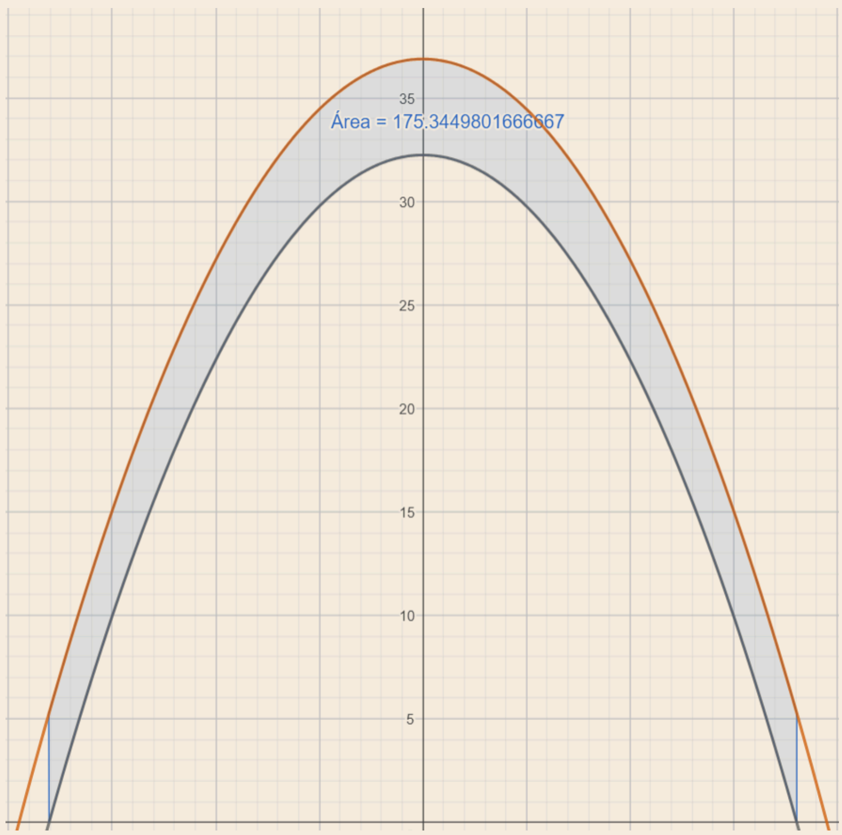
Al tratarse de una suma de Riemann, tomamos el límite con $n \to \infty$ por lo que obtenemos lo siguiente:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)] \triangle x = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

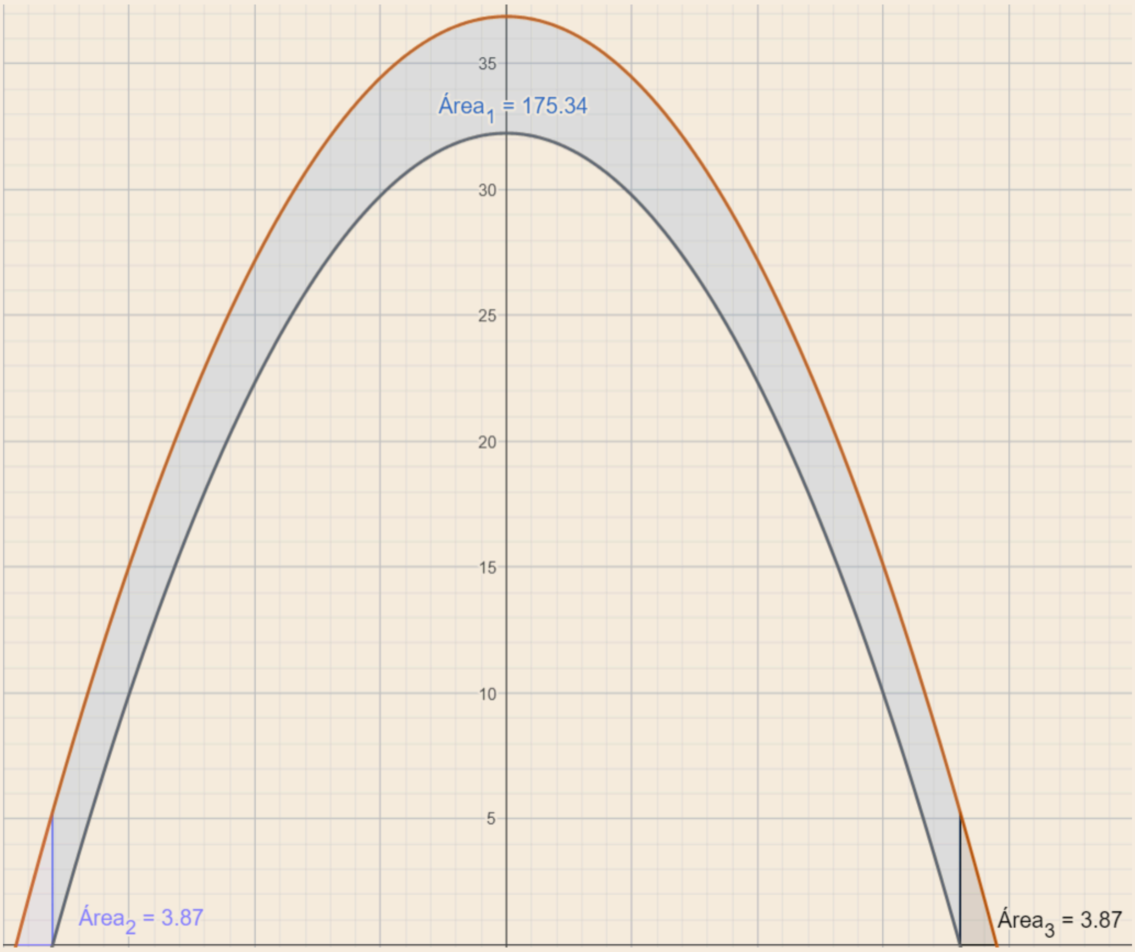
En GeoGebra nos podemos ayudar para calcular estas integrales haciendo uso del comando:
IntegralEntre

Estrategía para determinar la altura:
Techo - Piso





Haga notar a sus estudiantes que el comando utilizado no considera una parte de la región entre curvas. Para ello, utilizamos el mismo comando para calcular el resto de esas áreas, pero ahora la función "piso" será el eje x (y=0). Los extremos de los nuevos intervalos los puede hallar viendo los cortes con el eje x de la función "piso" **(comando raíz en GeoGebra)**



Matemáticamente, planteando las respectivas integrales nos quedaría:

$$A = \int_{-19.5}^{-18.05} \left[-0.097x^2 + 36.88 - 0\right] dx + \int_{-18.05}^{18.05} \left[-0.097x^2 + 36.88 - \left(-0.099x^2 + 32.24\right)\right] dx +$$

$$\int_{18.05}^{19.5} \left[-0.097x^2 + 36.88 - 0\right] dx$$

$$A = 183.09u^2$$

Por lo tanto, se necesitará ***183.09***u^2 de material para enlucir la fachada de la edificación.

Generalizando lo expuesto anteriormente para cualquier función y valor de los intervalos nos quedaría:

