UCUENCA

Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación

Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales

"GUÍA DIDÁCTICA PARA EL USO DE GEOGEBRA APLICADO A PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN EN LA ASIGNATURA DE CALCULO DIFERENCIAL"

Trabajo de titulación previo a la obtención del título de Licenciado en Ciencias de la Educación en Matemática y Física

Autores:

Wilmer Esteban Jadán Juela

CI:0105364541

te.bo10@hotmail.com

Marco Alejandro Mayllazhungo Pomaquiza

CI:0302809330

marcoalejandro_87_@hotmail.com

Tutor:

Dr. Marco Vinicio Jacome Guzman

CI:0102279247

Cuenca- Ecuador

20-diciembre-2022

Resumen

El presente trabajo de titulación se abordó el tema del uso de Geogebra aplicado a la resolución de problemas de optimización dentro de la asignatura del cálculo diferencial, dado que existen varias investigaciones qué mencionan falencias por parte del docente al momento de abordar dicha temática. Las causas son varias como falta de material tangible, la falta de visualización, la falta de interpretación de términos de un texto, resolución de varios ejercicios de modo mecánico con el fin de memorizar conceptos y algoritmos sin tomar en cuenta si se llegó a la compresión por parte del alumno.

Para lo cual se ha elaborado una guía didáctica con un enfoque constructivista la cuál cuenta con videos tutoriales como recursos didácticos con la intencionalidad de complementar el proceso de enseñanza- aprendizaje tradicional. Se planteó una metodología con un enfoque cuantitativo, mediante la técnica de la encuesta que nos permitió obtener datos que serán cantidades numéricas que posteriormente tuvieron una interpretación la cual nos sirvió para obtener un panorama general de la problemática. Como último punto se ha propuesto en la guía didáctica actividades para realizar con el software Geogebra para qué el estudiante se familiarice con los comandos de dicho software generando un aprendizaje dinámico y entretenido.

Palabras clave: Guía didáctica. Optimización. Software. Geogebra. Constructivismo. Enseñanza-aprendizaje.

Abstract

The present work of qualification approached the subject of the use of Geogebra applied to the resolution of optimization problems within the subject of differential calculus, since there are several investigations that mention shortcomings on the part of the teacher at the moment of approaching this subject. The causes are several, such as lack of tangible material, lack of visualization, lack of interpretation of terms of a text, resolution of several exercises in a mechanical way in order to memorize concepts and algorithms without taking into account if the student's understanding was reached.

For which a didactic guide has been elaborated with a constructivist approach which has video tutorials as didactic resources with the intention of complementing the traditional teaching-learning process. A methodology with a quantitative approach was proposed, through the survey technique that allowed us to obtain data that will be numerical quantities that later had an interpretation which helped us to obtain a general overview of the problem. As a last point, we have proposed in the didactic guide activities to be carried out with the Geogebra software so that the student becomes familiar with the commands of this software, generating a dynamic and entertaining learning process.

Keywords: Didactic guide. Optimization. Software. Geogebra. Constructivism. Teaching-learning.

ÍNDICE

Cláusula de propiedad intelectual

Wilmer Esteban Jadán Juela, autor del trabajo de titulación GUÍA DIDÁCTICA PARA EL USO DE GEOGEBRA APLICADO A PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN EN LA ASIGNATURA DE CALCULO DIFERENCIAL, certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor.

Cuenca, 20 de Diciembre 2022.

Wilmer Esteban Jadán Juela

C.I 0105364541

Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio Institucional

Wilmer Esteban Jadán Juela en calidad de autor y titular de derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación "Guía didáctica para el uso de Geogebra aplicado a problemas de optimización en la asignatura de Calculo Diferencial" de conformidad con el Art. 114 del CODIGO ORGANICO DE LA ECONOMIA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS CREATVIDAD E INNOVACION reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, 20 de Diciembre 2022.

Wilmer Esteban Jadán Juela

C.I 0105364541

Cláusula de propiedad intelectual

Marco Alejandro Mayllazhungo Pomaquiza, autor del trabajo de titulación GUÍA DIDÁCTICA PARA EL USO DE GEOGEBRA APLICADO A PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN EN LA ASIGNATURA DE CALCULO DIFERENCIAL, certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor

Cuenca, 20 de Diciembre 2022

Marco Alejandro Mayllazhungo Pomaquiza

C.I 03028092330

Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio Institucional

Marco Alejandro Mayllazhungo Pomaquiza en calidad de autor y titular de derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación "GUÍA DIDÁCTICA PARA EL USO DE GEOGEBRA APLICADO A PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN EN LA ASIGNATURA DE CALCULO DIFERENCIAL" de conformidad con el Art. 114 del CODIGO ORGANICO DE LA ECONOMIA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS CREATVIDAD E INNOVACION reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, 20 de Diciembre 2022

Marco Alejandro Mayllazhungo Pomaquiza

C.I 03028092330

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a Dios por darme la oportunidad de haber nacido en una familia sencilla y humilde y poder llevar a cabo unos de mis deseos de poder ser una persona preparada que siempre lleva con orgullo el apellido Jadán de origen campesino. Agradecer infinitamente a toda mi familia, a mi esposa Karina Peña e hija Adamaris por haberme acompañado y soportado durante este proceso en las buenas y en las malas.

Agradecer a mis padres Juan Jadan, Enma Juela qué me apoyaron en momentos difíciles muchas veces con sus consejos, por su ayuda económica y por no haberme dado cosas materiales cuando era pequeño porque gracias a eso siento qué soy una persona honesta y trabajadora.

Siempre agradecido con la Universidad de Cuenca por haber permitido qué me preparara como docente de una forma gratuita. A todos los docentes de la Carrera de Matemáticas y Física por haberme enseñado y compartido todos sus conocimientos, demostrando además su calidad como personas, deseo agradecer de forma especial a nuestro tutor de tesis al Dr. Marco Jacome por su asesoría, tiempo y empeño para qué podamos realizar nuestra tesis bien estructurada. Y finalmente agradecido con mi compañero Marco Mayllazhungo qué siempre me acompañó y apoyó durante este proceso deseándole siempre lo mejor en su vida profesional.

Esteban Jadan

AGRADECIMIENTOS

Primeramente, agradecer a Dios por darme la oportunidad de vivir y estar cumpliendo sueños de la niñez, a la vez agradecer a toda la familia Mayllazhungo Pomaquiza que estuvieron conmigo desde el principio en este sueño dándome su sabiduría y consejos de la vida. Agradecer de todo corazón a mi papá Gilberto y a mi mamá Trancito que nunca se rindieron, y me enseñaron que a pesar de los obstáculos de la vida todo puede solucionarse con consistencia y lucha

Agradecer a mis abuelitos que a pesar de que no esté conmigo desde el cielo me guían y cuidan, sus palabras de sabiduría fueron fundamental para poder llegar a formarme como estudiante y persona.

También agradezco a la Universidad de Cuenca, a la facultad de filosofía y a todos los docentes de la carrera de matemática y física que ayudaron a contribuir en mi formación profesional, de manera personal agradezco a mi tutor Dr. Marco Jacome quien nos ayudó a desarrollar este trabajo de titulación, teniéndonos paciencia e impulsándonos a realizar un trabajo de excelencia. Finalmente agradezco a todos mis amigos en especial a mi compañero de tesis Esteban Jadan por la colaboración para desarrollar este trabajo de titulación y el acompañamiento durante todo el proceso de formación profesional en la Universidad

Marco Mayllazhungo

DEDICATORIA

Este trabajo de titulación está dedicado especialmente a Dios por haberme prestado la salud y vida durante todo este tiempo para luchar día a día para lograr todos mis objetivos en la vida, por haber siempre cuidado de toda mi familia y siempre con la convicción de siempre seguir su ejemplo de vida ser una buena persona y humilde con el prójimo.

También quiero dedicar este trabajo de igual manera en forma especial a mi esposa Karina Peña, mi hija Adamaris, a mis padres Enma Juela y Juan Jadan por haberme siempre apoyado de alguna u otra forma para seguir adelante ya qué ellos han sido siempre parte fundamental de mi vida. Gracias a todos ellos por haberme disculpado todas las veces qué me equivoqué y hacerles pasar un mal momento.

Esteban Jadan

DEDICATORIA

Primero esta tesis la dedico a Dios y a mi familia que siempre confiaron en mí, en especial mi mamá Trancito Pomaquiza y mi papá Gilberto Mayllazhungo quienes nunca me abandonaron, a la vez a mi hermana Inés quien siempre ha estado conmigo. A mis tíos: Miguel M. , Filomena S., Marcela M., Vicente P., Alberto P., Lorenzo L., Emilia M., Rosa M. , Fernando Z. , Rosa P. , Rogelio P. , quienes nunca me dejaron solo y siempre me apoyaron incondicionalmente, también a mis primos: Rodrigo M., Antonio M. ,Rolando M., Antonio L., Geovanny L., Enrique M., Ricardo M., Alex Z., Alfredo P. quienes han tenido el rol de ser mis hermanos desde la niñez ayudándome con sus consejos y ánimos. Todos los mencionados me dieron fuerzas para poder culminar de la mejor manera la universidad.

A mis abuelos les dedico esta tesis, a mi abuelita Trancito Largo, en especial a mis abuelitos que están en el cielo Antonio Mayllazhungo, Fulgencia Sumba y de manera muy especial a mi abuelito Manuel Pomaquiza que a pesar de su reciente ausencia logre cumplir su sueño, anhelo que desde el cielo logren verme y sonreír como lo hacía cuando estaban conmigo.

Marco Mayllazhungo

INTRODUCCIÓN

Dentro del ámbito de la matemática el cálculo diferencial es una de las asignaturas en la cual el alumno presenta dificultad de aprendizaje, de manera especial en la categoría de optimización de funciones. Enseñar matemáticas siempre ha sido uno de los grandes retos que tienen los docentes desde hace muchos años atrás debido a la complejidad de su enseñanza hacia los alumnos. Sin embargo, la evolución de la tecnología comenzó a influir en la educación, por lo que también comenzó a cambiar, debido a que surgieron nuevas formas de enseñar involucrando a la tecnología dentro de las aulas educativas. Razón por la que en los últimos años diferentes autores han publicado investigaciones con el fin de minimizar las dificultades de enseñar esta temática.

Hoy en día la tecnología es una herramienta muy útil para los docentes y alumnos, debido a que mejoran los procesos de enseñanza y aprendizaje, es así que en matemáticas las herramientas tecnológicas que dan visualización son de mayor acogida por parte de los alumnos debido a que permite relacionar lo visual con lo conceptual Según Río (2016) "Este tipo de recursos posibilita representaciones de los objetos tridimensionales de forma más amplia que las representaciones planas, que pueden hacerse en soporte impreso, ya que puede rotarse el punto de vista con facilidad"(p.3).. En la actualidad existen varias herramientas que permiten graficar funciones matemáticas para poder visualizar sus características y hasta su comportamiento, esta investigación se va a enfocar en la herramienta didáctica llamada Geogebra.

Distintos estudios realizados por autores muestran las conclusiones favorables al momento de trabajar con Geogebra. El autor Elizarraras (2019) publicó una investigación titulada Enseñanza y comprensión del concepto de límite infinitesimal en Bachillerato mediante Geogebra, fue aplicada con metodología cualitativa, el cual se centró en el análisis y recopilación de dificultades presentadas por estudiantes de bachillerato general del Estado de México, en el municipio de Chicoloapan.

Elizarraras (2019) pudo obtener las siguientes conclusiones: El rol del docente fue fundamental debido a que actuaba como guía al momento que los alumnos cometen algún error en el cálculo o procedimientos, promoviendo así el pensamiento crítico y reflexivo del alumno. También pudo concluir que el software Geogebra fue el responsable en el proceso de relacionar diversos conceptos matemáticos como, fracciones, decimales, áreas de polígonos, entre otros más con el concepto de límite. También se menciona como otra conclusión que Geogebra fue de gran ayuda al momento de visualizar conceptos, de esta manera la clase se convirtió más dinámica, es así que se pudo dar sentido al porqué de los conceptos y algoritmos (secuencia de pasos) en matemáticas.

Basados en las conclusiones de esta investigación dadas por el autor, podemos entender que existe una influencia positiva al momento de involucrar el software matemático Geogebra en las aulas educativas. El docente puede realizar una clase constructiva al momento de enseñar, ya sea en temas de cálculo diferencial como el del autor que trata del concepto de límite infinitesimal o como el de nuestra investigación optimización de funciones. Debido a que el uso de Geogebra aumenta el razonamiento y la forma de interpretación de los conceptos generando al final una mayor comprensión.

Otro estudio realizado por Travez (2018) titulado "Geogebra en la enseñanza de Funciones en los estudiantes de primer año de Bachillerato del Colegio Amazonas de la ciudad de Quito, durante el año lectivo 2017 – 2018", se realizó con dos grupos de estudiantes uno que era de control y otro con una metodología cuantitativa debido a que se realizó recolección de datos mediante evaluaciones, las cuales indicaron que el grupo experimental obtuvo 8,30/10 y el de grupo control 7,52/10, de acuerdo a la escala de calificaciones los dos grupos se ubican en el rango 7-8,99, por lo tanto, los estudiantes alcanzan los aprendizajes requeridos, por lo que se puede observar que el promedio general del grupo experimental es superior al grupo control. En el siguiente párrafo se da a conocer los detalles para obtener la conclusión del estudio.

Travez (2018) llegó a las siguientes conclusiones: La evaluación Y correspondiente al tema de grafo de una función, en el grupo de control promedio fue de 6,93/10 de acuerdo a la escala esto indicaba que el grupo estaba próximo a alcanzar los aprendizajes requeridos, mientras que el promedio del grupo experimental fue 7,33/10 lo que indicaba que se alcanzó los aprendizajes requeridos. En la evaluación formativa II correspondiente al tema de función lineal, el grupo de control tuvo un promedio de 8,34/10, de acuerdo a la escala de calificaciones se ubica que alcanzan los aprendizajes requeridos, mientras que el promedio del grupo experimental fue 9,15/10, es decir los estudiantes dominan los aprendizajes requeridos. La evaluación formativa III correspondiente al tema de función cuadrática dando promedios de 8,88/10 en el grupo de control que indican que se alcanzan los aprendizajes requeridos, mientras que el promedio del grupo experimental fue 8,93/10 alcanzan los aprendizajes requeridos.

De manera general la experimentación realizada por el autor nos señala que el uso del software Geogebra Clásico 5.0 tuvo un impacto en el proceso de enseñanza y aprendizaje en el grupo experimental, debido a que tuvo promedios superiores al grupo de control, al final la experiencia de aplicar Geogebra en las aulas resultó positiva, motivos por los cuáles pensamos que también sería bastante viable aplicar de manera similar este método en nuestra investigación para lo cual podríamos usar Geogebra en la resolución de problemas de optimización de funciones para una mejor comprensión y al final poder generar aprendizaje significativo en los alumnos.

Volverás en (2015**)** propone una investigación titulada Propuesta didáctica para la enseñanza de límites de funciones en el grado undécimo de la Institución Educativa El Rosario del Valle del Cauca en Colombia, integrando Geogebra con una metodología cuantitativa. En dicha investigación se trabajó con los paralelos uno y dos del grado once (primer año de bachillerato) de la Institución Educativa el Rosario de Miranda Cauca. Esta investigación se encuentra enmarcada en un enfoque cuantitativo y experimental, ya que se aplicó la metodología propuesta basada en la implementación del software educativo Geogebra con el primer grupo (experimental) y se enseñó por los métodos tradicionales al segundo grupo (control).

Volverás (2015) llegó a las siguientes conclusiones: El software Geogebra resultó ser de gran ayuda a la hora de visualizar y comprender de manera gráfica el contenido científico del concepto de límite. Tras aplicar la propuesta metodológica didáctica, se pudo evidenciar un mayor interés y motivación por parte de los estudiantes acerca del tema. El rendimiento académico del grupo de control con respecto al grupo experimental varía considerablemente, esto permite afirmar que la metodología aplicada resulta eficiente para la comprensión y enseñanza del concepto de límite en los alumnos del primer año de bachillerato.

No obstante, esto no quiere decir que Geogebra es aplicable solo para ciertos niveles de educación, si bien es cierto que los alumnos de primer año de bachillerato tuvieron beneficios hay que tomar en cuenta que la idea principal es incorporar herramientas digitales a las aulas educativas. Como uno de los objetivos propuesto en nuestra investigación es mejorar la visualización y comprensión de los conceptos del tema de optimización de funciones lo cual coincide con una de las conclusiones del autor, razón por la que nos parece pertinente el uso de Geogebra.

Geogebra es una herramienta didáctica que ha sido considerada en varios temas de investigación para diversas áreas de la matemática. En base a las investigaciones de los autores se ha apreciado una similitud del contenido referente a nuestra propuesta de investigación planteada aplicando el software libre de Geogebra en el aprendizaje, del cual se puede concluir que esta afecta de manera positiva el entorno educativo tanto para el alumno como para el docente.

Por tales análisis se ha propuesto abarcar los siguientes 4 capítulos en el presente trabajo de titulación. En el capítulo 1 se va a tratar todo lo relacionado a la fundamentación teórica con respecto al tema propuesto, involucrando conceptos como: la enseñanza, el constructivismo sus ventajas y desventajas, derivada una función, optimización, máximos y mínimos y recurso didáctico. En el capítulo 2 se va a tratar de la metodología y resultados, donde se explican el procedimiento de cómo se recopila y tabula los datos obtenidos. Y finalmente en el capítulo 3 se va a desarrollar la conclusiones, recomendaciones y limitaciones de la investigación desarrollada. Finalmente, en el capítulo 4 consta el desarrollo de la propuesta que es la guía didáctica donde se proponen 9 clases las cuales van estar acompañada del uso de Geogebra como herramienta didáctica para mejorar el aprendizaje

Justificación

La Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales Matemática y Física se ha caracterizado por incluir en su malla curricular materias o asignaturas con un nivel bastante abstracto particularmente en la asignatura de Cálculo Diferencial, motivo por el cual muchas veces los estudiantes no tienen una idea clara de los conceptos qué implican el cálculo diferencial ya sea también por falta de visualización de los conceptos explicados en el pizarrón por parte del Docente.

En el contexto actual que se vive por la pandemia, por la que el Ecuador ha procedido a realizar confinamientos y suspender las clases presenciales en todos los niveles de educación, la educación virtual ha comenzado a ser fundamental en todos los centros educativos. Se desea llevar a cabo este trabajo con el fin de encontrar un enfoque y estrategias dinámicas que sepan captar la atención del estudiante, se da importancia a esto último ya que para los autores Blazquez, Nora y Ortega (2008) **“**la motivación tiene una importancia considerable en la memoria prospectiva (acordarse de lo que uno tiene que hacer en el momento preciso)” (pág. 11)**,** esto quiere decir que, si el docente aspira obtener buenos resultados en el proceso de enseñanza-aprendizaje dentro del cálculo diferencial, previamente debe despertar la curiosidad, interés y motivación del estudiante, a través de distintos recursos didácticos o tecnológicos en función de las necesidades de los mismos.

El estudio planteado nos ayuda a contribuir no solo en las clases virtuales sino también en la presenciales, debido a que el uso del software y los videos tutoriales se los puede hacer en tanto de forma virtual o presencial que a la final permitirán al alumno seguir con el proceso de aprendizaje, y para el docente tener herramientas digitales de gran aporte para la enseñanza del tema de derivada y optimización.

Este proyecto tiene como finalidad: usar un software libre como lo es Geogebra, y a la vez elaborar una guía didáctica del cómo se debe usar esta herramienta digital al momento de trabajar con aplicaciones de la derivada, además de realizar videos tutoriales enfocándonos en la resolución de ejercicios optimización. Estas propuestas están basadas tanto en el contexto actual que vive el país debido a la pandemia del Covid 19 como antes de la misma, siempre con la intencionalidad de mejorar los procesos de enseñanza ya sea en la educación virtual como presencial.

Resulta de gran interés conocer las dificultades que presentan los alumnos del 3er ciclo de la carrera de Ciencias Experimentales de la Facultad de Filosofía de la Universidad de Cuenca al momento de abordar los temas que implican la optimización como una aplicación de la derivada. Al disminuir las dificultades que presentan los alumnos, ellos podrán mejorar la comprensión y también desarrollar habilidades de razonamiento, memoria espacial y obtener una visión más profunda en los conceptos de aplicación para posteriores temas del cálculo.

Anhelamos que esta propuesta didáctica no solamente contribuya a mejorar y dar solución a las dificultades presentes en el proceso enseñanza-aprendizaje, así como también se constituya en un elemento de beneficio para docentes, estudiantes y para toda la comunidad educativa. Es indispensable que el estudiante tenga el interés y motivación de aprender, aprovechando al máximo herramientas digitales con las que se sienten cómodos y además resultan novedosas para ellos, de esta manera se impulsa el desarrollo de capacidades cognitivas como razonar o aprender lo cual resulta ser útil tanto en el ambiente escolar como social.

La investigación que se plantea está enfocada en tener una opción frente a la enseñanza tradicional, ya que esta tiene efectos como la memorización que no es igual a aprender, más bien se buscará que los alumnos construyan su conocimiento desde el razonamiento y aplicación de esos conocimientos. El docente contará con nuevos recursos didácticos de enseñanza lo que le permitirá construir, junto con los alumnos, de mejor forma esos aprendizajes, razón por la que se busca impulsar un aprendizaje significativo aprovechando la implementación de tecnologías de la información y la comunicación (TICs) dentro de las aulas educativas.

Capítulo 1 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

La Educación a lo largo de la historia ha sufrido múltiples cambios, tanto estructurales como pedagógicos, esto debido a las nuevas formas de enseñar que aparecieron y también por el avance tecnológico, esto factores permitieron mejorar los procesos de enseñanza aprendizaje en las aulas educativas, pues el docente comenzó a contar con apoyos tecnológicos, recursos didácticos. Dentro del cálculo diferencial la optimización como una de sus aplicaciones es uno de los temas que puede provocar confusión, por lo que mejorar la manera de cómo enseñar este tema es la intención de este proyecto de investigación.

Problema

En el campo del cálculo diferencial el concepto de la derivada y sus aplicaciones por lo general son enseñados de manera tradicional debido a que se rigen a la resolución de varios ejercicios de modo mecánico con el fin de memorizar conceptos y algoritmos, creando en los alumnos una conducta de desinterés y la falta de razonamiento en cuanto a la resolución de problemas aplicados a situaciones reales como por ejemplo la optimización de la derivada. Por otro lado, (Dómenech, 2012 como se citó en Muela, 2020) Afirma que "El aprendizaje contribuye al desarrollo en la medida en que aprender no es copiar o reproducir la realidad sino construir (aprender es construir)" (p.8), por lo cual buscamos qué el alumno vaya aprendiendo a construir su conocimiento, y a la vez minimizando las formas memorísticas de aprender si bien este se puede aplicar, pero no genera un aprendizaje significativo.

Se podría decir que las causas pueden ser varias como falta de material tangible, la falta de visualización, la metodología de enseñanza, la falta de interpretación de términos de un texto, (Brazuelo & Cacheiro, 2010 como se citó en García M, 2014), señalan que: "existe una actitud negativa de los docentes hacia el uso como herramienta didáctica y políticas restrictivas de uso dentro de las instituciones educativas en el marco de las actividades académicas de estudiantes y docentes" (p.14). A pesar de tener herramientas digitales el docente no tiene una visión clara de cómo involucrar o relacionar estas herramientas con las clases, lo que puede generar una distribución errónea del tiempo, desinterés del alumno, conceptos mal explicados, falta de equipos de computación etc. Por lo cual el docente puede llegar a descartar su uso.

La matemática para los alumnos puede resultar ser una ciencia complicada, sumada la falta de interés puede generar mayor dificultad a diferencias de otras ciencias, según (Aldana, 2013, como se citó en Muela 2020) "Lo abstracto de la Matemática: a diferencia de otras ciencias como la Biología, o las Ciencias Sociales que trabajan con conceptos reales, que se pueden manipular como las plantas, sistema óseo, cultura, política, entre otros; la Matemática trata con objetos que necesitan de representaciones específicas para poder ser visualizados mentalmente". (p. 8). Si se analiza todas estas dificultades que se presentan en matemáticas, se puede identificar que los problemas más generales son la visualización de conceptos, estos conceptos resultan ser abstractos para los alumnos, por lo que es necesario generar alguna forma de visualización para lograr una comprensión de dichos conceptos.

Enseñar matemáticas puede resultar complicado para el docente, razón que se puede limitar a enseñar de manera mecánica, es decir dar a conocer los procedimientos de resolución sin tomar en cuenta si se llegó a la compresión por parte del alumno. Según (Gamboa, 2007) “Tradicionalmente, en la enseñanza de las matemáticas se ha puesto mucho énfasis en el trabajo con ejercicios rutinarios a los cuales los estudiantes dan solución mecánica, debido al énfasis que los profesores han dado a los procedimientos” (p.10). razón por la cual creemos que el docente deberá proponer ejercicios de razonamiento en lugar de ejercicios mecánicos, debido a que puede provocar la pérdida de la esencia del porqué de la respuesta obtenida. Es por ello necesario analizar el problema con los alumnos de los primeros ciclos de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca, quienes cursan la asignatura de Cálculo Diferencial.

Hay que tener cuidado en no dar demasiado protagonismo a los recursos tecnológicos y tener claro cuál es su función, con respecto a esto (Lizárraga & Díaz, 2007) afirman que “El papel de un sistema de computadora no es el de un maestro o experto, sino una herramienta cognitiva de extensión de la mente más que un agente de enseñanza.” (p.92)**,** en este sentido se puede establecer que el uso de dichas herramientas supone un apoyo y refuerzo para que el estudiante comprenda adecuadamente el concepto matemático tratado. (Gamboa, 2007) añade “Además, con el uso de la computadora es posible profundizar en el estudio de un concepto, cuya comprensión fue superficial o al cual el docente no pudo dedicarle mucho tiempo” (p.17)**.** Si bien es cierto la computadora nos proporciona una gran ayuda al momento de dar una clase, también permite mejorar la explicación del tema o también tener una mayor visualización de lo que se está tratando, sin embargo, cabe indicar que la computadora es un complemento que el docente puede usar en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Es por ello que el uso de herramientas tecnológicas se vuelve idóneo a la hora de enseñar conceptos matemáticos difíciles de representar mentalmente para el estudiante. Para Cuicas, Debel, Casadei, & Álvarez (2007) "El uso del computador como herramienta mental se concentra en la calidad de la idea, ya que con este se pueden realizar manipulaciones (calcular, graficar, trasladar, ordenar) permitiendo generar y organizar las ideas más fácilmente, apoyando el proceso de aprender" (p.7), estos recursos destacan por ser capaces de representar gráficamente conceptos matemáticos y ofrecer un dinamismo que atrae la atención del estudiante, a su vez facilitan el desarrollo del autoaprendizaje por parte de los educandos.

Problematización

Este Proyecto de investigación tiene como finalidad mejorar la problemática descrita, promoviendo el aprendizaje innovador, haciendo uso de la tecnología para qué los estudiantes posean mejores herramientas en su aprendizaje, de esta forma el docente, propiciará un espacio dinámico y podrá evaluar de mejor manera los avances del estudiante para finalmente obtener un aprendizaje más significativo por parte del alumno aprovechando el uso del software. Por ello nos preguntamos:

¿Qué factores producen falta de comprensión y bajo rendimiento en la resolución de problemas de optimización de la derivada?

