

UCUENCA

Universidad de Cuenca

Facultad de Ciencias Químicas

Carrera de Ingeniería Industrial

**Elaboración de una aplicación para la representación interactiva de Rectas y Planos en 3D,
para la asignatura de Álgebra Lineal como asignatura base para el perfil de egreso de la
carrera Ingeniería Industrial**


Trabajo de titulación previo a la obtención
del título de Ingeniero Industrial

Autor:

Juan Carlos Cabrera Arévalo

Director:

Franklin Eduardo Guamán Ortiz

ORCID:  0000-0001-6465-1759

Cuenca, Ecuador

2023-10-05

Resumen

Los softwares de visualización son herramientas de apoyo para el desarrollo de habilidades visuales y espaciales dentro del tema de planos y rectas tridimensionales, pero no todos son accesibles o fáciles de manejar, y en algunos casos no abordan los temas solicitados, además de requerir una preparación adicional o una educación orientada hacia el software, convirtiendo el desarrollo de estas habilidades en un enfoque de aprendizaje de programación. En base a esta problemática, se desarrolló una aplicación por medio de Matlab en la modalidad App Designer, orientada hacia las necesidades de los estudiantes de la carrera de Ingeniería Industrial para ayudar en su proceso de aprendizaje. Estas necesidades fueron detectadas por medio de una prueba de conocimientos en donde se evaluaron diferentes factores de aprendizaje, agrupados en la parte conceptual, procedimental y gráfica, obteniendo índices muy bajos de dominio en la parte gráfica por parte de los estudiantes, verificando la necesidad de un apoyo visual para reforzar la destreza. Al finalizar la investigación se obtuvo una aplicación efectiva y que cumple con su propósito, que es la representación visual de una forma fácil, y accesible, en base a los resultados que se obtuvieron por parte de la validación realizada por medio de un experto en el tema.

Palabras clave: geometría espacial, gráficas tridimensionales, software, habilidades espaciales



El contenido de esta obra corresponde al derecho de expresión de los autores y no compromete el pensamiento institucional de la Universidad de Cuenca ni desata su responsabilidad frente a terceros. Los autores asumen la responsabilidad por la propiedad intelectual y los derechos de autor.

Repositorio Institucional: <https://dspace.ucuenca.edu.ec/>

Abstract

Visualization software is a support tool for the development of visual and spatial skills within the topic of three-dimensional planes and lines, but not all of them are accessible or easy to use, and in some cases, they do not address the requested topics, in addition to requiring preparation. additional or software-oriented education, turning the development of these skills into a programming learning approach. Based on this problem, an application was developed through Matlab in the App Designer modality, oriented towards the needs of Industrial Engineering students to help in their learning process. These needs were detected through a knowledge test where different learning factors were evaluated, grouped in the conceptual, procedural and graphic part, obtaining very low mastery rates in the graphic part by the students, verifying the need to a visual support to reinforce the skill. At the end of the research, an effective application was obtained that meets its purpose, which is the visual representation in an easy and accessible way, based on the results obtained from the validation carried out by an expert in the field. issue.

Keywords: geometry spatial, three-dimensional graphics, software, spatial skills



El contenido de esta obra corresponde al derecho de expresión de los autores y no compromete el pensamiento institucional de la Universidad de Cuenca ni desata su responsabilidad frente a terceros. Los autores asumen la responsabilidad por la propiedad intelectual y los derechos de autor.

Repositorio Institucional: <https://dspace.ucuenca.edu.ec/>

Dedicatoria.

Este trabajo está dedicado a mi querido padre que aunque ya no se encuentre conmigo, fue un gran impulsor en mi vida como persona y profesional.

Agradecimientos

Agradecer a mi madre, mi tía Betty y Diego, quienes siempre estuvieron conmigo a pesar de las dificultades, y a cada una de las personas que hicieron posible este logro, al igual que cada uno de mis amigos que formaron parte de esta etapa de mi vida.

Índice de contenido

1. Introducción	9
2. Estado del Arte	9
3. Metodología	14
3.1. Población y muestra	14
3.1.1. Población	14
3.1.2. Muestra	15
3.2. Recolección de información.	15
3.3. Análisis de los resultados obtenidos en la prueba de conocimientos.	15
3.4. Validación cuantitativa y cualitativa de la aplicación	17
3.4.1. Validación Cuantitativa	17
3.4.2. Validación Cualitativa.	18
3.5. Desarrollo de la aplicación.	18
3.6. Proceso de creación de la aplicación	19
3.6.1 Funciones adicionadas para la visualización de rectas y planos 3D.	22
4. Resultados	24
4.1. Versión Final de la Aplicación	24
4.2. Resultados de la prueba de conocimientos.	24
4.2.1. Resultados de la prueba de conocimientos.	25
4.2.2. Resultados de la prueba de conocimientos en notas	33
4.3. Análisis de los resultados de la prueba de conocimientos.	35
4.4. Resultados de la búsqueda bibliográfica de criterios de evaluación para evaluación del aplicativo	35
5. Discusión	37
6. Conclusión	38
7. Referencias	40
8. Anexos	43
8.1. Anexo A	43
8.2. Anexo B.	44
8.3. Anexo C.	56

Índice de figuras

Figura 1 Proceso de creación de la aplicación en Matlab.	19
Figura 2 Ventana inicial de la interfaz de usuario del programa.	20
Figura 3 Configuración de las propiedades de los objetos de la interfaz gráfica.	21
Figura 4 Extracto de código para graficación de puntos.	21
Figura 5 Extracto del código para determinar las posiciones relativas entre rectas.	23
Figura 6 Extracto de código para posiciones relativas entre planos y rectas.	23
Figura 7 Pantalla principal del aplicativo.	24
Figura 8 Resultado de la parte gráfica del primer problema.....	26
Figura 9 Error en el cálculo del vector normal del plano.	27
Figura 10 Resultados de la parte conceptual del primer problema.....	27
Figura 11 Resultados de la parte grafica del segundo problema.	29
Figura 12 Graficación errónea tomada de uno de las muestras.....	29
Figura 13 Resultados de la parte conceptual del segundo problema.....	30
Figura 14 Resultados de la parte de graficación del tercer problema.....	32
Figura 15 Graficación del ejercicio 3, tomada de una de las muestras.	33
Figura 16 Resultados de la parte conceptual del tercer problema.....	33
Figura 17 Pantalla principal de la aplicación Gráfix.	44
Figura 18 Panel de ingreso de datos de un plano en la pantalla principal.....	45
Figura 19 Panel de ingreso de datos de una recta en la pantalla principal.....	46
Figura 20 Graficación de dos planos en la pantalla principal.	47
Figura 21 Ecuación de la recta obtenida entre dos planos.....	48
Figura 22 Extracción de información entre dos planos.....	48
Figura 23 Graficación de dos rectas en la pantalla principal.	49
Figura 24 Obtención de la posición relativa y el ángulo entre dos rectas.....	49
Figura 25 Obtención del punto de intersección entre dos rectas.....	50
Figura 26 Gráfica de una recta y un plano con su posición relativa.	50
Figura 27 Pantalla secundaria de la aplicación Gráfix.	51
Figura 28 Panel principal para la graficación de un plano con parámetros definidos.	52
Figura 29 Gráfica de un plano en la pantalla secundaria de la aplicación.....	52
Figura 30 Panel secundario para la graficación de un plano mediante tres puntos.....	53
Figura 31 Obtención de la ecuación de la recta en el cruce de varios planos.	53
Figura 32 Grafica de un punto en un plano en R3.	54
Figura 33 Panel de manipulación de gráficas en R3.....	55

Figura 34 Panel de manipulación de gráficas en R3.....	55
---	-----------

Índice de tablas

Tabla 1 Factores de Evaluación considerados para la prueba de conocimientos.....	16
Tabla 2 Rubrica de calificación de la prueba de conocimientos.	17
Tabla 3 Resultados del primer problema de la prueba de conocimientos.....	25
Tabla 4 Resultados del segundo problema de la prueba de conocimientos	27
Tabla 5 Resultados del tercer problema de la prueba de conocimientos.....	30
Tabla 6 Notas de la prueba de conocimientos realizado	33
Tabla 7 Resumen estadístico de la prueba de conocimientos.....	34
Tabla 8 Compilación de criterios de evaluación en materiales didácticos tecnológicos.....	35
Tabla 9 Resultado del análisis de componentes principales.....	36

1. Introducción

En los últimos años se ha incrementado el uso de visualizaciones para el aprendizaje de conceptos matemáticos abstractos relacionados con modelos tridimensionales, debido a que presentan un alto grado de complejidad y dificultad. Por lo cual, se ha visto necesario incluir herramientas que permitan la representación visual de objetos tridimensionales dentro de los procesos de formación, porque permiten el desarrollo de habilidades requeridas en los estudiantes de ingeniería, como: el razonamiento matemático, y el desarrollo y manipulación de relaciones espaciales (David & Tomaz, 2011; Nieto & Ramos, 2017; Ramírez-Uclés et al, 2018).

Una herramienta eficaz para realizar estas visualizaciones es el software para crear representaciones de acuerdo a las necesidades de los estudiantes. Sin embargo, se menciona que no todos son buenos, por lo cual, se plantea que el desarrollo de recursos propios es una opción para que vinculen los temas que se consideren necesarios en sus planes de estudio. Caso contrario, se propone que se realice evaluaciones en base a que se cumplan criterios de calidad (Justo et al, 2021).

Por lo tanto, la presente investigación tiene como objetivo abordar el desarrollo de una aplicación para el aprendizaje de planos y rectas en \mathbb{R}^3 mediante un software de cálculo numérico, debido a que representa una base fundamental para la formación del Ingeniero Industrial de la Universidad Cuenca. Los temas de planos y rectas en el espacio se abordan dentro de la materia de Álgebra Lineal y según la información otorgada por el sílabo forma parte de los requisitos que se deben conocer para llegar a comprender temas en un entorno más complejo como los espacios vectoriales y subespacios, y sobre todo en las habilidades de visualización, interpretación y de conocimientos abstractos que se generan durante el aprendizaje del tema.

2. Estado del Arte

Desde un enfoque general, el Álgebra Lineal aporta con 3 habilidades esenciales para el perfil de egreso de un ingeniero industrial que son: el de diseñar e implementar modelos de gestión orientados a la optimización de los procesos, la construcción de modelos de simulación basados en diferentes metodologías de la Ingeniería Industrial, y la interpretación e interrelación de información que se base en modelos matemáticos, físicos y químicos.

En un enfoque central de las habilidades que se pueden desarrollar para el perfil de egreso a partir del tema de planos y rectas en \mathbb{R}^3 o en geometría espacial, se tiene que para Torner, Alpiste, Brigos y Embodas (2014), el aprendizaje de este tema es un factor clave para el

desarrollo de la habilidad espacial en la formación de un Ingeniero Industrial, porque se correlaciona directamente con las actividades proyectales (proyección), y las representaciones estructurales y de sistemas de carácter complejo que se presenten dentro de su campo laboral. Pedroza (2003), en su estudio sobre las estrategias de trazado de superficies tridimensionales, menciona la importancia de aprender el trazo de gráficas en el espacio para la carrera de Ingeniería Industrial, ya que en primera instancia constituye un punto clave para continuar con el nivel de avance en la malla curricular de la carrera, con un enfoque central en el cálculo integral en donde se necesita el cálculo de área y volúmenes en un entorno R^3 . Adicionalmente, se menciona que se podrá obtener ingenieros con mejores capacidades para calcular volúmenes y áreas de materiales para optimizar y reducir el costo de estos en los procesos industriales.

El desarrollo de la habilidad espacial por medio de planos y rectas se puede considerar de igual forma importante para la materia de Diseño CAD, dentro del plan curricular. Contreras, Trisancho & Vargas (2012), en su investigación mencionan que el desarrollo de la habilidad espacial otorgará las destrezas necesarias para interpretar y generar representaciones técnicas de objetos tridimensionales en 3D vinculados a la realidad, pero estas representaciones parte a raíz del dibujo técnico con conocimientos previos en la generación de objetos en R^3 , conjuntamente con el área de matemáticas que vincule al sistema cartesiano, para tener representaciones de carácter técnico con sus respectivas interpretaciones.

Tomando en consideración las razones expuestas anteriormente sobre la importancia del tema de planos y rectas en R^3 , se realiza una investigación sobre que se ha hecho para reforzar el aprendizaje.

Noordin & Wan (2011) desarrollaron un programa tomando como referencia la metodología ADDIE y el modelo Van Hiele, con el objetivo de alcanzar las destrezas del nivel visual en el sistema cartesiano R^3 , y solventar el déficit que genera aprender conceptos abstractos, y gráficas en el tema de investigación. Este programa lo realizaron por medio de 3D Max y Macromedia, en donde elaborando tres secciones para la interacción del usuario que son: Introducción (teoría y aprendizaje del tema en forma interactiva); Lecciones (Evaluaciones de conocimientos abstractos y gráficos), y la sección de Preguntas (Evaluaciones de teoría). Una vez finalizada la aplicación, los investigadores realizaron una validación para comprobar la eficiencia de su programa, comparando dos métodos, el de enseñanza tradicional y por medio software mediante pruebas de conocimientos. Posteriormente, utilizaron una comparación de dos muestras mediante una prueba estadística T Student, con un grupo de control y otro experimental, para evaluar la evidencia estadística de los métodos de enseñanza, bajo el

rango de calificaciones obtenidas entre los dos grupos. Al finalizar, los investigadores obtuvieron que en el pretest no hay diferencia entre los grupos de control y experimental definidos para el estudio, pero en los post test, es donde influye el software de planos y rectas en R^3 , porque marca una diferencia para aceptar la hipótesis de que existe una influencia. Además, evaluaron la variación del rendimiento en las pruebas con el objetivo de validar el programa mediante el mejoramiento de la variable.

Salazar, Gaita & Beteta (2012), diseñaron una práctica interactiva teniendo presente los niveles de pensamiento geométrico de Parzysz, y el software Cabri 3D, como herramienta de manipulación de objetos tridimensionales. El objetivo es avanzar del nivel G0 correspondiente a la materialización de objetos reales, al nivel G1 que se enfoca en las representaciones visuales de los objetos paso a paso. La práctica consistió en actividades orientadas a puntos y planos en el espacio, puntos de intersección de planos, posiciones relativas entre objetos y manipulación de objetos tridimensionales. Al finalizar la práctica, los resultados en los estudiantes fue alcanzar el nivel G1 del modelo, y en algunos casos el nivel G2, relacionado con construcción de conocimientos por medio solo de premisas y el pensamiento deductivo.

Sánchez(2013) investigó la influencia en el rendimiento académico de los estudiantes de primer ciclo de ingeniería de la Escuela Politécnica del Ejército de Latacunga mediante el uso de herramientas de TICS (SCILAB y WIRKERS), con el objetivo de cambiar la metodología tradicionalista relacionada con la conceptualización de temas visuales, debido a que presenta ciertas dificultades por características propias de la asignatura de Álgebra Lineal, al requerir un alto nivel de abstracción. Para determinar la influencia de las herramientas TICS en el rendimiento académico, el investigador realizó una prueba estadística T Student. Obteniendo resultados que apoyan a las TICs en la influencia del rendimiento de los estudiantes, aunque hacen una acotación respecto a que las TICS puede presentar ciertas dificultades debido a que una proporción de los alumnos no se encuentran familiarizados con la utilización de herramientas computacionales para el desarrollo de una asignatura.