ÁREA ENTRE DOS CURVAS

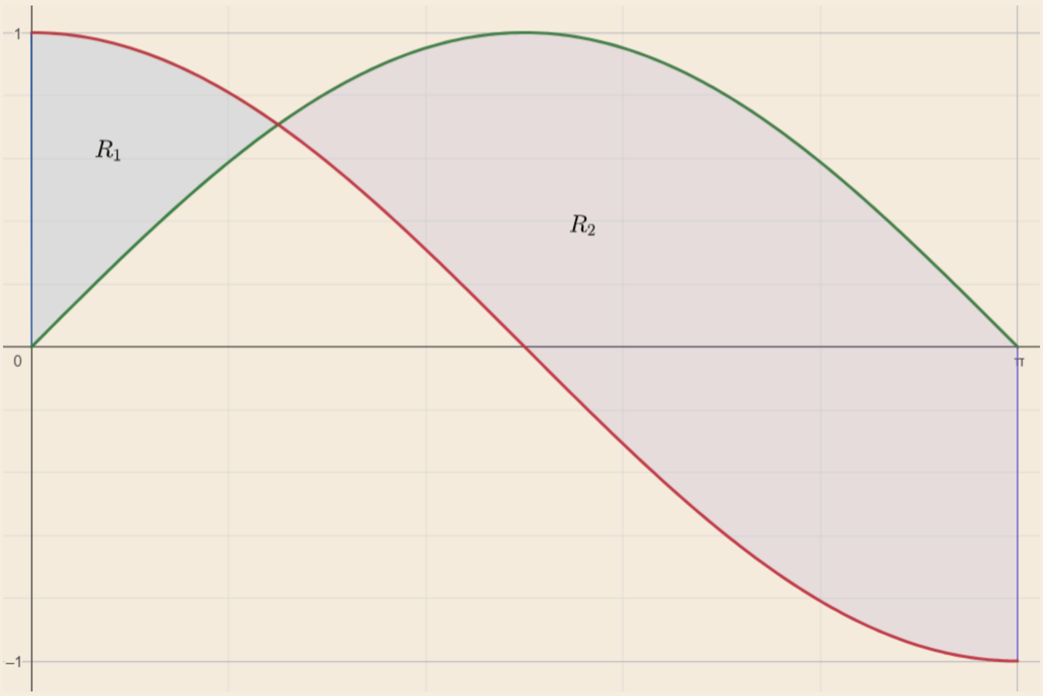
Supongamos que *f(x)* y *g(x)* son funciones continuas tales que ***f(x) ≥ g(x)*** en un intervalo [a, b]. Supongamos que R denotan la r**egión delimitada por el gráfico de *f(x)*, abajo por el gráfico de *g(x)*, y a la izquierda y derecha por las líneas *x = a* y *x = b***, respectivamente. Entonces, el área de R viene dada por

$$A = \int_{a}^{b} [f(x) - g(x)]dx$$

Si tenemos una región compuesta, aplicamos el mismo resultado solo que descomponer el intervalo [a,b] y evaluar varias integrales, dependiendo de cuál de los valores de la función es mayor en una parte determinada del intervalo.

Ahora el docente plantea el siguiente ejercicio para que el estudiante resuelva:

- Si R es la región entre los gráficos de las funciones ***f(x)=senx*** y ***g(x)=cosx*** en el intervalo ***[0,π]***, calcule el área de la región R.



	Función mayor o "techo"	Función menor o "piso"	Intervalo	Integrales
R_1				
R_2				
Total				u^2

Por último, se deja en claro del concepto de función mayor y menor y como proceder en el cálculo de área de regiones complejas

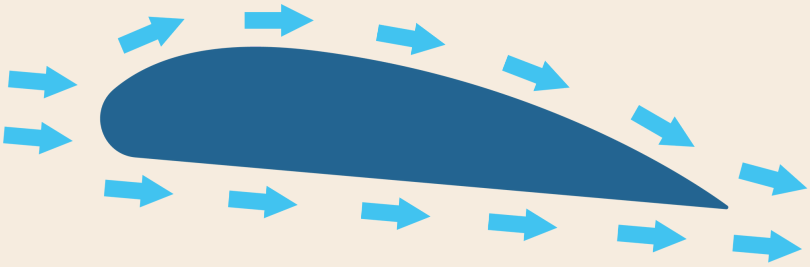
ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN

- Retroalimentación de los temas tratados.
- Resolución de inquietudes.
- Los estudiantes resolverán el siguiente taller en casa.

Taller

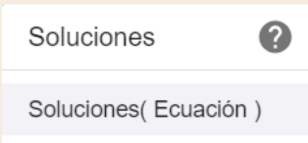
El perfil alar de un alerón diseñado para un auto de competencias está dando por las siguientes funciones, donde x se mide en metros:

- $H(t) = \dfrac{1}{x-1}$
- $G\left(t\right) = -\dfrac{7}{8}x^2 + 10$



En base a esto, con ayuda del software GeoGebra, realice las siguientes actividades:

- Grafique en GeoGebra la función H(t)
- Grafique en GeoGebra la función G(t)
- Calcule los puntos de intersección (redondeado a 3 decimales). Puede ayudarse de GeoGebra para realizar esto usando el comando **Soluciones** o la herramienta **Intersección**



- Calcule la cantidad de fibra de carbono que tiene esa sección transversal del perfil alar del auto. Puede ayudarse de GeoGebra usando el comando **IntegralEntre**
- Complete la siguiente tabla

	Función mayor o "techo"	Función menor o "piso"	Intervalo	Integrales
R_1				
Total				m^2

CONCLUSIONES

- **¿Cómo fue tu experiencia aprendiendo este nuevo tema con ayuda de la secuencia didáctica? ¿Qué nuevo aprendizaje obtuve?**

- **Compare sus respuestas con la información mostrada a continuación y analice sus similitudes y diferencias[1].**

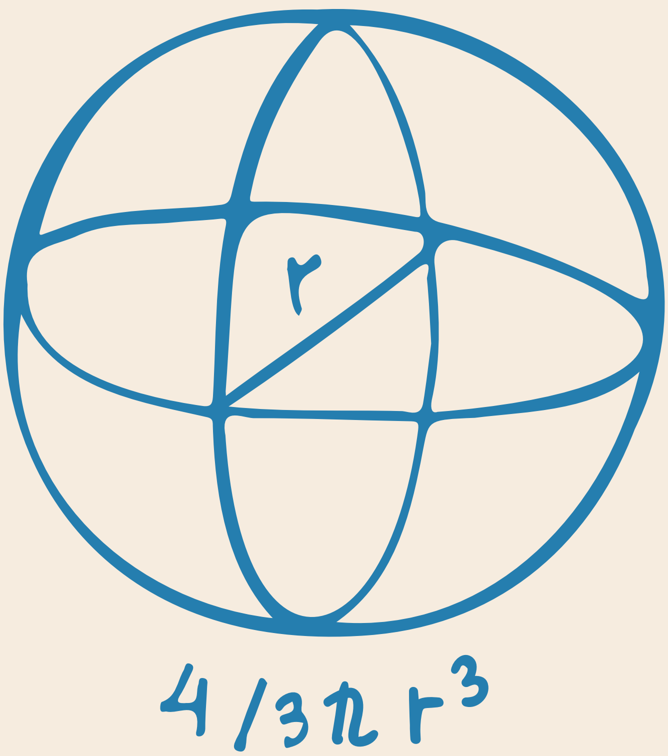
[1] Tomado de Strang, G., & Herman, E. (2022). Cálculo volumen 1. OpenStax. https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-1/pages/6-1-areas-entre-curvas

Volumen de sólidos de revolución: método de discos y arandelas

Secuencia didáctica para el docente

Clase 3

VOLUMEN DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN: MÉTODO DE DISCOS Y ARANDELAS



SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL DOCENTE

VOLUMEN DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN: MÉTODO DE DISCOS Y ARANDELAS

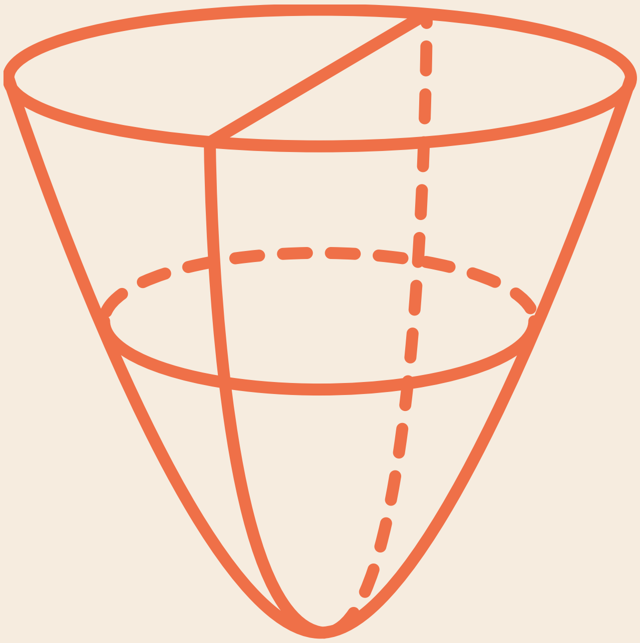
RESULTADO DE APRENDIZAJE

RdA2. Calcula mediante integrales, áreas de superficies planas y volúmenes de sólidos de revolución, Calcula centros de masa y momentos de inercia

OBJETIVOS:

Reconocer la superficie de revolución formado al hacer girar una curva plana alrededor de una recta con ayuda del software GeoGebra

Calcular el volumen de un sólido de revolución mediante los métodos de discos y arandelas con ayuda del software GeoGebra



ACTIVIDADES DE APERTURA

Iniciar la clase dando ejemplos que introduzcan al tema, a la vez que motiven a los estudiantes.