¿Se puede proponer el uso de un software para la complementación de resolución de problemas de optimización de la derivada?

¿Al incorporar Geogebra, se podrá mejorar la visualización, la enseñanza y la interpretación de la optimización de la derivada?

Objetivos

Objetivo General

Elaborar una guía didáctica con un enfoque constructivista para problemas de optimización en la asignatura de Cálculo Diferencial enfocado en el software Geogebra y videos tutoriales como recursos didácticos.

Objetivos Específicos

- Realizar un diagnóstico de las dificultades que tienen los alumnos del 3er ciclo de la Carrera de Pedagogía de la Ciencias Experimentales al resolver problemas de optimización.
- Elaborar una guía didáctica para el aprendizaje de la optimización como una de las aplicaciones de la derivada.
- Elaborar videos tutoriales del uso de Geogebra para la resolución de problemas de optimización para mejorar su aprendizaje.

1.1 Enseñanza

Se puede entender a la enseñanza como la interacción que existe entre grupos de personas, por un lado, el que enseña y por otro el o los que aprenden. En matemáticas el docente cumple este rol de enseñar según Guzmán (2007) “La matemática es una ciencia que puede ser activa y cambiante: de manera rápida y hasta confusa en ciertos contenidos, por lo que se sugiere que la enseñanza de la matemática no puede ser una realidad de abordaje sencillo” (p. 21). La matemática es una ciencia que lleva su complejidad, pero esto no solo afecta al alumno como tal, ya que el que va enseñar matemáticas también adquiere ese reto de enseñar una ciencia de manera adecuada para no causar confusión en los alumnos.

El docente es muy importante en este proceso de enseñanza, pues él está transmitiendo conocimiento y si existen fallos en este proceso, el alumno a futuro puede tener dificultad al momento de aprender nuevos temas. En la era actual donde existe un mayor acceso a la tecnología los profesores tienen desafíos de mucha responsabilidad, como facilitar e inspirar el aprendizaje y la creatividad, para así generar la capacidad de razonamiento ya sea a través de experiencias de aprendizaje y evaluación Oyarce (2016). Cabe mencionar que el docente debería ser el artífice de explotar la creatividad de los alumnos, para eso debería proponer actividades innovadoras de enseñanza conforme al avance de la tecnología

La enseñanza va relacionada de manera directa con el aprendizaje, esta última debe llegar a cabalidad cuando la enseñanza haya sido correcta. Pues la enseñanza es aquella que guía al aprendizaje, En la actualidad la constante evolución de la tecnología, según los autores Barreno, Román, & Olalla Pilco (2017) “la utilización del software libre matemático como un recurso didáctico que fortalezca el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en todo su contexto” (p. 108). Lo mencionado por el autor es de gran relevancia debido a que enseñar con medios tecnológicos nos garantiza que el aprendizaje se está cumpliendo y a su vez la enseñanza también se está efectuando.

1.1.1 Constructivismo

El constructivismo es una corriente pedagógica que brinda las herramientas al alumno para que sea capaz de construir su propio conocimiento, el cual consiste en resultado de las experiencias anteriores obtenidas en el medio que le rodea. El alumno en el constructivismo al crear su propio conocimiento debe ser activo y muy participativo, en este proceso el alumno adquiere experiencia y estrategias para poder solucionar problemas que se le presente (Muñoz, 2015, p. 11), aún más de lo mencionado por el autor el alumno podrá adquirir un mejor razonamiento, aprendizaje, entre otros aspectos más, que a larga van a favorecer a la compresión de conceptos de manera adecuada lo cual es la intención de la investigación.

La preparación del docente es indispensable en el área de matemáticas para que los procesos de enseñanza-aprendizaje sean impulsados adecuadamente, de tal manera que los estudiantes logren apropiarse convenientemente de los aprendizajes requeridos en la vida. En muchas ocasiones se piensa erróneamente que enseñar no resulta ser nada difícil, que solamente se necesita tener un conocimiento mayor que el alumno, sin embargo, esto no es real, ya que para obtener buenos aprendizajes no es solo tener un gran nivel de conocimientos, más bien es el saber cómo impartir estos conocimientos para que al final se logre tener un éxito en la enseñanza Valencia (2016). Es así que el docente tendrá que buscar la mejor manera de cumplir la enseñanza hacia todos los alumnos apoyándose en diferentes metodologías didácticas.

El alumno al igual que el docente son partes vitales de este proceso de construcción del conocimiento, el autor Tigse (2019) Menciona:

> "El estudiante es el centro del aprendizaje y no los contenidos; participa activamente en las tareas asignadas, existe el respeto y la valoración de sí mismo y de los demás. Además, el estudiante, propone soluciones innovadoras, construye su propio conocimiento y cuenta con una visión activa y transformadora de la realidad" (p. 27).

Lo dicho en el párrafo anterior es que la renovación de las enseñanzas es esencial para que el alumno sea artífice de construir su conocimiento, a diferencia del enfoque tradicionalista este permite fomentar el aprendizaje a conciencia. En consecuencia, se puede deducir que falta mucho camino por recorrer en materia de constructivismo y matemática puesto que no existe un modelo estructurado y adecuado para las enseñanzas matemáticas, por lo que es necesario ir cambiando estructuras mentales y para ir innovando las metodologías.

1.1.2 Ventajas y Desventajas del Constructivismo

A pesar de las múltiples funciones positivas que presenta el constructivismo, si no se lleva a cabalidad o de manera correcta, puede provocar confusión en el alumno, hasta el no entender todo el tema. A continuación, se muestran algunas de las ventajas del constructivismo según Balseca, Moncayo & Muñoz (2013).

> "1 Promueve la autonomía de los estudiantes
>
> 2 Genera procesos de interacción, planificación y evaluación participativos

3 Es flexible y dinámico, se adecua a las necesidades del grupo

4 Permite la interacción y la coparticipación en el proceso de aprendizaje entre estudiantes que se encuentran en puntos geográficos alejados o remotos y el desarrollo de las destrezas del pensamiento, la interdisciplinariedad y el trabajo cooperativo." (p.77)

Lo mencionado anteriormente por el autor dan entender que esta corriente pedagógica puede llegar a ser una gran opción para incorporar y ponerla en prácticas dentro de las aulas educativas, debido a las ventajas que este ofrece mejorando las experiencias de aprendizaje por parte alumnos ya que este pasa a ser uno de los artífices en la educación y no solo un oyente.

Además de las ventajas del constructivismo Llerena & Santillán (2010) menciona que este corriente pedagógico puede generar ciertas desventajas como las siguientes

"-Cuando los profesores no cuentan con las destrezas y habilidades informáticas adecuadas.

-Las metodologías de trabajo son aún inmaduras.

-Cuando no se cuenta con un modelo pedagógico adecuado y que sea pertinente, significativo, entretenido, activo, constructivista y contextualizado.

-Es fácil pensar que se entiende o comprende cuando en verdad se tiene sólo un conocimiento superficial de la información adquirida." (p.32).

El docente debe tener cuidado de no caer dentro de las desventajas en el constructivismo durante el proceso de enseñanza-aprendizaje. El autor señala que existen estas desventajas, que estas pueden ser generadas ya sea por falta de preparación del docente, o los medios insuficientes para poner en práctica, también a la vez puede no existir alguna guía que ayuden a la forma de enseñar, lo cual puede convertirse en clases repetitivas y este a la vez va perdiendo el interés del alumno.

1.2 Derivada

La introducción del concepto de la derivada según Pérez (2000) afirma que “La derivada de una función puede interpretarse geométricamente como la pendiente de una curva, y físicamente como una razón “instantánea” de cambio” (p.201). Según el autor indica que la derivada hace referencia a que tan rápido puede producirse una variación inmediata en un determinado punto, en los problemas de este contexto el desarrollo del concepto de derivada de una función real juega un papel primordial para poder entender la tarea solicitada por el docente y que sea el estudiante el que inicie cualquier acción hacia la resolución de esta tarea para hallar las resoluciones pertinentes

El aprender el concepto puede tener su grado de dificultad, ya que el estudiante puede llegar a resolver de manera intuitiva los ejercicios, pero eso no garantiza que la parte conceptual fue comprendida. Según Flores (2014) “Los estudiantes exitosos adquieren un dominio de una serie de técnicas para derivar e integrar, y desarrollan habilidad para resolver problemas. Desafortunadamente este dominio de los procedimientos muchas veces no va acompañado de una sólida comprensión conceptual” (p.2). Lo que intentamos en el aula no es imponer notaciones y definiciones de conceptos matemáticos, la introducción del concepto de derivada de una función real puede tener un grado de dificultad, ya que son tantos los conceptos que entran en juego que esto nos obliga a ser muy cuidadosos. Posteriormente veremos la relación que tiene la derivada con los problemas de optimización de funciones. Estos problemas decimos que son de máximo o de mínimo (máximo rendimiento, mínimo costo, máximo beneficio, mínima aceleración, mínima distancia, etc.).

1.2.1 Optimización

Optimizar es una actividad frecuente en diversas situaciones de la vida cotidiana: deseamos llegar a algún lugar en el menor tiempo posible; ir a cierto lugar por el camino más corto; comprar algo que más nos convenga; construir algo empleando la menor cantidad posible de material; obtener la máxima ganancia en un negocio, etc**.** Al involucrarnos en esta investigación, se debe definir el concepto de optimización Según (Scenna, 2014, como se citó en Garcia, & Castilla, 2021) afirma:

> "Se puede definir como optimización al proceso de seleccionar, a partir de un conjunto de alternativas posibles, aquella que mejor satisfaga el o los objetivos propuestos. La optimización es decidir la mejor solución para un problema se refiere a la mejora de algo que ya existe". (p.43).

Lo mencionado anteriormente por el autor resalta lo fundamental de estudiar, comprender los conceptos y métodos del cálculo diferencial, pero todo esto se hará de manera más eficiente teniendo claramente sus aplicaciones de como: podremos calcular las dimensiones máximas o mínimas que necesita un envase cualquiera, es decir un cierto volumen, es así que pueden surgir varios problemas lo cual se busca tener el máximo beneficio posible.

Los problemas de optimización que se pueden llegar a presentar pueden ser ya sea con restricciones o sin ellas, a partir de cuales se busca conseguir los valores extremos de una función sin añadir restricción alguna. Sin embargo, se pueden plantear problemas o situaciones en las cuáles se requiere de extremos de una función, de manera que estos cumplan ciertas condiciones (o restricciones) (Valenzuela & Barrantes 2018 p.2) Entonces, si tenemos en cuenta que los conceptos matemáticos están relacionados muy íntimamente con la experiencia humana, resulta útil considerar diversos problemas de optimización para reflexionar sobre el aprendizaje de las matemáticas.

1.2.2 Máximos y Mínimos

Inicialmente tenemos dentro del cálculo diferencial los conceptos para máximos y mínimos, que Según Martínez & Portilla (2017) afirman lo siguiente:

> ”Una función f tiene un máximo absoluto (o máximo global) en c si f(c) ≥ f(x) para todo x en D, donde D es el dominio de f. El número f(c) se llama valor máximo de f en D, de manera análoga, f tiene un mínimo absoluto en f(c) ≤ f(x) para todo x en D; el número f(c) se denomina valor mínimo de f en D. Los valores máximo y mínimo de f se conocen como valores extremos de f”(p.331)

Lo mencionado anteriormente por el autor se puede dar a entender qué una función continua es ascendente en un intervalo y a partir de un punto cualquiera empieza a decrecer, a ese punto se le conoce como máximo relativo, aunque también se le llama solo máximo. Por el contrario, si una función continua es decreciente en cierto intervalo hasta un punto en el cual empieza a ascender, a este punto lo llamamos mínimo relativo, o mínimo. Cabe mencionar que los máximos y mínimos se los puede determinar tanto gráficamente como analíticamente

Es importante recordar que la pendiente de la recta tangente a una curva más conocida como la derivada en los puntos críticos máximos y mínimos relativos es cero, ya que se trata de una recta horizontal. En los puntos críticos máximos, las funciones tienen un valor mayor que en su entorno, mientras que, en los mínimos, el valor de la función es menor que en su entorno. En un punto crítico máximo relativo, al pasar la función de creciente a decreciente, su derivada pasa de positiva a negativa. En un punto crítico mínimo relativo, la función deja de decrecer y empieza a ser creciente, por tanto, su derivada pasa de negativa a positiva. (Funeme, 2019). Es por tal razón qué se recomienda el uso de un software como Geogebra en el cual se puede apreciar visualmente de mejor manera todos estos conceptos qué implican el cálculo diferencial como en el caso de máximos y mínimos que son temas ligados a la optimización.

1.3 Recurso Didáctico

El recurso didáctico para Pastuizaca & Galarza (2010) “El recurso didáctico proporciona información a los alumnos y a la vez sirve como guía para los aprendizajes ya que ayuda a organizar la información que queremos transmitir a nuestros alumnos”. (p. 32). Por lo que es fundamental estos recursos en el desarrollo de la presente investigación, considerados como el principal apoyo del docente en el proceso enseñanza-aprendizaje.

Con respecto a esta teoría de recurso didáctica tenemos que, (Blanco, 2012 como se citó en Jiménez, 2017) afirma que “Los recursos y materiales didácticos son todo el conjunto de elementos, útiles o estrategias que el profesor utiliza, o puede utilizar como soporte, complemento o ayuda en su tarea docente” (p.42). En matemática al no usar un complemento de ayuda como los recursos didácticos en los conceptos y sólo de manera teórica nada más, causa que el estudiante no profundice los conocimientos de la asignatura, lo cual puede provocar falta de atención a la clase.

Los recursos didácticos son capaces de captar la atención e interés del estudiante, impulsándolos a construir su propio conocimiento, siempre con la guía del docente. La implementación de los recursos didácticos busca servir de apoyo a la metodología tradicional de enseñanza, la cual se basa únicamente en clases magistrales y memorización de los nuevos conceptos presentados, cuyo único recurso eran los libros de texto. Todo esto es fundamentado por (Pérez, 2010) quien señala que “Los libros de texto, por ejemplo, han respondido tradicionalmente a una concepción de educación homogénea, centrada en los conocimientos y en la memorización donde se esperaba que el profesorado cumpliera prioritariamente funciones transitivas.” (p.1), la utilización de libros tenía la principal desventaja que impedía al docente diseñar su propio proceso enseñanza-aprendizaje, limitándose al contenido de este recurso tradicional. Es así como se puede evidenciar la importancia que posee el recurso didáctico, a medida que siga avanzando la tecnología los recursos didácticos que sean tecnológicos irán teniendo más protagonismos, creando un ambiente más dinámico y atractivo del proceso enseñanza-aprendizaje.

1.3.1 Software Matemático libre

Un papel muy importante en la actualidad son los softwares didácticos, ya que son uno de los principales recursos que utilizan actualmente los docentes para mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje. Para (Fernández, Riveros, Montiel, 2017) un software educativo “Comprende un conjunto de recursos interactivos informáticos diseñados con la intención o finalidad de ser utilizados en el contexto educativo, de allí la necesidad que hay en cuanto a las tareas del docente en incentivar su uso.” (p.12). La implementación de un software educativo por parte del docente es de suma importancia ya que puede ser un gran apoyo para el desarrollo de la clase y a la vez promueve que los alumnos se familiaricen con las nuevas tecnologías.

El software matemático para (Mosquera & Vivas, 2017) se define como “Una herramienta de apoyo a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.” (p.101), este software se caracteriza por ser capaz de facilitar acciones tediosas, procesos largos; tales como las representaciones geométricas, la gráfica de funciones, mejorar la visualización, entre otras muchas.

La utilización de este tipo de recursos además de la construcción de conocimientos, puede generar otras habilidades, es así que para (Cuicas et al., 2007) “Lo que se busca es facilitar estrategias que mejoren las habilidades del pensamiento, partiendo de lo que el/la estudiante es capaz de hacer y avanzar gradualmente hacia habilidades de orden superior” (p.8), se busca desarrollar otras habilidades de los estudiantes que vayan más allá de la clase de Matemática como pueden ser; la actitud crítica, el cuestionamiento de las respuestas, la reflexión, la comunicación o la exploración

Algunas de las ventajas que presenta la utilización de estos Softwares Matemáticos según Reveló, (2020) son las siguientes:

No requiere de grandes conocimientos informáticos, con un nivel de usuario cualquiera se puede usar la herramienta. Teniendo en cuenta que los alumnos de la carrera de matemáticas y física de la Universidad de Cuenca tienen asignaturas como informática básica y software de matemática y física, durante los primeros ciclos de la carrera por lo que ya poseen cierta noción de cómo trabajar con un software matemático, podemos asumir qué poseen las herramientas necesarias para poder utilizar un software matemático.

Propician distintos niveles de participación individual o colectiva entre docentes y estudiantes. Cuando se utiliza un método distinto de resolución de problemas matemáticos como lo es resolver por medio de un software matemático, se genera automáticamente un ambiente de aprendizaje distinto, los alumnos empiezan a interactuar con más frecuencia entre los propios alumnos y con el docente y al momento de solventar alguna inquietud se cuenta con varias opciones debido a la participación de los alumnos y docente.

Permiten un alto grado de interdisciplinariedad para la educación ya que permiten romper esquemas tradicionales de enseñanza – aprendizaje dentro y fuera del aula universitaria. Nuestra propuesta tiene como reto fomentar que los alumnos luego de observar los videos demostrativos de la resolución de problemas de optimización mediante el Geogebra, resuelvan problemas por cuenta propia en sus tiempos libres ya no de la forma tradicional sino mediante el software propuesto, sin que nadie les imponga tareas a cumplir por obligación o debido a la obtención de alguna nota qué defina sus conocimientos.

Son dinámicas, fomentan procesos formativos abiertos y flexibles para el aprendizaje autónomo y colaborativo de los estudiantes desde cualquier lugar. En cuanto a la formación de los alumnos se busca qué los alumnos resuelvan estos tipos de problema de optimización de una manera más dinámica, y qué el software matemático sirva de complemento en la resolución de la forma tradicional, y qué su aprendizaje sea cada vez más interactivo entre los alumnos de la clase sin importar qué sea en el salón de clases.

Permiten a los estudiantes reflexionar sobre su proceso de aprendizaje. Permiten el aprendizaje a partir de los errores. En la resolución de problemas de optimización mediante un software matemático los alumnos podrán visualizar de mejor forma el planteamiento del problema al momento de graficar el comportamiento de la función matemática, los conceptos implicados en la resolución requerida, también se podrá apreciar de mejor manera los errores cometidos en el planteamiento del problema lo cual nos servirá de experiencia para no cometer los mismos errores, es decir vamos aprendiendo de dichos errores también.

Aumentan el interés y la motivación de los estudiantes con dificultades para mejorar su proceso de aprendizaje. La finalidad de promover el uso de un software matemático para la resolución de problemas de optimización sin ninguna duda es despertar el interés de los alumnos, mostrando paso a paso y de forma detallada la obtención de la respuesta requerida ya que en este proceso se dará una serie de inquietudes las cuáles los alumnos sentirán curiosidad y motivación de cómo dar una respuesta concreta a dicha inquietud.

1.3.2 Guía Didáctica

El recurso didáctico a usar para el presente proyecto de investigación es la guía didáctica, para García (2014) “La Guía didáctica se venía entendiendo como el documento que orienta el estudio, acercando a los procesos cognitivos del alumno el material didáctico, con el fin de que pueda trabajarlo de manera autónoma” (p.2). Básicamente la elaboración de una guía didáctica es con el fin de apoyar al docente y alumno al momento de adentrarse en el tema de optimización como unas de las aplicaciones del cálculo diferencial.

La educación actual en el Ecuador está basada en el constructivismo, la guía como recurso didáctico está dentro de este enfoque debido a que fomenta el aprendizaje autónomo. Según Mejía (2013) afirma que:

> El proceso cognitivo en la guía didáctica implica una adecuación del contenido de los materiales, la realización de las actividades –incluyendo sus instrucciones en la guía– y una evaluación que le permita al alumno contrastar el desarrollo de sus competencias. Por esta razón, el logro del aprendizaje y la obtención de nuevos conocimientos encierran una estandarización que ayuda al alumnado a integrarse en el proceso de enseñanza-aprendizaje (pág.69).

Lo mencionado por el autor nos demuestra que se puede lograr un aprendizaje significativo en base a la guía didáctica, con la finalidad de que tanto el docente como el alumno puedan sacarle el mayor provecho posible, logrando así resultados positivos en el proceso de formación del alumno.

Generar una guía didáctica puede resultar algo trivial o común, sin embargo, no es suficiente con proponer y ya. Para corroborar su correcta elaboración, este dependerá del resultado del fracaso o éxito en las aulas educativas, por eso una correcta elaboración de la guía debe ser de manera motivadora para el estudiante que despierte el interés de aprender García (2014). También se debe tomar en cuenta al momento de la elaboración de la guía la cual debe ser innovadora, con la intención de que el uso de la guía sea positivo para el aprendizaje,

Para la estructura de la guía didáctica según García (2014) está conformada de

- Índice y presentación
- Introducción general de la asignatura
- Competencias y objetivos
- Materiales
- Contenidos del curso
- Otros medios didácticos
- Plan de trabajo
- Calendario–cronograma
- Orientaciones específicas para el estudio
- Actividades
- Tutoría
- Evaluación.

Para su desarrollo es esencial tomar en cuenta la estructura del autor, para poder tener una noción de cómo elaborarla. Desde esta perspectiva, se establece que una guía tiene que estar compuesta por momentos de clases como anticipación, construcción y consolidación que se irán enlazando entre sí a medida que se desarrollen los temas de clase.

Con respecto a la organización de la guía didáctica Pino & Urías G. (2020) afirman que "La estructura funcional de las guías didácticas es variada, dado factores contextuales como, características y nivel de desarrollo de los estudiantes, preparación del docente en el área de conocimiento y la didáctica, entre otros" (p.371). Las actividades y metodologías propuestas pueden ir variando de acorde a la temática en la cual se desee usar la guía didáctica con el propósito de solventar las inquietudes de los estudiantes y también dar nuevas formas de impartir clases para el docente.

Se propone por lo tanto la siguiente estructura, que se va a utilizar para la elaboración de la guía de nuestro trabajo de titulación de las distintas unidades o temas que constituyen esta propuesta es:

- Introducción
- Índice de contenidos
- Indicaciones
- Software Geogebra
- Estructura de las clases
    - Objetivo
    - Introducción
    - Logros de aprendizaje

- Anticipación
- Construcción
- Consolidación
- Conclusión
- Criterios de Evaluación

1.3.3 Geogebra

Geogebra pertenece a uno de los tantos recursos didácticos qué ya existen, a su vez es parte de las TICS (Tecnologías de la Información y Comunicación). La razón de usar estos recursos digitales en la enseñanza de Matemáticas es para salir de lo tradicional y tener una forma diferente, interactiva, dinámica, de enseñar apoyándonos en la tecnología, por lo que resulta ser de gran utilidad tanto para docente-alumno en los procesos aprendizaje y enseñanza.(Muñoz & Porras, 2018). Por eso la relevancia del uso de Geogebra para poder darle nuevas formas de enseñanza al cálculo diferencial (aplicaciones de la derivada), ya que el alumno podrá relacionar lo teórico con situaciones cotidianas en las cuáles se puede requerir el uso de la optimización de una función.

Se ha escogido este software porque la forma de usar el Geogebra es muy adecuada para el alumno, ya que no requiere de un alto conocimiento informático. Para (Jiménez & Jiménez, 2017) “Geogebra es un software gratuito y muy sencillo de operar, el cual puede presentar el comportamiento gráfico de los conceptos matemáticos, pero es responsabilidad de cada docente hacer sus clases más interactivas, atractivas y entretenidas” (p.11) debido a las múltiples formas de enseñar que surgieron. Rosillo (2017) afirma: “Al hacer uso de las

Tics en el proceso de enseñanza, el rol de los docentes es muy substancial, porque le permite al educando la construcción de su propio conocimiento” (p.12), por lo que el uso de Geogebra va acorde con el constructivismo que plantea el presente trabajo de investigación.

Vale la pena aclarar que Geogebra pertenece al conjunto de un software libre, el cual para (Mosquera & Vivas, 2017) Este programa al ser libre permite el uso de cualquier persona, además de que ofrece distintas opciones sin restricciones (p.102). Razón por la que se desea usar este software en esta propuesta, debido a que no es un limitante para su uso en las clases tanto para el docente como el alumno puede contar con este software gratuito.

Es por ello que el software libre es de vital importancia, ya que pueden ser utilizados por cualquier usuario sin ningún costo. Geogebra es un software matemático que destaca por tener la capacidad de diseñar modelos geométricos y algebraicos relacionados con situaciones de la vida real, Barreno (2015) nos dice:

> “Uso Geogebra porque tiene varias funciones desarrolladas que permiten realizar las modelaciones y simulaciones de los conceptos, definiciones y propiedades de temas sobre límite, continuidad y derivación de una función real; así como, permite realizar una serie de prácticas experimentales sobre el tema de las aplicaciones de la derivada de una función real” (p,77)

Creemos que Geogebra al ofrecer múltiples opciones para matemáticas resulta muy conveniente su uso, además mejora la visualización de los problemas de aplicación dando un contexto más real a los conceptos involucrados.

Los gráficos que se pueden realizar con este software permiten al estudiante no sólo resolver los ejercicios planteados, sino también visualizar todos sus procesos y características, facilitando así la comprensión del concepto. Desde otro punto de vista, Geogebra “Es un recurso para que los estudiantes movilicen sus conocimientos previos y relaciones otros conceptos matemáticos de forma dinámica.” (Elizarraras-Baena, 2019, pág. 42), además de la forma dinámica en la que el programa representa los conceptos permite también desarrollar otras habilidades como pueden ser; la creatividad, imaginación espacial, visualización de características, deducción, generalización, entre otras.

Las ventajas del uso de cualquier software pueden ayudar tanto al docente como al alumno, razón por la cabe resaltar qué para los autores (Arteaga, Medina & Del Sol Martínez, 2019) Geogebra puede tener ventajas como un software matemático cualquiera, es así que se enlista algunas de las ventajas que caracterizan al software Geogebra

• Se puede plantear grupos de trabajo o también de forma individual

• Impulsa la creatividad, es decir que el alumno puede aplicar los conceptos y habilidades, también que posibilita el descubrimiento de nuevos conocimientos.

• Posibilita la construcción de conocimiento con difícil interpretación por parte del alumno.

• Es positivo su uso ya que el alumno puede fomentar el autoaprendizaje, y esto procesos son acompañados de un tiempo adecuado

• Contribuye a que el alumno puede tener un fácil acceso a los conocimientos

• Cuenta con herramientas y opciones qué llaman la atención del alumno.

• Promueve una mayor participación del estudiante en el proceso de aprendizaje.

Las ventajas mencionadas anteriormente por los autores dan razones válidas para poner en uso este software en una clase de cálculo diferencial, ya qué se atribuye a planificar clases con un enfoque constructivista lo cual es lo que se busca en esta propuesta, es por eso que Geogebra va ser uno de los artífices en la elaboración y planificación de la guía didáctica.