Caro(2015) utilizó el entorno de GeoGebra 5.0 para crear un taller que gestione el uso del software con el objetivo de visualizar, estudiar y simular ejercicios en el entorno R^3 . El taller se originó basándose en dos partes, la primera parte consistió en un aprendizaje con acompañamiento por parte del tutor, y la segunda parte en el trabajo autónomo, en la que consta ejercicios para aplicar el software. El desarrollo de este taller se generó por las siguientes situaciones: la dificultad con las visualizaciones de los objetos en R^3 , y la dificultad de manejar GeoGebra 5.0 para generar puntos, rectas y planos en el espacio. Los resultados de la parte autónoma se evaluaron en el momento pero sin retribuciones de calificación.

Gutiérrez & Jaime (2015) realizó un estudio sobre el análisis del software de Cabri en el proceso de abstracción de conocimientos en el tema de planos y rectas en R^3 , para un estudiante con capacidades matemáticas superiores a la media. El investigador desarrollo un conjunto de 34 actividades de carácter exploratorio y 18 evaluaciones de conocimiento. Al final de las evaluaciones, se encontró que usar el software sin un entrenamiento previo puede generar que se comentan conclusiones erradas sobre propiedades o características de un objeto, pero, la misma herramienta ayuda formular las construcciones visuales que rompen con las falsas idealizaciones efectuadas en un entorno plano o bidimensional. Estos hallazgos han llevado a que se plantee una nueva investigación sobre un nuevo entorno para prevenir las falencias o dificultades.

Alurralde, Tapia & Hurtado (2017), estudiaron la inclusión del software GeoGebra en las materias de Algebra Lineal y Geometría Analítica, centrándose en los temas de Rectas y Planos en R^3 , con los dos objetivos centrales que son: mejorar el rendimiento académico en el tema antes mencionado, y promover el aprendizaje significativo en las carreras de ingeniería química, civil, industrial y electromecánica. Para esta investigación se implementó clases de carácter teórico-práctico juntamente con GeoGebra, en un grupo experimental, y para el grupo de control, se optó por la metodología clásica. Ambos grupos se enfocaron en resolver una guía de estudio, y posteriormente ejecutar una evaluación para determinar las influencias por medio de análisis cuantitativos y cualitativos entre los dos grupos. Al finalizar la investigación, se aprobó la hipótesis de que el rendimiento académico mejoró en el grupo de control, pero existió otro factor crítico asociado a esta mejora, que fue la capacidad espacial y visual. La capacidad de visualizar los problemas en el tema de planos y rectas en el espacio, ayudo a interpretar de mejor manera los enunciados. Adicionalmente, en una encuesta realizada en el mismo estudio, mostró que el 98% de los estudiantes, apoyó esta iniciativa de inclusión porque permite asociar y construir definiciones de una forma dinámica.

Nieto & Ramos (2017), llevó a cabo una modificación a Mathematica con la meta de reforzar las habilidades espaciales de los estudiantes de ingeniería desde el campo de las matemáticas, debido a que estas habilidades son ocupadas para el diseño, ensamble y trazado de piezas, circuitos y carreteras. El investigador realizó ciertas modificaciones en el software, con el objetivo de ampliar las capacidades de manipulación de parámetros en las expresiones matemáticas de planos y rectas. Para lograr estos cambios de comportamientos, utilizó el comando “*Manipulate*”, para controlar los parámetros entre un rango de valores, con el objetivo de que el usuario pueda visualizar los movimientos y las interacciones entre planos y rectas, que se encuentren móviles y fijos. Esta capacidad adicional permite estudiar las posiciones relativas de rectas y planos, lo cual lo convierte en una ventaja debido a que la propuesta de modificación cumple con el objetivo de impulsar las habilidades de visualización.

En un comentario relevante del investigador se menciona que ocupa Mathematica de Wólfram, debido a una licencia que presenta con la Universidad de Salamanca.

Gómez (2018), estudió el impacto que tiene el uso de modelos maleables 3D-PDF en las ingenierías, de forma central en la ingeniería civil, para desarrollar y reforzar las capacidades espaciales de objetos que requieren un alto grado de abstracción y una representación tridimensional. Estos modelos manipulables se desarrollaron en los temas: punto, recta, planos y relaciones métricas, con el objetivo de mostrar proyecciones, posiciones e interacciones. Luego el investigador evaluó el impacto en la capacidad espacial utilizando la prueba PSVT: R en una muestra no probabilística intencional, con el objetivo de obtener datos y poder analizarlos con una prueba T Student, en lo que corresponde a la variable de capacidad espacial. Además, en este estudio se usó la prueba estadística de U de Mann-Whitney para datos paramétricos, que en este caso corresponde a la variable de rendimiento académico que no cumplió la prueba de normalidad de Kolmogorov. Después de las pruebas que realizó el investigador, se determinó que si se presentan diferencias significativas en la capacidad espacial de los estudiantes, proyectando un incremento del 22% en la capacidad espacial de los alumnos.

Cabe mencionar que el uso de estos modelos, solo sirven como un entrenamiento indirecto, porque no se estudian el cómo elaborar estos modelos, solo se analizan archivos previamente elaborados por terceros.

Bravo, Hollisch & Rienda (2019), desarrollo una propuesta didáctica a partir de un estudio anterior realizado por Bravo & Patiño (2016) en donde determina los errores básicos para aprender los conceptos de recta y plano en R^3 . La propuesta está enfocada a superar los errores detectados, mediante herramientas de carácter tecnológico, junto con el modelo de Vinner que busca la conexión entre la información verbal y la gráfica, debido a que la formación de una imagen para representar un concepto se vuelve clave para demostrar y desarrollar conjuntamente el razonamiento matemático. La propuesta didáctica estuvo formada por 10 actividades, que luego de ser desarrolladas se determinó que las gráficas de computador permiten tener un registro gráfico para generar un mejor entendimiento de los conceptos, al mismo tiempo permiten elaborar conjeturas y suposiciones por solo análisis de elementos de forma visual debido al entorno tridimensional.

Rivero (2019) consideró la utilización de un laboratorio interactivo para diseñar una práctica guiada por el docente mediante el aplicativo de GeoGebra con el uso de preguntas y respuestas a través la plataforma de Moodle sobre la ecuación del plano y la recta en R^3 , con el resultado de construir conceptos abstractos por medio de la construcción geométrica de un objeto paso a paso para que los estudiantes de ingeniería puedan desarrollar de forma

correcta conceptos y cálculos necesarios para materias posteriores. Los resultados fueron favorables, al comparar los test sin la construcción visual, y el post test con la representación visual, al incrementar la tasa de porcentajes de respuestas correctas en un 23%. Sin embargo, se menciona que una tasa de estudiantes en el post test no tenían el conocimiento para el manejo de un software que permita la visualización 3D, por lo tanto, las respuestas proporcionadas por los estudiantes fueron sesgadas de forma significativa. En consecuencia, se utilizó solo herramientas de estadística descriptiva para comparar los resultados obtenidos.

3. Metodología.

La presente investigación se centró en la elaboración de una aplicación para la graficación de rectas y planos en tres dimensiones, bajo la hipótesis de que esta aplicación ayudará al proceso de aprendizaje por medio de representaciones visuales, para esto se trató de conocer que habilidades y problemas se han presentado en el tema de estudio, además de validar la aplicación bajo la evaluación de un experto.

En primer lugar, esta investigación se basó en una búsqueda bibliográfica para definir que habilidades están afectadas por el desarrollo de visualizaciones de planos y rectas en el espacio. Posteriormente, se procedió con la parte experimental del estudio, en donde se desarrolló una aplicación por medio del software de MATLAB 2021b, para crear modelos tridimensionales que permitan el estudio de planos y rectas por medio de métodos de visualización y análisis de los modelos.

Por último, se realizó un análisis de los resultados obtenidos con base en la información recopilada por medio de una prueba de conocimientos. Además, se evaluó la efectividad de la aplicación por medio de la evaluación de un experto, en términos de que puedan mejorar las capacidades espaciales de los estudiantes e identificar posibles limitantes o mejoras que se podrían establecer en futuras investigaciones.

3.1. Población y muestra

3.1.1. Población

El enfoque de esta investigación estuvo directamente relacionado con los estudiantes de primer ciclo de la carrera de Ingeniería Industrial, que se encontraron cursando la asignatura de Álgebra Lineal durante el período marzo - agosto 2023.

Actualmente, la asignatura de Álgebra Lineal cuenta con un total de 54 estudiantes divididos en dos grupos, siendo la población total del estudio.

3.1.2. Muestra

Se eligió una muestra no probabilística intencional por particularidades del estudio con la intención de obtener resultados precisos y relevantes que no se encuentren sesgados, como se explica a continuación.

Se ha elegido como muestra al grupo 1 de los dos mencionados anteriormente, el cual está conformado por 23 estudiantes, y el cual posee la característica de estar cursando por primera vez la asignatura de Álgebra Lineal. Lo que indica que no han tenido un desarrollo previo de habilidades matemáticas y espaciales relacionadas con el tema de estudio, evitando ciertos sesgos con estudiantes que se encuentren con un nivel superior de conocimientos debido a estar cursando por segunda o tercera ocasión la asignatura.

3.2. Recolección de información.

Para comprobar la hipótesis establecida, se procedió a utilizar una prueba de conocimiento que evalúan tres criterios: el conceptual, el procedimental y de graficación, para establecer la problemática que los estudiantes tienen con referencia al tema de investigación y corroborar la importancia de la graficación, para el desarrollo de los diferentes objetos tridimensionales que se abarcan. La prueba de conocimientos se realiza de forma paralela a la elaboración de la aplicación, para establecer las deficiencias que tienen los estudiantes y con ello se tiene un punto de partida para continuar con el desarrollo de la aplicación de graficación en 3D. Además, cabe mencionar que la prueba de conocimientos fue realizada por los estudiantes luego de ser revisado el tema en la clase de Algebra Lineal.

Esta prueba permitió obtener datos de carácter cuantitativo y cualitativo, para la validación de la aplicación. La prueba de conocimiento aplicado se lo puede revisar en el Anexo A

3.3. Análisis de los resultados obtenidos en la prueba de conocimientos.

Para llevar a cabo un análisis completo de los resultados obtenidos durante la prueba de conocimientos, se procedió a establecer diversos factores de evaluación para valorar la resolución de cada uno de los problemas propuestos. Esto permite definir de forma más concisa la situación inicial de los estudiantes evaluados, en relación con criterios teóricos, habilidades matemáticas y habilidades de visualización espacial en referencia a planos y rectas en R^3 . De esta forma, se logró obtener una comprensión más detallada de las capacidades y limitaciones que posee el grupo evaluado.

En la tabla 1, se puede apreciar los factores de evaluación considerados durante la prueba de conocimientos presente en el Anexo A, así como su respectiva codificación que será de utilidad para la presentación de resultados.

Tabla 1

Factores de Evaluación considerados para la prueba de conocimientos

Factores de Evaluación.		Codificación
Problema 1	Conceptual.	
	Definición de un vector perpendicular.	C1
	Procedimental.	
	Determinación de un vector conocido dos 2 puntos.	P1
	Aplicación del producto cruz.	P2
	Aplicación del producto escalar para comprobar perpendicularidad	P3
	Graficación.	
	Graficación de los vectores en el plano.	G1
	Graficación del vector perpendicular al plano.	G2
Problema 2	Conceptual	
	Definición de posición relativa entre el plano y las rectas.	C2
	Procedimental	
	Determinación de un vector conocido dos 2 puntos.	P4
	Aplicación del producto cruz.	P5
	Determinación del vector director de una recta conocido 2 puntos.	P6
	Determinación de la posición	P7
	Interpretación, visualización y graficación.	
	Graficación de la recta, vector director y del plano.	G3
Problema 3	Conceptual	
	Definición del vector director.	C3
	Definición vector normal al plano	C4
	Procedimental	
	Cálculo del vector director de la recta dado dos puntos.	P8
	Cálculo un vector contenido en el plano dado dos puntos.	P9
	Cálculo del ángulo mediante la formula entre la recta y el plano.	P10
	Interpretación, visualización y graficación.	

	Graficación de vectores del plano, de la recta y del vector director.	G4
	Identificación del ángulo entre la recta y el plano.	G5

3.4. Validación cuantitativa y cualitativa de la aplicación

3.4.1. Validación Cuantitativa.

Se realiza mediante la obtención del rendimiento de los estudiantes durante la prueba de conocimientos aplicada, para verificar su rendimiento promedio en el tema de estudio en un valor ponderable. Este valor se obtuvo bajo la rúbrica de calificación presente en la Tabla 2.

Tabla 2

Rubrica de calificación de la prueba de conocimientos.

Rubrica de calificación		
Problema 1	Criterio	Puntuación (3 puntos)
	Definición de un vector perpendicular.	1 pt
	Determinación de un vector conocido dos 2 puntos.	0,33 pt
	Aplicación del producto cruz.	0,33 pt
	Aplicación del producto escalar para comprobar perpendicularidad	0,33 pt
	Interpretación de los vectores en el plano.	0,5 pt
	Vector perpendicular al plano.	0,5 pt
Problema 2	Criterio	Puntuación (6 puntos)
	Definición de posición relativa entre el plano y las rectas.	1 pt
	Determinación de un vector conocido dos 2 puntos.	1 pt
	Aplicación del producto cruz.	1 pt
	Determinación del vector director de una recta conocido 2 puntos.	1 pt
	Determinación de la posición entre la recta y el plano	1 pt
	Graficación de la recta, vector director y del plano.	1 pt

Problema 3	Criterio	Puntuación (6 puntos)
	Definición del vector director.	0,5 pt
	Definición vector normal al plano	0,5 pt
	Cálculo del vector director de la recta dado dos puntos.	1 pt
	Cálculo un vector contenido en el plano dado dos puntos.	1 pt
	Cálculo del ángulo mediante la formula entre la recta y el plano.	1 pt
	Graficación de vectores del plano, de la recta y del vector director.	1 pt
	Identificación del ángulo entre la recta y el plano.	1 pt
Total		15 pts.

3.4.2. Validación Cualitativa.

La validación cualitativa de la aplicación se llevó a cabo con base en los errores que presentaron los estudiantes durante la prueba de conocimientos, esto con base en la limitada capacidad espacial que presentaron al momento de visualizar planos y rectas en R^3 . Con esta información se permite evaluar la capacidad del software para ayudar a superar las limitaciones espaciales que presentaron y determinar la efectividad que pueden tener sobre los errores detectados.