Presente las siguientes imágenes remarcando que son claros ejemplos de las aplicaciones que tiene los sólidos de revolución y la arquitectura.

Central Nuclear

Estadio Allianz Arena

La Biosphère de Montreal

30 St Mary Axe Building

ACTIVIDADES DE DESARROLLO

El docente presenta el siguiente simulador en GeoGebra

Presente el siguiente simulador en GeoGebra e indique a los alumnos que tienen que completar una serie de actividades:

https://www.geogebra.org/m/n74pxrjh[2]

Plantee las siguientes actividades:

- **Ingrese al simulador y grafique las siguientes funciones utilizando los valores de los intervalos dados**

[2] Adaptado de Espinoza, A y Córdova, J. (2022). Sólidos de Revolución [Simulador interactivo]. GeoGebra. https://www.geogebra.org/m/n74pxrjh

Función	Extremo inferior del intervalo	Extremo superior del intervalo
f(x)=x	0	3
f(x)=2	-2	2
f(x)= sin(x)	-1	4.14
f(x)=sin(x)	0	3.14

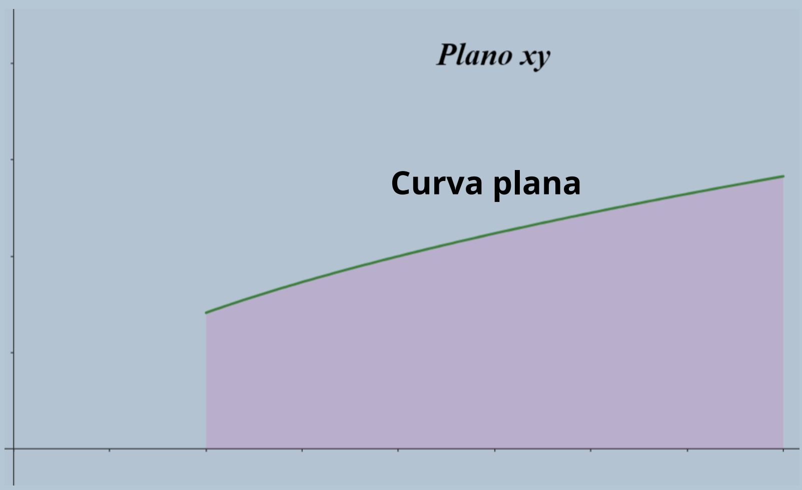
Responda las siguientes preguntas:

- ¿Qué superficie de revolución se genera al rotar 360° la primera función?
- ¿Qué superficie de revolución se genera al rotar 360° la segunda función?
- ¿Qué superficie de revolución se genera al rotar 360° la tercera función?
- ¿Qué superficie de revolución se genera al rotar 360° la cuarta función?
- ¿Cree que se pueda generar otras superficies de revolución al hacer rotar cualquier función?

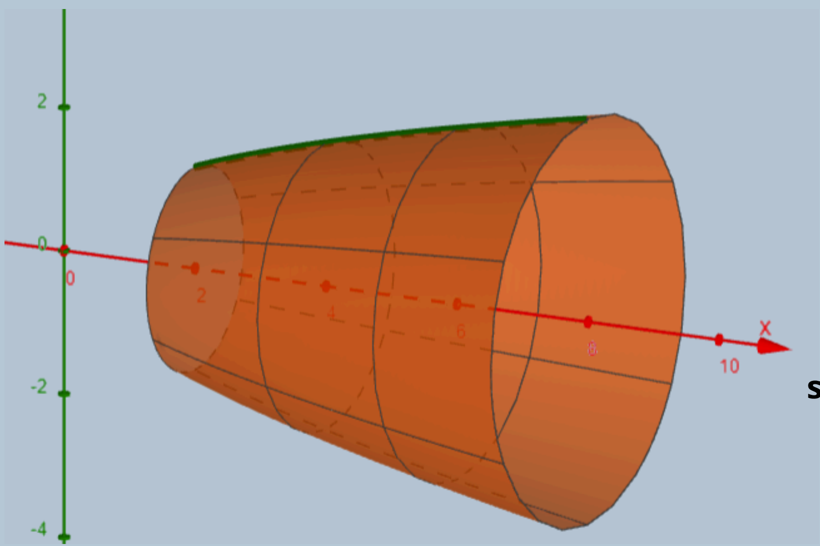
Con esto el docente ya puede presentar el concepto de sólido de revolución

SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

Si una región en un plano (curva plana) se hace girar alrededor de una línea o recta (eje de revolución) que está contenida en el mismo plano, el sólido resultante se lo denomina sólido de revolución



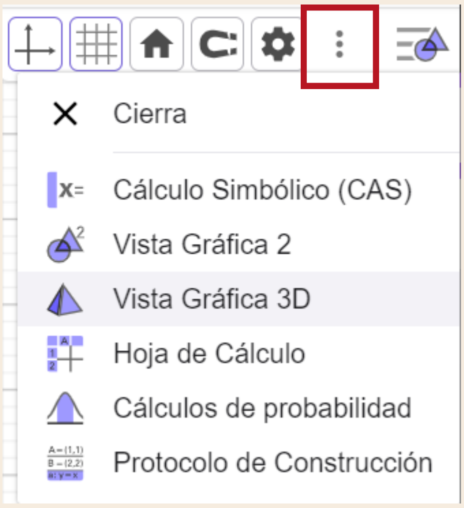
Hacemos girar alrededor del eje x



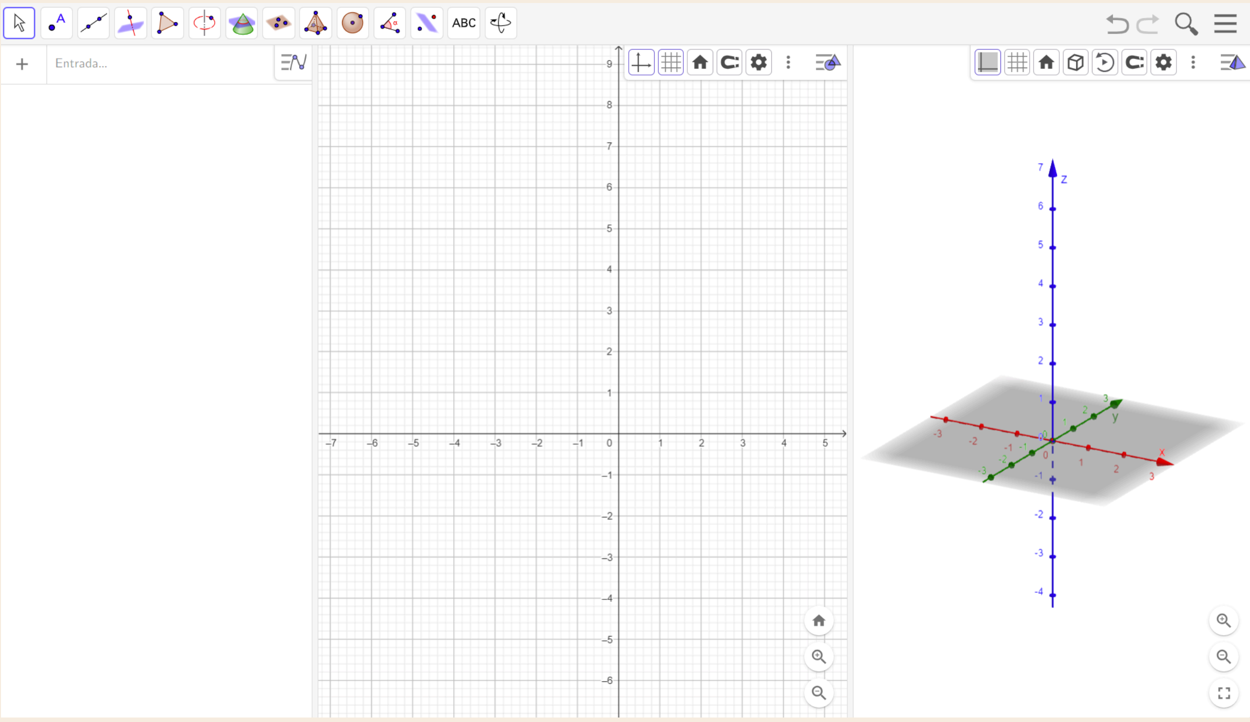
Obtenemos este sólido de revolución

Para graficar un sólido de revolución en GeoGebra indique a los alumnos que sigan estos pasos:

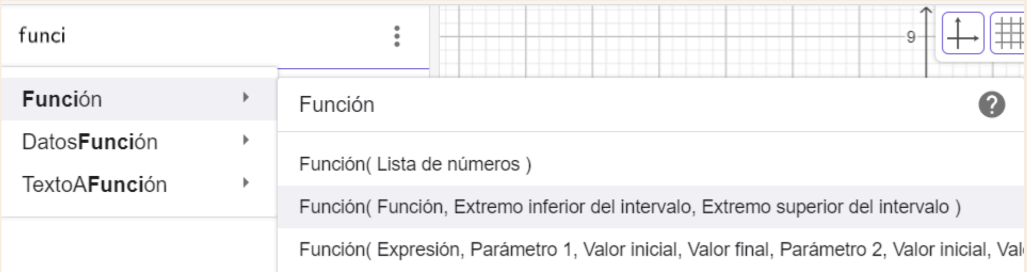
- Ingresar a GeoGebra. Seleccionar el icono de los tres puntos y a continuación **“Vista Gráfica 3D”**

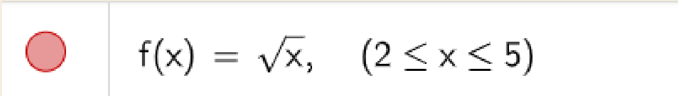


- Obtendremos la siguiente vista gráfica:

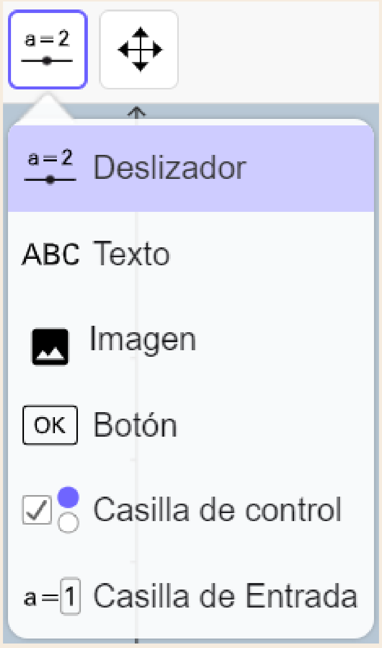


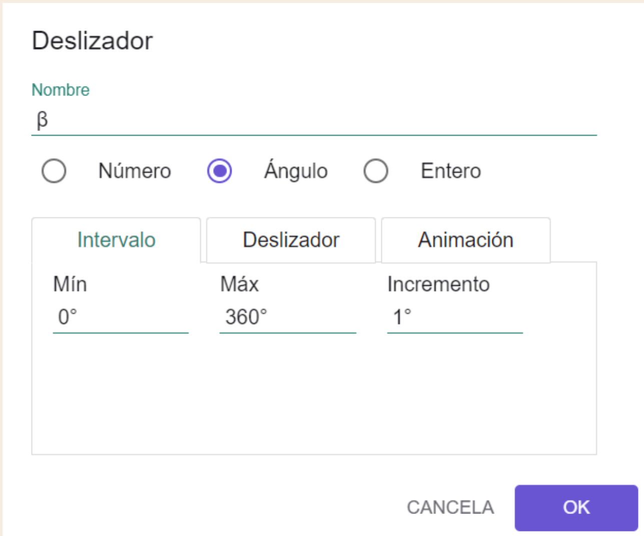
- En el panel de entrada escribimos el comando **Función** e ingresamos cualesquiera



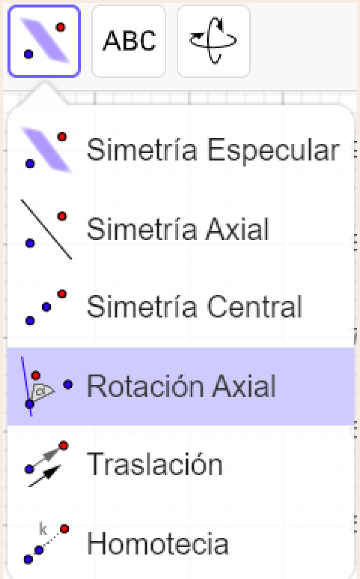


- Generamos un deslizador al cual le pondremos de ajustes la opción de ángulo y el nombre de preferencia

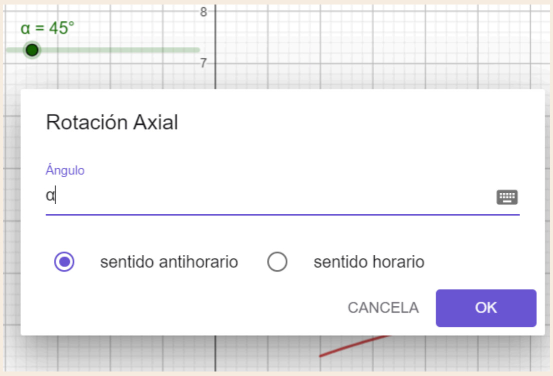




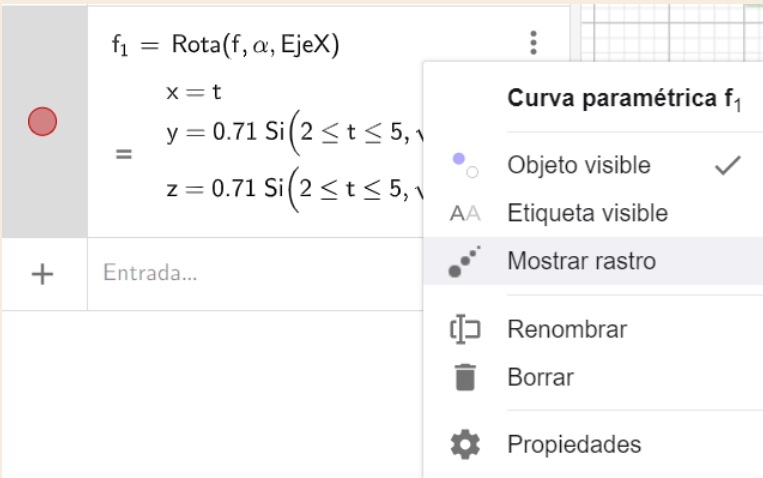
- Nos ubicamos en panel **Vista Gráfica 3D** y seleccionamos la opción **Rotación Axial,** y llenamos con los campos requeridos



- Cuando nos pida que seleccionemos la **función** hacemos clic en la función generada en la vista gráfica 3D, el **eje** de rotación seleccione el eje x, **valor de ángulo** vinculamos con el deslizador creado anteriormente poniendo el respectivo nombre con el que se creó:

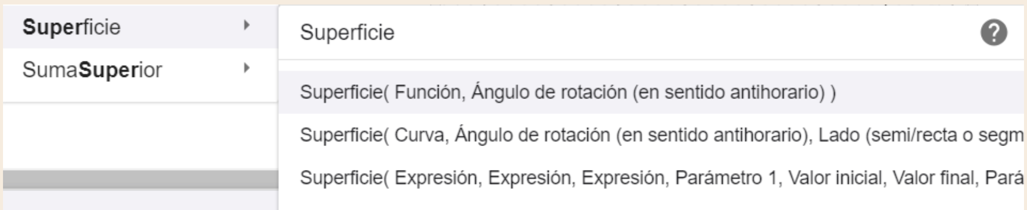


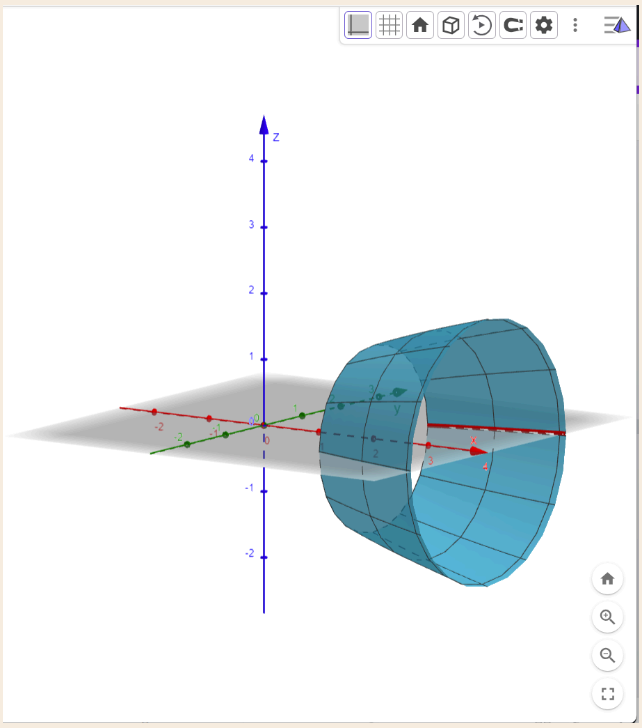
- Se nos creará en el panel de entrada una curva paramétrica, al cual le vamos a dar clic derecho para que se nos habrá un panel y seleccionar **"mostrar rastro"**.