Capítulo 2 METODOLOGÍA Y RESULTADOS

2.1 Metodología

El trabajo de investigación a desarrollar tendrá un enfoque cuantitativo, debido a las ventajas que ofrece este tipo de investigación. Según los autores Sampieri, Fernández & Baptista (2014). "La investigación cuantitativa ofrece la posibilidad de generalizar los resultados más ampliamente, otorga control sobre los fenómenos, así como un punto de vista basado en conteos y magnitudes" (p.15). Este enfoque nos permitirá obtener datos que serán cantidades numéricas que posteriormente tendrán una interpretación y un panorama general de la problemática empleando la obtención de datos y la evaluación con el objetivo de responder las interrogantes que fueron mencionadas en base a la hipótesis propuesta. Además, el estudio planteado es de carácter explicativo, dado que se pretende establecer la influencia del uso de Geogebra como una estrategia de complemento reforzando el rendimiento académico de los estudiantes.

2.1.1 Población

La población escogida serán los alumnos de la carrera de matemática y física de la Universidad de Cuenca que estén o hayan pasado el 3er ciclo, ya que son los que están familiarizados con la asignatura de cálculo diferencial. Para la selección de la población se usará el muestreo estratificado ya que este nos permite escoger una muestra de la población, el cual está representado por características que identifican a dicho grupo para nuestro caso, los alumnos de la carrera de matemática y física de la Universidad de Cuenca, ciclo que representa una muestra la cual se caracteriza por estar cursando la asignatura del cálculo diferencial.

2.1.2 Técnica

Se usarán técnicas como la encuesta online para obtener datos estadísticos que permitan determinar la realidad de la problemática que tienen los estudiantes al momento de abordar los temas de cálculo diferencial, específicamente en cuanto a la optimización de funciones. En las encuestas online se realizan preguntas relacionadas a las dificultades que tienen los estudiantes al momento de aprender la parte teórica de la derivada y las aplicaciones, en este caso el de la optimización.

Las preguntas de las encuestas serán de tipo diagnóstico para lo cual se formuló una encuesta para recabar información involucrada con los temas de estudio planteado, para conocer aspectos puntuales sobre las dificultades o impedimentos que pueden presentar al momento de abordar dichos temas. Posteriormente el procesamiento de los datos se basará en las respuestas que propicien los alumnos, los resultados se realizará por medio de tablas de datos obteniendo las gráficas correspondientes, esto con el fin de establecer relaciones entre los resultados obtenidos y la propuesta de investigación.

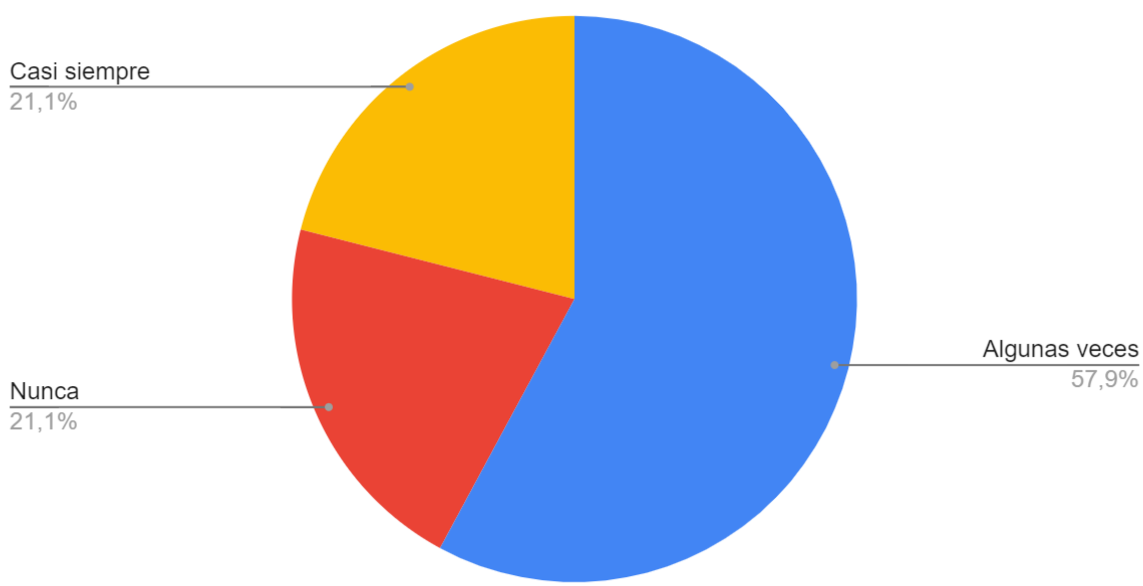
Los datos obtenidos permiten tener una noción de los problemas de aprendizaje, es decir que podremos percatarnos de cuáles son las dificultades de mayor aprendizaje y cuáles no. Esto contribuirá a tener en cuenta los contenidos más esenciales dentro de la guía didáctica, que al final darán un soporte a la propuesta planteada en el objetivo general. La metodología será realizada en línea adaptándonos a la realidad que se vive en el País debido a la pandemia del Covid 19.

2.2 Análisis de datos y resultados encuesta

A continuación, se realiza el análisis de la encuesta efectuada a la población, dando un total de 19 encuestados que va a ser la población representativa para el análisis y resultados.

Pregunta 1 ¿El docente de cálculo diferencial utiliza recursos tecnológicos para enseñar temas relacionados con aplicaciones de la derivada (optimización de funciones)?

Figura 1. Uso de recursos tecnológicos en el aula

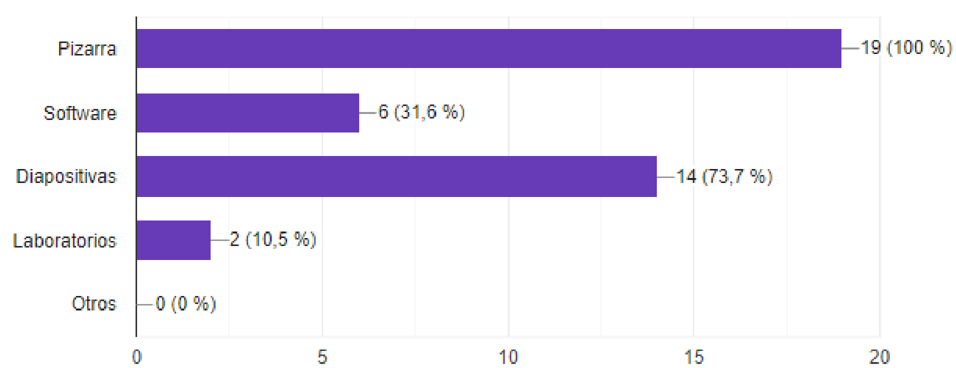


Nota. Representación del uso de recursos tecnológicos en el aula a criterios del estudiante

En base al porcentaje de alumnos que nunca recibieron clases con recurso tecnológicos y dado que la justificación de nuestro trabajo de titulación indica que la finalidad es usar un recurso tecnológico como Geogebra para abarcar lo temas de optimización, lo cual sería de gran beneficio para este grupo de alumnos, cabe indicar el uso de las nuevas tecnologías dentro de las aulas educativas va incrementándose.

Pregunta 2 ¿Cuáles de los siguientes recursos usa el profesor para desarrollar sus clases? (Se puede marcar más de una). Si su opción es OTROS indicar el recurso.

Figura 2. Uso de software tecnológicos en el aula

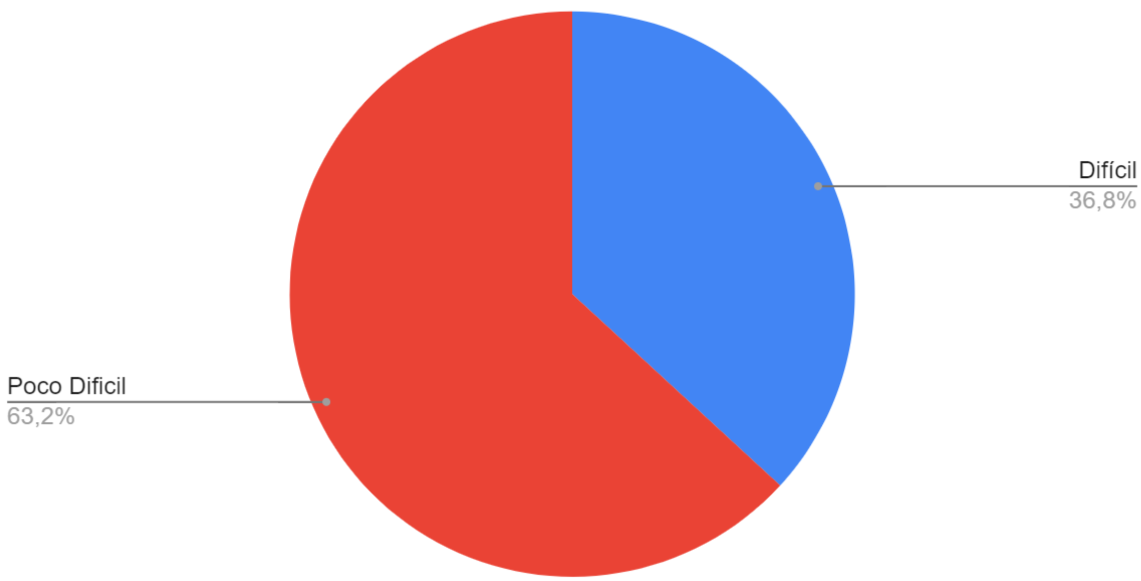


Nota. Representación del uso de recursos tecnológicos en el aula ya sean tradicionales o modernos conforme lo mencionado por los estudiantes

Esta pregunta se refiere a los recursos que se usaron para la clase de cálculo diferencial donde la mayoría de los encuestados indica que el recurso más usado fue el pizarrón, siendo esto es un factor que indica la clase tradicional al momento de abordar esta temática. Como segunda opción más elegida están las diapositivas y como tercera opción con un menor porcentaje está el software, lo cual indica que el uso de software al momento de la clase no se la toma como la opción primordial para dar las clases, ya que uno de nuestro objetivo en la elaboración de la guía es proponer al docente nuevas metodologías de enseñanza.

Pregunta 3 ¿Qué tan difícil es para Ud. imaginar o interpretar geométricamente los conceptos en el tema de aplicaciones de la derivada?

Figura 3. Dificultad en optimización como aplicación del cálculo diferencial

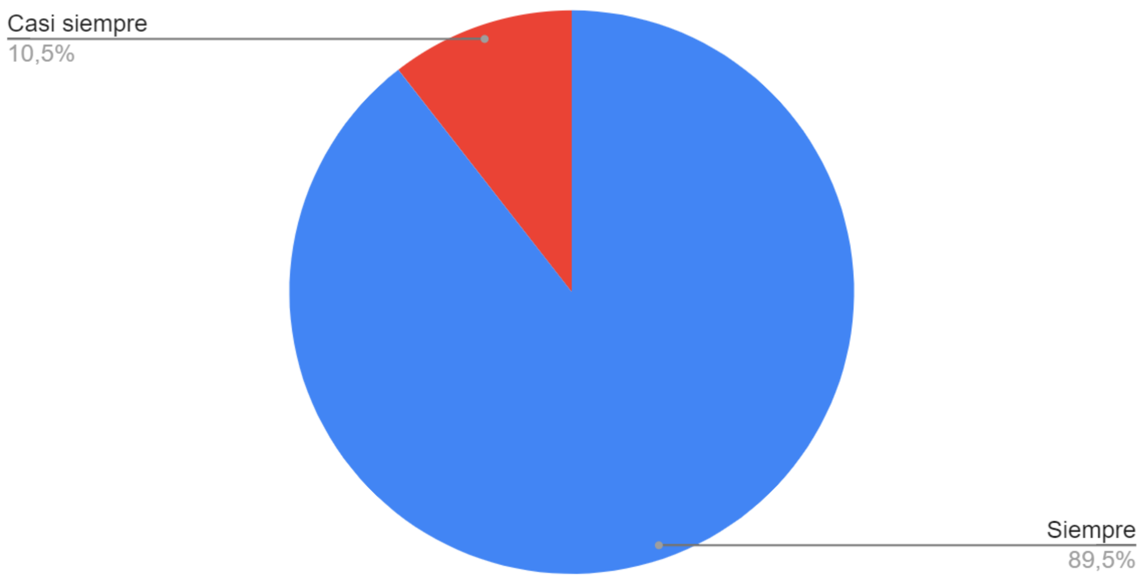


Nota. Representación de la complejidad en los alumnos para la interpretación geométrica de la derivada

A pesar de que del total de encuestados la mayoría no presentan dificultades al interpretar el concepto de optimización, sin embargo, existe un poco más ⅓ de la población en los cuales se presentarán dicha dificultad, por lo que es válida la investigación. Lo mencionado anteriormente de una u otra manera tiene relación con el problema de la investigación, ya que algunas de las causas para no poder interpretar geométricamente la optimización de la derivada pueden ser varias como falta de material tangible, la falta de visualización, la metodología de enseñanza, la falta de interpretación de términos de un texto.

Pregunta 4 ¿Considera usted importante utilizar un software matemático educativo gratuito para mejorar el proceso de enseñanza- aprendizaje tanto en el aula como fuera de la misma?

Figura 4. Importancia del uso de software educativo en el aula



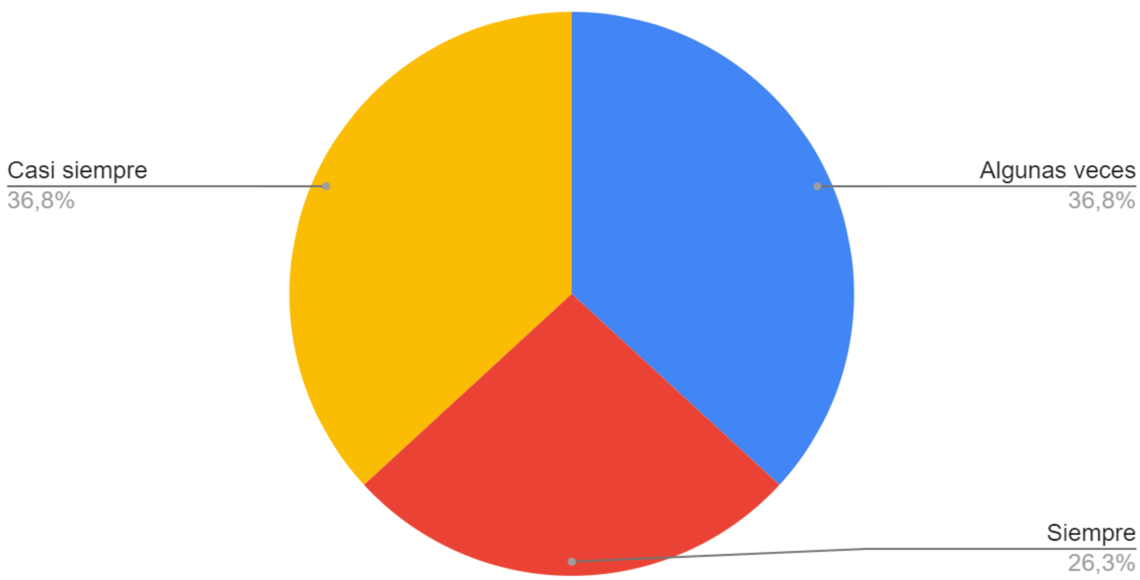
Nota. Representación de la importancia para los alumnos en cuanto a

la implementación de un software matemático

En el análisis de esta pregunta se puede evidenciar que el 17/19 de la población indica que es conveniente usar un software educativo para el proceso de enseñanza-aprendizaje, esto se puede interpretar debido a que en la actualidad la educación y la tecnología han ido avanzando de la mano conjuntamente, esto ha ido generando nuevas formas de enseñar involucrando a la tecnología dentro de las aulas educativas. El resto de población lo cual es una minoría consideran que no necesariamente se requiere de esta herramienta, dado que se puede dar casos donde el tiempo sea un factor que no permite incluir estas herramientas digitales. Finalmente, ninguno de los encuestados ha escogido la opción de nulidad(nunca), esto da conocer que puede existir una aceptación favorable de la implementación del software lo cual coincide con la propuesta planteada.

Pregunta 5 ¿Ha tenido usted alguna experiencia con el uso de software matemático educativo para su proceso de aprendizaje?

Figura 5. Experiencia en el uso de software educativo

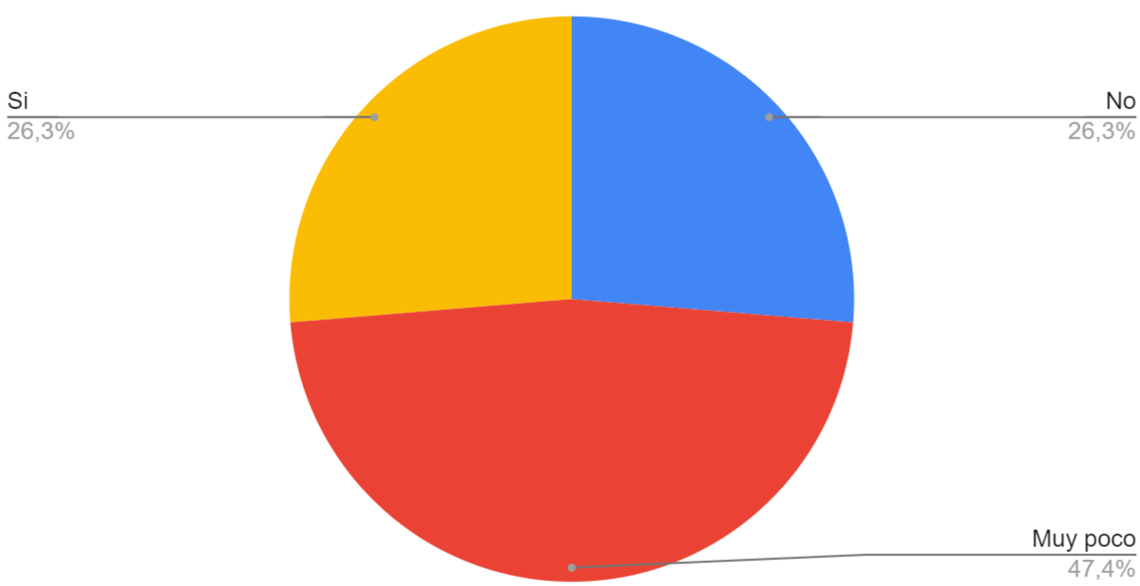


Nota. Representación en base a la experiencia de los alumnos en emplear un software matemático para su aprendizaje

Con respecto al análisis de esta pregunta se puede notar qué un poco menos de ⅓ de la población está familiarizado plenamente con el uso de un software educativo, mientras los ⅔ restantes de la población comparten la experiencia del uso del software ya sea de manera frecuente y casual. Se puede evidenciar que el uso de los softwares matemáticos por parte del docente existe ya se de las siguientes maneras: siempre, algunas veces, o pocas veces, estás frecuencias de uso puede ser debido a que se presente una negativa del docente de usarlo ya sea por limitaciones dentro de las instituciones educativas.

Pregunta 6 ¿Conoce usted cómo relacionar el contenido implicado en el tema de aplicaciones de la derivada mediante un software matemático?

Figura 6. Relación entre optimización- software matemático

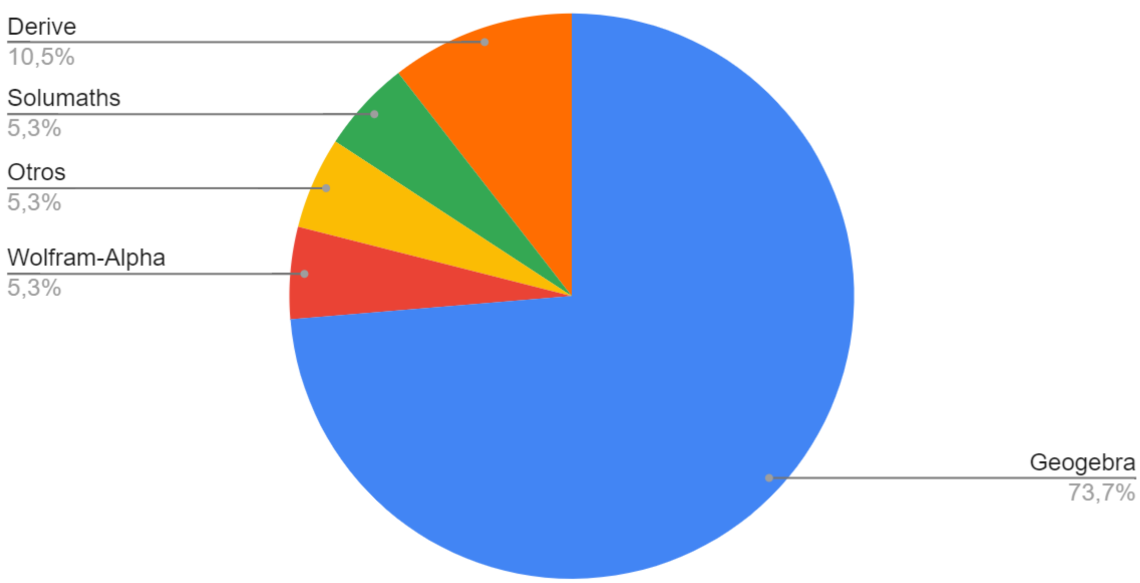


Nota. Representación de cómo relacionan los estudiantes su aprendizaje mediante un software matemático

Del total de encuestados se puede apreciar que un poco menos de la cuarta parte no tiene ningún problema con relacionar los contenidos de aplicación de la derivada con algún software, sin embargo, cabe notar qué las ¾ partes de la población restante no conoce o al menos tiene alguna noción del cómo relacionarlo. Lo mencionado concuerda con una parte del análisis del problema de la investigación qué indica que el docente ha puesto énfasis en el procedimiento de resolución de ejercicios con una visión mecánica y como consecuencia los alumnos presentan dificultades al momento de plasmar los conceptos de aplicaciones de la derivada mediante un software matemático.

Pregunta 7 Indique qué software matemático ha utilizado en la asignatura de cálculo diferencial para una mejor interpretación en el tema de aplicaciones de la derivada.

Figura 7. Software matemático más usado

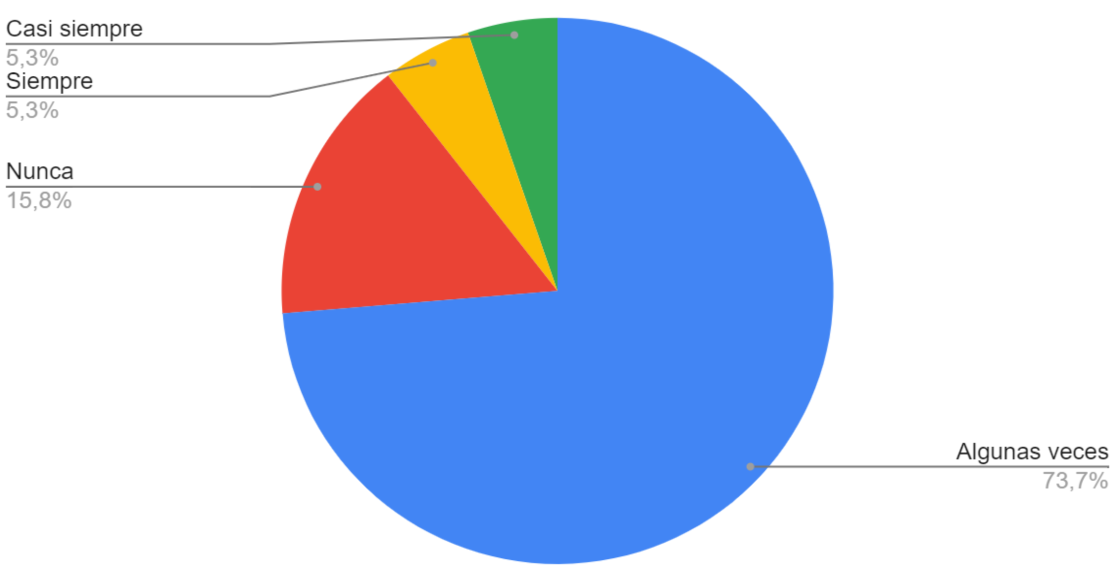


Nota. Representación del software matemático más usado por parte de los alumnos en calculo diferencial

Los resultados de esta pregunta nos indica qué alrededor de los $3/4$ de la población han usado Geogebra en la asignatura de cálculo diferencial, y prácticamente el resto de la población ha usado otro tipo de software. Teniendo en cuenta qué uno de nuestros objetivos es promover el uso de Geogebra, y dado que la mayoría de encuestados tiende a usar el mismo software podemos decir qué la propuesta va a influir de manera positiva en el rendimiento de los alumnos en la asignatura de cálculo diferencial. Y con respecto al resto de encuestados tendrán de ayuda la elaboración de la guía didáctica acerca del uso de Geogebra en la optimización, es así que podrán aprender a usar nuevos softwares diferente al que han usado.

Pregunta 8 ¿Resuelve los ejercicios de optimización como una de las aplicaciones de la derivada utilizando algún software matemático?

Figura 8. Resolución de ejercicios de optimización con uso de software



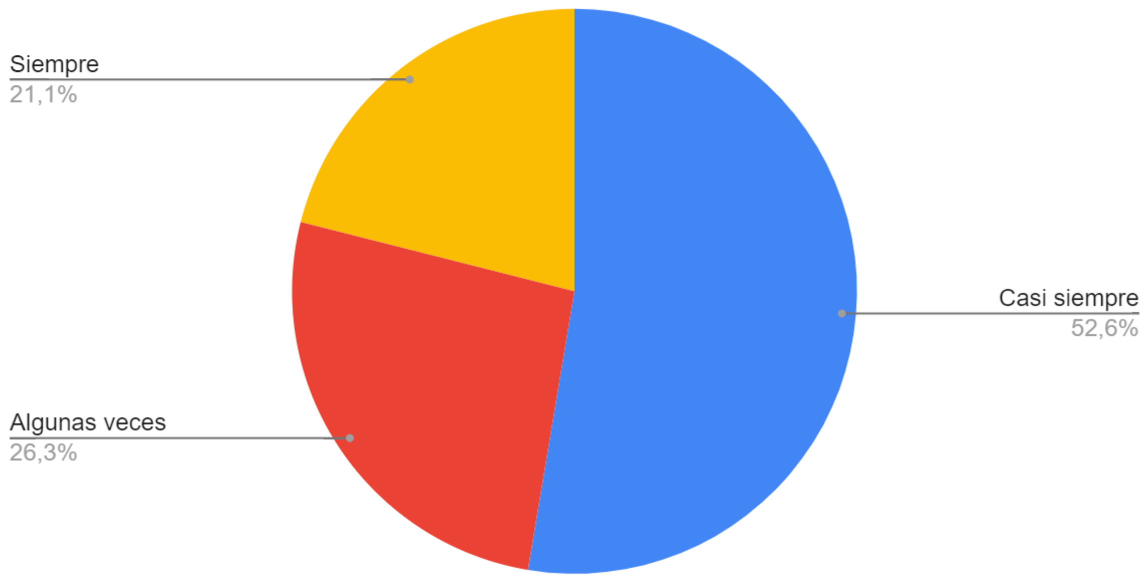
Nota. Representación de los alumnos qué resuelven ejercicios de optimización a través de algún software matemático

En base a los resultados de esta pregunta apenas 1 de los 19 encuestados tiene claro cómo resolver mediante un software este tipo de problemas de optimización, con relación a la misma población tenemos qué 15 de los restantes tienen una similitud en cuanto a una noción baja del uso del software para resolver este tipo de problemas antes mencionados. Para finalizar se puede apreciar qué 3 alumnos nunca han usado un software en la resolución de ejercicios planteados en este tema de optimización.