Posteriormente, para obtener una evaluación más completa y detallada de la aplicación, se realiza una encuesta de evaluación por medio de un experto, para verificar si es efectivo, en base a criterios que fueron recopilados mediante una revisión bibliográfica, y que se encuentra presente en el área de resultados. Con esto se examina el funcionamiento de la aplicación y se determina su efectividad, definiendo fortalezas o limitaciones del software, además de proporcionar información valiosa para maximizar la utilidad de la aplicación.

3.5. Desarrollo de la aplicación.

La aplicación fue desarrollada en Matlab 2021b, bajo la modalidad *AppDesigner*, que posee el programa para poder crear una aplicación en forma de archivos m, que no necesitan el programa original de forma base para la ejecución, es primordial debido a que los estudiantes que cursan la asignatura no tiene el conocimiento necesario para la graficación de rectas y planos en 3D, por esta razón es de suma importancia la aplicación desarrollada para que el

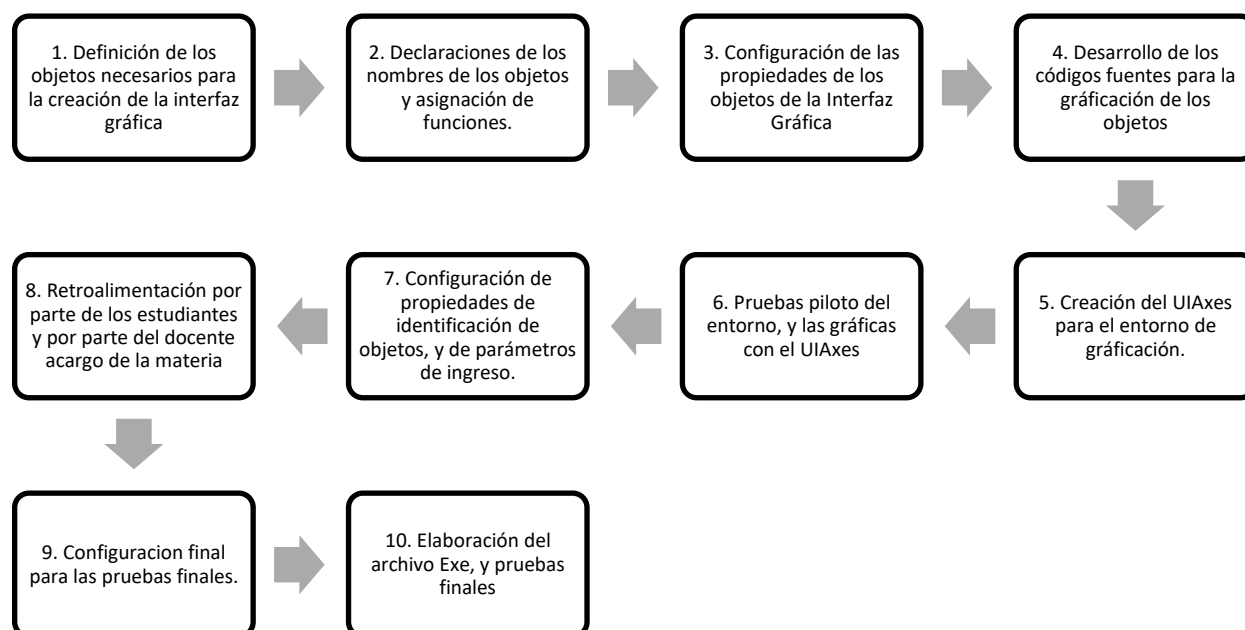
estudiante tenga una pantalla amigable y de fácil uso, para que el estudiante visualice los planos o rectas en 3D, permitiendo el desarrollo de habilidades espaciales y prevenir la deformación de conceptos geométricos espaciales erróneos.

3.6. Proceso de creación de la aplicación

Para crear el script de la aplicación, se siguió el esquema que se muestra en la Figura 1. En ella se establecen los pasos que se han seguido para el desarrollo de la aplicación y sus funcionalidades, todo ello en base de los resultados obtenidos por intermedio del cuestionario de conocimientos aplicado a los estudiantes, y además, la retroalimentación presentada por parte de los estudiantes y el docente de la asignatura. Con este enfoque se desarrolló una aplicación que se adaptara a las necesidades de los usuarios. En definitiva, el proceso de creación de la aplicación se llevó a cabo de forma rigurosa y meticulosa, con el objetivo final de ofrecer una herramienta eficaz, de fácil uso y accesible para mejorar el proceso de perfeccionamiento habilidades espaciales y visuales de los estudiantes del tema en estudio.

Figura 1

Proceso de creación de la aplicación en Matlab.



Fuente: Elaboración propia.

En la figura 1, se puede apreciar que en primera instancia, se establecieron los objetos necesarios para la creación de la interfaz gráfica, tales como *DropDown*, *Button*, *Sliders*, *Labels*, *EditFieldNumeric*, entre otros. Cada uno de estos componentes fueron seleccionados de forma cautelosa para asegurar que los parámetros de ingreso sean los necesarios para cumplir con las funcionalidades de la aplicación.

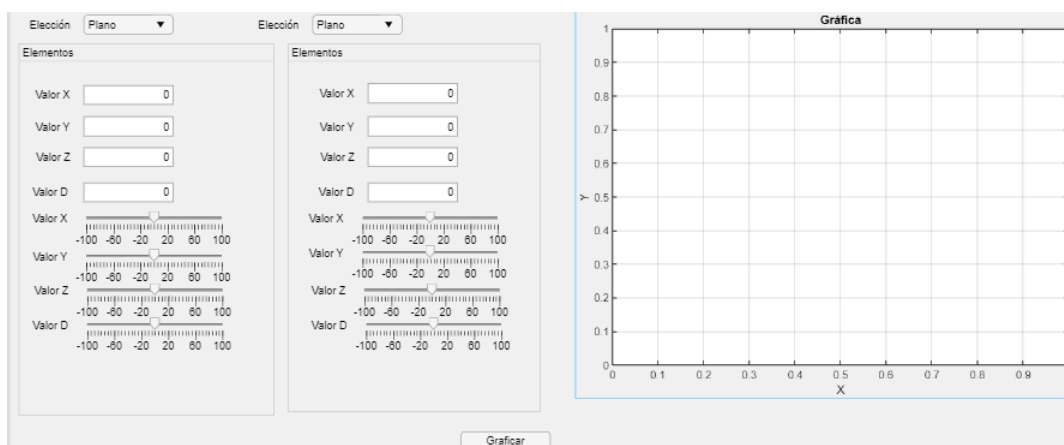
Una vez definidos todos los objetos necesarios, se procedió con la creación, distribución y declaración de los nombres y propiedades de cada uno de los objetos que se adecuarán en la UI Figure (Figura para construir interfaces de usuarios), donde se encuentran contenidos todos los componentes de la interfaz. Cabe mencionar que la distribución de cada uno de los objetos se hizo con el objetivo de que cumplan un fácil ingreso de datos.

Siguiendo el proceso de creación, la definición de las propiedades de cada uno de los objetos es realizada de forma manual en la interfaz de AppDesigner de MATLAB 2021b, siendo el código fuente creado y modificado de forma automática por la modalidad AppDesigner, aún en el caso de que existan modificaciones por medios manuales.

El cumplimiento de estos primeros pasos se puede visualizar en la figura 2 se muestra el interfaz de usuario básico y en la figura 3 un fragmento del código para la configuración de propiedades.

Figura 2

Ventana inicial de la interfaz de usuario del programa.



Fuente: Elaboración propia.

Figura 3

Configuración de las propiedades de los objetos de la interfaz gráfica.

```
% Create AppParte1UIFigure and hide until all components are created
app.AppParte1UIFigure = uifigure('Visible', 'off');
app.AppParte1UIFigure.Color = [0.9412 0.9412 0.9412];
app.AppParte1UIFigure.Position = [100 100 1216 602];
app.AppParte1UIFigure.Name = 'AppParte1';
app.AppParte1UIFigure.Scrollable = 'on';

% Create UIAxes
app.UIAxes = uiaxes(app.AppParte1UIFigure);
title(app.UIAxes, 'Gráfica')
xlabel(app.UIAxes, 'X')
ylabel(app.UIAxes, 'Y')
zlabel(app.UIAxes, 'Z')
app.UIAxes.XGrid = 'on';
app.UIAxes.YGrid = 'on';
app.UIAxes.ZGrid = 'on';
app.UIAxes.Position = [686 103 489 405];
```

Fuente: Elaboración propia.

Continuando el proceso mostrado en la figura 1, para la parte de graficación se utilizó un objeto Axes (la cual muestra los objetos en sistemas cartesianos) para la creación de gráficas, y se configuró su código fuente mediante los comandos especializados de MATLAB “Plot3” y “Mesh”, para obtener las gráficas de puntos, planos y rectas en R^3 .

Adicional, en esta versión de MATLAB se permite incluir la barra *Toolbar* propia de los objetos Axes para la manipulación de rectas, planos y puntos, permitiendo obtener las propiedades de rotación, exportación de imágenes, cursor de puntos, entre otras.

La figura 4, muestra un extracto del código fuente para la graficación de un punto.

Figura 4

Extracto de código para graficación de puntos.

```
case "Punto" % Caso para graficar puntos
X1 = app.ValoraEditField_2.Value %Valor coordenada X
Y1 = app.ValorbEditField_2.Value %Valor coordenada Y
Z1 = app.ValorcEditField_2.Value %Valor coordenada Z
plot3(app.UIAxes,X1,Y1,Z1,'*','Color','g') % Gráfica del punto en el Axes
hold (app.UIAxes,'on') % Mantener gráfica en el Axes, en caso de graficar multiples
```

Fuente: Elaboración propia.

Después, se configuraron los parámetros de entrada de datos mediante un objeto Slider (Control deslizante para los parámetros de ingreso), y por un EditFieldNumeric (Campo de edición numérico), tanto para puntos, planos y rectas. Estos se configuraron para que los parámetros de entrada de los datos numéricos se realicen en una escala de -100 a 100. Con estas primeras configuraciones se compiló el programa a una primera versión, y se efectuó

una primera interacción con los estudiantes y del docente a cargo de la asignatura, para establecer una retroalimentación, configurando el programa una segunda versión.

Para la segunda versión se configuró la interfaz de usuario, con las funcionalidades para el cálculo de ángulo, posiciones relativas y la ecuación de la recta entre planos.

3.6.1 Funciones adicionales para la visualización de rectas y planos 3D.

En la nueva versión del programa se adicionó el Button (Botón) “**Ec.Recta**”, para el cálculo de la ecuación de la recta, cuando los planos que se presentan sean secantes. Para ello se utilizó el comando “Cross”, con la intención de obtener el vector director de la recta partir de los vectores normales a los planos, y un sistema de ecuaciones lineales para hallar el punto de la ecuación de la recta.

Para el cálculo del ángulo entre planos se utilizaron los comandos “dot”, “norm” y “acos” a partir de la fórmula:

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|}$$

En donde:

\vec{A} representa el vector normal del primer plano.

$|\vec{A}|$ magnitud del vector A

\vec{B} representa el vector normal del primer plano

$|\vec{B}|$ magnitud del vector V, y

θ el ángulo comprendido entre los dos planos secantes.

Con respecto a las gráficas de las rectas se agregaron las funcionalidades para determinar las posiciones relativas y el ángulo, para esta última funcionalidad se utilizó los mismos comandos utilizados para el cálculo del ángulo entre planos, considerando que los vectores necesarios para el cálculo son los vectores directores. Otras de las funcionalidades con las que cuenta el programa son las posiciones relativas entre las rectas, en donde para su cálculo se puede ver un extracto del código utilizado en la figura 5.

Figura 5

Extracto del código para determinar las posiciones relativas entre rectas.

```
%Prueba de vectores
MVX=VX/VX2; %Proporción de la componente X del vector
MVY=VY/VY2; %Proporción de la componente Y del vector
MVZ=VZ/VZ2; %Proporción de la componente Z del vector
if MVX==MVY && MVX==MVZ %Verificar si los vectores de dirección son paralelos o coincidentes
    %Ecuaciones parametricas, reemplazan el punto de una recta
    %L2 en la otra recta, para determinar el escalar
    t1=(X1-X2)/VX2; %Determinación del escalar t con x
    t2=(Y1-Y2)/VY2; %Determinación del escalar t con y
    t3=(Z1-Z2)/VZ2; %Determinación del escalar t con z
    if t1==t2 && t1==t3 % Si todos los 3 escalares, son exactamentemnte son Coincidentes
        app.PosicionentreRectasEditField.Value='Rectas Coincidentes' %Muestra que son R.Coincidentes
        app.AnguloButton.Visible='off' % Apaga el boton de Angulo
        app.AnguloButton_2.Visible='off' % Apaga el titulo de Angulo
    end
end
```

Fuente: Elaboración propia.

En el caso de las posiciones relativas entre rectas y planos, se programó un apartado especial con un cuadro de información, que informa sobre la posición relativa de estos dos objetos, y el ángulo que se genera en caso de existir, un extracto del código para esta funcionalidad se lo puede visualizar en le figura 6.

Figura 6

Extracto de código para posiciones relativas entre planos y rectas.

```
PP=dot(VD,VN); %Producto punto entre vector normal del plano y vector directos de la recta
if PP==0 % Si el producto punto es igual a 0 son paralelas o esta contenida en el planos
    %Prueba Recta
    PR=(X1*X2)+(Y1*Y2)+(Z1*Z2)-D2 %Reemplazo el punto de la recta en la ecuacion del plano
    if PR==0 % Si el reemplazo es igual a 0, la recta esta contenida en el plano
        app.PosicionentreRectaPlanoEditField.Value='RECTA CONTENIDA EN PLANO' %Muestra que la recta esta contenida en el plano
    else
        app.PosicionentreRectaPlanoEditField.Value='RECTA PARALELA AL PLANO' %Muestra que la recta es paralela al plano
    end
else % Si no se presenta ninguna de estas, se plantea que es secante al plano
    app.AnguloEditField.Visible='on' %Se prende el boton para calcular el angulo entre plano y angulo
    app.PosicionentreRectaPlanoEditField.Value='RECTA SECANTE AL PLANO' %Muestra el mensaje de R.Secante al plano
    A=acos(PP/(norm(VD)*norm(VN)))% Utiliza la funcion de coseno inverso para obtener el angulo en radianes
    AG=rad2deg(A);%Convierte el angulo a grados sexagesimales
    A1=90-round(AG,1,"decimals");%Le resta menos 90 para sacar el complementario, y lo redondeamos a un decimal
    app.AnguloEditField.Value=string(A1)%Me muestra el valor del angulo calculado
end
```

Fuente: Elaboración propia.

Finalmente, se creó una nueva ventana para la graficación de 3 objetos, la nueva ventana es muy similar a la de la primera ventana del usuario (Ver figura 2), en donde existe una única diferencia, la cual consiste en poder ingresar los parámetros para graficación de planos por medio de la ecuación cartesiana del plano o por medio de tres puntos conocidos del plano. Con esta nueva función, el programa hace el cálculo de 2 vectores, considerando a un punto como fijo, y luego se utiliza el comando “Cross”, para determinar el vector normal al plano.