- Le damos clic en el símbolo de reproducir para que se genere el sólido de revolución

- Para visualizar mejor como se forma el sólido de revolución ingresemos el comando **Superficie** y en la opción de función vincule la ya creada y en ángulo con el deslizador creado





Ahora mencione a los estudiantes que existen diversos métodos para calcular el volumen de dichos sólidos de revolución: método de discos, arandelas y capas cilíndricas

MÉTODO DE DISCOS

Presente el siguiente simulador a los estudiantes para explicar el tema de método de discos:

https://www.geogebra.org/m/pDqY6Kjc[3]

Haga hincapié que si a la región plana le hacemos girar alrededor del eje x se forma un sólido de revolución. **La sección transversal de dicho sólido es un disco (círculo) el cual ya conocemos de antemano su área y el radio del mismo viene dado por f(x).**

VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE DISCOS

Supongamos que f(x) es continua y no negativa. Defina R como la región delimitada arriba por el gráfico de f(x), abajo por el eje x, a la izquierda por la línea x=a y a la derecha por la línea x=b. Entonces, el volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor del eje x viene dada por

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

$$A(x) = \pi r^2$$

$$r = f(x)$$

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$

[3] Tomado de Del Rio, L. y Brzezinski, T. (2017). Método de discos- volumen de un sólido de revolución [Simulador interactivo]. GeoGebra. https://www.geogebra.org/m/pDqY6Kjc

MÉTODO DE ARANDELAS

Presente el siguiente simulador a los estudiantes para explicar el tema de método de arandelas:

https://www.geogebra.org/m/gsuskjM8[4]

Haga hincapié que la región plana están formada por funciones una mayor que la otra, el cual si le hacemos girar alrededor del eje x se forma un sólido de revolución. **La sección transversal de dicho sólido es una arandela o anillo (discos con agujeros en el centro). El área de la sección transversal, entonces, es el área del círculo exterior menos el área del círculo interior.**

VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE ARANDELAS

Supongamos que f(x) y g(x) son funciones continuas y no negativas tales que f(x)≥g(x) en [a,b]. Supongamos que R denotan la región delimitada arriba por el gráfico de f(x), abajo por el gráfico de g(x), a la izquierda por la línea x=a, y a la derecha por la línea x=b. Entonces, el volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor del eje x viene dada por

$$V=\int_a^b \pi[f(x)-g(x)]^2dx$$

[4] Tomado de Álvarez, J. (2017). Sólidos de Revolución- Arandelas [Simulador interactivo]. GeoGebra. https://www.geogebra.org/m/gsuskjM8

Por último, se deja en claro las siguientes cuestiones:

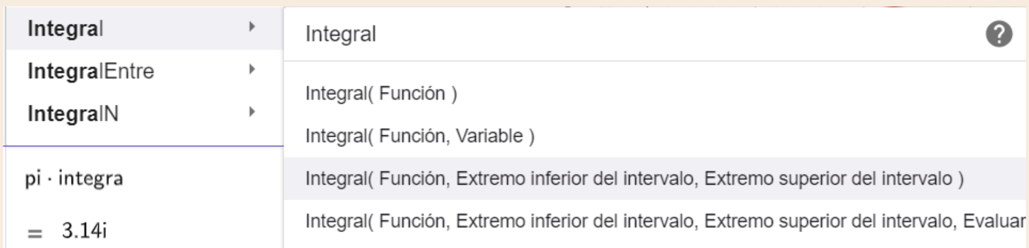
- Tanto para el método de discos como de arandelas no necesariamente tienen que girar alrededor del eje x. Puede darse el caso que gire alrededor del eje y. En ese caso los límites de integración cambian y las funciones tiene que expresar en función de la variable y.
- Puede darse el caso que los sólidos de revolución giren en un eje de revolución diferente, es decir no el eje x ni el eje y. En ese caso se debe calcular el nuevo valor de los radios y seguir el procedimiento de acuerdo al método que se esté trabajando.
- Haga hincapié cuando se debe usar el método de discos y cuando debe usarse el método de arandelas.

Ahora proceda a resolver dos ejercicios donde se aplique dichos métodos con ayuda de GeoGebra

Método de discos:

Indique a los estudiantes que tienen que utilizar el software GeoGebra para realizar esta actividad:

- Graficar la función: $f(x) = \sqrt[2]{x} \rightarrow 0 \leqslant x \leqslant 10$
- Obtener el área de la región plana delimitada en dicho intervalo **(Comando Integral)**
- Obtener el sólido de revolución si dicha región gira alrededor del eje x
- Obtener el volumen de ese sólido de revolución. Para calcular el volumen por el método de discos podemos hacer lo siguiente: Escribimos en el panel de entrada el comando **"pi*integral…"**



Método de arandelas:

Indique a los estudiantes que tienen que utilizar el software GeoGebra para realizar esta actividad:

- Graficar la función: $f(x) = \sqrt[2]{x}; g(x) = 1 \to 1 \leqslant x \leqslant 4$
- Obtener el área de la región plana delimitada en dicho intervalo **(Comando IntegralEntre)**
- Obtener el sólido de revolución si dicha región gira alrededor del eje x
- Obtener el volumen de ese sólido de revolución. Para calcular el volumen por el método de arandelas podemos hacer lo siguiente: Escribimos en el panel de entrada el comando **"pi*integral…". En la función hacemos la resta de la función mayor menos la menor y todo eso elevado al cuadrado.**

Puede proyectar la actividad hecha en GeoGebra para que los estudiantes se guíen y visualicen mejor lo que tiene que hacer

ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN

- Resolución de inquietudes.
- Los estudiantes resolverán el siguiente taller en casa.

Taller

Dada las siguientes funciones:

$$f\left(x\right) = ln\left(x\right) \rightarrow 2 \leqslant x \leqslant 5$$

$$f\left(x\right) = x^2 + 1; g\left(x\right) = -1x + 3$$

En base a esto, con ayuda del software GeoGebra, realice las siguientes actividades:

- Grafique en GeoGebra la función o las funciones dadas
- El área que delimita la región o regiones planas en dicho intervalo
- El volumen del sólido de revolución si gira alrededor del eje x, dependiendo del método que convenga para cada región que se forma

Puede comprobar las respuestas ingresando a los siguientes simuladores:[5, 6]

[5] Tomado de Espinoza, A. y Córdova, J. (2022). Sólido generado al interactuar dos funciones [Simulador interactivo]. GeoGebra. https://www.geogebra.org/m/sz9gcvky

[6] Tomado de Espinoza, A. y Córdova, J. (2022). Sólido de revolución de una función [Simulador interactivo]. GeoGebra. https://www.geogebra.org/m/mrycscgg

CONCLUSIONES

- **¿Cómo fue tu experiencia aprendiendo este nuevo tema con ayuda de la secuencia didáctica? ¿Qué nuevo aprendizaje obtuve?**

- **Compare sus respuestas con la información mostrada a continuación y analice sus similitudes y diferencias[7].**

[7]Tomado de Strang, G., & Herman, E. (2022). Cálculo volumen 1. OpenStax. https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-1/pages/6-1-areas-entre-curvas