Vemos en general qué la gran mayoría de la población no ha tenido experiencias con un software dentro de las clases impartidas por el docente, lo cual concuerda con uno de los aspectos de la problemática de este estudio de investigación qué manifiesta qué los alumnos no pueden obtener un aprendizaje significativo debido a que el docente no fomenta su uso.

Pregunta 9 ¿Cree usted qué sería más sencillo para usted resolver un problema de optimización en el tema de aplicaciones de la derivada cuando utiliza un software matemático?

Figura 9. Resolver los ejercicios con uso de software resulta más sencillo

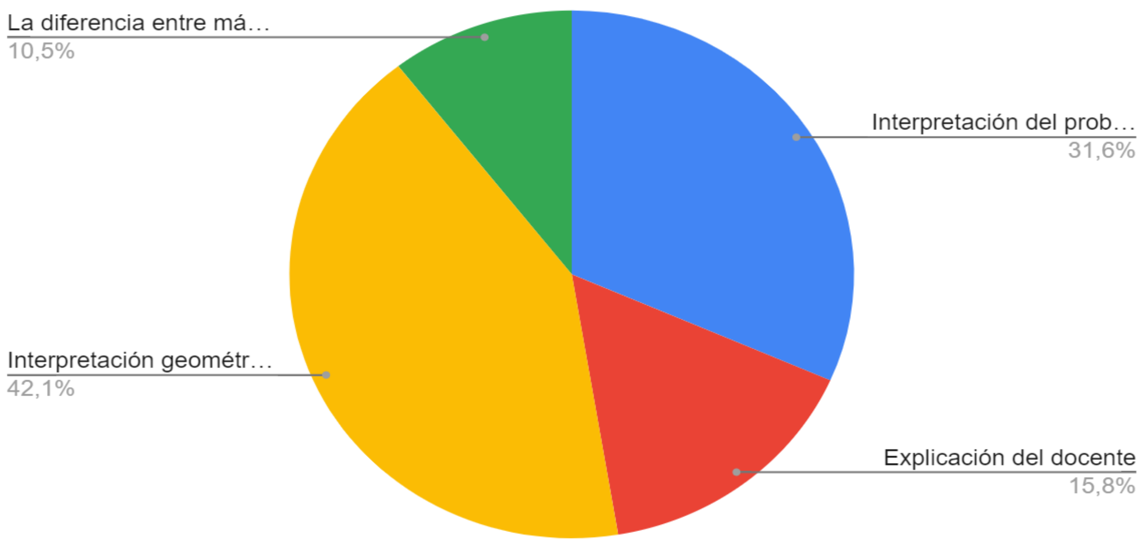


Nota. Representación de los alumnos qué prefieren resolver problemas de optimización mediante un software matemático debido a que resulta más sencillo

Aproximadamente 4 alumnos de los 19 encuestados han manifestado qué sería más adecuado resolver problemas de optimización usando un software en una computadora en lugar de resolverlo de la manera tradicional ya sea en sus cuadernos o en la pizarra. De la población restante qué serían alrededor de 15 alumnos encuestados estos comparten que puede resultar sencillo resolver estos ejercicios, pero la frecuencia del uso de un software no es muy elevada, lo cuál puede ser ocasionado por factores como el tiempo de ejecución, nivel de dificultad, o puede darse el caso de qué el ejercicio no requiere del uso de software. Por lo que esta pregunta resulta ser pertinente en relación al objetivo general del trabajo de titulación el cual consiste en la elaboración de una guía para la correcta aplicación del Geogebra en el tema de optimización.

Pregunta 10 ¿Cuándo se abarca el tema de optimización como una de las aplicaciones de la derivada mediante máximos y mínimos, que es lo que más le dificulta para la compresión de dicho tema?

Figura 10. Resolver los ejercicios con uso de software



Nota. Representación de los factores que dificultan la comprensión del tema de máximos y mínimos en los alumnos para un correcto aprendizaje en la parte de optimización

En esta pregunta se aprecia que existen alumnos qué se identifican con las distintas dificultades planteadas, la mayoría del total de encuestados indican que la dificultad se debe a la falta de interpretación geométrica la cuál es muy relevante para nuestra propuesta de investigación, sin embargo, también tenemos encuestados que seleccionaron otros problemas qué pueden ser resueltos de igual manera con el uso de la guía didáctica planteada. Cabe indicar que en la justificación de nuestra propuesta se plantea la elaboración de una guía didáctica es decir que se puede minimizar de cierta manera la dificultad de la explicación por parte del docente, también se quiere implementar el Geogebra en las aulas educativas este podría ayudar a una mejor interpretación geométrica de los problemas y también de los conceptos en este caso como de máximos-mínimos.

Pregunta 11 **¿**A Ud. le parece correcto que el docente use Geogebra y guías didácticas para impartir la clase de optimización como unas de las aplicaciones de la derivada e indique el porqué de su respuesta? .

La pregunta 11 tiene carácter abierto, por lo que se procedió a tabular las afirmativas es decir las que decían sí, dándonos un total del 100% de los encuestados que respondieron que sí les pareció correcto la incorporación de una guía didáctica y Geogebra para impartir clases de optimización en la aplicación de la derivada. Cabe indicar que los encuestados respondieron de manera diversa por qué si de su elección.

Según Jefferson (nombre ficticio) Si. Debido que al aplicar recursos didácticos despiertan el interés en el estudiante lo cual es un factor muy positivo pues con esto se compromete con su propia formación.

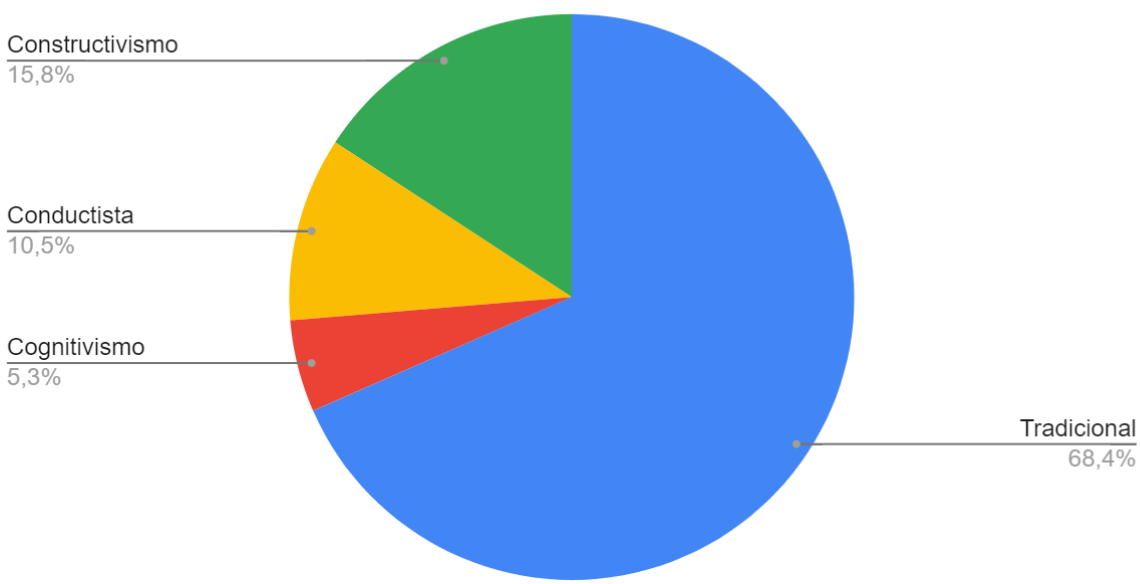
La respuesta dada por el encuestado nos indica que resulta ser un factor positivo aplicar los recursos didácticos, es decir que puede llegar a impactar de manera adecuada en las aulas. Ya que hoy en día los recursos tecnológicos sirven como herramientas didácticas para establecer una clase más interactiva entre alumnos y docente generando un ambiente de aprendizaje del cual se puede obtener el mayor provecho posible.

Según Pedro (nombre ficticio) Si/porque considero que hacerlo de otras maneras además de la tradicional permite visualizar de mejor manera lo que se está aprendiendo, y la guía es de mucha ayuda ya que permite al docente tener un orden que ya está preparado y saber cuál es el momento adecuado de aplicar el software, además de permitir dinamizar la clase.

Ante lo manifestado en esta respuesta vemos qué nuestra propuesta tendrá gran acogida pues concuerda con los beneficios qué esperan los alumnos obtener luego de usar la guía didáctica.

Pregunta 12 El docente al momento de enseñar el tema de optimización como una de las aplicaciones de la derivada ¿Qué modelo pedagógico uso según su criterio?

Figura 12. Modelo pedagógico usado por el docente

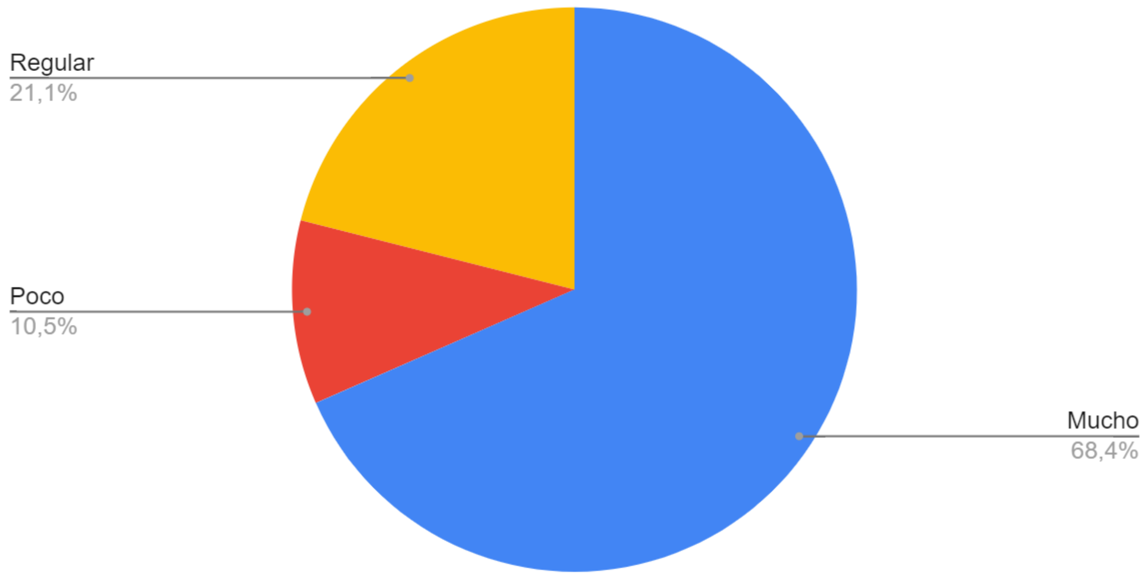


Nota. Representación del modelo pedagógico qué uso el docente en el tema de optimización según el criterio de los estudiantes

De la mayoría de encuestados que para este caso que son 13 de 19 alumnos manifiestan qué el docente se rige a dictar las clases de manera tradicional el cual no tiene mucha validez en la educación actual, y el resto de la población indica que aprendieron con distintos enfoques pedagógicos es decir que estas corrientes pedagógicas no están potenciadas de igual manera que el tradicionalismo. Cabe indicar que el presente trabajo de titulación está basado en el enfoque constructivista según el currículo ecuatoriano, razón por la que implementar este enfoque resulta conveniente para promover un cambio en el aprendizaje.

Pregunta 13 Si se elaborara una guía didáctica para el aprendizaje de la optimización como una de las aplicaciones de la derivada. ¿Cree que se mejoraría el aprendizaje del tema?

Figura 13. Implementar la guía didáctica

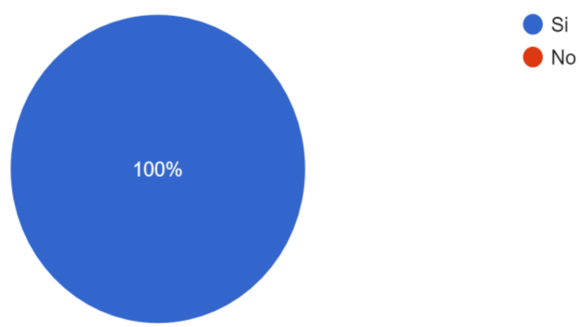


Nota. Representación de la importancia en implementar una guía didáctica para el tema de optimización según el criterio de los alumnos

Se puede concluir del total de los encuestados todos coinciden en que sería positivo la implementación de una guía didáctica, sin embargo, la mayoría piensa que una guía es la que puede mejorar la comprensión del tema, ya que en la guía se puede proponer las diferentes estrategias metodológicas basadas en el constructivismo para poder ayudar tanto al docente como al alumno, lo cual básicamente concuerda con el objetivo general de nuestra investigación. Para la población restante estos consideran que la implementación de la guía didáctica no genera un cambio profundo en la enseñanza del tema a tratar, pero de igual manera no descartan la implementación de una guía didáctica.

Pregunta 14 ¿Si se incorporarán videos tutoriales de cómo usar Geogebra para resolver problemas de optimización por parte del docente? ¿Cree que sería de gran apoyo para aprender el tema?

Figura 14. Incorporar videos y una guía didáctica para optimización de funciones



Nota. Representación de la utilidad qué tendría la incorporación de videos tutoriales de cómo usar Geogebra en la resolución de problemas de optimización

En la pregunta 14 se puede apreciar qué es muy viable la propuesta de usar Geogebra como un complemento en la enseñanza del cálculo diferencial, específicamente en problemas en los que se presentan situaciones reales qué requieran de una mejor visualización o interpretación, ya que estos conocimientos surgen de la derivada como una razón de cambio. Además, uno de nuestros objetivos específicos es elaborar videos tutoriales del uso de Geogebra para la resolución de problemas de optimización, por lo cual existe una aceptación considerable respecto a las respuestas de esta pregunta.

Capítulo 3 RESULTADOS Y CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

En este trabajo de titulación se elaboró una guía didáctica con un enfoque constructivista para la resolución de problemas de optimización en la asignatura de Cálculo Diferencial mediante el software Geogebra y videos tutoriales como recursos didácticos, con el fin de contribuir al docente como al alumno para que el aprendizaje sea de manera significativa.

Se realizó un diagnóstico de las dificultades que tienen los alumnos del 3er ciclo de la Carrera de Pedagogía de la Ciencias Experimentales en la resolución de problemas de optimización como una de las aplicaciones de la derivada. Aquí lo más importante del diagnóstico fue el planteamiento de las preguntas realizadas en base al uso del software Geogebra, porque esto nos permitió tener una idea acerca del impacto ya sea positivo o negativo qué genera resolver este tipo de problemas mediante dicho software.

Fue de gran ayuda el realizar un diagnóstico con alumnos de nuestra propia Universidad, porque así podríamos resolver de manera rápida cualquier eventualidad qué se presente. Cabe mencionar que lo más difícil para realizar las encuestas fue qué no lo pudimos hacer de manera presencial con los alumnos, sino qué se las realizó a través de encuestas online mediante correo electrónico debido a la pandemia a nivel mundial motivo por el cual solo recibimos 19 respuestas de un grupo de 30 estudiantes.

Lo que ayudó a elaborar esta guía didáctica fue el interés de presentar situaciones reales qué involucren conceptos del cálculo diferencial mediante el software Geogebra, ya que la población estudiada que son los alumnos de la carrera de Pedagogía de la Ciencias Experimentales en su mayoría indicó que el tema fue presentado siempre de manera tradicional, por eso se vio de manera positiva la elaboración de la guía didáctica proponiendo actividades que demuestran un aprendizaje diferente.

Se puede recalcar que en la elaboración de esta guía fue qué se incluyeron temas relevantes qué sirvieron de base, para poder llegar a la comprensión adecuada del tema primordial el cuál trata sobre la resolución de problemas de optimización como una de las aplicaciones de la derivada, es así que en el desarrollo de las distintas clases se priorizó el uso de Geogebra como recurso didáctico.

Para finalizar se realizaron videos tutoriales del uso de Geogebra para la resolución de problemas de optimización para mejorar su aprendizaje e interpretación. Lo más importante de los videos fue qué se demostró cómo resolver este tipo de problemas netamente con los comandos de Geogebra sin la necesidad de requerir al concepto de derivada, porque así se puede visualizar de mejor manera el planteamiento de dicho problema y verificar la respuesta qué se obtuvo de manera analítica. Lo que más nos ayudó a realizar los videos fue ver tutoriales en la plataforma de YouTube e investigaciones sobre el manejo de los comandos en Geogebra para luego aplicarlos según nuestros propios requerimientos.

RECOMENDACIONES

Antes de finalizar el presente trabajo de titulación consideramos importante tener en cuenta las siguientes recomendaciones en base a nuestros objetivos y conclusiones planteadas en este estudio.

El docente debe profundizar en el diagnóstico de las falencias qué tienen los alumnos cuando resuelven problemas de optimización de forma tradicional, por lo que se recomienda realizar un diagnóstico con la técnica de la encuesta de manera presencial y establecer un tiempo prudente para qué los alumnos puedan llenar conscientemente las preguntas planteadas. Una vez identificados dichos errores, promover el uso de Geogebra qué será de gran ayuda para corregir de manera efectiva dichas falencias mediante un correcto análisis e interpretación con la finalidad de obtener mejores resultados.

Se recomienda al docente proponer problemas relacionados con el entorno de la vida cotidiana y hacer una demostración detallada frente a sus alumnos de cómo resolverlos con recursos digitales como el software Geogebra que resulta ser de gran ayuda para simular estas situaciones de la vida cotidiana, esto con la finalidad de generar el interés y motivación de los alumnos, para qué aprovechen e incursionen en el campo del mundo tecnológico y así poder reforzar los procesos aprendizajes.

Es importante que el docente busque nuevas alternativas de enseñanza qué sirvan de complemento a las formas tradicionales o habituales y así reforzar la corriente pedagógica del constructivismo la cual se rige en la educación ecuatoriana, para lo cual recomendamos el uso de guías didácticas con enfoques constructivistas, material concreto, recursos digitales, etc., y así generar un proceso de enseñanza-aprendizaje significativo.

LIMITACIONES

Durante el desarrollo de la investigación se constató distintas limitaciones que afectaron al estudio ya sea de manera directa e indirecta, dentro de estas limitaciones se mencionan la pandemia, el tiempo, participación de la población de estudio, los recursos y también las limitaciones del uso de Geogebra aplicado a problemas de Optimización de funciones.

La presencia de una pandemia global fue un factor que cambió de cierta manera la metodología inicial planteada, ya que la presencia de una cuarentena forzó a un aislamiento de las personas, por lo que resultó vital adaptarse a las nuevas formas de recibir clases, lo que generó en el estudio proponer videos que estén al alcance de todos, sin embargo, las limitaciones tecnológicas de los alumnos fueron una evidencia clara durante la pandemia.

Las limitaciones tecnológicas fue una causa negativa debido a que se dificultó la comunicación con la población de estudio planteada, es así que la población escogida se redujo en cantidad, además existió una poca participación activa de la población al momento de ejecutar la encuesta, sin embargo se tomó a los 19 participantes como una representación general de población porque eran alumnos que ya habían cursado la asignatura de Cálculo Diferencial razón por la que se tomó como válida su participación.

En esta parte lo qué más se nos dificulto fue encontrar videos en los cuáles expliquen paso a paso como resolver este tipo de problemas sin recurrir al concepto de la derivada, para lo cual tuvimos qué plantear las ecuaciones del problema para representar mediante un solo deslizador la variación de algunos parámetros propios del problema.

Capítulo 4 PROPUESTA

4.1 Descripción de la propuesta

En el capítulo 3 se procede a explicar la propuesta del trabajo de titulación, el cual consiste en la elaboración de una guía didáctica, la misma que se titula como "Guía didáctica para el uso de Geogebra aplicado a problemas de optimización en la asignatura de cálculo diferencial", con la finalidad de ser un apoyo para todos los docentes de la Universidad de Cuenca de la carrera de matemática y física que imparten las clases de cálculo diferencial en el tema de optimización de funciones con la incorporación de Geogebra.

El enfoque de esta guía posee un modelo constructivista, ya que este enfoque pedagógico nos permite concebir el aprendizaje significativo a largo plazo mediante la construcción de conocimientos, esta corriente nos va a permitir proponer 3 momentos en las clases de anticipación, construcción y consolidación. Cabe indicar que para el desarrollo de estos momentos se contará con recursos tecnológicos, actividades de consolidación, conclusiones, actividades tanto grupales e individuales, esto para generar interés de aprender por parte del alumno.

La guía se conforma de 9 clases las cuales siguen un orden encadenado de conocimientos, es decir qué es indispensable aprender un tema como requisito para poder pasar al siguiente tema. Todas estas clases tendrán el acompañamiento de Geogebra como recurso tecnológico; es así que las primeras clases son la base fundamental para la comprensión del tema de optimización. Es así que se comienza con el tema de las funciones y gráficos estos van a ser las bases para los temas que le prosiguen como en la clase 4 donde se encuentra el tema de la derivada y finalmente este nos permitirá tener una compresión de la optimización (aplicación de extremos absolutos)

4.2 Estructura de las clases

Tabla 1. Estructura de guía didáctica

Clase	Anticipación	Construcción	Consolidación
Funciones y sus Gráficas	-Video de incorporación acerca de una función y sus características	- Definición de función - Características de funciones - Gráficas de funciones - Presentación de simulaciones hechas en Geogebra acerca de funciones y gráficas	Resolución de ejercicios aplicados a situaciones reales mediante Geogebra

Funciones como modelos matemáticos	-Lluvia de ideas acerca de lo que es un modelo matemático	- Definición de concepto de modelo matemático - Definición de variables dependientes e independientes - Identificación de variables dependientes e independientes - Ejercicios modelos aplicando Geogebra	- Resolución de problemas sobre modelos matemáticos con la ayuda de Geogebra
Definición de límite de una función y sus teoremas	-Presentación de imágenes y ejemplos donde se visualice el concepto de límites en la vida real	- Conceptos de límite - Representación geométrica de límites - Teoremas de límites - ejercicios modelos qué incluyen límites	- Preguntas y ejercicios de razonamiento a los alumnos

Recta Tangente y Derivada	-Presentación de simulaciones de la recta tangente y derivada con Geogebra	- Definición de una recta tangente de la gráfica de una función. - Definición del concepto de derivada de una función - Interpretación geométrica de la recta tangente y derivada	- Crucigrama relacionado con los temas y conceptos dados en la construcción.
Teoremas sobre diferenciación de funciones y derivadas de orden superior	-Video de introducción acerca de las reglas básicas de derivación -Presentación de técnicas para derivar funciones de diferente orden	- Fórmulas de los distintos casos de derivación. - Ejercicios modelos de diferentes casos de derivación.	- Evaluación individual de opción múltiple sobre los teoremas de diferenciación de funciones.
Valores máximos y mínimos de funciones	-Presentación de imágenes y resolución de actividades propuestas	- Definición de concepto sobre máximo y mínimo. - Interpretación geométrica máximos y mínimos - Actividades lúdicas sobre máximos absolutos y relativos. - Actividad lúdica sobre mínimos absolutos y relativos	- Evaluación de opción múltiple - Ejercicios individuales para realizar en casa

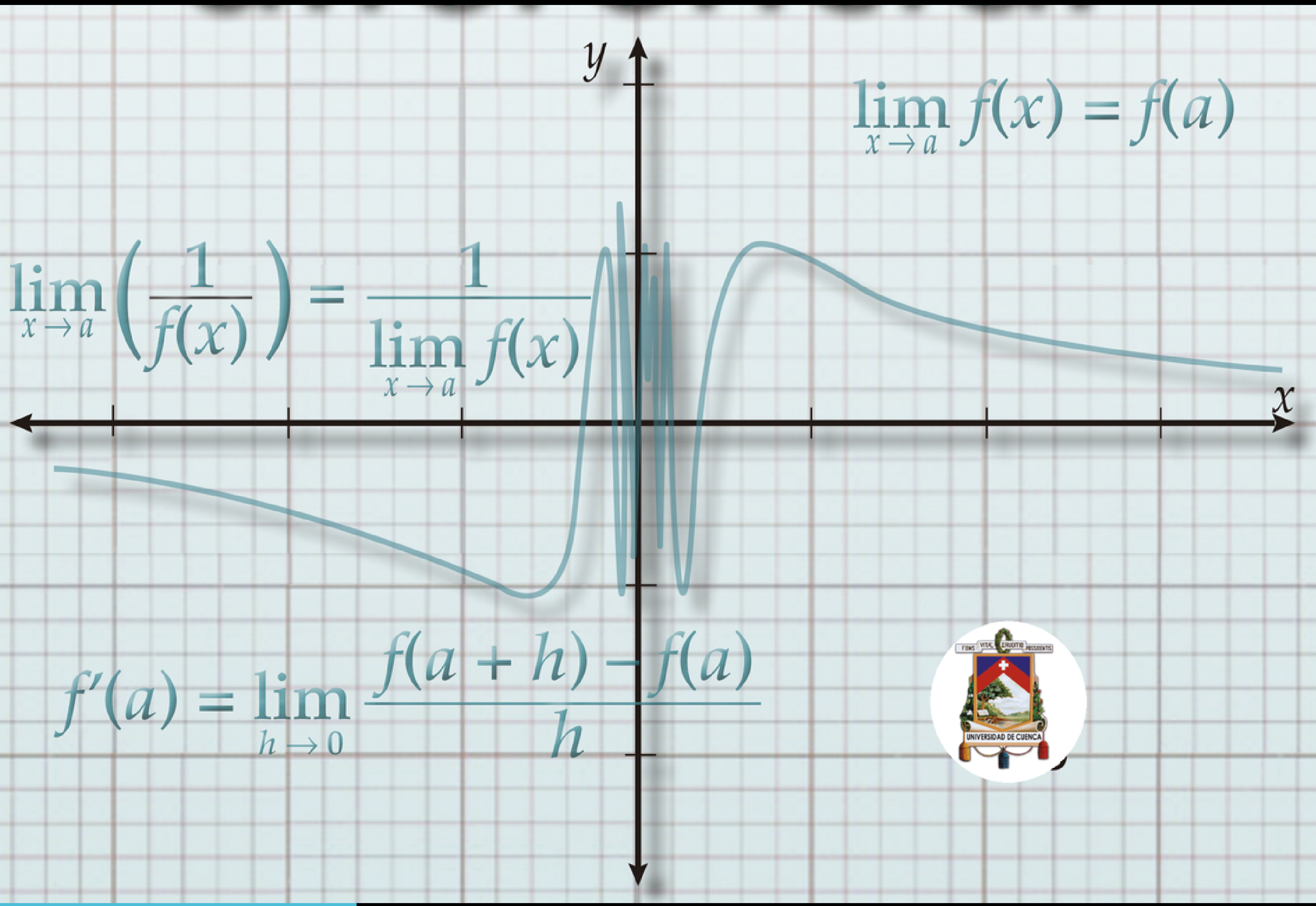
		.	
Funciones crecientes y decrecientes, criterio de la primera derivada	- Lluvia de ideas sobre función creciente y decreciente	- Definición de función creciente y decreciente - Interpretación analítica del criterio de la primera derivada - Interpretación geométrica de la primera derivada - Ejercicios modelo mediante el uso de Geogebra	- Evaluación de opción múltiple enviada a la casa a través de un link - Ejercicios grupales a realizar en clases

Concavidad, puntos de inflexión y criterio de la segunda derivada	-Charla participativa alumno-docente sobre concavidad y punto de inflexión - Preguntas planteadas para alumnos -Presentación de imágenes	- Definición de concavidad: convexo y cóncavo - Definición de punto de inflexión - Interpretación analítica sobre el criterio de la segunda derivada - Interpretación geométrica sobre el criterio de la segunda derivada - Ejercicios modelos comprobando con Geogebra	- Actividades en casa resolución de ejercicios aplicando al contexto
Aplicaciones sobre extremos absolutos (optimización)	-Retroalimentación de temas anteriores -Desarrollo de crucigrama de temas anteriores -Presentación del objetivo de la propuesta mediante videos relacionados a optimización	- Definición de extremos absolutos - Desarrollo analítico de problemas modelo - Resolución de problemas modelo aplicando Geogebra	-Realizar problemas propuestos con Geogebra.