Cabe mencionar que se incluyó un parámetro de dimensión para realizar las gráficas, debido a que la función *Mesh* ocupada para la graficación de planos, está en base a un tamaño de matriz que se configura mediante este parámetro.

Cada una de las funcionalidades descritas anteriormente se estipulan en el manual de usuario (Ver Anexo B).

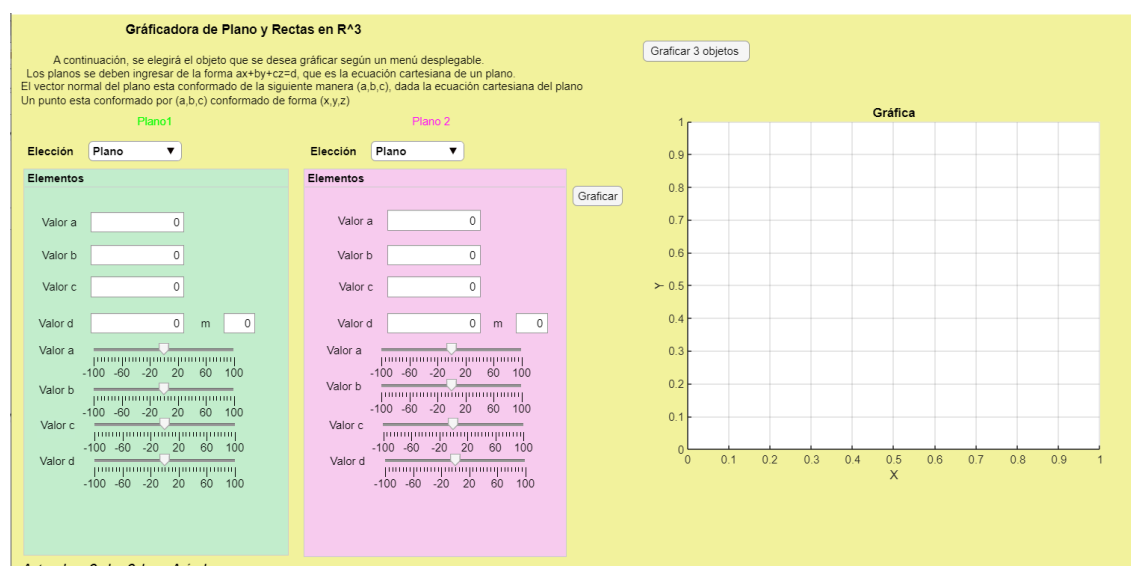
4. Resultados

4.1. Versión Final de la Aplicación

En la figura 7, se muestra la primera pantalla de la versión final del programa, esta versión está conformada por dos ventanas, en donde se puede identificar cada uno de los objetos a graficar en el campo del Axes, mediante un color de reconocimiento.

Figura 7

Pantalla principal del aplicativo.



Fuente: Elaboración propia.

4.2. Resultados de la prueba de conocimientos.

La prueba de conocimientos se realizó con el fin de conocer una situación inicial de los estudiantes con relación al tema de estudio, y de identificar los puntos que se necesitan reforzar o incluir dentro del aplicativo desarrollado. De este modo, el programa es funcional, de fácil uso, acceso sencillo y sobre todo interactivo para el desarrollo de las actividades académicas de los estudiantes que toman la asignatura.

Una vez realizada la recolección de datos en la prueba de conocimientos (Ver Anexo A), se procedió a tabular los resultados de acuerdo con los criterios estipulados para su análisis. Los

resultados obtenidos se pueden visualizar en la Tabla 3, 4 y 5. De forma resumida, se identificó un problema recurrente entre los estudiantes al tratar de relacionar la parte teórica de las posiciones relativas entre planos y rectas con la parte gráfica del mismo tema. Este problema resulta ser un tropiezo significativo para visualizar y comprender las posiciones relativas de los objetos en el espacio, por lo cual es de importancia contar con las herramientas adecuadas.

4.2.1. Resultados de la prueba de conocimientos.

Tabla 3

Resultados del primer problema de la prueba de conocimientos.

Número de estudiante	C1	P1	P2	P3	G1	G2
1	1	B	B	B	B	B
2	1	1	1	B	1	0
3	1	1	B	B	1	B
4	1	1	0	B	0	0
5	1	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	1
7	1	0	0	0	0	0
8	1	0	0	0	0	B
9	B	B	B	B	B	B
10	B	B	B	B	B	B
11	1	1	1	1	0	0
12	1	0	0	0	0	1
13	1	1	1	1	0	B
14	1	B	B	B	B	B
15	1	1	1	1	1	B
16	0	0	0	0	0	B
17	0	0	0	0	0	0
18	1	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	1
20	1	B	B	B	B	B
21	1	0	0	0	0	1
22	1	0	0	0	0	1
23	1	1	1	0	0	0
N.º Estudiantes que cumplieron	18	7	5	3	3	5

N.º Estudiantes que no cumplieron	3	11	12	12	15	8
N.º Estudiantes que no respondieron	2	5	6	8	5	10
% Estudiantes que cumplieron	78%	30%	22%	13%	13%	22%
% Estudiantes no cumplieron	13%	48%	52%	52%	65%	35%
% Estudiantes que no respondieron.	9%	22%	26%	35%	22%	43%

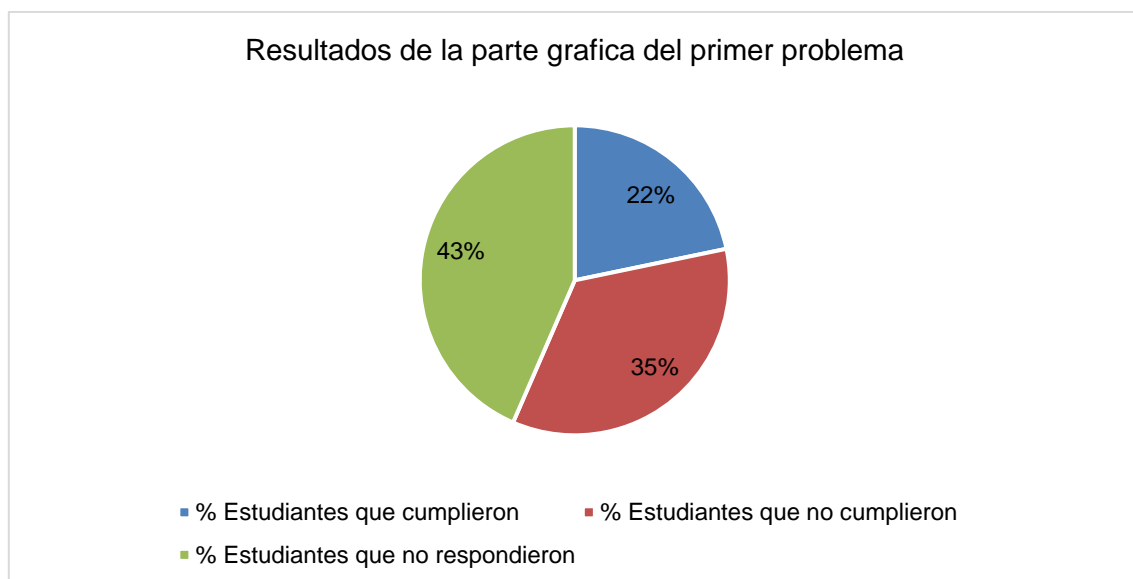
Nota: El nombre de cada una de las columnas representa un criterio codificado según la Tabla 1

Cabe mencionar que en la tabla 1, se consideró si cumple con el factor de evaluación planteado o cero en caso de no cumplir y B si la pregunta no fue contestada.

Para la parte de graficación de este primer problema solo el 22% de estudiantes realizó una gráfica correcta, de cómo se representa un vector normal al plano, por otro lado, el 35% de los estudiantes no lo realizó de forma correcta por motivos de un escaso manejo de un sistema de coordenadas R^3 , que se evidenció al momento de obtener información de la gráfica para calcular el vector conocido dos puntos. Esta información está representada en la figura 8, en donde se evidencia los resultados descritos.

Figura 8

Resultado de la parte gráfica del primer problema



Fuente: Elaboración propia.

Entre los principales errores que se presentaron durante el primer problema de la prueba de conocimientos se tiene que:

- Se consideran los puntos como si fueran vectores para realizar los cálculos, como se observa en la figura 9.

- No consideran la información sobre la coordenada correcta de los puntos que se encuentran en el plano.

Figura 9

Error en el cálculo del vector normal del plano.

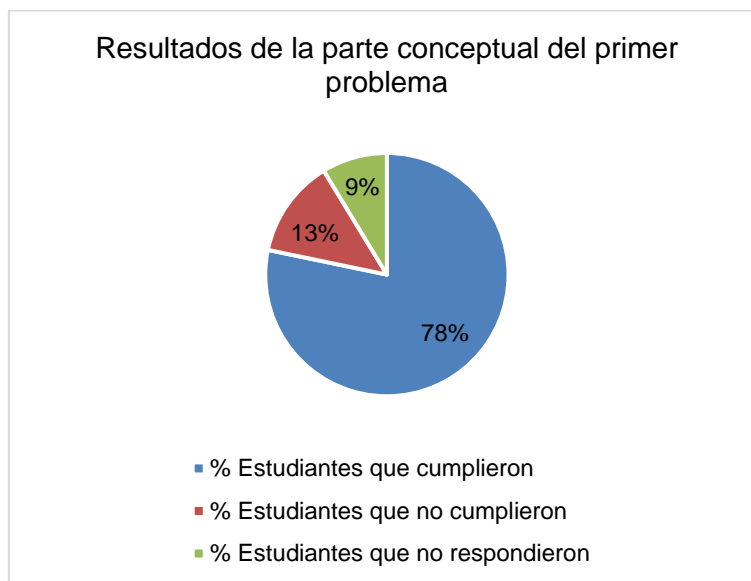
Handwritten student work on grid paper showing calculations for a normal vector. The work includes the following steps:

- 1. $(4, 4, -4) = A$
- $(4, 0, -4) = C$
- Calculation of a vector: $-8i + 0j - 8k$
- Calculation of a vector: $+0i + 8j$
- Final result: $(-8, 0, -8) = B$

En cuanto al criterio de conceptos, el 78% ha respondido de manera correcta y el 13% lo ha hecho de forma incorrecta. Las principales respuestas erróneas están asociadas a definiciones incorrecta sobre vectores perpendiculares a un plano, lo que lleva a errores de cálculo del vector normal al plano.

Figura 10

Resultados de la parte conceptual del primer problema



Fuente: Elaboración propia

Tabla 4

Resultados del segundo problema de la prueba de conocimientos

Número de estudiante	C2	P4	P5	P6	P7	G3
1	B	1	1	0	0	0
2	B	1	1	0	0	0

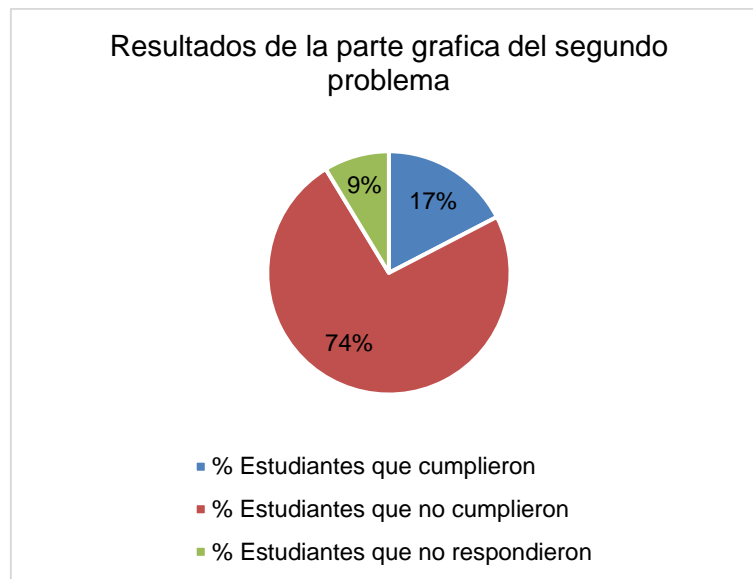
3	B	0	0	0	0	0
4	B	1	1	1	0	0
5	B	B	B	B	B	0
6	B	1	1	0	0	B
7	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0
9	B	0	1	0	0	B
10	B	0	0	0	0	0
11	0	1	1	1	0	0
12	0	1	1	1	0	1
13	0	1	1	0	0	0
14	B	B	B	B	B	0
15	B	B	1	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0
17	B	B	B	B	B	0
18	0	0	0	0	0	0
19	0	1	0	0	0	1
20	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	1
22	0	1	0	1	0	1
23	1	0	0	0	0	0
N.º Estudiantes que cumplieron	1	9	9	4	0	4
N.º Estudiantes que no cumplieron	11	10	11	16	20	17
N.º Estudiantes que no respondieron	11	4	3	3	3	2
% Estudiantes que cumplieron	4%	39%	39%	17%	0%	17%
% Estudiantes que no cumplieron	48%	43%	48%	70%	87%	74%
% Estudiantes que no respondieron.	48%	17%	13%	13%	13%	9%

Nota: El nombre de cada una de las columnas representa un criterio codificado según la Tabla 1

En la figura 11, se puede observar que en el segundo ejercicio de la prueba, el 91% de los estudiantes intentaron realizar la gráfica asignada al problema, pero solo el 17% obtuvo una gráfica correcta, referente a la posición relativa que tiene la recta y el plano.

Figura 11

Resultados de la parte grafica del segundo problema.



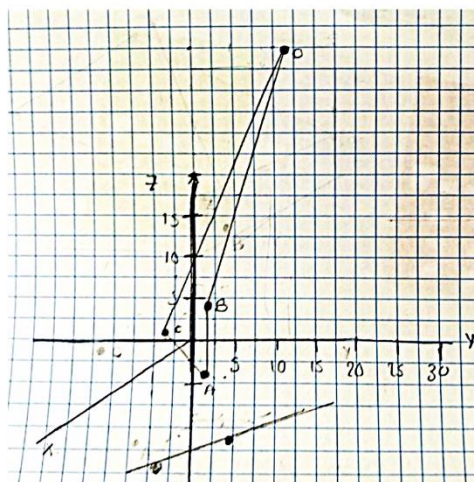
Fuente: Elaboración propia.

Uno de los errores para la realización de la gráfica solicitada en el problema fue no poder determinar los puntos iniciales de los objetos en R^3 .

En la figura 12 se puede apreciar una gráfica errónea entre un plano y una recta.

Figura 12

Graficación errónea tomada de uno de las muestras.