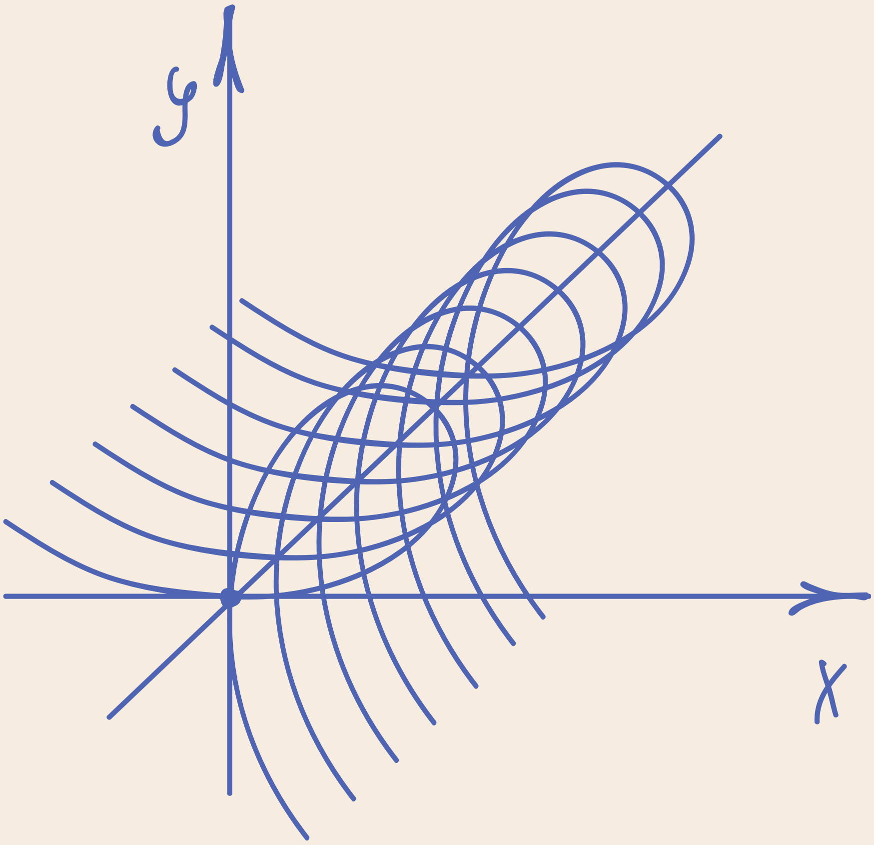
UCUENCA

Volumen de sólidos de revolución: método de las capas cilíndricas

Secuencia didáctica para el docente

Clase 4

VOLUMEN DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN: MÉTODO CAPAS CILÍNDRICAS



SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL DOCENTE

VOLUMEN DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN: MÉTODO DE LAS CAPAS CILÍNDRICAS

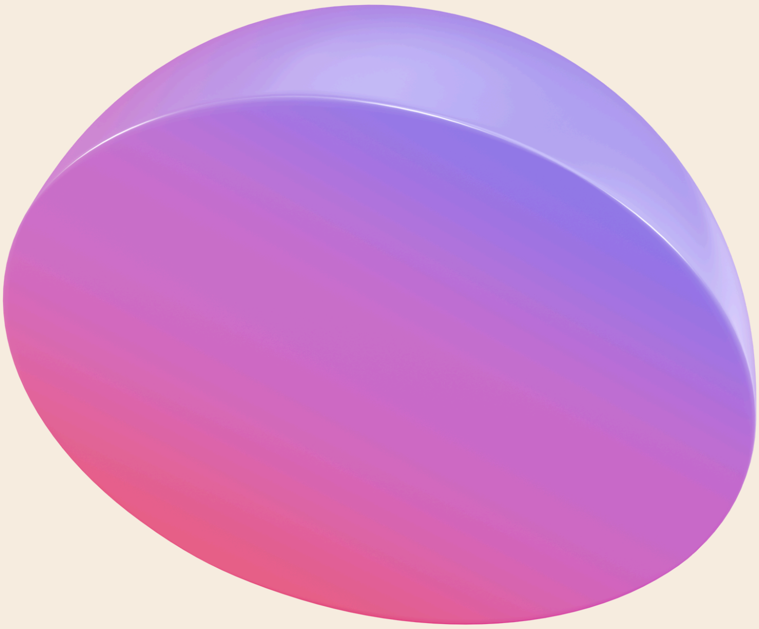
RESULTADO DE APRENDIZAJE

RdA2. Calcula mediante integrales, áreas de superficies planas y volúmenes de sólidos de revolución, Calcula centros de masa y momentos de inercia

OBJETIVOS:

Calcular el volumen de un sólido de revolución mediante el método de las capas cilíndricas con ayuda del software GeoGebra

Comparar los diferentes métodos para calcular el volumen de un sólido en revolución

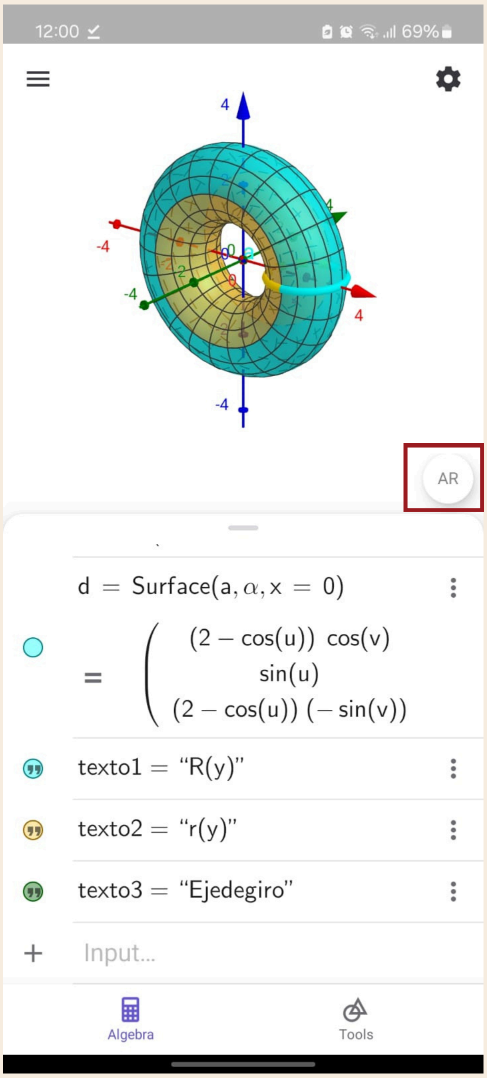


ACTIVIDADES DE APERTURA

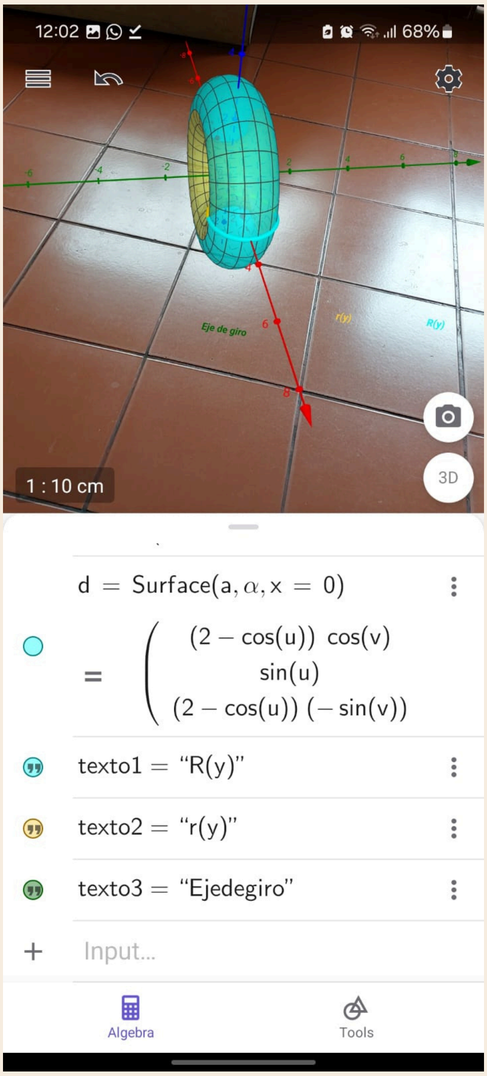
Antes de iniciar la clase diga a sus estudiantes que descarguen la aplicación **GeoGebra 3D** en sus teléfonos celulares

Indique a sus estudiantes que escaneen los siguientes códigos QR el cual le llevara a un enlace de descarga. Abra el archivo (previamente ya debe estar instalado la aplicación GeoGebra 3D) y un sólido de revolución se cargará en dicha aplicación. Ahora pulsar en **"AR"** y siga las instrucciones que le pide.