JULIO DE 2022

OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

GUÍA DIDÁCTICA PARA EL USO DE GEOGEBRA APLICADO A PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN EN LA ASIGNATURA DE CALCULO DIFERENCIAL



Escrita por:

Wilmer Jadan y Marco Mayllazhungo

Universidad de Cuenca

Tutor:

Dr. Marco Jacome

Cuenca-Ecuador

Introducción

La presente guía está dirigida al docente como modo de apoyo para impartir las clases relacionadas con las aplicaciones de la derivada a través del software matemático Geogebra, para lo cual se ha planificado desarrollar nueve clases como: Funciones y sus características, definición de límites, recta tangente y derivada, derivadas de órdenes superiores, valores máximos y mínimos, monotonía de funciones, concavidades de funciones y finalmente se terminará con la Optimización de funciones. Cabe indicar que cada clase fue diseñada y escogida debido a que todas se relacionan de manera directa con el tema fundamental de la guia que es la Optimización, además cada una de ellas se les a incorporado el software Geogebra para construir y explicar los temas de una manera más didáctica, para que el docente tenga la posibilidad de mejorar la visualización de los conceptos.

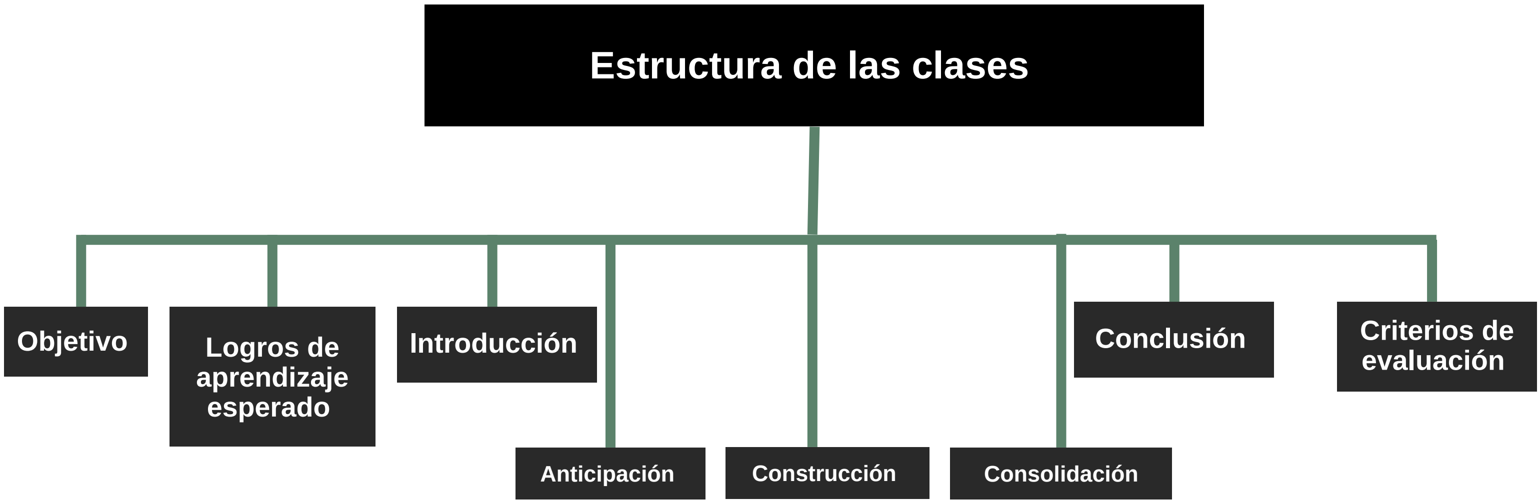
Dentro de la guía se cuenta con todas las simulaciones, videos tutoriales y también las aplicaciones que se puede hacer con Geogebra, para así poder lograr un aprendizaje significativo en el alumno y a la vez que el docente cumpla como un guía de la enseñanza a construir. Por lo que se recomienda tanto para el docente como para los estudiantes instalar Geogebra ya que es un software gratuito, para una correcta aplicación de la guía se debe contar con aulas de cómputo o tener una computadora de forma individual.

Esta guía tiene un enfoque constructivista para fomentar un proceso de enseñanza-aprendizaje de calidad e innovador, para lo cual el docente debe dominar los conceptos teóricos y llevarlos a la práctica mediante el uso de Geogebra, es por eso que el docente contará también con una base de datos donde se encuentren las simulaciones que se usan en las clases.

Índice

Estructura de la clase

La estructura de cada clase está basada en cuatro momentos principales de la corriente pedagógica del constructivismo las cuáles son: anticipación, construcción, consolidación y conclusión, la razón por la cuál se ha escogido esta estructura se debe a qué cada momento tiene un sentido en particular distinguiéndose entre un momento y otro para poder enfatizar la intencionalidad pedagógica, cabe recalcar qué siempre deben formar un conjunto para qué la clase pueda ser continua dado qué el conocimiento previo se relaciona de manera directa con el conocimiento nuevo.



Anticipación

En este momento de las clases de manera general se presentan recursos como videos, imágenes, gráficos y crucigramas para realizar preguntas o también generar una lluvia de ideas respecto de cada tema a tratar según corresponda la clase con la finalidad de activar los conocimientos previos, corregir conceptos erróneos, y dar a conocer la importancia del tema para despertar el interés de los alumnos.

Construcción

Para este momento de la clase se plantean a los alumnos recursos como analizar situaciones didácticas, simulaciones en Geogebra, imágenes de cada tema en los qué se pueden visualizar ejemplos de conceptos en la vida cotidiana y para complementar se realizan preguntas en base a los recursos presentados, permitiendo evidenciar lo qué se está aprendiendo.

Consolidación

En este momento de las clases se ha propuesto ejercicios como problemas los cuáles han sido analizados de forma analítica mediante el software Geogebra con el propósito de qué los alumnos encuentren sentido a lo aprendido a través de la reflexión y relacionando con aplicaciones de la vida real.

Conclusion

En esta última parte esencial de las clases se formulan preguntas qué recogen los conocimientos en base a las tres etapas anteriores ya descritas correspondientes a cada tema, con la finalidad de corroborar el aprendizaje obtenido por parte de los alumnos.

A continuación se menciona la estructuras que va a constar en el desarrollo de las clases, el cual consta de lo siguiente:

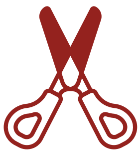
1 Objetivo
2 Logros de aprendizaje esperados
3 Introducción
4 Anticipación
5 Construcción
6 Consolidación
7 Conclusión
8 Criterios de evaluación

Estas clases se abarcaran con diferentes estrategias metodológicas para abordar dichos temas, también consta de los tiempos recomendados en cada clase, sin embargo este tiempo puede ser variado dependiendo del docente. Para mayor participación activa del alumno, se contará con una guía para el alumno.

INDICACIONES

Este símbolo va a indicar las simulaciones online realizadas en Geogebra, esta va estar acompañando de los enlaces que permitan visualizar en el mismo momento de la clase, sirve de ayudada tanto para docente como para alumno

Si se llega a ver este tipo de símbolo nos va a indicar videos de Youtube, donde se puede llegar a explicar ciertos conceptos o también puede tratarse de videos explicando como hacer simulaciones en Geogebra



Si se llega a ver este tipo de símbolo indica que la hoja se puede recortar ya sea para que los alumnos puedan resolver los problemas planteados en las distintas clases las cuales generalmente se encuentra en la sección consolidación

Este símbolo indica que se puede aprender más, esto va a estar acompañado de link de Youtube donde se puede aprender más acerca de como hacer las distintas simulaciones para interpretación de problemas planteados, resulta de suma importancia que tantos alumnos y docente puedan revisar estos videos para tener una visión mas amplia de las situaciones de ejercicios de aplicación de calculo diferencial

Si se encuentra este tipo de símbolo nos va a indicar recuerda que, es decir que el alumno debe recordar conocimientos previos de clases anteriores o que el alumno ya tengo una idea de estos temas

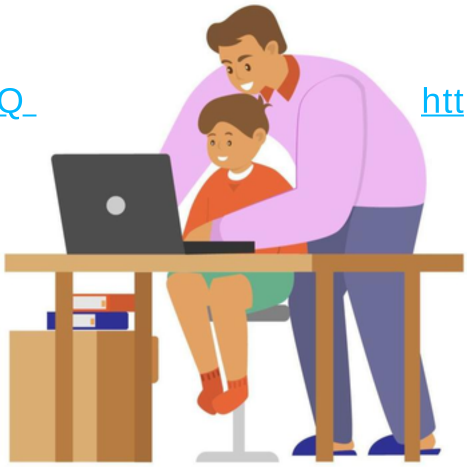
Este símbolo indica "sabias que", hace referencia a datos y conocimientos que se da a conocer al alumno con el fin de tener un mayor entendimiento de los temas de clases

GeoGebra

Durante el desarrollo de las distintas clases se cuenta con el uso de Geogebra ya sea en actividades planteadas, como también en simulaciones para problemas, o para ver detalladamente ciertas graficas y así poder tener un análisis mas amplio de los temas a estudiar. Razón por la que resulta importante tener un conocimientos del uso de este software, es así que se enlista los siguientes videos como tutoriales básico del uso de software Geogebra

1 https://youtu.be/wMg7FrCeL6Q_

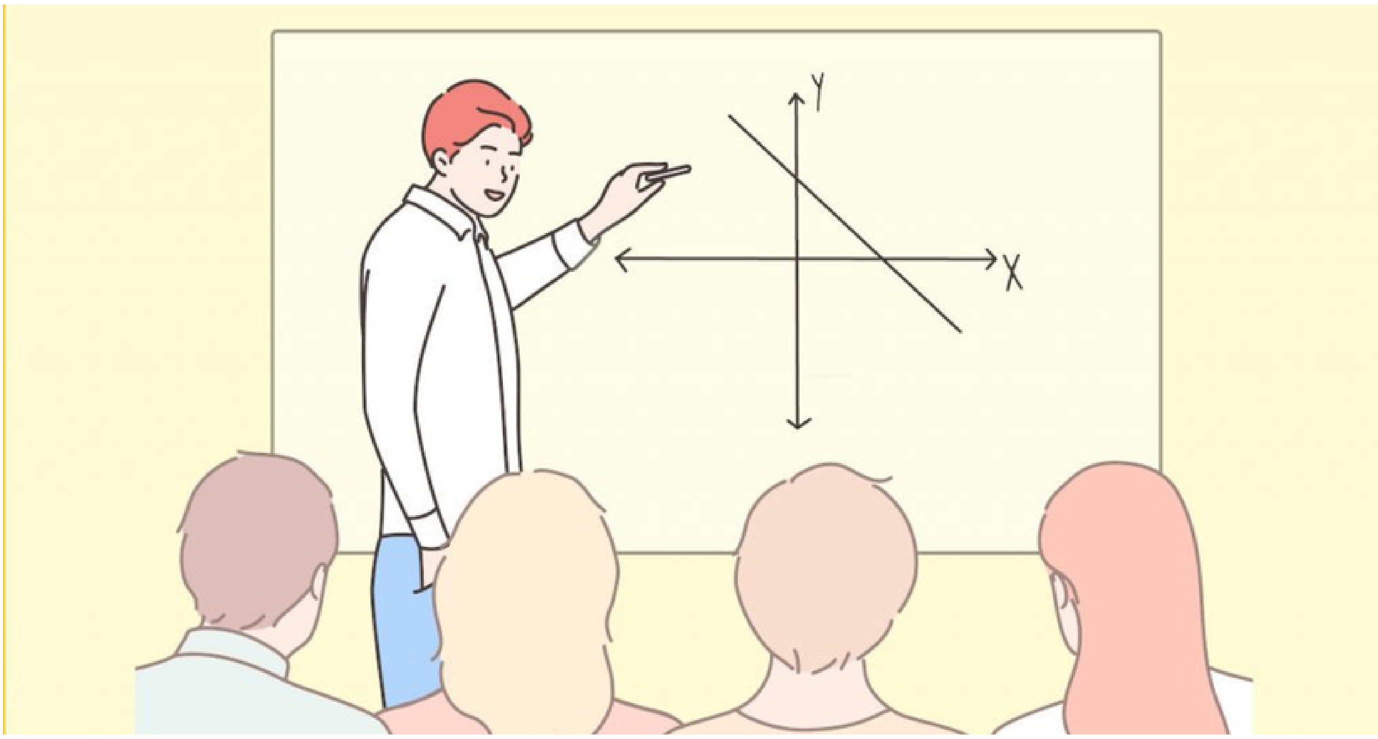
2 https://youtu.be/99UOlMpXh7o



3 https://youtu.be/cNZX6iPifwc

4 https://youtu.be/Mm9XKeMedjI

CLASE NÚMERO 1 FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS



OBJETIVO

Conocer e identificar los conceptos con respecto a las funciones y la construcción de sus respectiva propiedades gráficas a través de Geogebra

Logros de aprendizaje esperado

- Conoce claramente el concepto de relación entre elementos de dos conjuntos
- Identifica, reconoce y grafica las funciones algebraicas
- Aplica los conocimientos teórico respecto de la graficación en una función en Geogebra

INTRODUCCIÓN

En esta clase se trabajará el concepto de función lineal, mediante su representación gráfica y algebraica. Los estudiantes trabajarán con la ecuación de la recta y su representación gráfica, mediante diferentes actividades y ejercicios. Se propone el uso del programa GeoGebra para graficar las funciones propuestas en cada actividad

ANTICIPACIÓN

(TIEMPO RECOMENDADO 15 MINUTOS)

Se presentará a los estudiantes el siguiente vídeo titulado (Qué es función:/ Concepto de función)

https://youtu.be/s_LClzfpdg0

A continuación se procederá a realizar las siguientes las preguntas con respecto del vídeo

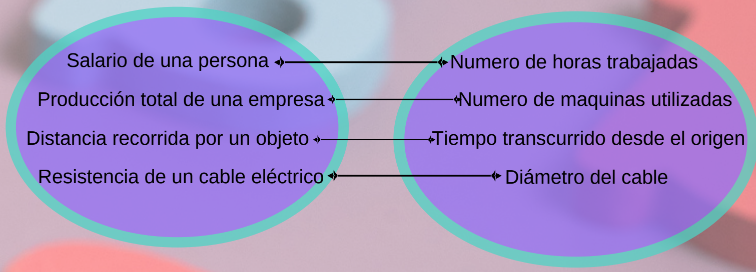
1) Acerca del vídeo elabore una definición acerca de lo que es una relación

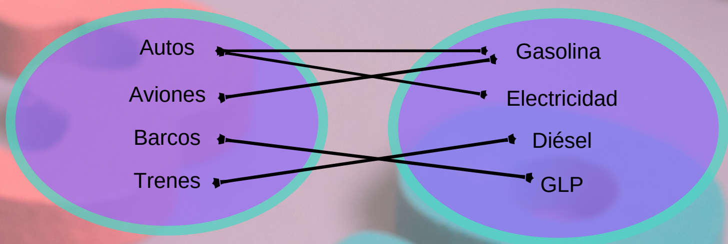
2) Acerca del vídeo elabore una definición acerca de lo que es una función

3) Que diferencia existe entre una función y relación

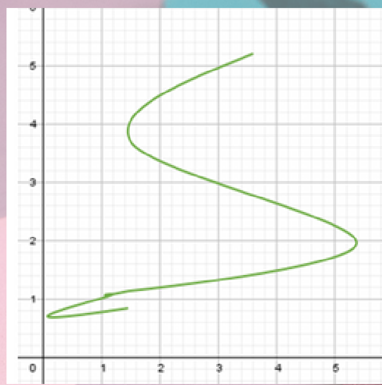
A continuación el alumno procederá a realizar la siguiente actividad

Unir con una línea según corresponda

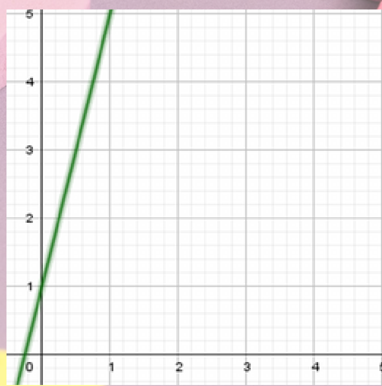




FUNCIÓN



RELACION



El concepto más importante de todas las matemáticas es, sin dudarlo, el de función: en casi todas las ramas de la matemática moderna, la investigación se centra en el estudio de funciones. No ha de sorprender, por lo tanto, que el concepto de función sea de gran generalidad.

Como es usual en matemática, muchas ideas surgen primero como ideas intuitivas, y luego se van cristalizando al ir refinando el concepto. El concepto de función no escapa esta realidad. El concepto de función, como se entiende hoy en día, se consolida en el año 1837, con el matemático Gustav Dirichlet. Sin embargo, algunos autores atribuyen a Galileo la introducción de manera formal del concepto de función en las matemáticas.

CONSTRUCCIÓN

TIEMPO RECOMENDADO 45 MINUTOS

RECUERDE QUE:

Una función es un conjunto de pares ordenados de números(X,Y) para lo cual se debe cumplir la condición de que a un elemento del conjunto de partida (X) le a de corresponder un único elemento en el conjunto de llegada (Y)

Dominio de una función

Es el conjunto qué está formado por los elementos, para los cuáles la función está definida (variable independiente)

Recorrido de una función

Es el conjunto de todos los valores que toma la función (variable dependiente)

OBSERVAR DETENIDAMENTE LOS SIGUIENTES ENLACES REALIZADOS EN GEOGEBRA RESPECTO A LOS CONCEPTOS ANTES MENCIONADOS

https://www.geogebra.org/m/wrh7ych6
DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

https://www.geogebra.org/m/mnsfbfpw
RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN

ACTIVIDADES

1) ANALICE LA SIGUIENTE SITUACIÓN DIDÁCTICA:

En una empresa de venta de autos un vendedor tiene un sueldo fijo de 400$ y una comisión de 200$ por cada coche qué logre vender durante un mes. Calcule cuántos coches tendrá qué vender para obtener a fin de mes un sueldo de 1400$.

Número de Carros	Sueldo ($)
0	400$
1	600$
2	800$
3	1000$
	???

RESPONDA LAS SIGUIENTES PREGUNTAS.

a) ¿Qué ocurre con la cantidad de sueldo a recibir a medida que la cantidad de carros aumenta? ____________________ Justifique su respuesta.

b) A mayor cantidad de vehículos vendidos ___________ cantidad de sueldo a recibir. Eso quiere decir que las variables dependientes e independientes van a seguir aumentando¿ Si _____ No ____ _ ?¿Por qué?

c) ¿Las cantidades de vehículos y sueldo son valores constantes o variables? Si _____ No _____ ¿Por qué?

d) Según la situación didáctica,grafique el comportamiento de las variables en su cuaderno de trabajo y compruebe con Geogebra. Posteriormente responda las siguientes preguntas

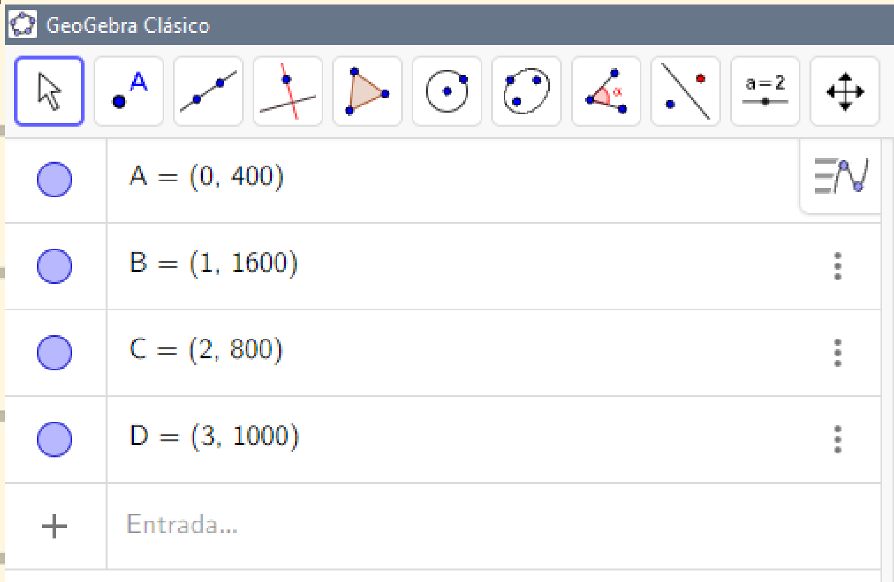
¿Qué forma tiene la gráfica? _____________________
¿Es una gráfica creciente o decreciente? _____________
¿Cada par ordenado de la tabla es parte de la gráfica? Si ___ No ___

2) PASOS PARA GRAFICAR PUNTOS EN GEOGEBRA

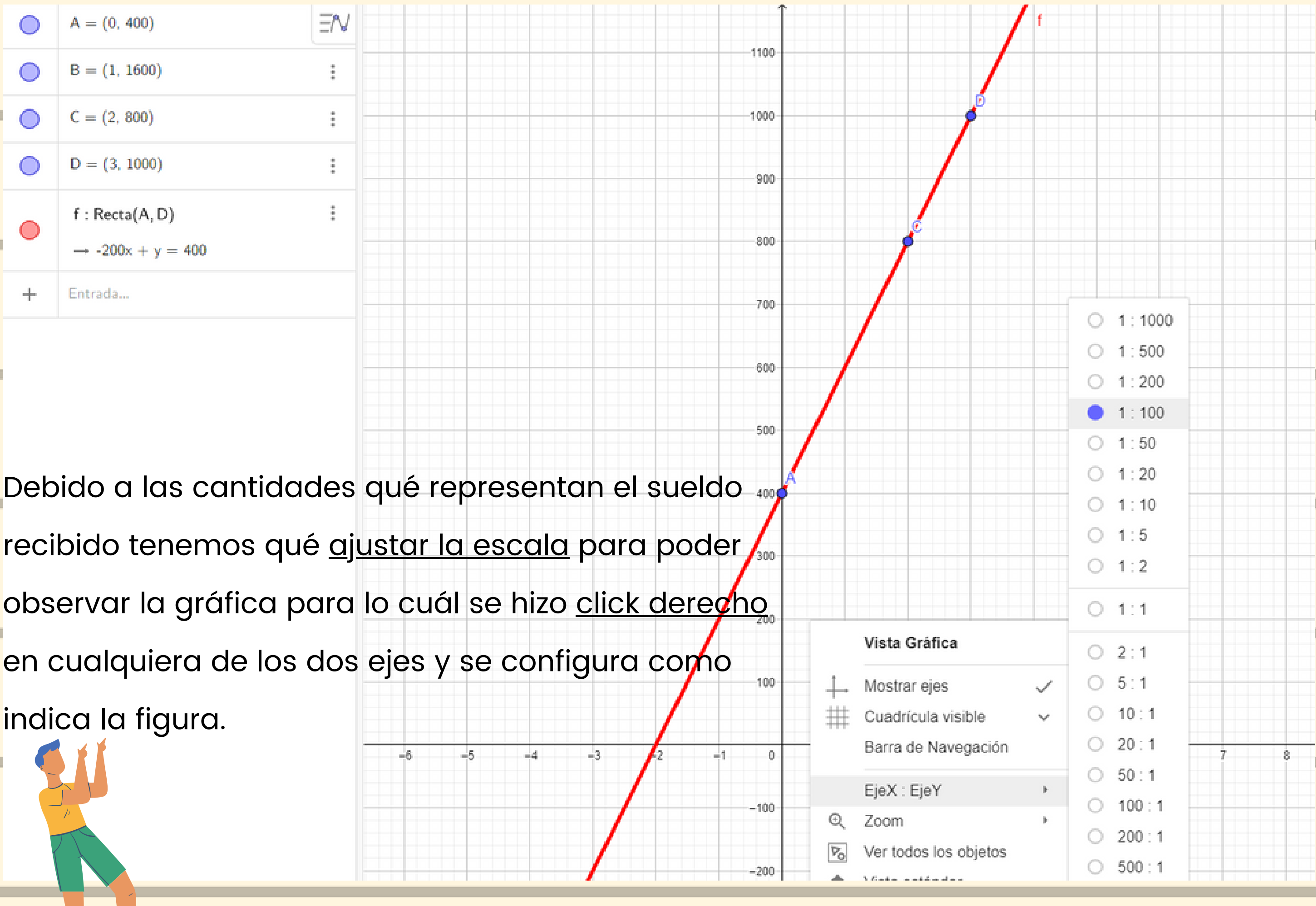
a) En el comando (entrada) insertamos los pares ordenados de la tabla anterior, de la siguiente manera:

- Punto A (0,400) + enter
- Punto B (1,600) + enter

De la misma manera con los demás puntos.



b) Cuando ya tenga ingresado los pares ordenados, trace una línea por todos los puntos con la ayuda de la opción (recta), interpreta y analiza el gráfico formado.



Debido a las cantidades qué representan el sueldo recibido tenemos qué ajustar la escala para poder observar la gráfica para lo cuál se hizo click derecho en cualquiera de los dos ejes y se configura como indica la figura.

c) Determine la función de la situación didáctica apoyada en la formula de Ecuación De la recta que pasa por dos puntos.

$$y - y_1 = \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)(x - x_1)$$

3. VAMOS A PROPONER EJERCICIOS QUÉ SE PRESENTAN COMÚNMENTE EN LA VIDA DIARIA, LOS CUÁLES EL DOCENTE PUEDE USARLOS PARA EXPLICAR CÓMO SE HALLA UNA FUNCIÓN EN BASE A LOS DATOS DEL EJERCICIO.

-Una manguera vierte agua en un recipiente dejando caer 30 litros por minuto.¿ Cuánto tiempo nos tomará llenar una piscina de $60m^3$?