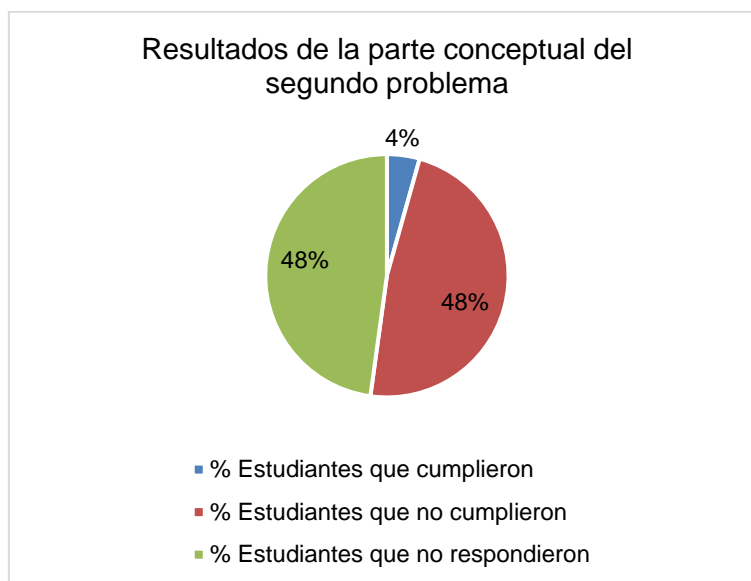


Otro de los errores es que los estudiantes consideran que la recta y el plano son paralelos o están en diferentes lugares del espacio.

En el criterio de evaluación conceptual, solo el 4% de los estudiantes conocen sobre las posiciones relativas entre planos y rectas, evidenciando en los estudiantes un escaso vínculo entre la parte teórico y la práctica, en consecuencia se puede ver que es fundamental vincular la parte teórica con la parte gráfica debido a que lo conceptual ayuda a entender la parte práctica del problema. Esta información se puede visualizar en la figura 13.

Figura 13

Resultados de la parte conceptual del segundo problema



Fuente: Elaboración propia

Tabla 5

Resultados del tercer problema de la prueba de conocimientos.

Número de estudiante	C3	C4	P8	P9	P10	G4	G5
1	B	B	B	B	B	B	B
2	B	B	0	1	0	0	0
3	B	B	0	0	0	0	0
4	1	1	1	0	0	1	0
5	B	B	0	0	0	1	0
6	B	B	0	0	0	B	0
7	0	0	0	0	0	0	0
8	B	B	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0
10	B	B	0	0	0	0	0
11	0	0	1	1	0	0	0

12	0	0	1	1	0	B	0
13	1	1	1	0	0	B	0
14	1	0	B	B	B	B	B
15	0	0	1	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0
19	0	1	1	0	0	0	0
20	1	1	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	1	1
22	0	0	0	0	0	1	0
23	1	1	0	0	0	0	0
N.º Estudiantes que cumplieron	5	5	6	3	0	4	1
N.º Estudiantes que no cumplieron	11	11	15	18	21	14	20
N.º Estudiantes que no respondieron	7	7	2	2	2	5	2
% Estudiantes que cumplieron	22%	22%	26%	13%	0%	17%	4%
% Estudiantes no cumplieron	48%	48%	65%	78%	91%	61%	87%
% Estudiantes que no respondieron.	30%	30%	9%	9%	9%	22%	9%

Nota: El nombre de cada una de las columnas representa un criterio codificado según la Tabla 1

En el tercer ejercicio solo el 4% de estudiantes logro graficar de forma correcta la recta en el plano, el 87% realiza la gráfica de la recta de forma incorrecta porque no considera los puntos por los cuales se menciona que pasa la misma. En algunos casos no conocen qué es un vector director de la recta, confunde el vector director con el vector normal al plano. Estos resultados se pueden observar en la figura 14.

Figura 14

Resultados de la parte de graficación del tercer problema.



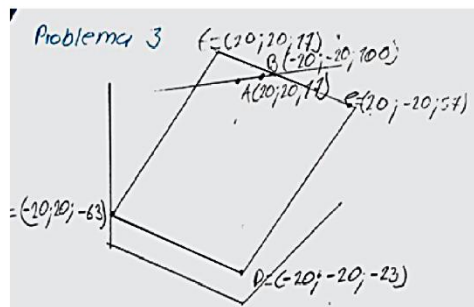
Fuente: Elaboración propia.

El objetivo de este ejercicio era efectuar el cálculo del ángulo entre el plano y la recta, al no tener clara la idea de cómo se grafica la recta con respecto al plano dado, no pueden determinar la actividad planteada por error conceptual y de graficación. Al igual que en el problema 1, al no estar familiarizado con la ocupación de gráficas en sistemas de coordenadas en R^3 , se vuelve un problema complejo en el desarrollo de la capacidad espacial para determinar la posición relativa de la recta con un plano, complicando el razonamiento para la resolución del ejercicio.

En la figura 15, se muestra uno de los intentos por ubicar la recta y el plano por parte de un estudiante evaluado.

Figura 15

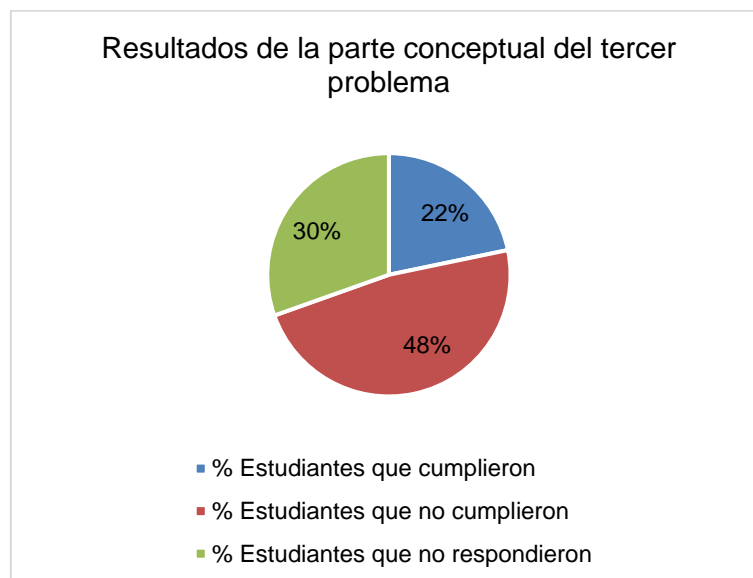
Graficación del ejercicio 3, tomada de una de las muestras.



En este ejercicio la parte conceptual ha sido respondida correctamente en un 22%, y el resto no ha respondido o tiene un concepto equivocado de lo que es un vector director como se puede apreciar en la figura 16, generando problemas al confundir el vector director de la recta con el vector normal al plano.

Figura 16

Resultados de la parte conceptual del tercer problema.



Fuente: Elaboración propia

4.2.2. Resultados de la prueba de conocimientos en notas

Tabla 6

Notas de la prueba de conocimientos realizado

Número de estudiante	Nota/15
1	3

2	5
3	1,5
4	8,5
5	2
6	4
7	1
8	1
9	1
10	0
11	7
12	9
13	7
14	2
15	4
16	0
17	0
18	1
19	6
20	3
21	5
22	7
23	5

En esta tabla la puntuación máxima de la prueba es de 15 puntos divididos en 3 puntos en el primer ejercicio, y 6 puntos en el segundo y tercer ejercicio, como se indica en la Tabla 2.

Luego de obtener las notas de la prueba de conocimientos, se realizó un resumen estadístico en Minitab 19, obteniendo los siguientes resultados (Ver tabla 7)

Tabla 7

Resumen estadístico de la prueba de conocimientos.

Variable	N	Media	Error estándar de la media	Desv. Est.	Mínimo	Q1	Mediana	Q3	Máximo
Nota/15	23	3,609	0,590	2,828	0,	1	3,000	6,0	9,000

4.3. Análisis de los resultados de la prueba de conocimientos.

Con base en la prueba de conocimientos se pudo verificar que la parte visual representa un grave problema para los estudiantes ello queda corroborado por los bajos porcentajes que obtuvieron al resolver el cuestionario de conocimientos. Con ello se concluye la relación que existe entre la parte gráfica y teórica, es difícil que el estudiante logre avanzar con cálculos de procedimientos o el entendimiento completo de conceptos teóricos del tema.

El modelo del aplicativo se centra en el modelo de Van Hiele, que se utiliza para la enseñanza de la geometría espacial. Este modelo presenta 5 niveles que se deben avanzar de forma continua, en donde no se puede saltar ningún nivel para avanzar a otro porque existe la disrupción o la rotura del conocimiento. En este modelo se considera el primer nivel de reconocimiento visual, y se presentaría lógico que si no cuenta con este nivel completamente desarrollado puedan avanzar a niveles superiores.

Con esto en mente, el aplicativo desarrollado presenta una solución para poder llegar a dominar este primer nivel, y continuar con el desarrollo de los 5 niveles necesarios.

4.4. Resultados de la búsqueda bibliográfica de criterios de evaluación para evaluación del aplicativo

Después de realizar una investigación bibliográfica, se presenta en la Tabla 8 los criterios que debe cumplir el aplicativo para su validación desde un enfoque cualitativo que se recopilaron de diferentes autores, utilizando palabras claves de: Criterios, Evaluación, Materiales didácticos, Tecnológicos, Universitarios.

Tabla 8

Compilación de criterios de evaluación en materiales didácticos tecnológicos.

Autor	Criterios
Noordin, Wan Ahmad & Yew (2011).	Eficacia, Eficiencia, seguridad, utilidad, capacidad de aprendizaje y memorabilidad.
Fernández-Pampillón et al (2012)	Documentación Didáctica, calidad de los contenidos, innovación, interactividad y adaptabilidad, motivación, formato y diseño, usabilidad, accesibilidad y reusabilidad.

Aguilar Juárez et al (2014)	Accesibilidad, interactividad, seguridad, riqueza, multimedia, contextualización y subjetividad.
Cepeda et al (2016)	Contenido, Pertinencia y Formato.
García (2016)	Adecuación del contenido, Adaptabilidad, Grado de dificultad, funcionalidad, integración de medios y materiales, interactividad, Integración de destrezas y competencias
Norma Une 71362:2017	Descripción didáctica, calidad de los contenidos, capacidad para generar aprendizaje, adaptabilidad, interactividad, motivación, Formato y diseño, , portabilidad y estabilidad técnica, navegación, operabilidad, accesibilidad del contenido audiovisual, y accesibilidad del contenido textual.
Mancho de la Iglesia (2021).	accesibilidad, integración de medios, calidad técnica, y usabilidad.

Fuente: Elaboración propia.

Con estos criterios, se realizó un análisis de componentes principales (PCA) para determinar los criterios con mayor ponderación de mención entre los diferentes autores revisados.

El análisis se ejecutó mediante un emparejamiento de similitudes de criterios para verificar en primera instancia si existen criterios que cumplan un grado de similitud, y emparejarlos. Los resultados de este análisis se encuentran expuestos en la Tabla 9.

Tabla 9

Resultado del análisis de componentes principales.

N.º	Criterio	Frecuencia
1	Accesibilidad	9,43%
2	Calidad de contenidos	9,43%
3	Fácil de usar	9,43%
4	Capacidad de aprendizaje	7,55%
5	Formato y diseño	7,55%
6	Interactividad	7,55%

7	Calidad técnica	7,55%
8	Adaptabilidad	5,66%
9	Documentación didáctica	3,77%
10	Seguridad	3,77%
11	Reutilizable	3,77%
12	Integración de medios	3,77%
13	Motivación	3,77%
14	Grado de dificultad	3,77%
15	Innovación	1,89%
16	Utilidad	1,89%
17	Pertinencia	1,89%
18	Multimedia	1,89%
19	Memorabilidad	1,89%
20	Contextualización y subjetividad.	1,89%
21	Portabilidad	1,89%

Fuente: Elaboración propia

De la Tabla 9 se consideró los 7 primeros criterios que tienen la ponderación más alta o mayor mención, en relación con la investigación bibliográfica detallada. Considerando los criterios de mayor ponderación se realizó una encuesta y su respectiva validación (Ver Anexo C), para obtener la valoración del experto de la asignatura con referencia al aplicativo desarrollado. La validación por parte del experto, se ha presentado como favorable cumpliendo todos los criterios establecidos mediante el análisis PCA.

5. Discusión.

Los resultados obtenidos indican que los estudiantes no tienen habilidades para visualizar objetos tridimensionales debido a su formación académica basada en el método tradicional, que solo utiliza papel, lápiz e imágenes estáticas. Por lo tanto, el aplicativo desarrollado ofrece una opción viable para mejorar estas habilidades de visualización y de algunos conceptos abstractos.

Noordin & Ahmad (2011) apoyan estos resultados y mencionan que las representaciones visuales facilitan la comprensión de conceptos y definiciones teóricas para vincularlos con la parte matemática, mencionando la frase de que imagen significa más que mil palabras. Además, destacan que no se puede avanzar con el dominio del tema sin primero superar el nivel de aprendizaje visual, correspondiente al modelo de Van Hiele, debido a que los niveles son secuenciales y no se pueden saltar.

Es importante destacar que el aplicativo fue creado según las necesidades identificadas por los estudiantes, con especial énfasis en temas como posiciones relativas entre planos y rectas, obtención de ecuaciones del plano con 3 puntos, ángulo entre planos y rectas, entre otros. De esta manera, el aplicativo se centra en abordar las deficiencias encontradas en los estudiantes y en los temas solicitados tanto por estudiantes como por el docente, como lo sugiere Chávez et al (2021).

Sin embargo, debido a que el aplicativo es personalizable, se sugiere realizar un análisis para otro entorno con necesidades diferentes, como lo señala Velastegui et al (2021). Mencionando que se siempre se debe presentar un análisis de ventajas y posibles riesgos del aplicativo, ya que de esto depende que las necesidades específicas de un grupo estén cubiertas, y de que el aplicativo ocupado se convierta en una herramienta de apoyo.

Gutiérrez & Jaime (2015), mencionan que estos programas también pueden inducir a concepciones erróneas sino se usa con cuidado, sin embargo, las influencias positivas para el desarrollo de imágenes de objetos tridimensionales son superiores por la eliminación de falsas suposiciones visuales que genere un estudiante.

Por último, la forma de buscar los criterios que se necesitan para validar un aplicación de aprendizaje, se ve como algo innovador porque se ocupa el criterio de varias investigaciones, y no se basa en una sola estructura básica presentada por un solo autor, como es el caso de Noordin & Wan (2011), en donde se ocupa los criterios en base a su experiencia dentro del tema.

6. Conclusión.

El objetivo del estudio se cumplió ,en base al desarrollo de una aplicación para ayudar al proceso de aprendizaje y de habilidades visuales en torno al tema de planos en el espacio. Cumpliendo con las necesidades presentadas por los estudiantes, es decir, incluyendo los puntos en donde se presenta una mayor deficiencia de conocimiento, además de incluir características como: fácil uso, interfaz del usuario amigable, de fácil accesibilidad, entre otras, dejando de lado el aprendizaje de programación por comando para crear gráficas, siendo una solución versátil y eficaz. Además, este aplicativo fue válido bajo un experto en el tema, considerando los criterios que deben ser considerados aptos para la implementación en el plan de estudio.