Guía para usar GeoGebra 3D



Una vez descargada la aplicación y abierto el archivo nos aparecerá esto



Se nos cargará el sólido de revolución en realidad aumentada

Plante las siguientes cuestiones a los estudiantes:

- De cada sólido ¿Por qué método crees que podríamos usar para calcular su volumen? ¿Por qué?
- ¿Cuál de todos podríamos usar para diseños arquitectónicos?

ACTIVIDADES DE DESARROLLO

El docente presenta el siguiente simulador en GeoGebra

Presente el siguiente simulador en GeoGebra para explicar el método de las capas cilíndricas

https://www.geogebra.org/m/prbeqzkd[8]

Haga hincapié que la diferencia entre los otros métodos es que en este integramos a lo largo del eje de coordenadas perpendicular al eje de revolución, mientras que en el método de discos integramos a lo largo del eje de coordenadas paralelo al eje de revolución.

Además, haga notar que cuando giramos el rectángulo alrededor del eje y este se forma una capa cilíndrica y ya no un disco o arandela.

[8] Tomado de Vergara, J. (2022). Simulación geométrica del método de las capas cilíndricas [Simulador interactivo]. GeoGebra. https://www.geogebra.org/m/prbeqzkd

VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE CAPAS CILÍNDRICAS

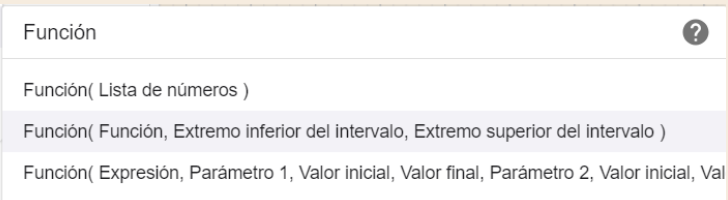
Supongamos que f(x) es continua y no negativa. Defina R como la región delimitada arriba por el gráfico de f(x), abajo por el eje x, a la izquierda por la línea x=a, y a la derecha por la línea x=b. Entonces el volumen del sólido de revolución que se forma al girar R en torno al eje y viene dado por

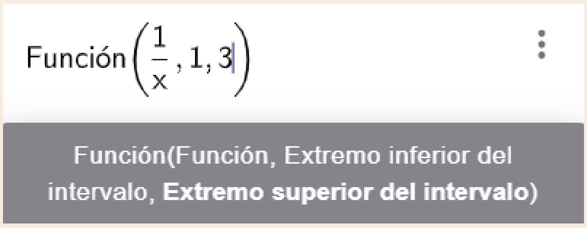
$$V = \int_a^b 2\pi x f\left(x\right)]dx$$

Resuelva el siguiente ejercicio con ayuda de sus estudiantes:

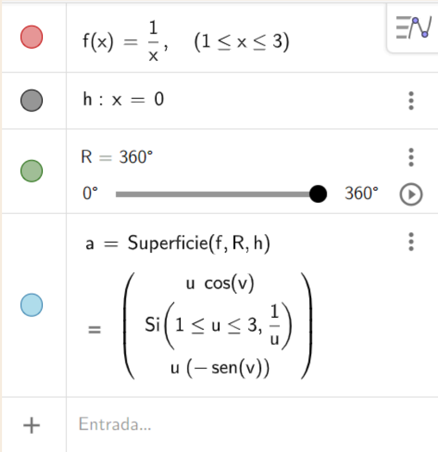
Se tiene la función f(x)=1/x en el intervalo [1,3]. Calcule el volumen del sólido de revolución que se forma al hacerlo rotar alrededor del eje y.

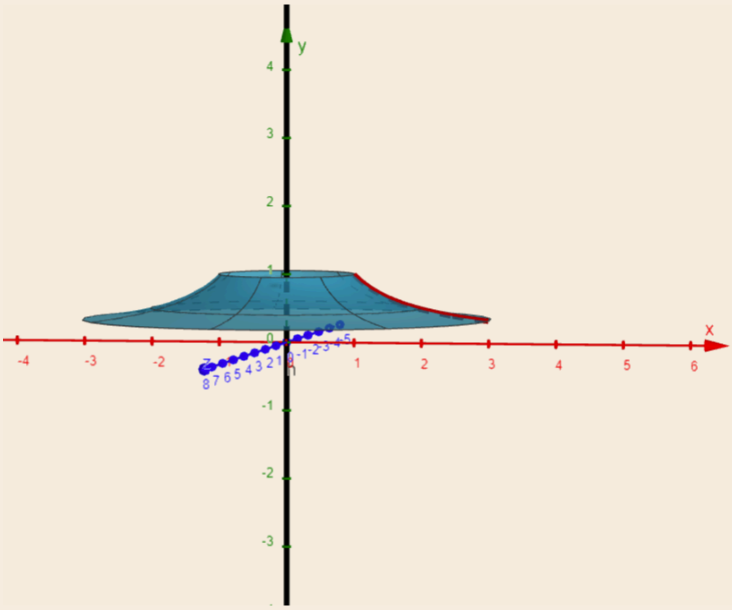
- Primero grafique la función en GeoGebra con el comando **función**



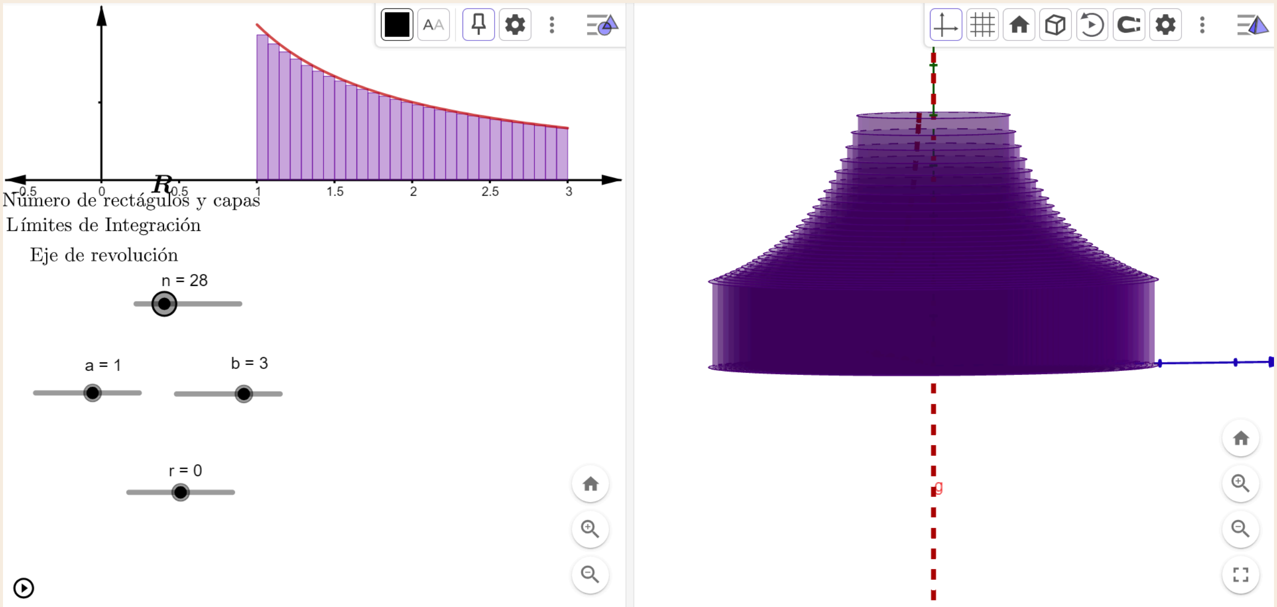


- Ahora cree un deslizador y una función (x=0) para generar la respectiva superficie con el comando **Superficie**