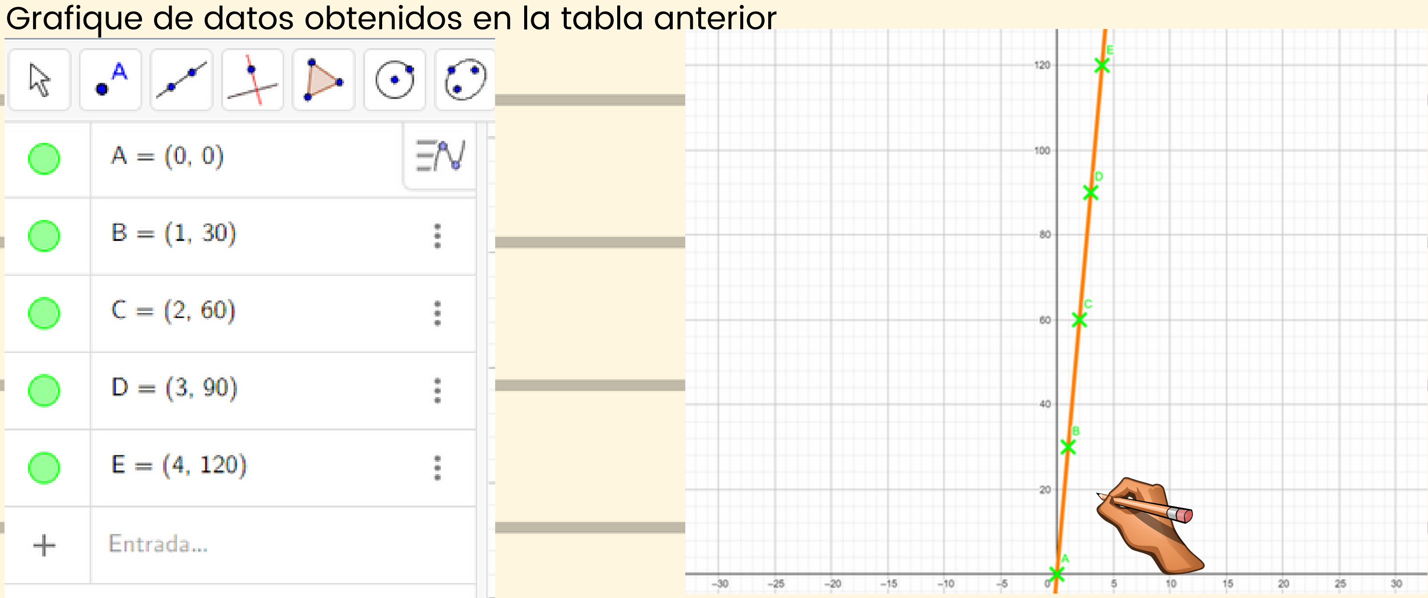
a) Determinar la función de la capacidad de llenado con respecto al tiempo

f(t)= 30t

b) Realizar un tabla de valores desde que inicia el llenado

t (min)	0	1	2	3	4
f(t) (litros)	0	30	60	90	120

c) Grafique de datos obtenidos en la tabla anterior



Link de la gráfica https://www.geogebra.org/m/mxpsbuqm

d) Convertimos los m^3 a litros

$60m^3 \times (1 \text{ litro} / 0.001m^3) = 60000$ litros

e) Reemplazamos la cantidad de llenado buscada en la función planteada anteriormente

$f(t) = 30t$

$60000 = 30t$

$t = 60000/30$

$t = 2000$ min

4. EL DOCENTE PUEDE MOSTRAR LAS SIGUIENTES IMÁGENES COMO MUESTRA DE LA PRESENCIA DE LAS FUNCIONES EN LA COTIDIANIDAD

CONSOLIDACIÓN

(Tiempo recomendado 30 minutos)

ACTIVIDADES

1) LEA LA SIGUIENTE SITUACIÓN PROBLEMA, ANALICE Y REALICE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS.

En Cuenca, la empresa ETAPA para instalar sus servicios de Internet en las zonas rurales cobra $10 por la visita domiciliaria, más $5 por cada hora de trabajo.

a) Relacione las variables dependiente e independiente con las magnitudes presentes en el problema.

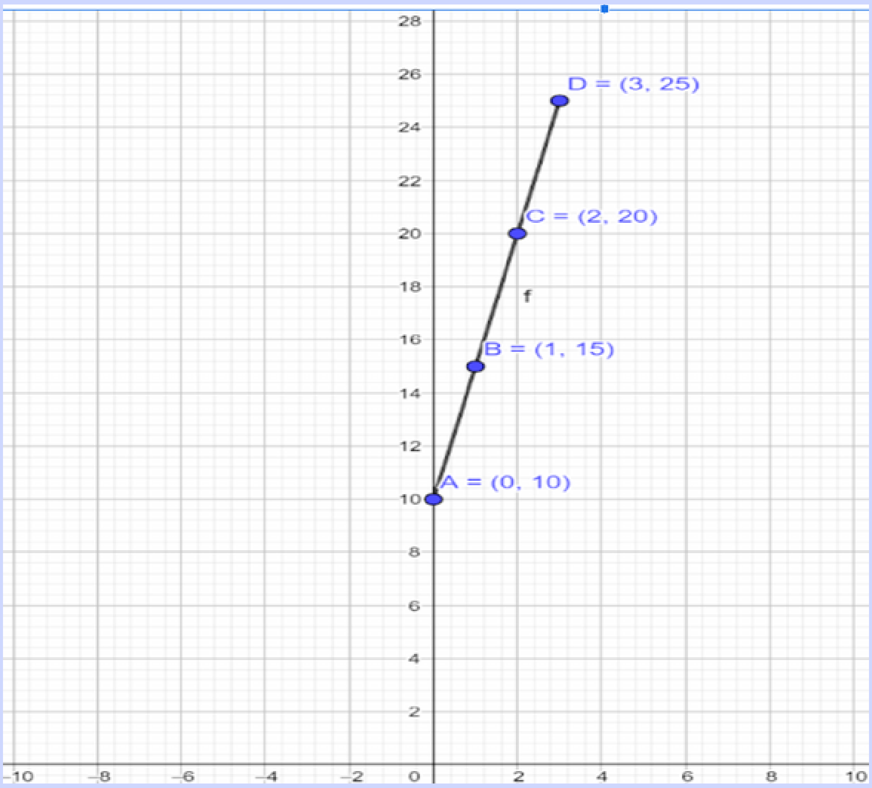
Variable independiente = Horas de trabajo

Variable dependiente = Dinero a pagar

b) Elabore una tabla que represente la dependencia de estas variables.

Horas Trabajo	Total $
0	10
1	15
2	20
3	25

c) Represente los pares ordenados en GeoGebra e inserte la recta que pase por dos puntos



LINK DE GEOGEBRA RESUELTO

https://www.geogebra.org/m/qun6gwfk

d) Si el técnico permanece 5 horas en el domicilio, ¿cuánto se deberá cancelar?

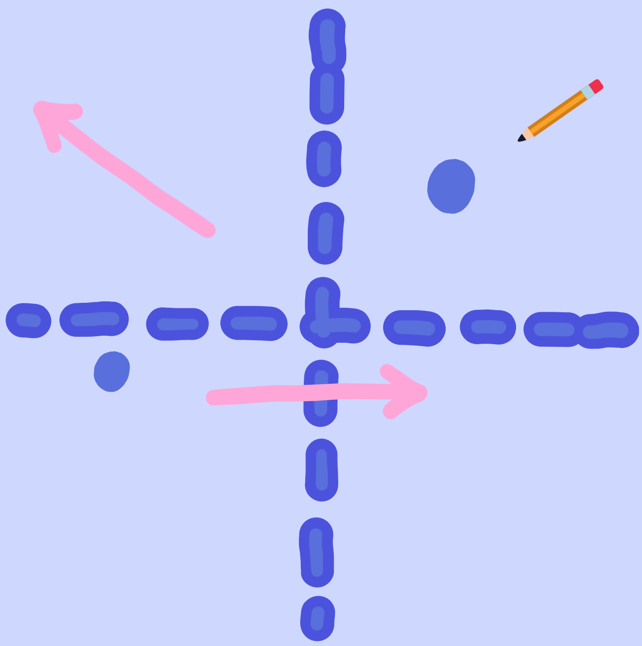
f(t)=10+5x

f(t)= 10+5(5)= 10+25= 35

R= 35$

2) EN LA SIGUIENTE MONTAÑA RUSA DE LA IMAGEN SE SABE QUE LA ALTURA MÁXIMA ES DE 4M, ADEMÁS SE CONOCE QUE CUANDO RECORRE 1M EN LA HORIZONTAL SU ALTURA ES DE 3M, Y TAMBIÉN QUE CUANDO RECORRE 2M EN LA HORIZONTAL LA ALTURA ES DE 0. SI SE SABE QUE LA FUNCIÓN QUÉ REPRESENTA LA MONTAÑA RUSA ES $F(X) = -X^2+4$

a) En la imagen dibuje el plano cartesiano e indique los puntos que menciona el ejercicio



b) Complete el siguiente cuadro con los datos obtenidos en el literal anterior

x	y
0	4
1	3
2	0

c) ¿Qué valor tendría la altura del suelo hacia al subterráneo si se recorriera 3 y 6 metros en horizontal?

$f(x)=-x^2+4$ = $f(3)=-9+4$ =- 5

La altura hacia el subterráneo es de 5 metros desde el nivel de referencia

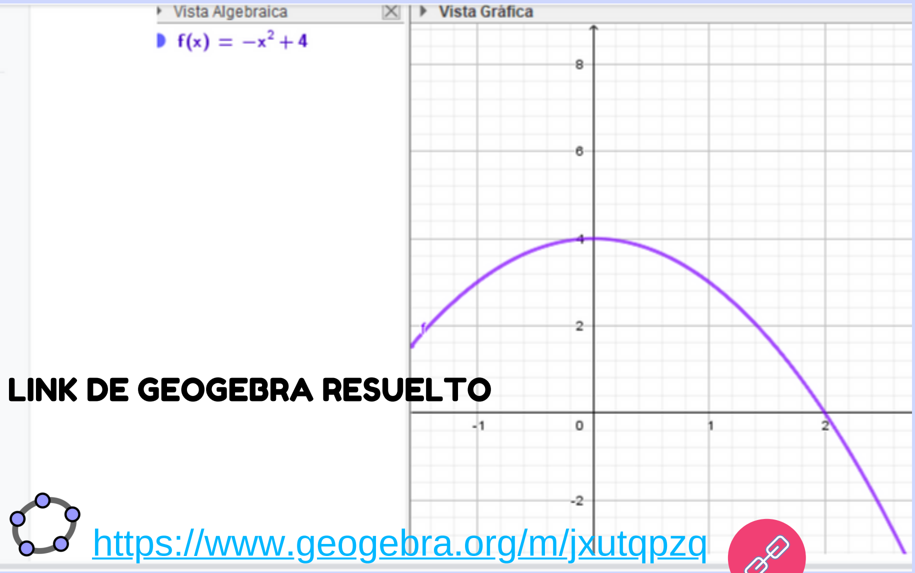
---

$f(x)=-x^2+4$ = $f(3)=-36+4$ = -32

La altura hacia el subterráneo es de 32 metros desde el nivel de referencia

---

d) Grafique la función en Geogebra como comprobación y muéstrelo al docente.



LINK DE GEOGEBRA RESUELTO

https://www.geogebra.org/m/jxutqpzq

CONCLUSIÓN

1. ¿A qué llamamos función lineal?

---

2. ¿Qué es una variable dependiente?

---

3. ¿Qué es una variable independiente?

RECORTABLE

ACTIVIDADES

1) LEA LA SIGUIENTE SITUACIÓN PROBLEMA, ANALICE Y REALICE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS.

En Cuenca, la empresa ETAPA para instalar sus servicios de Internet en las zonas rurales cobra $10 por la visita domiciliaria, más $5 por cada hora de trabajo.

a) Relacione las variables dependiente e independiente con las magnitudes presentes en el problema.

b) Elabore una tabla que represente la dependencia de estas variables.

x	y

c) Represente los pares ordenados en GeoGebra e inserte la recta que pase por dos puntos

d) Si el técnico permanece 2 horas en el domicilio, ¿cuánto se deberá cancelar?

2) EN LA SIGUIENTE MONTAÑA RUSA DE LA IMAGEN SE SABE QUE LA ALTURA MÁXIMA ES DE 4M, ADEMÁS SE CONOCE QUE CUANDO RECORRE 1M EN LA HORIZONTAL SU ALTURA ES DE 3M, Y TAMBIÉN QUE CUANDO RECORRE 2M EN LA HORIZONTAL LA ALTURA ES DE 0. SI SE SABE QUE LA FUNCIÓN QUÉ REPRESENTA LA MONTAÑA RUSA ES $F(X) = -X^2+4$

a) En la imagen dibuje el plano cartesiano e indique los puntos que menciona el ejercicio

b) Complete el siguiente cuadro con los datos obtenidos en el literal anterior

x	y

c) ¿Qué valor tendría la altura del suelo hacia al subterráneo si se recorriera 3 y 6 metros en horizontal?

d) Grafique la función en Geogebra como comprobación y muéstrelo al docente.

CONCLUSIÓN

1. ¿A qué llamamos función lineal?

2. ¿Qué es una variable dependiente?

3. ¿Qué es una variable independiente?

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

	Muy bien	Bien	Regular	Insuficiente	Observaciones
Presta atención a los vídeos, simulaciones presentados durante la clase					
Participa activamente con el docente y compañeros para poder responder las preguntas planteadas					
Resuelve los ejercicios y problemas propuestos de forma ordenada y aplicando los conceptos aprendidos					
Usa Geogebra para comprobar la veracidad de las respuestas de ejercicios y problemas					
Presentas las actividades planteadas durante los tiempos establecidos					

Clase número 2 Funciones como modelos matemáticos

OBJETIVO

Describir, analizar y solucionar modelos matemáticos que representan una situación u objeto real qué incluya una tasa de cambio constante mediante una expresión algebraica o ya sea una función matemática con la ayuda del software Geogebra.

Logros de aprendizaje esperado

- Interpreta el problema cuidadosamente hasta entenderlo por completo.
- Determina una ecuación qué represente la situación requerida por el problema.
- Modela y resuelve situaciones reales mediante expresiones algebraicas con Geogebra

INTRODUCCIÓN

El aplicar las matemáticas a los problemas de la vida real comprende tres etapas. Primero se traduce el problema a términos matemáticos, entonces decimos que tenemos un modelo matemático. Después se obtiene la solución del problema matemático. Por último, se interpreta esta respuesta matemática en términos del problema original. De hecho, nuestra atención se enfocará a la determinación de la función o las funciones que involucran los problemas verbales.

ANTICIPACIÓN

(TIEMPO RECOMENDADO 15 MINUTOS)

Como apertura el docente procederá hacer una lluvia de ideas conjuntamente con los alumnos acerca del tema "Que entiende por modelos matemáticos"

CONCLUSIÓN DE LA LLUVIA DE IDEAS

CONSTRUCCIÓN
(Tiempo recomendado 45 minutos)

La utilización de modelos matemáticos tienen una gran presencia en la cotidianidad de las personas, ya que nos permite analizar distintas situaciones de la vida real sin la necesidad de experimentar la misma

- En la rama de la física nos sirve para poder relacionar la energía potencial con respecto a su altura o también para el caso de enlazar la velocidad de un objeto con su aceleración.

- Se puede usar para obtener predicciones del crecimientos poblacional de una ciudad

- En la economía nos puede ayudar a encontrar puntos de equilibrio en alguna empresa o emprendimiento

A continuación se debe analizar el siguiente problema conjuntamente con el docente

1. **El profesor de matemática les pide a sus alumnos que tomen una hoja y que le doblen en la mitad y le digan cuantas partes tienen, al hacerlo determinan que han obtenido dos partes, les pide que hagan lo mismo una vez más, lo hacen y obtienen 4 partes, con esa indicación les pide que determinen cuántas partes obtendrán después de doblar ocho veces la hoja.**

Lo cual da como resultado estos primeros datos que se muestran a continuación en la siguiente tabla. El alumno debe completar la tabla llenando los espacios vacíos

Número de Doblados	Partes iguales obtenidas
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	
6	

2. En base a la pregunta 1, el alumno responderá las siguientes preguntas

a) ¿Identifique cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente ?

____

____

____

b) ¿Qué ocurre con la variable Y a medida que la cantidad de X aumenta? ____________________ Eso significa que:

____

____

c) A mayor cantidad de dobleces __________ cantidad de partes iguales. ¿Siempre se obtendrán tablas de este tipo? Si ____ No ____ ¿Por qué?

____
____
____
____
_____

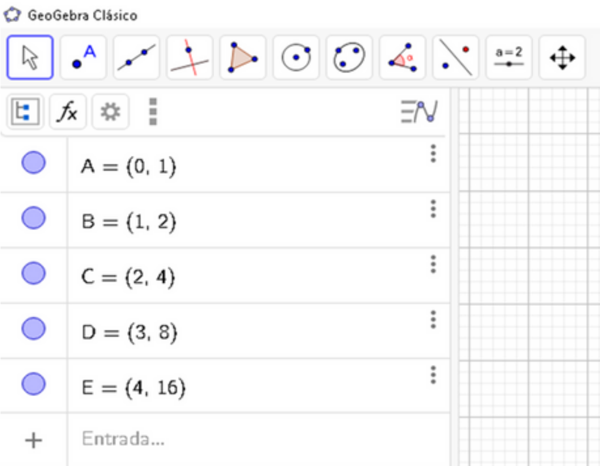
d) ¿Las cantidades de dobleces y partes iguales son valores constantes o variables? Si ____ No ____ ¿Por qué?

____
____
____

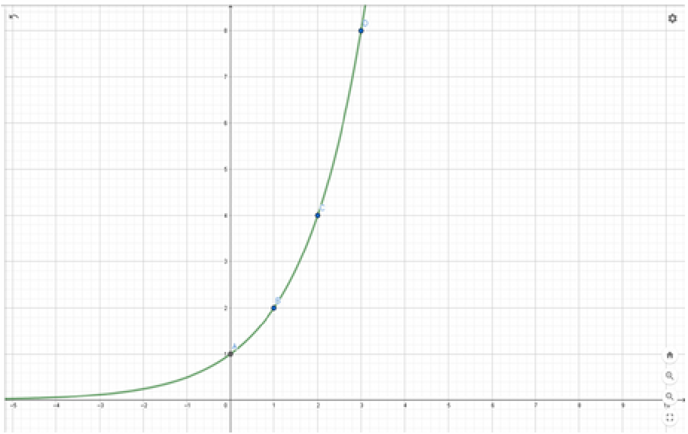
3. A partir de los datos anteriores realice un gráfico. Para ello vamos a ayudarnos del software GeoGebra.

a) En el comando (entrada) insertamos los pares ordenados de la tabla anterior, de la siguiente manera.

Punto A. (0,1) + enter
Punto B. (1,2) + enter
De la misma manera con los demás puntos.



b) Cuando ya tenga ingresado los pares ordenados, trace una línea por todos los puntos con la ayuda de una línea poligonal en Geogebra



Conclusión de la actividad. En base a la grafica obtenida en la pregunta 3 en Geogebra, responda las siguientes preguntas

a) Determine la función matemático que represente la tabla de datos y la gráfica como guía

b) ¿Qué forma tiene la gráfica?

____

c) Cuál serían los intervalos del dominio y rango si siempre se va comenzar con 0 dobleces

____
____
____
____
____
____
____
____

ACTIVIDADES

Se procederá a trabajar en parejas la siguiente situación problema

Una imprenta se especializa en elaborar cajas de cartón, se desea realizar cajas abiertas para lo cuál se cuenta con planchas de cartón rectangulares de 30 cm por 50 cm se procederá a cortar cuadrados iguales en las cuatros esquinas y doblar hacia arriba los lados sobrantes.

- Como guía para resolver este ejercicio de la situación planteada el alumno puede revisar la siguiente simulación

Enlace Simulación:
https://www.geogebra.org/m/zy2wakk4

APRENDE+

Enlace del video de como hacer la simulación:
https://youtu.be/fzhdWb8P_cs

Responda las siguientes preguntas:

a) Encuentre el modelo matemático qué defina la variación del volumen de la caja en función de la medida de los lados del cuadrado qué se cortan.

b) Luego de obtener la función matemática indique el intervalo de su respectivo dominio

c) Realice una tabla de datos de cómo varía la respectiva función matemática.

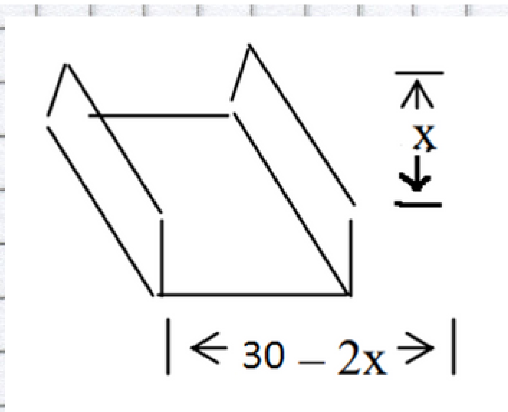
Longitud del corte	Volumen obtenido

CONSOLIDACIÓN (Tiempo recomendado 15 minutos)

ACTIVIDADES EN CASA

1.- De una larga pieza de hoja de lata de 30 cm de ancho se va a hacer un canalón para lluvia, doblando hacia arriba sus orillas para formar sus lados.

a) Coloque en el siguiente gráfico las medidas correspondientes qué se indican en el enunciado del problema.



b) Expresar el área de la sección transversal del canalón por donde va a fluir la lluvia como una función de su altura.

A= (b)(h)

b= (30-2x) ; h= (x)

A= (30-2x)(x)

c) Realice una tabla qué represente dicho modelo matemático

x	A(x)
1	28
2	52
3	72
4	88

d) Con la ayuda de Geogebra realice una simulación del problema para exponer en la siguiente clases

Enlace Simulación:
https://www.geogebra.org/m/wyjvmw6r

APRENDE+

Enlace del video de como hacer la simulación:
https://youtu.be/wc5xdwpUdnw

2. A continuación complete la siguiente tabla con su función o modelo matemático que corresponda

Enunciado	Función (modelo matemático)
El ingreso de una empresa por la producción es de 19$ el envió mas 4$ por cada productos	I(x)=19+4x
Cual es el función de una área del terreno rectangular cuya base es 6 veces su largo	A(x)= $6x^2$
La altura de un árbol es de 3m, define como sería la función si esto a paro a 9 m en la horitzontal	C(x)=3x -9

CONCLUSIÓN

1. ¿A qué llamamos modelos matemáticos?

2. ¿ Explique de manera resumida cuál es el procedimiento para hallar un modelo matemático ?

3. ¿Indique con sus palabras la utilidad o importancia de los modelos matemáticos ?

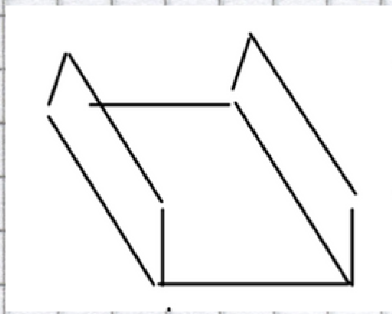
4. ¿ Un modelo matemático puede ser representado mediante una simulación de Geogebra para entender de mejor manera la situación del problema a resolver?

RECORTABLE

ACTIVIDADES EN CASA

1.- De una larga pieza de hoja de lata de 30 cm de ancho se va a hacer un canalón para lluvia, doblando hacia arriba sus orillas para formar sus lados.

a) Coloque en el siguiente gráfico las medidas correspondientes qué se indican en el enunciado del problema.



b) Expresar el área de la sección transversal del canalón por donde va a fluir la lluvia como una función de su altura.

c) Realice una tabla qué represente dicho modelo matemático

x	A(x)

d) Con la ayuda de Geogebra realice una simulación del problema para exponer en la siguiente clases

RECORTABLE

2. A continuación complete la siguiente tabla con su función o modelo matemático que corresponda

Enunciado	Función (modelo matemático)
El ingreso de una empresa por la producción es de 19$ el envió mas 4$ por cada productos	
Cual es el función de una área del terreno rectangular cuya base es 6 veces su largo	
La altura de un árbol es de 3m, define como sería la función si esto a paro a 9 m en la horitzontal	

CONCLUSIÓN

1. ¿A qué llamamos modelos matemáticos?

2. ¿ Explique de manera resumida cuál es el procedimiento para hallar un modelo matemático ?

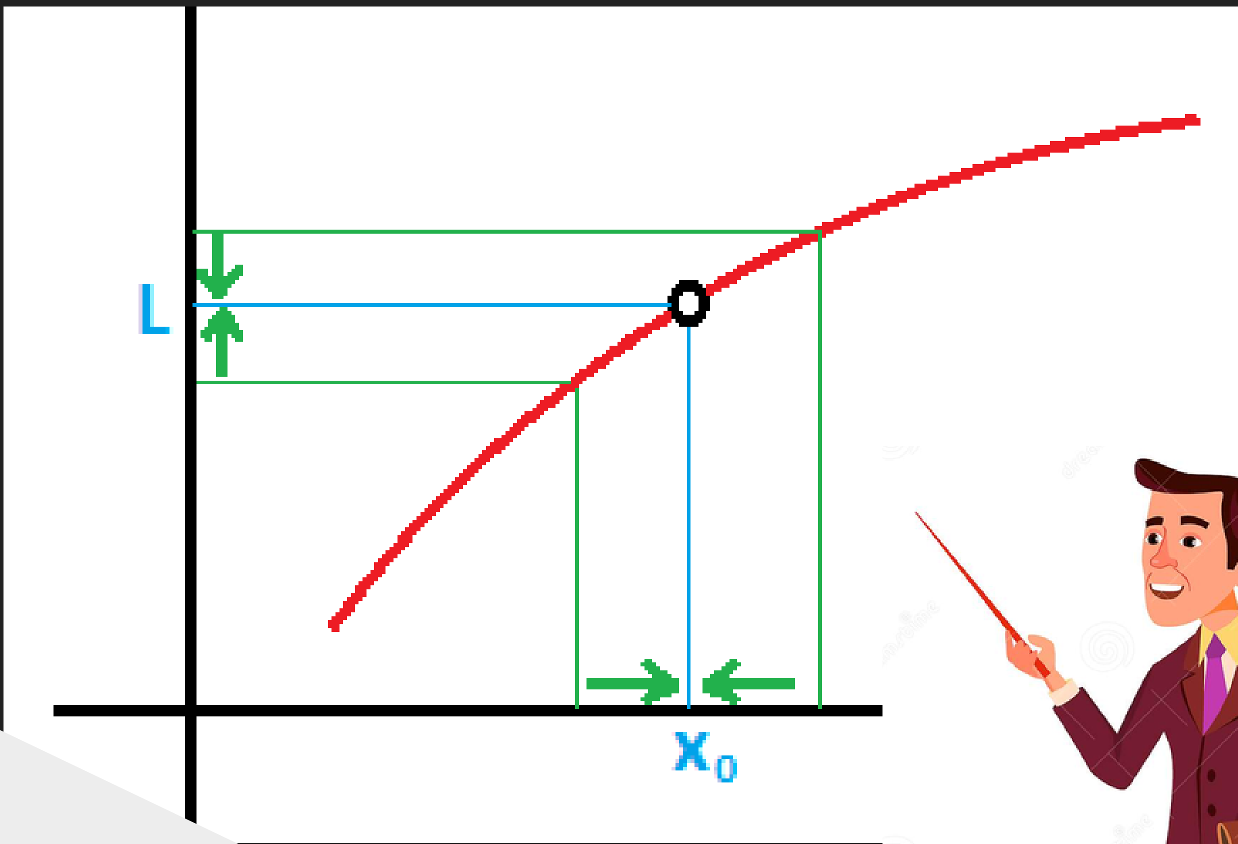
3. ¿Indique con sus palabras la utilidad o importancia de los modelos matemáticos ?