En segundo lugar, luego de realizar la revisión bibliográfica para la detección de las capacidades espaciales y visuales el tema en investigación, se obtienen las siguientes conclusiones:

- La aplicación de un software dinámico permite al estudiante la visualización y la interpretación gráfica en 3D. La utilización de un software se ha convertido en tendencia y se ha vuelto un punto de inflexión para dejar de entrenar capacidades visuales por medio de papel y lápiz.
- Los softwares que se emplean para geometría dinámica del espacio no siempre son fáciles de acceder, a excepción de GeoGebra, debido a que requieren de licencias de uso como en el caso de Cabri, Matlab, Mathematica, entre otros, razón por la que se promueve el desarrollar archivos o softwares propios que permitan a los estudiantes acceder de una forma libre, sin restricciones y de fácil manejo.
- El empleo de GeoGebra es una herramienta de carácter libre, pero requiere un entrenamiento para construir figuras en R^3 . En las investigaciones revisadas se tratan de crear solo experiencias didácticas con GeoGebra, debido a que el aprenderlo requiere de un período adicional de tiempo y dentro de la asignatura no se dispone de un espacio suficiente de tiempo, adicional de que el objetivo no es que aprendan a usar GeoGebra, sino que logren desarrollar capacidades espaciales de una forma que no requiera un entrenamiento adicional o una capacitación de mediana duración.

Por otro lado, el desarrollo del aplicativo mediante la modalidad de *AppDesigner* presenta una gran ventaja para su construcción, debido a la ayuda que presenta la aplicación a la hora formular códigos en la creación, configuración y personalización de objetos a criterio del desarrollador. Sin embargo, presenta una deficiencia que se evidencio al momento de obtener el programa como independiente de la estructura de Matlab, debido a que este no permite la inclusión de variables simbólicas.

Este último siendo un factor vital, puesto que en una primera instancia el código fue copiado con el paquete de variables simbólicas, pero por esta limitante se debió recurrir a un cambio de código. En caso de requerir este paquete de forma vital, se debería elegir otras opciones antes de comenzar con el desarrollo de un aplicativo.

Como recomendación, para futuras investigaciones sería interesante abarcar un nuevo estudio en donde se vinculen un enfoque con diferentes ingenierías para realizar un estudio de carácter completo, e identificar nuevas necesidades, o enfoques de aprendizaje.

7. Referencias

- Alurralde, F., Tapia, C., & Hurtado, J. (2017). Análisis del impacto del uso de GeoGebra en rectas y planos en el espacio, en asignaturas básicas de ingeniería.
- Aguilar Juárez, Irene, Ayala De la Vega, Joel, Lugo Espinosa, Oziel, & Zarco Hidalgo, Alfonso. (2014). Análisis de criterios de evaluación para la calidad de los materiales didácticos digitales. *Revista iberoamericana de ciencia tecnología y sociedad*, 9(25), 73-89. Recuperado en 18 de julio de 2023, de http://www.scielo.org.ar/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1850-00132014000100005&lng=es&tlng=es.
- Bravo , V. & Patiño, J. (2016): "Análisis de los errores de los alumnos en el concepto de recta y plano en álgebra y geometría analítica". En Revista Atlante: Cuadernos de Educación y Desarrollo. Noviembre 2016. Disponible en <http://www.eumed.net/rev/atlante/2016/11/recta.htm>
- Bravo,V., Hollisch.G., & Rienda, A. (2019): "Dificultades en la apropiación del concepto de recta y plano: una propuesta didáctica", Revista Atlante: Cuadernos de Educación y Desarrollo (marzo 2019). En línea: <https://www.eumed.net/rev/atlante/2019/03/concepto-recta-plano.html>
- Caro, A. F. (2015). Introducción a la geometría 3D con GeoGebra 5.0. *RECME*, 1(1), 738-742.
- Contreras, L., Trisancho, J., & Vargas, L. (2013). Evaluación de Factores de Entorno que afectan el Desarrollo de Habilidades Espaciales en Estudiantes de Primer Semestre en Ingeniería Industrial, doi: 10.18359/ravi.1921. *Revista Academia y virtualidad*, 6(1), 17.
- Cepeda, O., Gallardo, I., & Rodríguez, J. (2017). La evaluación de los materiales didácticos digitales. *Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa*, 2017, vol. 16, num. 2, p. 79-95.
- Chávez, C., Caldera, M., & Valenzuela, V. (2021). Desarrollo de una aplicación para espacios vectoriales en álgebra lineal. *RECIE. Revista Electrónica Científica de Investigación Educativa*, 5(2), 167-181.
- David, M., & Tomaz, V. (2011). The role of visual representations for structuring classroom mathematical activity. *Educational Studies in Mathematics*, 80(3), 413–431. doi:10.1007/s10649-011-9358-6

- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA*, 9(2), 53-83
- Hernández, N. M. F., Wilches, J. C. P., & Robles, J. R. (2015). Desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico según el modelo de Van Hiele y su relación con los estilos de aprendizaje. *Panorama*, 9(16), 44-54.
- Fernández-Pampillón, A. , Romero, E., & Ranero, I. (2012). Diez criterios para mejorar la calidad de los materiales didácticos digitales.
- Justo , A., Castro, L., Aguilar, W. & Fuentes, M. (2021). Estrategias educativas digitales como apoyo a cursos de ciencias básicas de ingeniería. *Apertura* (Guadalajara, Jal.), 13(1), 52-67. Epub 02 de julio de 2021.<https://doi.org/10.32870/ap.v13n1.1983>
- Mancho de la Iglesia, A. Torres, A. & Lacleta, M. (2021). Protocolo para la evaluación de materiales multimedia. In *Innovaciones docentes en tiempos de pandemia. Actas del VI congreso internacional sobre aprendizaje, innovación y cooperación, CINAIC 2021* (pp. 381-386). Servicio de Publicaciones.
- Muñoz, L. (2000): Metodología para elaborar multimedia a nivel académico (MEMS). Universidad de Barcelona, Jornadas Multimedia Educativo Barcelona 2000. Disponible en: http://biblioteca.universia.net/html_bura/ficha/params/title/metodologia-elaborar-multimedia-nivel-academico-mems/id/38111252.html.
- Noordin, S., & Ahmad, W. (2011). The development of multimedia courseware of lines and planes in 3-dimension: an application of Van Hiele's model. In Program of the 16th Asian Technology Conference in Mathematics. Universiti Teknologi PETRONAS (Vol. 31750).
- Noordin, S., Wan Fatimah, W. A., & Yew, K. H. (2011). Study of effectiveness and usability of multimedia courseware integrated with 3-dimensional model as a teaching aid. *International Journal of Computer Applications*, 16(4), 20-27.
- Nieto, S., & Ramos, H. (2017). Representación interactiva de rectas y planos y sus posiciones relativas en el espacio afín utilizando Mathematica.
- Noordin, S., Wan Fatimah, W. A., & Yew, K. H. (2011). Study of effectiveness and usability of multimedia courseware integrated with 3-dimensional model as a teaching aid. *International Journal of Computer Applications*, 16(4), 20-27.

- Pedroza Cantú, G. (2003). *Estrategias de aprendizaje para el trazo de superficies en el espacio tridimensional en el segundo semestre de la carrera de ingeniero industrial administrador de la facultad de ciencias químicas de la UNiversidad Autónoma de Nuevo León* (Doctoral dissertation, Universidad Autónoma de Nuevo León).
- Ramírez-Uclés, R., Flores, P., & Ramírez-Uclés, I. (2018). Análisis de los errores en tareas geométricas de argumentación visual por estudiantes con talento matemático. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 21(1), 29-56. <https://doi.org/10.12802/relime.18.2112>
- Rivero, A. (2019). Construcción de ecuaciones de rectas y planos en R3 en laboratorio interactivo con Geogebra y plataforma Moodle. In *XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*.
- Salazar, J. V. F., Gaita, C., & Beteta, M. (2012). Introducción a la Geometría analítica espacial con Cabri 3D. In *Actas del VI Congreso Iberoamericano de Cabri*.
- Sánchez, J., & Ríos, L. (2013). Uso de las TICS (SCILAB Y WIRIS) y su influencia en el rendimiento en el Álgebra Lineal de los Alumnos del Primer Nivel de Ingeniería de la Escuela Politécnica del Ejército Extensión Latacunga. *Maestría en Docencia Matemática, Ambato, Ecuador*.
- Torner Ribé, J., Alpiste Penalba, F., Brigos Hermida, M. Á., & Embodas, R. (2014, December). Realidad virtual inmersiva aplicada al aprendizaje de geometría del espacio. In *Jornades de Recerca EUETIB 2014* (pp. 84-89). EUETIB.
- Vargas, G. V., & Araya, R. G. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, 27(1), 74-94.
- Velastegui, L., Rodríguez, E., Henríquez, E., Campoverde, M., & Ortiz, W. (2021). Softwares matemáticos en las carreras de ingeniería: una estrategia para su implementación. *Revista Universidad y Sociedad*, 13(4), 320-327.

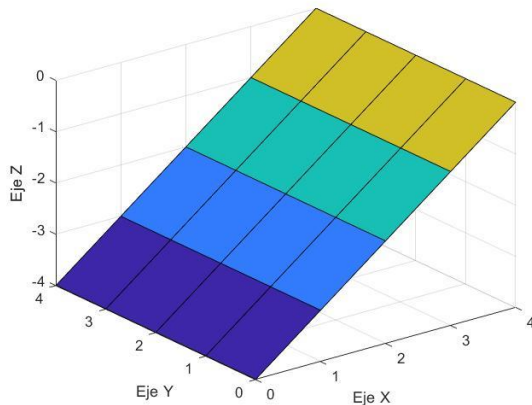
8. Anexos

8.1 Anexo A

Cuestionario de Conocimiento

Problema 1: Vector perpendicular al plano

Encuentre un vector perpendicular al plano de la siguiente figura, y grafíquelo.



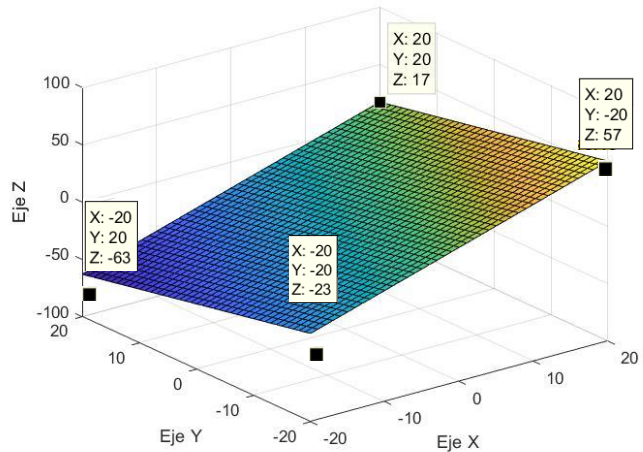
Defina que es un vector perpendicular y compruebe que el vector encontrado es perpendicular al plano.

Problema 2: Graficación y posición relativa entre plano y recta.

Dados los puntos A, B, C y D graficar el plano y obtener su ecuación. Por el punto E y F pasa la recta L1, graficar, determinar el vector director y la posición relativa entre el plano y la recta. Definir que es la posición relativa entre el plano y la recta.

A (1,-2,-4) B (2,3,7) C(4,-1,3)
 D(1,11,35) E(7,9,-8)
 F(9,3,-8)

Problema 3: Cálculo del ángulo entre la recta y el plano.



Se tiene una recta que pasa por los puntos A(20,20,20) y B(-20,-20,100) graficar la recta y determinar el ángulo entre la recta y el plano e indique la posición relativa de estos.

Definir que es un vector director y un vector normal al plano.

8.2. Anexo B.

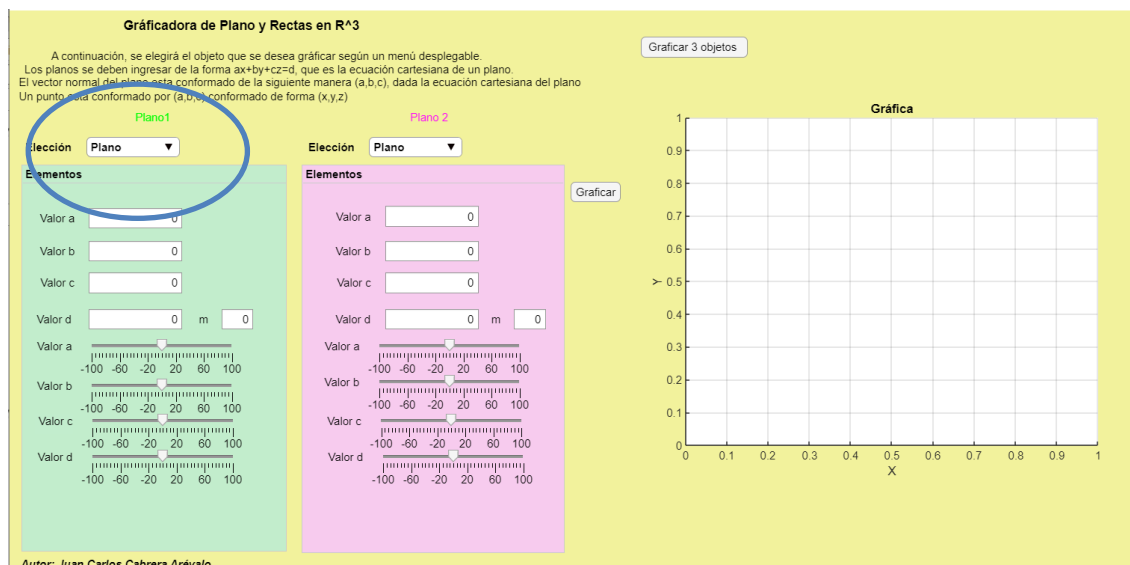
Manual de funcionalidades de la Aplicación

Manual de funciones de Gráfix

Al abrir la aplicación, la pantalla principal se muestra en la figura 17.

Figura 17

Pantalla principal de la aplicación Gráfix.



Fuente: Elaboración propia

En esta primera sección se podrán graficar dos objetos o uno, a elección del usuario. Los objetos por graficar se pueden elegir de acuerdo con una lista desplegable.

Grificación de un Plano

En caso de elegir la sección de planos, está configurado para ingresar los parámetros en forma de una ecuación cartesiana del plano $ax + by + cz = d$, en donde se ingresan los parámetros **a**, **b**, **c**, y **d** de forma manual, o por medio de un slider que podrá ser deslizado en parámetros de -100 a 100, luego se debe dar clic en el botón “Graficar”

Figura 18

Panel de ingreso de datos de un plano en la pantalla principal.

The image shows a software interface titled "Elementos" for inputting data for a plane. It contains five input fields for "Valor a", "Valor b", "Valor c", "Valor d", and a unit "m", all of which are currently set to 0. Below these fields are four sliders, each corresponding to one of the "Valor" fields. Each slider has a range from -100 to 100 with major tick marks every 20 units and minor tick marks every 10 units. The sliders for "Valor a", "Valor b", and "Valor c" are currently set to 0, while the slider for "Valor d" is set to approximately 10.

Fuente: Elaboración propia.

Graficación de una recta

En caso de elegir una recta para la graficación, los parámetros necesarios de entrada será un punto de la recta y el vector director, para conformar la ecuación de la recta den la siguiente forma:

$$(x, y, z) = (Px, Py, Pz) + t (Vx, Vy, Vz)$$

Figura 19

Panel de ingreso de datos de una recta en la pantalla principal.