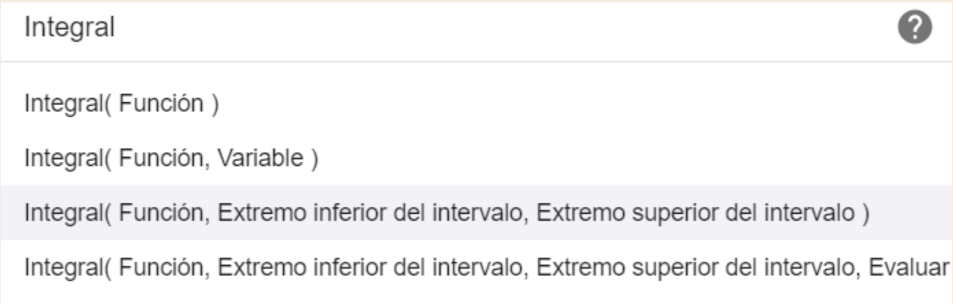


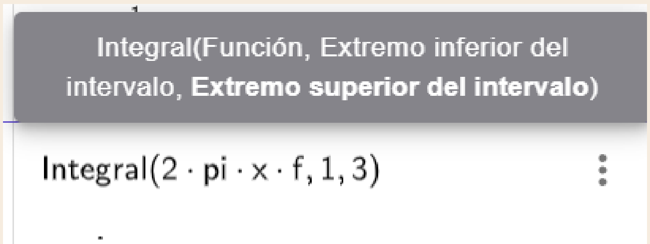


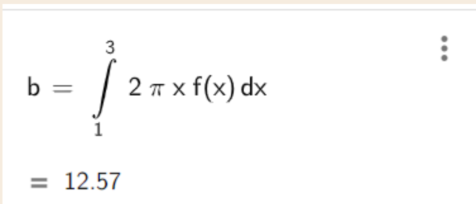
- Puede utilizar el simulador presentado al inicio de la clase para que se visualice de la mejor manera el sólido de revolución generado para lo cual habría que modificar los parámetros (función, valor de a y b, eje de rotación (r=0))



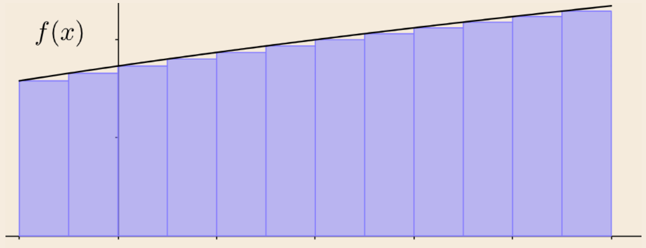
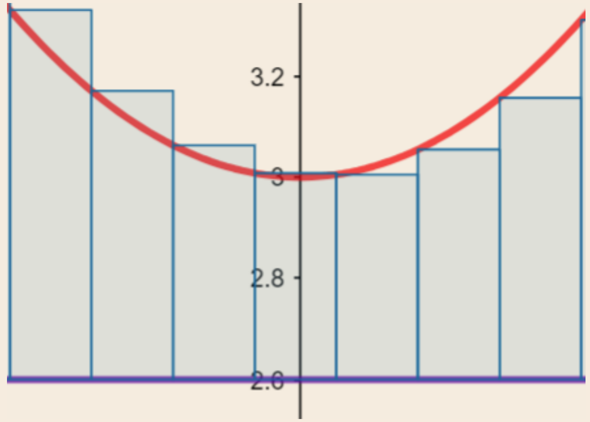
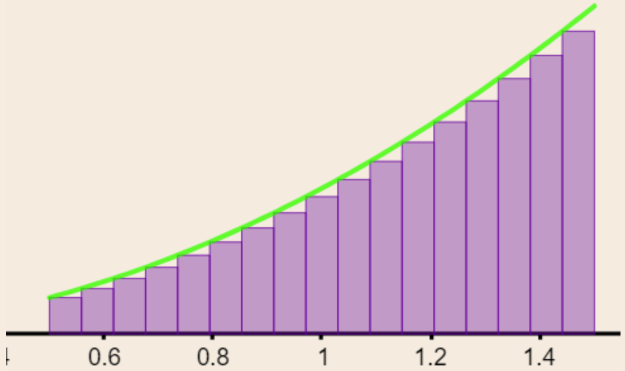
- Recalque que podemos utilizar tanto el método de discos como el de capas cilíndricas, pero en el de discos tendríamos que girarlo alrededor del eje y donde el rectángulo tendría que ser perpendicular al eje de giro. Evidentemente la función tendríamos que expresarla en función de la variable y así como los valores de los límites de integración cambiarían. Para en este caso utilizaremos el método de capas cilíndricas.
- Para calcular el volumen ingresamos en el panel de comando el comando **Integral**







Ahora presente la siguiente tabla a los estudiantes donde se resume los tres métodos vistos. Explique a los estudiantes cuando utilizar uno o el otro método.

Comparación	Fórmula del volumen	Sólido	Intervalo de partición	Región típica
Método del disco	$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2dx$	No hay agujero en el centro	[a, b] en el eje de la x. Rotación eje de la x	
Método de la arandela	$V=\int_a^b \pi[f(x)-g(x)]^2dx$	Agujero en el centro	[a, b] en el eje de la x. Rotación eje de la x	
Método de la capa cilíndrica	$V=\int_a^b 2\pi x f(x)]dx$	Con o sin agujero en el centro	[a, b] en el eje de la x. Rotación eje de la y	

ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN

- Resolución de inquietudes.
- Los estudiantes resolverán el siguiente taller en casa.

Taller

Dada la siguiente funciones:

$$f\left(x\right) = 4x - 2x^2$$

$$g\left(x\right) = 0$$

En base a esto, con ayuda del software GeoGebra, realice las siguientes actividades:

- Grafique en GeoGebra la función las funciones dadas
- El área que delimita la región o regiones planas en dicho intervalo
- El volumen del sólido de revolución si gira alrededor del eje x dado por ***x=0***, dependiendo del método que convenga para cada región que se forma

Puede comprobar las respuestas ingresando en el siguiente simulador:[9]

[9] Tomado de Espinoza, A. y Córdova, J. (2022). Sólido generado al intersecar dos funciones [Simulador interactivo]. GeoGebra. https://www.geogebra.org/m/sz9gcvky

CONCLUSIONES

- **¿Cómo fue tu experiencia aprendiendo este nuevo tema con ayuda de la secuencia didáctica? ¿Qué nuevo aprendizaje obtuve?**

- **¿En qué casos me conviene utilizar un método en vez de los otros para poder calcular el volumen de un sólido de revolución**

- **Observe el siguiente video y compare sus respuestas con la información mostrada. Analice sus similitudes y diferencias.**[10]

[10] Tomado de MateFacil. (2024, 28 mayo). ¿Arandelas o Capas Cilíndricas? ¿Cuándo se usa cada uno? Volumen de Revolución, Cálculo integral [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=ZbxRXGhbrFs

Referencias Bibliográficas

Álvarez, J. (2017). Sólidos de Revolución- Arandelas [Simulador interactivo]. GeoGebra. https://www.geogebra.org/m/gsuskjM8

Córdova, J., y Espinoza, A. (2023). Propuesta didáctica para el uso de las TACs en la enseñanza de sólidos de revolución del cálculo integral a nivel universitario [Tesis de pregrado, Universidad de Cuenca]. http://dspace.ucuenca.edu.ec/bitstream/123456789/41230/1/Trabajo-de-Titulaci%c3%b3n..pdf

Del Rio, L. y Brzezinski, T. (2017). Método de discos- volumen de un sólido de revolución [Simulador interactivo]. GeoGebra. https://www.geogebra.org/m/pDqY6Kjc

Loja, P., y Valladarez, J. (2024). Propuesta didáctica para el aprendizaje de Sólidos de Revolución con apoyo de la Realidad Aumentada [Tesis de pregrado, Universidad de Cuenca]. http://dspace.ucuenca.edu.ec/handle/123456789/43877

MateFacil. (2024, 28 mayo). ¿Arandelas o Capas Cilíndricas? ¿Cuándo se usa cada uno? Volumen de Revolución, Cálculo integral [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=ZbxRXGhbrFs

Strang, G., y Herman, E. “. (2022, 24 marzo). Cap. 6Introducción - Cálculo volumen 1 | OpenStax. https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-1/pages/6-introduccion

Vergara Ibarra, J. (2022). Sólidos de Revolución y suma de Riemann en GeoGebra. Revista Digital Matemática, Educación E Internet, 22(2). https://funesfrpre.uniandes.edu.co/funes-documentos/solidos-de-revolucion-y-suma-de-riemann-en-geogebra/