4. ¿ Un modelo matemático puede ser representado mediante una simulación de Geogebra para entender de mejor manera la situación del problema a resolver?

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

	Muy bien	Bien	Regular	Insuficiente	Observaciones
Reflexiona y aporta con ideas para dar respuesta a preguntas planteadas					
Demuestra interés por aprender y usar Geogebra					
Comprende la presencia del tema en la cotidianidad					
Usa Geogebra para plantear y resolver problemas					
Realiza presentaciones adecuadas usando Geogebra					
Respeta los tiempos establecidos en las actividades					

CLASE NÚMERO 3 DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN Y SUS TEOREMAS



OBJETIVO

Comprender y conocer el concepto de límite de una función con sus propiedades para calcular su valor apoyándose en geogebra.

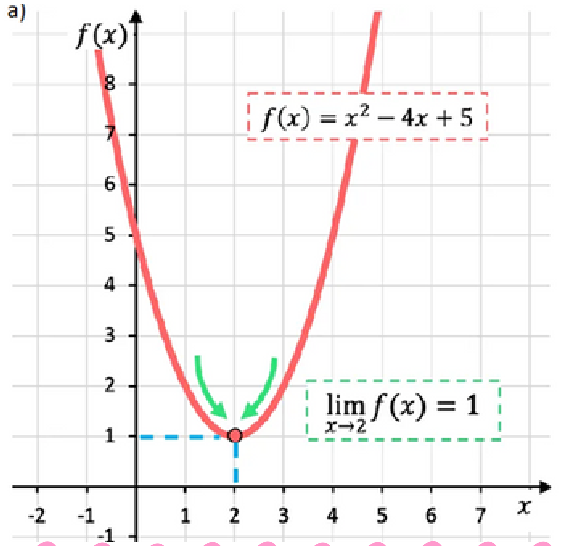
LOGROS DE APRENDIZAJE ESPERADO

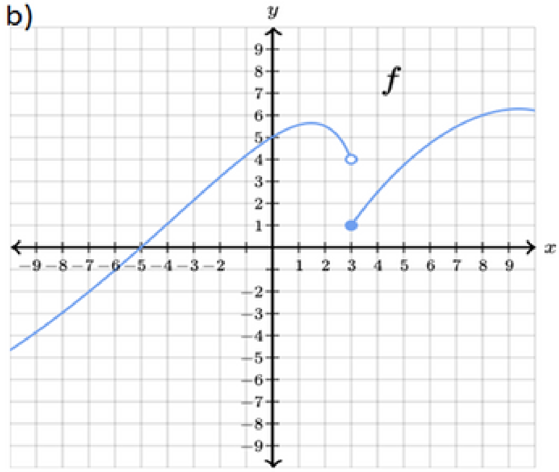
- Interpreta el límite de una función de manera gráfica
- Interpreta el límite de una función real y determinarlo.
- Determina límites de funciones usando las propiedades de los límites.
- Calcula el límite de una función utilizando la factorización y la racionalización

INTRODUCCIÓN

En este tema estudiaremos un análisis de los valores para los cuáles posiblemente no exista valores ni continuidad de una función por lo tanto es necesario observar el comportamiento en entornos reducidos para valores específicos. Para analizar de mejor manera el valor de un límite de una función los estudiantes harán uso de Geogebra para verificar el resultado qué se obtuvo de manera analítica.

Se presentarán a los estudiantes las siguientes imágenes en las qué se puede apreciar el límite de una función.





1.- En la figura del literal (a) indique si la función es continua o es discontinua.

____

____

____

____

2.- De acuerdo a la figura del literal (a) cuál es el valor de la abscisa en el cuál se evalúa el límite de la función.

____

____

____

____

3.- Indique cuál es el valor del límite de la función en la figura (a).

____

____

____

____

4.- Describa la gráfica de la función de la figura (b) e indique qué ocurre con respecto a la continuidad de la misma.

____

____

____

____

5.- ¿Cuál es el valor del límite de la función cuando nos acercamos a x=3 desde el infinito negativo en la figura (b)?

____

____

____

____

6.- ¿Cuál es el valor del límite de la función cuando nos acercamos a x=3 desde el infinito positivo en la figura (b)?

____

____

____

____

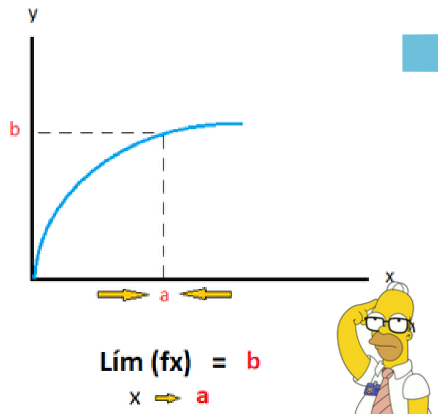
7.- ¿Existe el límite de la función de la figura (b) si o no, argumente su respuesta?

____

____

____

____



CONSTRUCCIÓN

(TIEMPO RECOMENDADO 50 MINUTOS)

En el siguiente enlace se podrá a visualizar la simulación en Geogebra acerca del limite de una función, además el docente procederá a explicar la interpretación gráfica de el limite, posteriormente en base a la simulación se procederá a realizar una definición acerca del tema

Enlace Simulación:
https://www.geogebra.org/m/k8twfvnv

APRENDE+

Enlace del video de como hacer la simulación:
https://youtu.be/pKwnuIfOaP8

Defina que es un límite a partir de la simulación

____

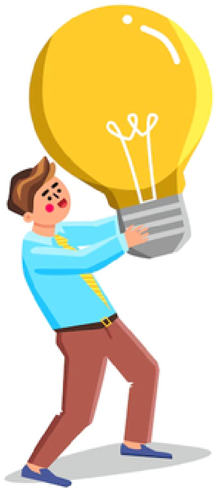
____

____

____

____

____



Escriba la nomenclatura con la que se podría representar el limite de una función cualquiera

____

____

____

____

____

____

____

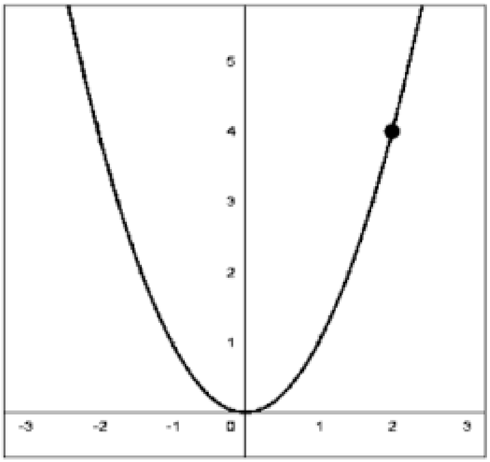
____

RECUERDA QUE:

Para calcular límites de una función se puede realizar de 3 formas algebraicas: Sustitución directa, Factorización, y Racionalización, adicionalmente se puede analizar con tabla de valores

ACTIVIDADES

1. A partir de las siguientes gráficas, determine:



a. Si x toma los valores 1.9, 1.99, 1.999, f(x) se aproxima a _______________

b. Si x toma valores 2.0001, 2.001, 2.01 f(x) se aproxima a _______________

2. Se procederá a resolver de manera conjunta alumno- docente los siguientes ejercicios de límites mediante las 4 formas existentes.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{3x^2-4x-11}{2x+1}\right)$ (sustitución directa)

c) $\lim\limits_{x \to 13} \frac{\sqrt{x-4}-3}{x-13}$ (Racionalización)

b) $\lim\limits_{x \to 8} \left(\frac{3x^2-24x}{x^2-64}\right)$ (Factorización)

d) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2-4x}{x-2}$ (Por tabla de valores)

A continuación el docente indica los teoremas de los limites de una función mediante una tabla, que esta conformada de nombre teorema, forma y ejemplo.

Teorema de los límites de una función

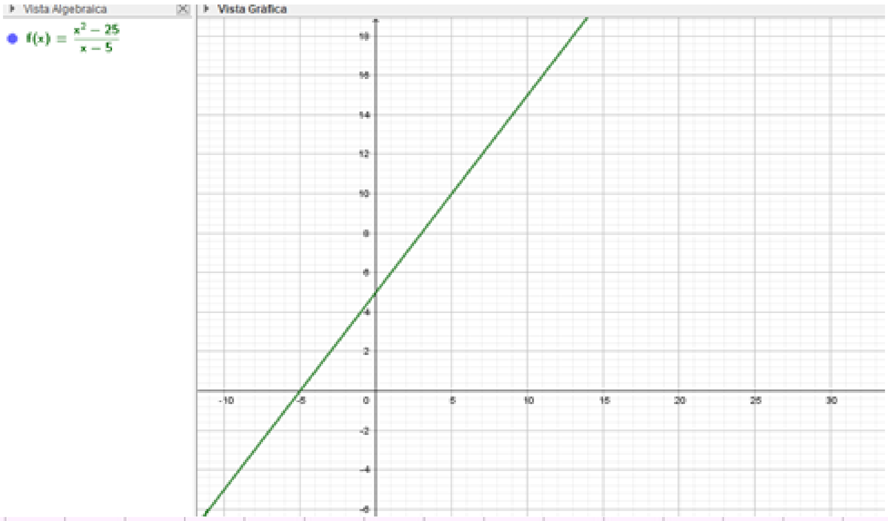
TEOREMA	FORMA	EJEMPLO
Límite de una constante	$\lim_{x \to a} c = c$	$\lim_{x \to 2} -19 =$ -19
Límite de una función identidad	$\lim_{x \to a} x = a$	$\lim_{x \to 2} x = 2$
Límite de función lineal	$\lim_{x \to a} (mx + b) = (ma + b)$	$\lim_{x \to -1} 2 - 3x =$ 5
Límite de suma y diferencia de n funciones	$\lim_{x \to a} f(x) = L; \lim_{x \to a} g(x) = M$ $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$	$\lim_{x \to 3} x = -3$, $\lim_{x \to 3} x - 19 =$ -16 $\lim_{x \to 3} (x + x - 1$ $= -3 - 16 = -19$
Límite del producto n funciones	$\lim_{x \to a} f(x) = L; \lim_{x \to a} g(x) = M$ $\lim_{x \to a} [f(x) \times g(x)] = L \times M$	$\lim_{x \to 3} x = -3$, $\lim_{x \to 3} x - 19 =$ -16 $\lim_{x \to 3} (x)(x - 19)$ $= -3 * -16 = 48$
Límite de la n-ésima	$\lim_{x \to a} f(x) = L$; n(cualquier entero positivo) $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [L]^n$	$\lim_{x \to -1} (1 + 5x)^4$ $= -4^4 = 256$
Límite del cociente de dos funciones	$\lim_{x \to a} f(x) = L; \lim_{x \to a} g(x) = M$ $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$; $M \neq 0$	$\lim_{x \to 2} \frac{x}{x-19} =$ $\frac{\lim_{x \to 2} x}{\lim_{x \to 2} x-19} = \frac{2}{-17}$
Límite de la raíz n-ésima de una función	$\lim_{x \to a} f(x) = L$ $\lim_{x \to a} \geq \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$; $L \geq 0$	$\lim_{x \to 2} \sqrt{x} = \sqrt{2}$

Los teoremas son verdades demostrables a través de leyes expresadas en ecuaciones y nos ayudan a tener un mejor entendimientos de temas y problemas que se pueden presentar

3. Resuelva el siguiente ejercicio, trace la función y verifique el límite con Geogebra tanto de manera gráfica, como también con el comando =Límite que hay en el software. Como ayuda se tiene la simulación del ejercicio y la grafica

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2-25}{x-5}$$

Enlace Simulación:
https://www.geogebra.org/m/jnqhjzqt



Responda las siguientes preguntas.

a) ¿Qué forma tiene la gráfica? ____________________

b) ¿Es una gráfica creciente o decreciente? ____________

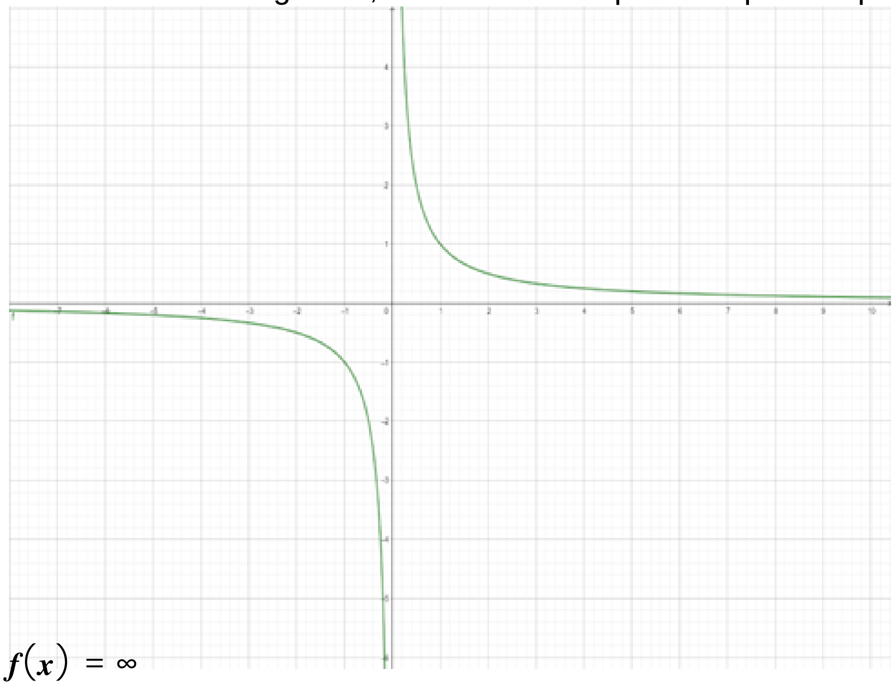
c) ¿Cada par ordenado de la tabla es parte de la gráfica? Si ___ No ___

CONSOLIDACIÓN
(TIEMPO RECOMENDADO 25 MINUTOS)

Ejercicios propuestos

1) Resuelva los siguientes literales

a) Con la siguiente información de la gráfica, seleccione las opciones que la representan.



- $\lim x \to 0\, f(x) = \infty$
- $\lim x \to \infty\, f(x) = -1$
- $f(3) = 3$
- $\lim x \to \infty\, f(x) = 0$
- e. $\lim x \to 1\, f(x) = 2$
- f. $\lim x \to -1\, f(x) = 0$

b) Con lo siguiente ecuación complete a continuación la tabla

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \le 0 \\ -2x - 3, & 0 \le x < 5 \end{cases}$$

xi	0.9	0.99	0.999	---- ---- --	1.001	1.01	1.1
$f(xi)$	-4.8	-4.98	-4.99 8		-5	-5.02	-5.2

2) Resuelva la siguiente situación aplicada a la vida cotidiana y verifique la respuesta mediante Geogebra.

Luis y María tienen una piscina en su jardín y al llegar el verano necesitan cambiar el agua de la piscina. Abren el desagüe y la piscina se comienza a vaciar según la función:

$$v(t)=\frac{(\sqrt{t+3})-2}{t-1}$$

donde t es el tiempo de vaciado en horas y v (t) es el volumen de agua expresado en m³ . Averigua hacia donde se aproxima el volumen de la piscina cuando el tiempo se aproxima a 1h. Posteriormente realice la simulación del límite de esta función en geogebra para exponer en clases.

Enlace Simulación:
https://www.geogebra.org/m/ndutbpsu

Resolución:

$$v(1)=\frac{(\sqrt{1+3})-2}{1-1}=\frac{(\sqrt{4})-2}{1-1}=\frac{2-2}{1-1}=\frac{0}{0}$$

$$v(1)=\frac{0}{0} \Rightarrow \textit{nos resulta una indeterminación}$$

Trataremos de levantar la indeterminación aplicando límites mediante el método de racionalización.

$$\lim_{t\to 1} v(t) = \lim_{t\to 1} \frac{(\sqrt{t+3})-2}{t-1}$$

$$\lim_{t\to 1} v(t)=\frac{(\sqrt{t+3})-2}{t-1} * \frac{(\sqrt{t+3})+2}{(\sqrt{t+3})+2}=\frac{(\sqrt{t+3})^2-(2)^2}{(t-1)*(\sqrt{t+3}+2)}$$

$$\lim_{t\to 1} v(t)=\frac{(t+3)-(4)}{(t-1)*(\sqrt{t+3}+2)}=\frac{(t-1)}{(t-1)*(\sqrt{t+3}+2)}$$

$$\lim_{t\to 1} v(t)=\frac{1}{(\sqrt{t+3}+2)}=\frac{1}{(\sqrt{1+3}+2)}=\frac{1}{(2+2)}$$

$$\lim_{t\to 1} v(t)=\frac{1}{4}=0.25m^3$$

$$v(1)=0.25m^3$$

Respuesta: El volumen de agua en metros cúbicos dentro de 1 hora es de 0.25

CONCLUSIÓN

1. ¿A qué llamamos límite de una función?

____

2. ¿Para calcular el límite de una función en un punto simplemente tenemos que sustituir el valor de ese punto en la función.?

____

3. ¿Si los dos límites laterales de una función en un punto existen y son iguales, existe el límite?

____

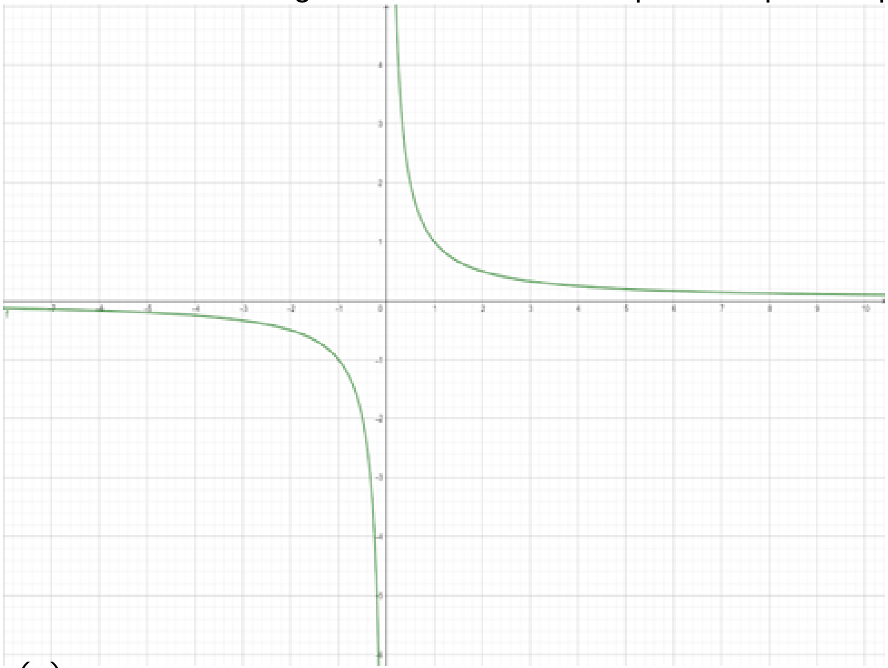
4. ¿Si los dos límites laterales no coinciden, entonces el límite de la función en el punto de ruptura no existe____

RECORTABLE

Ejercicios propuestos

1) Resuelva los siguientes literales

a) Con la siguiente información de la gráfica, seleccione las opciones que la representan.



- $lim\ x \to 0\ f(x) = \infty$
- $lim\ x \to \infty\ f(x) = -1$
- $f(3) = 3$
- $lim\ x \to \infty\ f(x) = 0$
- e. $lim\ x \to 1\ f(x) = 2$
- f. $lim\ x \to -1\ f(x) = 0$

b) Con lo siguiente ecuación complete a continuación la tabla

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, x \leq 0 \\ -2x - 3, 0 \leq x < 5 \end{cases}$$

xi	0.9	0.99	0.999	---- ---- --	1.001	1.01	1.1
$f(xi)$							

RECORTABLE

2) Resuelva la siguiente situación aplicada a la vida cotidiana y verifique la respuesta mediante Geogebra.

Luis y María tienen una piscina en su jardín y al llegar el verano necesitan cambiar el agua de la piscina. Abren el desagüe y la piscina se comienza a vaciar según la función:

$$v(t)= \frac{(\sqrt{t+3})-2}{t-1}$$

donde t es el tiempo de vaciado en horas y v (t) es el volumen de agua expresado en m³ . Averigua hacia donde se aproxima el volumen de la piscina cuando el tiempo se aproxima a 1h. Posteriormente realice la simulación del límite

CONCLUSIÓN

1. ¿A qué llamamos límite de una función?

2. ¿Para calcular el límite de una función en un punto simplemente tenemos que sustituir el valor de ese punto en la función.?

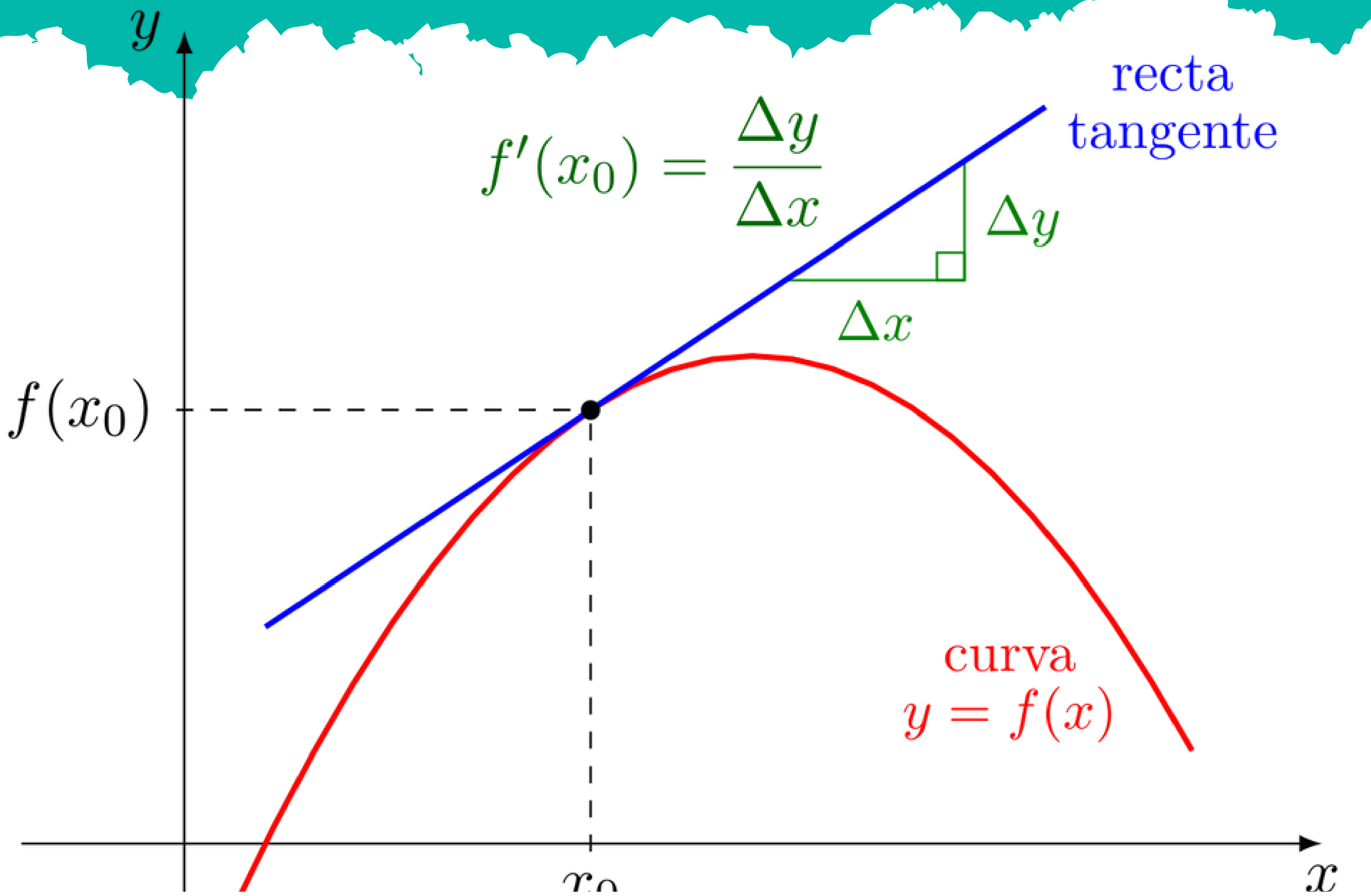
3. ¿Si los dos límites laterales de una función en un punto existen y son iguales, existe el límite?

4. ¿Si los dos límites laterales no coinciden, entonces el límite de la función en el punto de ruptura no existe__________

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

	Muy bien	Bien	Regular	Insuficiente	Observaciones
Participa con ideas durante la presentación de lo recursos didácticos					
Demuestra interés por aprender y usar Geogebra					
Relaciona ejercicios planteados con las reglas pertinentes					
Usa Geogebra para plantear y resolver problemas					
Realiza presentaciones adecuadas usando Geogebra					
Respeta los tiempos establecidos en las actividades					

CLASE NÚMERO 4 RECTA TANGENTE Y DERIVADA



INTRODUCCIÓN

En este tema se abarca el tema de la recta tangente a una curva que es un concepto que sirve de preámbulo para la interpretar geométricamente la derivada de una función en un punto y se trata también de la recta que mejor se aproxima localmente una función, para mejor visualización y compresión se usará el software Geogebra en la clase. Luego continuaremos con el estudio de la derivada para lo cuál intervienen conceptos previos como límites y funciones a partir de lo cual se plantean ejemplos aplicados a la vida diaria en lo que se requiere conocer los casos donde se necesite medir la rapidez con lo que se produce un cambio de una situación.