Recta1

Elección: **Recta**

Elementos Recta

Punto de la Recta

X:
 Y:
 Z:
 X:
 Y:
 Z:
 t:

Vector Director

X:
 Y:
 Z:
 X:
 Y:
 Z:

En esta sección se debe ingresar el punto (x,y,z), de forma manual, o por un medio de un deslizador.

Ingreso de Escalar

En esta sección se debe ingresar el vector director de la recta (V_x , V_y y V_z), de forma manual o por el deslizador.

Fuente: Elaboración propia

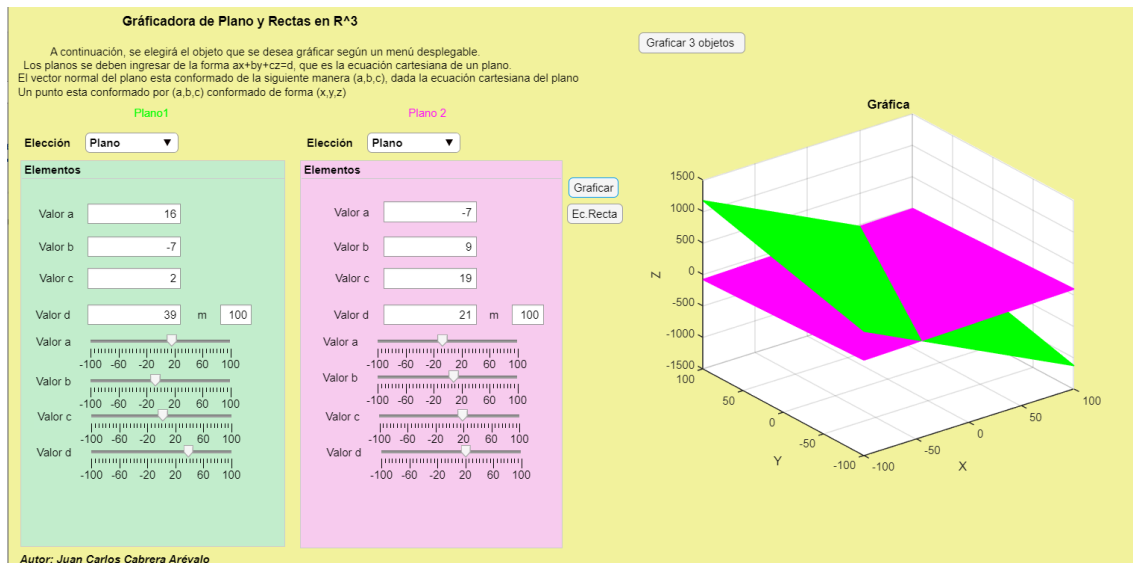
Una vez insertado los parámetros, se debe dar clic en el botón **“Graficar”**, y obtendrá una visualización de la recta de acuerdo con los parámetros ingresados.

Graficación de dos planos.

Cuando se grafiquen dos planos, se podrán obtener otras funcionalidades que se detallaran a continuación mediante un ejemplo.

Figura 20

Graficación de dos planos en la pantalla principal.



Fuente: Elaboración propia.

En este ejemplo se han graficado dos planos:

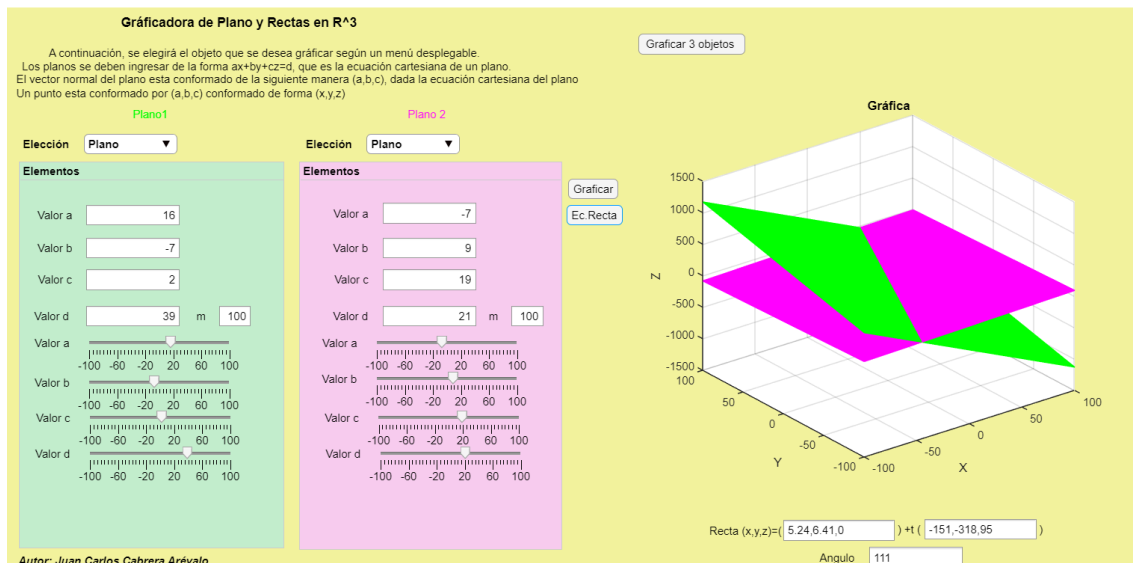
$$\pi_1: 16x - 7y + 2z = 39$$

$$\pi_2: -7x + 9y + 18z = 21$$

Cuando se han graficado dos planos, aparece un nuevo botón denominado **"Ec. Recta"**, que permite calcular la ecuación de recta que se forma por los planos antes mencionados en caso de que sean secantes, así como su respectivo ángulo.

Figura 21

Ecuación de la recta obtenida entre dos planos.

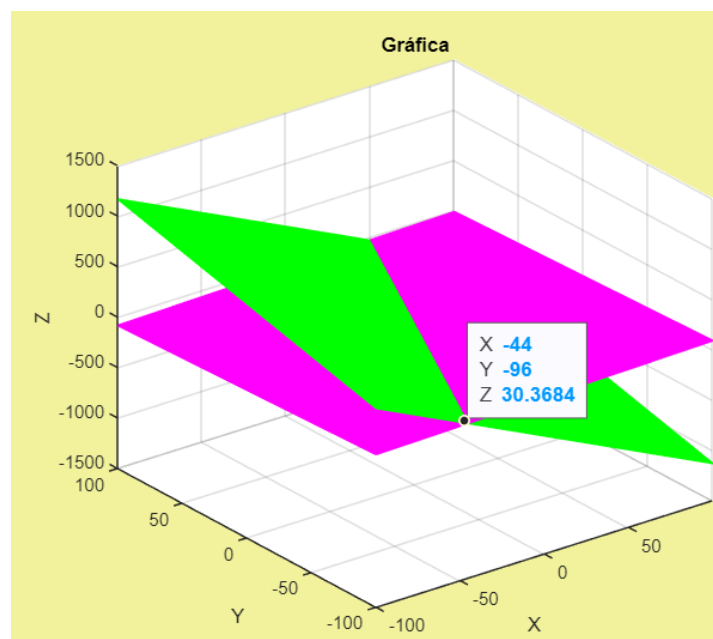


Fuente: Elaboración propia.

En el caso de que los planos sean paralelos, nos mostrará un aviso con el texto **“PLANOS PARALELOS”**. Además, si uno desea extraer información acerca de la gráfica, se debe hacer clic en la imagen como se muestra en la siguiente figura 22.

Figura 22

Extracción de información entre dos planos.



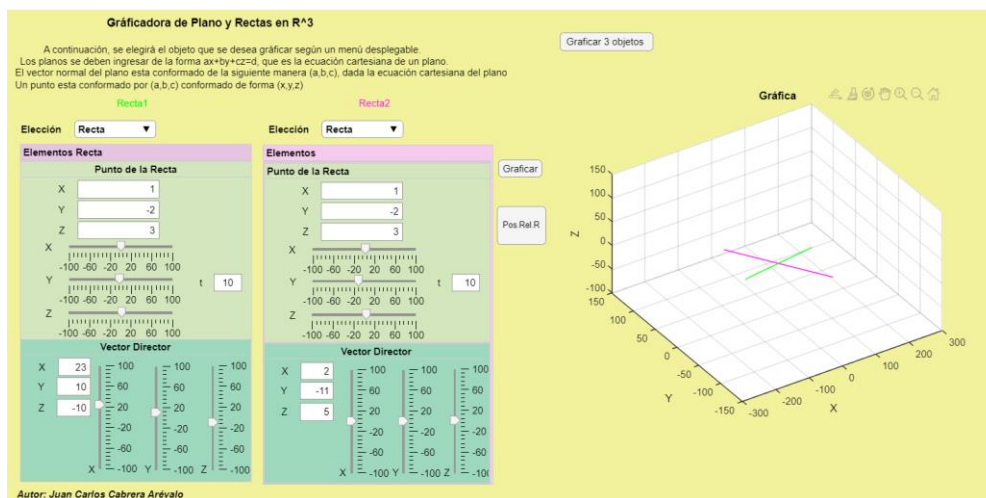
Fuente: Elaboración propia.

Graficación de dos rectas.

Al graficar dos rectas el programa permitirá conocer las posiciones relativas que puede existir entre ellas, al ingresar los parámetros necesarios para la graficación de la recta, aparecerá un botón llamado “**Pos.Rel.R**”, el cual permite identificar la posición relativa en la que se encuentra las rectas graficadas, entre ellas está: Rectas Secantes, Rectas cruzadas, Rectas paralelas, y Rectas coincidentes.

Figura 23

Graficación de dos rectas en la pantalla principal.

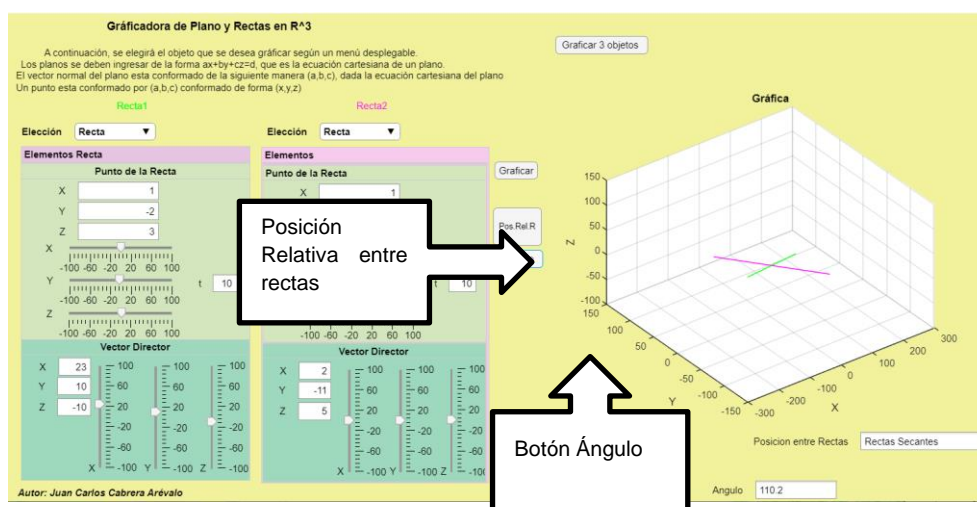


Fuente: Elaboración propia.

En caso de que las rectas sean secantes, se permitirá calcular el ángulo entre las dos rectas, con el botón “Ángulo”, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 24

Obtención de la posición relativa y el ángulo entre dos rectas.

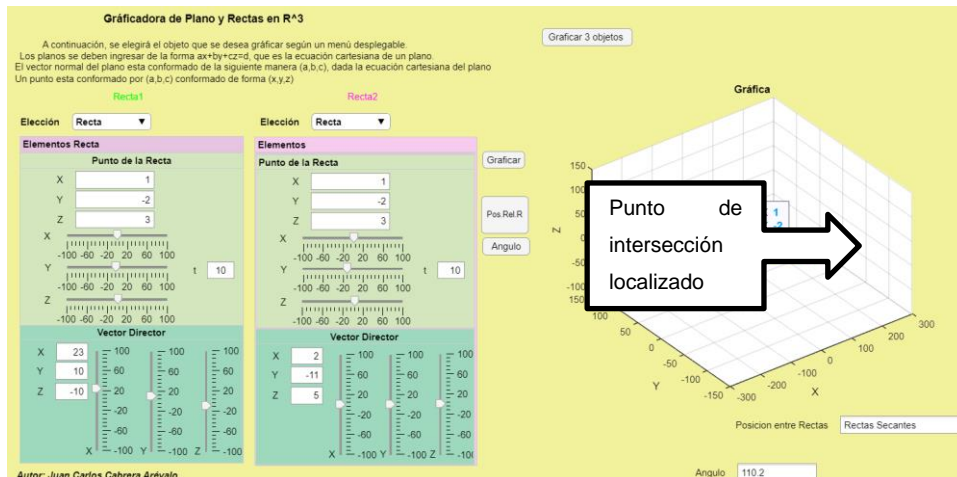


Fuente: Elaboración propia.

Si se desea obtener información sobre los puntos que conforman la recta, se debe dar un clic sobre la gráfica de cualquiera de las dos rectas, como se muestra a continuación, en donde se visualiza el punto de intersección entre dos rectas.

Figura 25

Obtención del punto de intersección entre dos rectas.



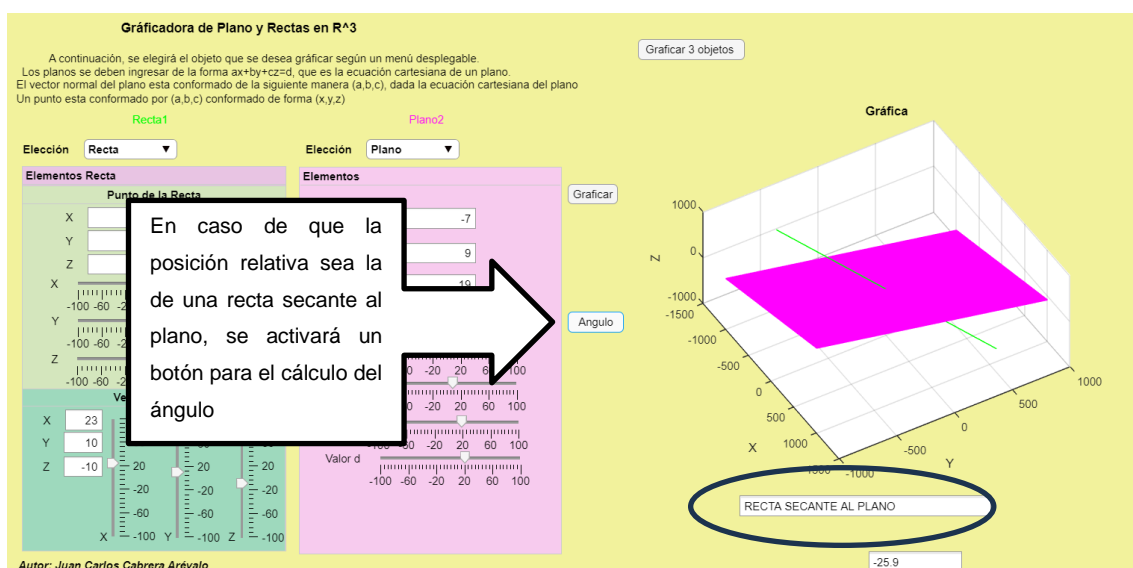
Fuente: Elaboración propia.

Graficación de un plano y una recta.

Cuando se grafique un plano y una recta, se podrá identificar las posiciones relativas entre ellos, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 26

Gráfica de una recta y un plano con su posición relativa.



Fuente: Elaboración propia.

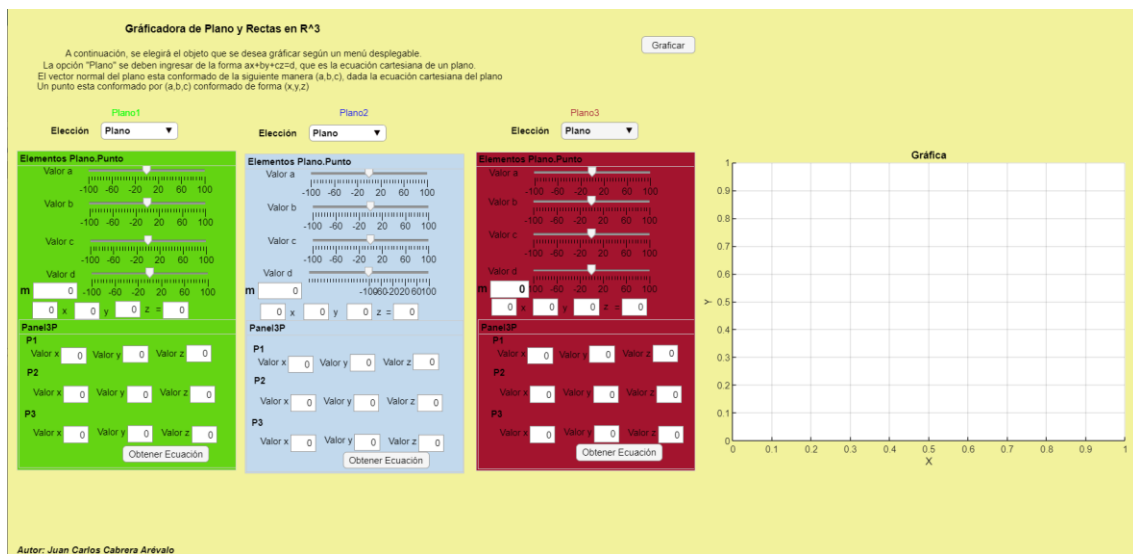
Graficación 3 objetos.

El botón “**Grafica 3 objetos**” nos lleva a una segunda pantalla con todas las funcionalidades ya presentadas en la pantalla principal, con excepción de las posiciones relativas y los ángulos. Esta segunda pantalla lleva como objetivo la graficación de las rectas obtenida en caso de calcular la ecuación de una recta dada dos planos, para su visualización.

En la figura 27 se muestra la pantalla antes mencionada.

Figura 27

Pantalla secundaria de la aplicación Gráfix.



Fuente: Elaboración propia.

Graficación de un plano en la ventana secundaria

En esta ventana secundaria se presenta dos formas diferentes de graficar un plano. La primera es ingresando la ecuación cartesiana del plano (Ver figura 28).

Figura 28

Panel principal para la graficación de un plano con parámetros definidos.

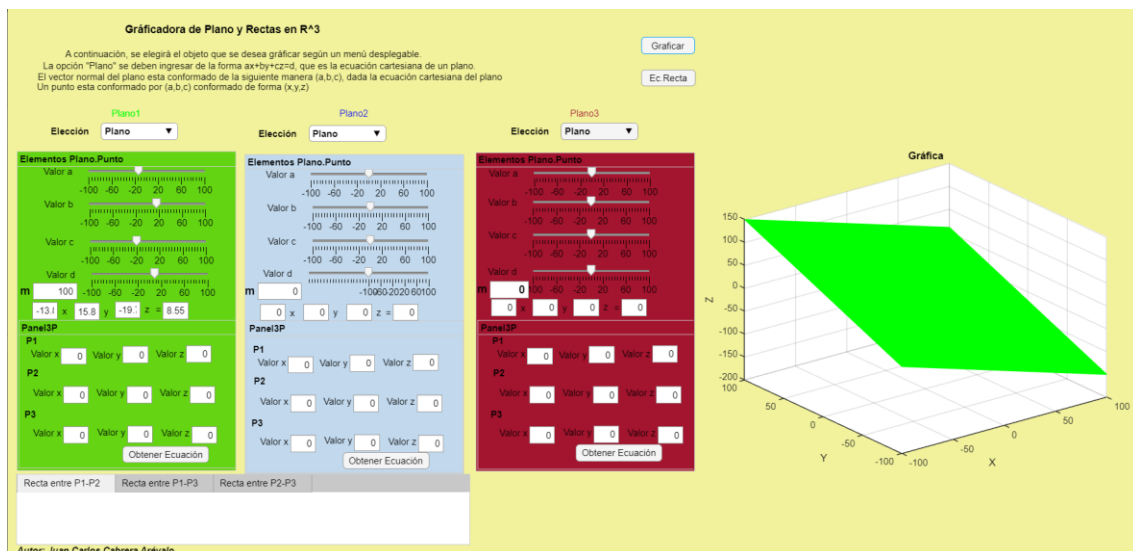
En este primer panel denominado “Elementos Plano. Punto” se ingresarán los parámetros a, b, c y de la ecuación cartesiana del plano, y luego se da clic en “Graficar”

Fuente: Elaboración propia.

En la figura 29 se muestra un plano graficado bajo esta modalidad

Figura 29

Gráfica de un plano en la pantalla secundaria de la aplicación.



Fuente: Elaboración propia.

Como se puede apreciar, no cambia en lo absoluto la forma de ingresar parámetros para graficar un plano, de la forma vista en la primera pantalla.

El segundo panel inferior denominado “**Panel 3P**” ,tiene una funcionalidad extendida para obtener la gráfica de un plano determinando tres puntos contenidos en él. Para realizar esta gráfica se debe ingresar los valores de los puntos, y presionar el botón colocado en la parte inferior denominado “**Obtener Ecuación**”, con esto se calcula la ecuación cartesiana del

plano, tomando como pivote el punto 1 para obtener vectores que servirán para el cálculo del vector normal al plano

En la figura 30 se muestra la funcionalidad de este segundo panel.

Figura 30

Panel secundario para la graficación de un plano mediante tres puntos

En este segundo panel denominado "Panel3P". Se ingresan los tres puntos necesarios, luego se da clic en el botón "Obtener Ecuación", y nos mostrará la ecuación cartesiana del plano, en los campos de los parámetros **a, b, c y d**.

Fuente: Elaboración propia.

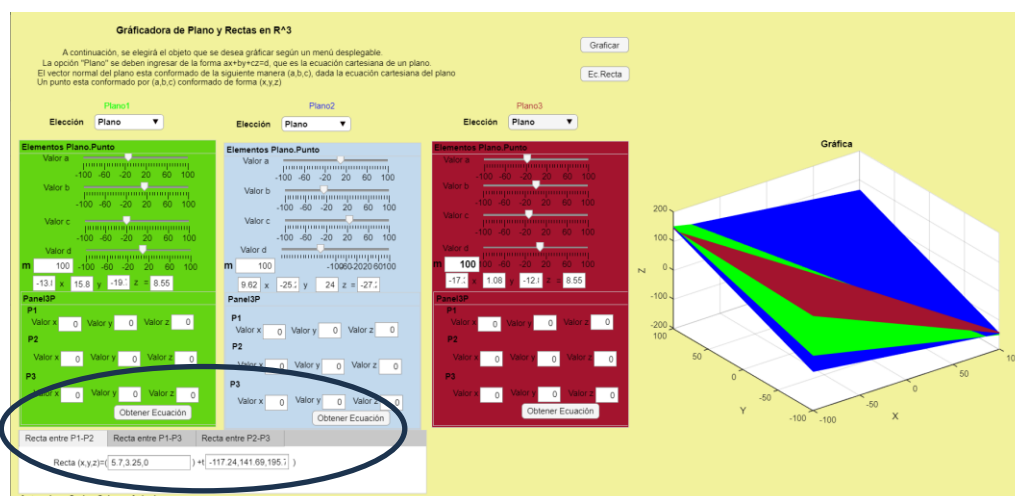
Por último, se da clic en "**Graficar**" para realizar la representación visual.

Ecuación de la recta entre planos.

Al igual que con la ventana entre dos objetos, si es que se presentan 2 o 3 planos graficándose, se podrán calcular las ecuaciones de las rectas en caso de que sean incidentes, como se mostrara en la figura 31.

Figura 31

Obtención de la ecuación de la recta en el cruce de varios planos.



Fuente: Elaboración propia.

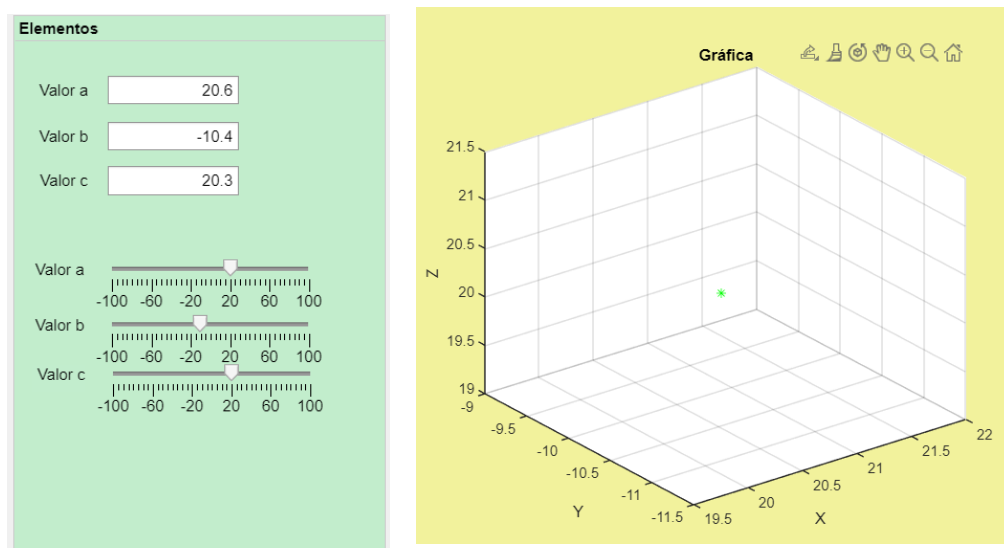
En la parte inferior aparecerá un panel con cada una de las ecuaciones que pudieran darse entre los tres planos graficados. Para obtener este panel se debe dar clic, en el botón “**Ec.Recta**”.

Graficar Puntos

El proceso para graficar puntos es igual para cualquiera de las dos pantallas. Se debe insertar un punto con coordenadas (x,y,z) , solo que en este caso las coordenadas vienen representadas por el valor (a,b,c) , como se indica al inicio de la aplicación. Y luego se da clic en el botón “**Graficar**”. En la figura 32 se muestra un ejemplo de lo mencionado.

Figura 32

Grafica de un punto en un plano en R3.



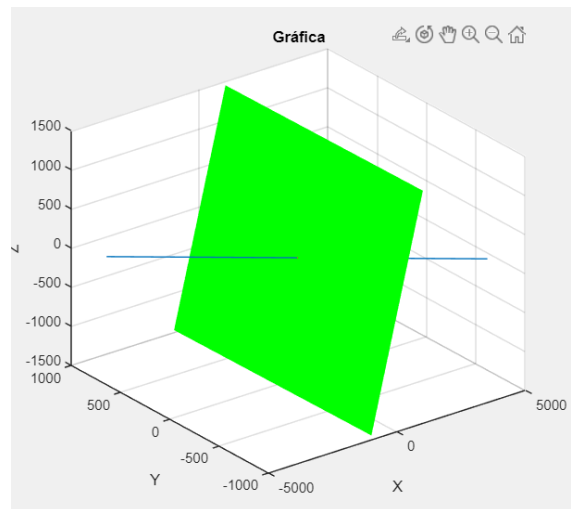
Fuente: Elaboración propia.

Manipulación de Gráficas

En cada uno de los paneles de graficación en la parte superior posee, un comando para rotar la gráfica, realizar zoom, moverla, exportarla como imagen, o volver a su imagen natural. Para obtener información como el punto de intersección, se realiza clic directamente en la gráfica.

Figura 33

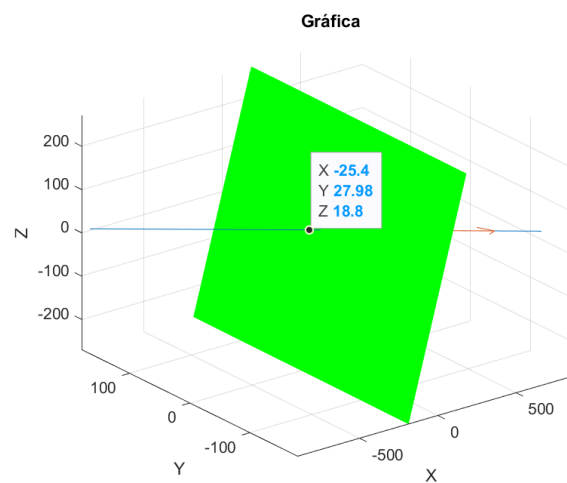
Panel de manipulación de gráficas en R3.



Fuente: Elaboración propia.

Figura 34

Panel de manipulación de gráficas en R3.



Fuente: Elaboración propia.

8.3. Anexo C.

Encuesta y validación del experto

Encuesta de validación

Responder las siguientes preguntas, seleccionando un solo criterio.

La encuesta se basa en en una escala de Likert, en donde 3 cumple el criterio, 2 cumple de forma media el criterio mencionado y 1 no cumple el criterio.

1. ¿ El aplicativo cumple con no requerir de tener a alguna licencia de uso como Cabri o Mathway(Softwares de graficación)?
1 () 2() 3(X)
2. ¿ El aplicativo cumple con tener calidad de contenidos?
1 () 2() 3(X)
3. ¿ El aplicativo cumple el ser útil para obtener gráficas e interacciones de planos y rectas ?
1 () 2() 3(X)
4. ¿El aplicativo permite desarrollar de mejor manera la capacidad de aprender el tema de plano y rectas?
1 () 2() 3(X)
5. ¿ El aplicativo cumple con tener un formato y diseño adecuado en cuanto a su interfaz de usuario?
1 () 2() 3(X)
6. ¿ El aplicativo cumple con ser interactivo y vincular la resolución de ejercicios y demostraciones prácticas?
1 () 2() 3(X)
7. ¿ El aplicativo cumple en ejecutar su programación de forma adecuada?
1 () 2() 3(X)

F. [Signature]
17.07.2023.