OBJETIVO

Comprender la definición y la expresión de una recta tangente e introducir el concepto de derivada, proporcionando su interpretación geométrica y física con Geogebra

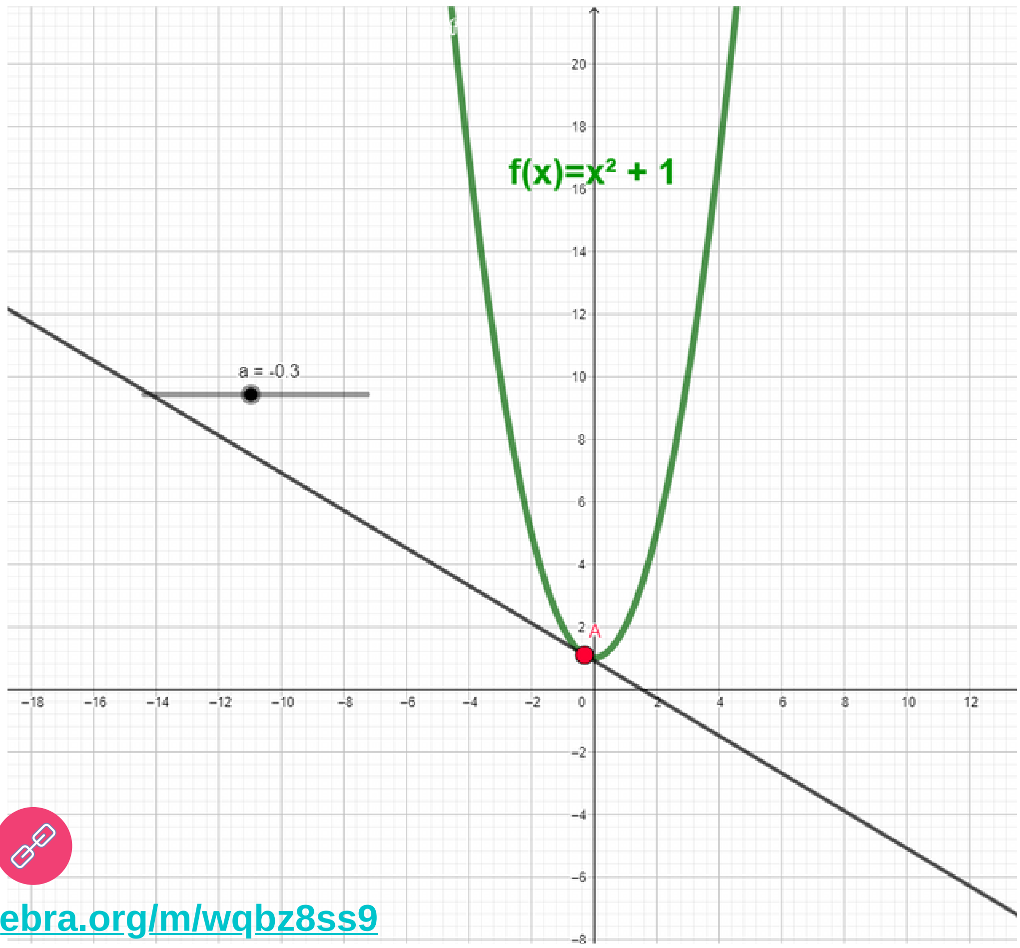
Logros de aprendizaje esperado

-Interpretar la relación entre una recta tangente a una curva y su pendiente .
-Interpretar de manera analítica y geométrica la derivada de una función
-Construir un gráfico qué represente la situación requerida por dicha función o curva.
-Modelar y resolver situaciones reales mediante Geogebra conceptos propios de la recta tangente con su respectiva derivada.

ANTICIPACIÓN

(TIEMPO RECOMENDADO DE 15 MINUTOS)

Para ilustrar la idea de un recta tangente a una curva el docente procederá a mostrar la siguiente simulación.



LINK SIMULACIÓN

https://www.geogebra.org/m/wqbz8ss9

A continuación se procederá a realizar las siguientes preguntas con respecto a las simulación presentada anteriormente.

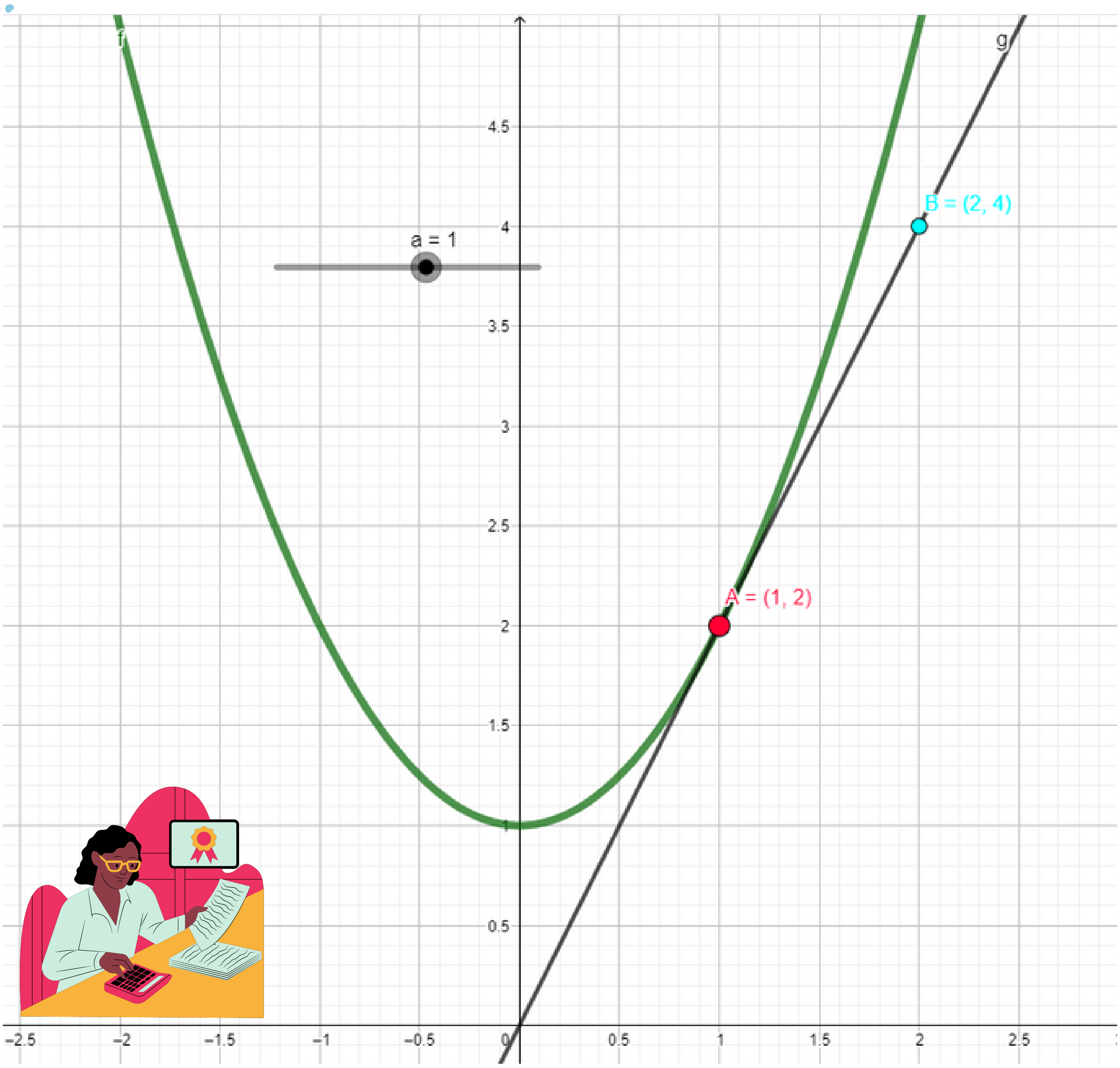
1.-A medida que el deslizador se mueve que ocurre con la recta a lo largo de la curva

---

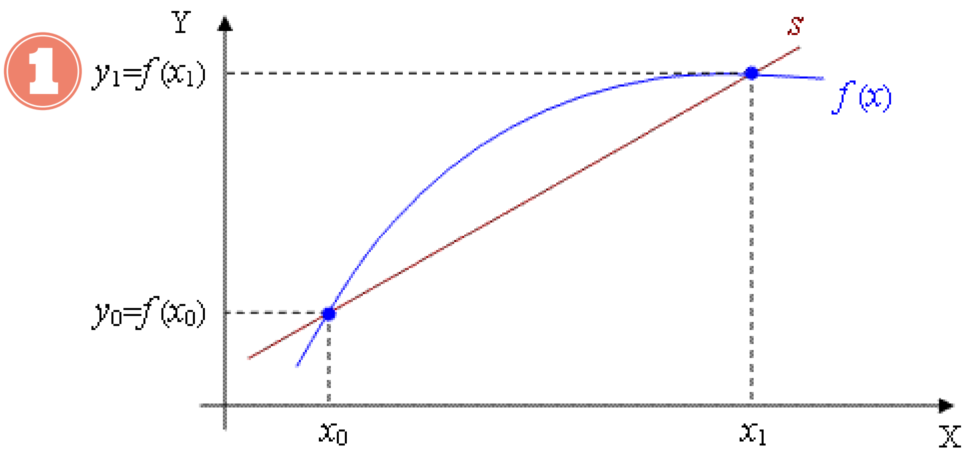
2.-Defina con sus propias palabras qué es una recta tangente a una función

---

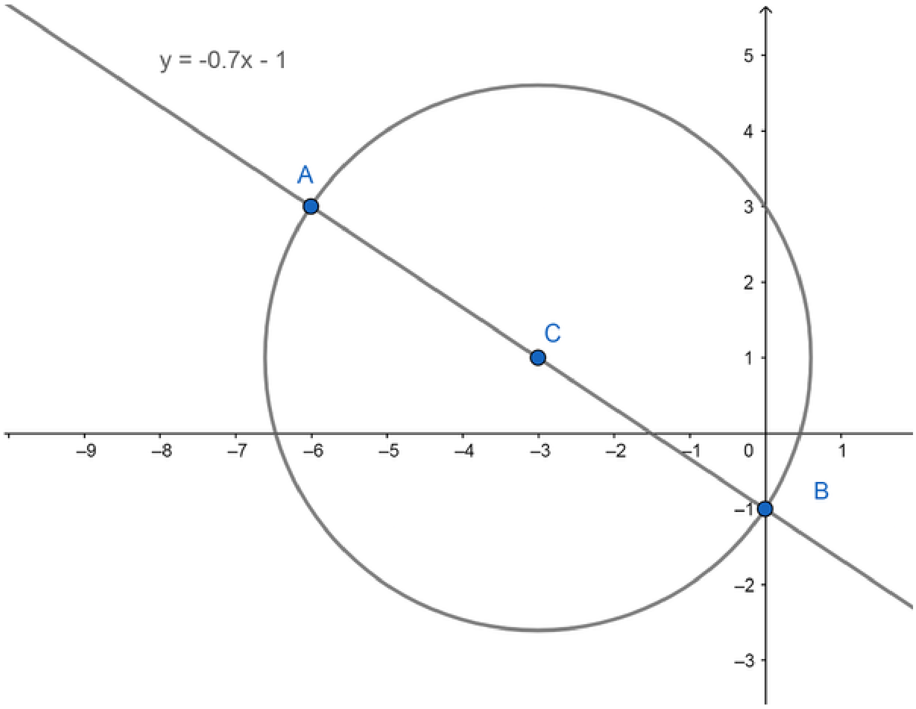
3.- Determine la ecuación de la recta tangente de la simulación dadas las siguientes condiciones.



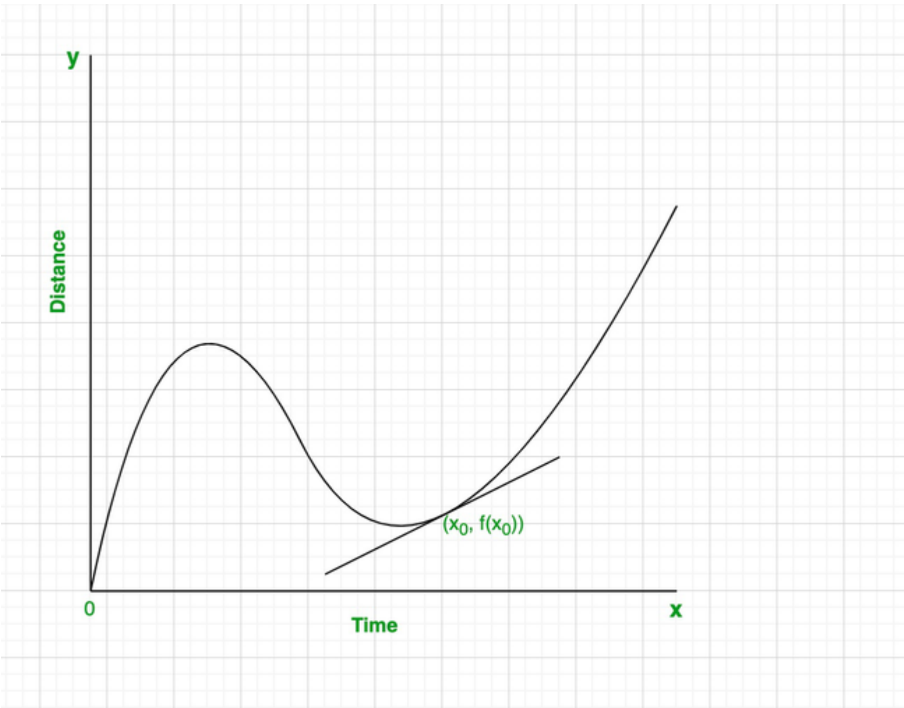
4.-A continuación a partir de las siguiente gráficas señale cuales son rectas tangentes



2



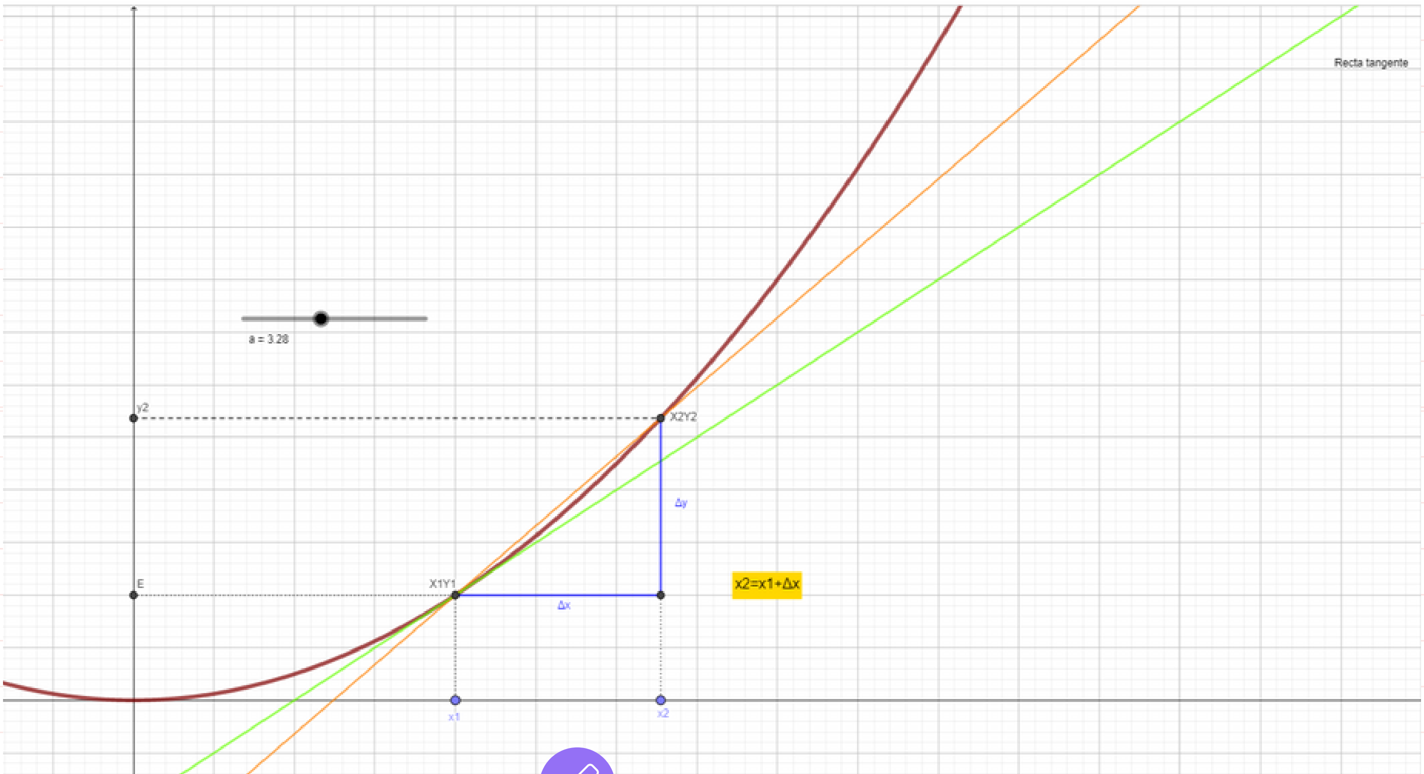
3



CONSTRUCCIÓN

(TIEMPO RECOMENDADO 50 MINUTOS)

El alumno procederá a visualizar la siguiente simulación posteriormente se responderá las preguntas planteadas acerca de la simulación



LINK SIMULACIÓN

https://www.geogebra.org/m/rwu5kanh

ACTIVIDADES

PARA ESTA ACTIVIDAD SE CONFORMARÁN GRUPOS DE TRABAJO DE ENTRE 4 A 5 ALUMNOS EN CADA GRUPO Y POSTERIORMENTE RESPONDAN LAS SIGUIENTE PREGUNTAS EN BASES A LA SIMULACIÓN ANTERIOR.

1.- Indique el color de las diferentes partes qué conforman la simulación de la Derivada.

- Recta tangente (__________________)
- Recta secante (____________________)
- La función (______________________)

2.- ¿ Cuáles son los puntos por los cuáles pasa la recta secante?

(___;___) (___;___)

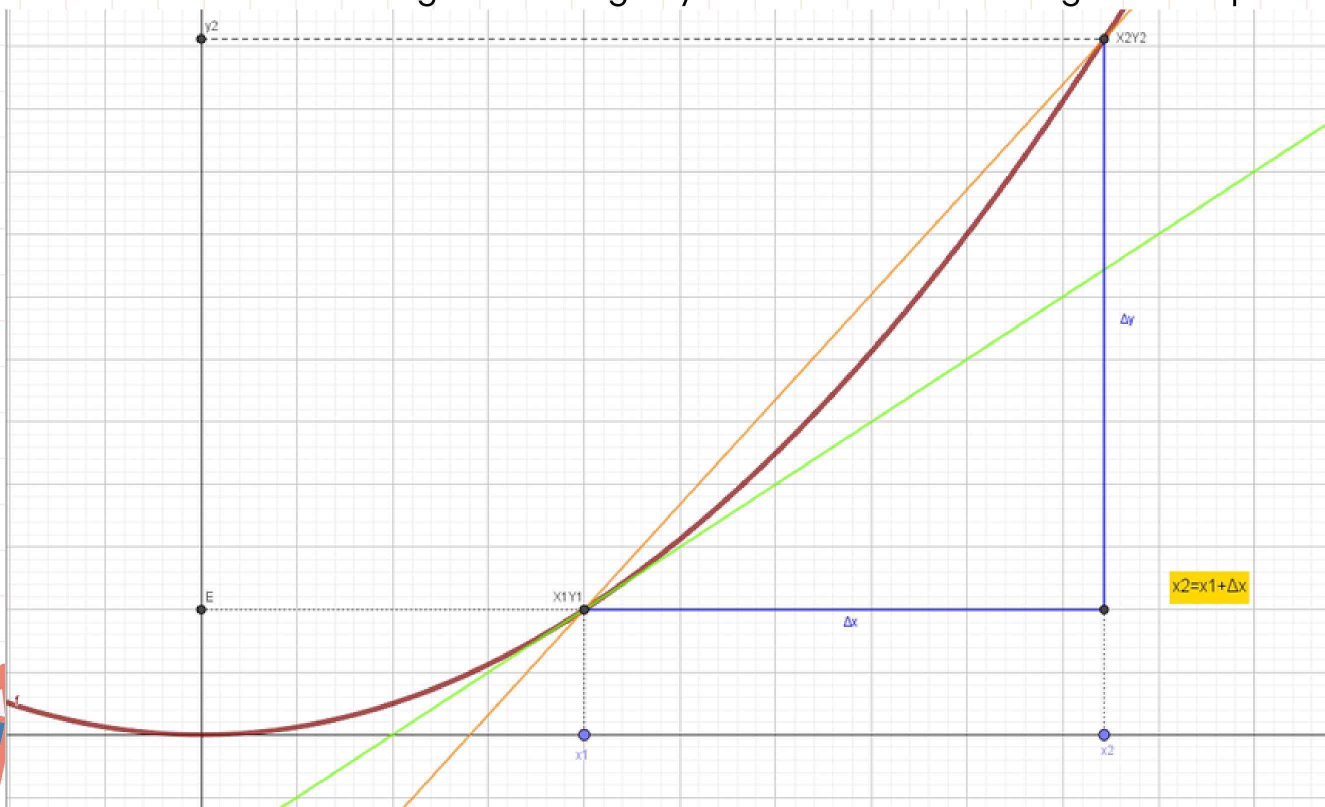
3.- Conforme avanza la animación qué sucede con el punto (x2;y2) con respecto al punto fijo (x1;y1).

____

4.- ¿ Qué sucede con los incrementos x;y conforme el punto (x2;y2) se acerca al punto (x1;y1).

____

5.- Observe con atención la siguiente imagen y una correctamente según corresponda.



(y2) (x1+x)

(y1) f(x1)

(x2) f(x2)

6.- Basado en la fórmula de la pendiente : m= (y2-y1)/(x2-x1) ; halle la pendiente de la recta secante de la figura anterior.

7.- ¿ Qué tiene qué suceder con x para qué la expresión de la pendiente de una recta se convierta en un límite?

8.- Determine la fórmula general del concepto de la derivada.

9.- Defina con sus propias palabras qué es la derivada de un función.

EN ESTA SECCIÓN SE MUESTRA LA SIGUIENTE TABLA DONDE CONSTA DE UNA SERIE DE PASOS, EN LOS CUALES SE DETALLA DE MANERA ORDENADA LOS PASOSO QUE SE PUEDEN REALIZAR PARA EL DESARROLLADO SE APLICÓ LOS PASOS DE LA REGLA GENERAL.

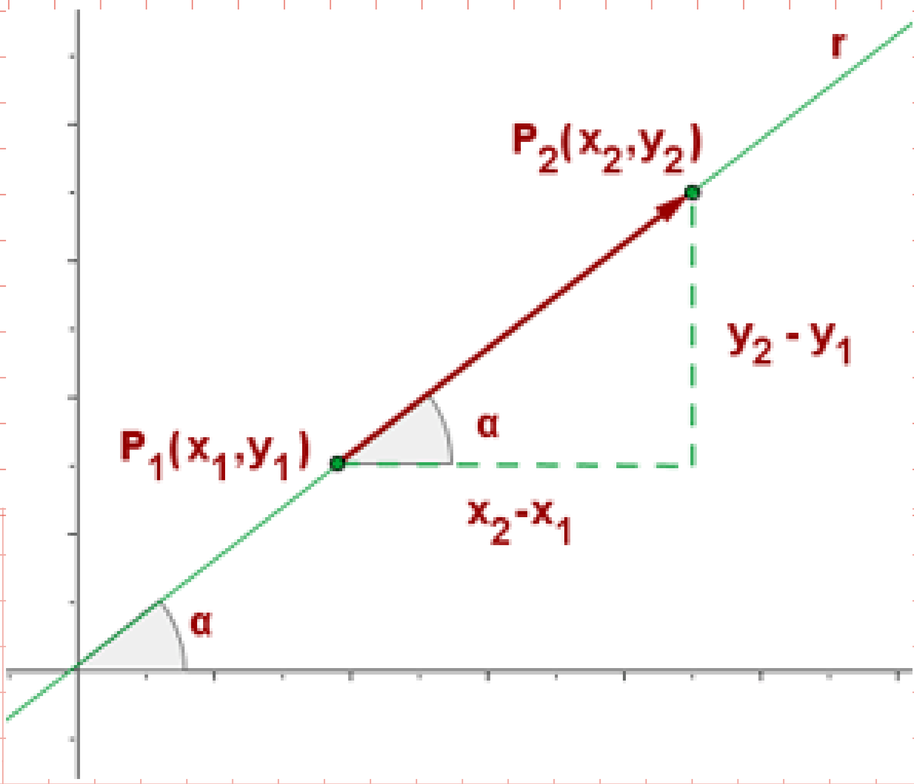
Encuentre la derivada de f(x) = 12x³

1er. Paso	$y + \Delta y = 12(x+\Delta x)^3$
2do. Paso	$y + \Delta y = 12(x+\Delta x)^3$ $-y = -(12x^3)$ $\Delta y = 12(x+\Delta x)^3 - 12x^3$
3er. Paso	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{12(x+\Delta x)^3 - 12x^3}{\Delta x}$ $= \frac{12[x^3 + 3x^2.\Delta x + 3x.(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3] - 12x^3}{\Delta x}$ $= \frac{12x^3 + 36x^2\Delta x + 36x.\Delta x^2 + 12(\Delta x)^3 - 12x^3}{\Delta x}$ $= \frac{36x^2\Delta x + 36x.\Delta x^2 + 12(\Delta x)^3}{\Delta x}$ $= \frac{12\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x}$ $= 12(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)$
4to. Paso	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}[12(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)]$
5nto Paso	$f'(12x^3) = 36x^2$ *Derivada encontrada.*

FORMAS DE REPRESENTAR LA DERIVADA

f´(x)=y´= dy/dx= Dx

Recuerda que la pendiente de una recta es la tangente del ángulo que forma la recta con la dirección positiva del eje de abscisas.



m = tan α

EL DOCENTE VA RESOLVER EL SIGUIENTE EJERCICIOS DE APLICACIÓN CONJUNTAMENTE CON LOS ALUMNOS

-Se sabe que la posición de cierto vehículo es 10t2-2t+3, para calcular la velocidad de dicha partícula se debe derivar la posición. Calcule la velocidad cuando t=2. Para esta actividad se debe realizar una simulación en Geogebra donde se muestran las gráficas de la función original y la recta tangente a partir de estas gráficas se debe graficar la función derivada guiese en el siguiente video.

LINK DE SIMULACIÓN

https://www.geogebra.org/m/yvgzwdgn

APRENDE+

LINK DEL VIDEO EXPLICANDO EL EJERCICIO

https://youtu.be/K9-s9ciBO0Y

RESOLUCION ANALITICA

$f(t)=10t^2 - 2t + 3$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{10(t+\Delta t)^2-2(t+\Delta t)+3-10t^2+2t-3}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{10(t^2+2t\Delta t+\Delta t^2)-2t-2\Delta t+3-10t^2+2t-3}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{10t^2+20t\Delta t+10\Delta t^2-2t-2\Delta t+3-10t^2+2t-3}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{+20t\Delta t+10\Delta t^2-2\Delta t}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(20t+10\Delta t-2)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} 20t + 10\Delta t - 2$$

$$= 20t - 2$$

Velocidad= 20(2)-2 =38m/s

Las derivadas son una razón de cambio pero no solo se determina una magnitud o cantidad con respecto a otra, si no que tan rápido es su variación.

Una persona que cae a un río cuyas aguas se encuentran a muy baja temperatura.

La temperatura corporal esta en función del tiempo y que la persona permanezca en el agua y la función será decreciente al haber pérdida de calor del cuerpo hacia el agua tendiendo el mismo a alcanzar la temperatura del agua

Cada vez que se prende el celular, edificio resiste el embate del viento, la aguja que se mueve en el velocímetro del automóvil… todo eso son las derivadas funcionando.

CONSOLIDACIÓN

(TIEMPO RECOMENDADO DE 30 MINUTOS)

ACTIVIDADES

1) Encontrar la derivada de las siguientes funciones usando la fórmula por definición

- A(x)= $x^2 + 6x - 10$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2+6(x+\Delta x)-10-x^2-6x+10}{\Delta x}$$

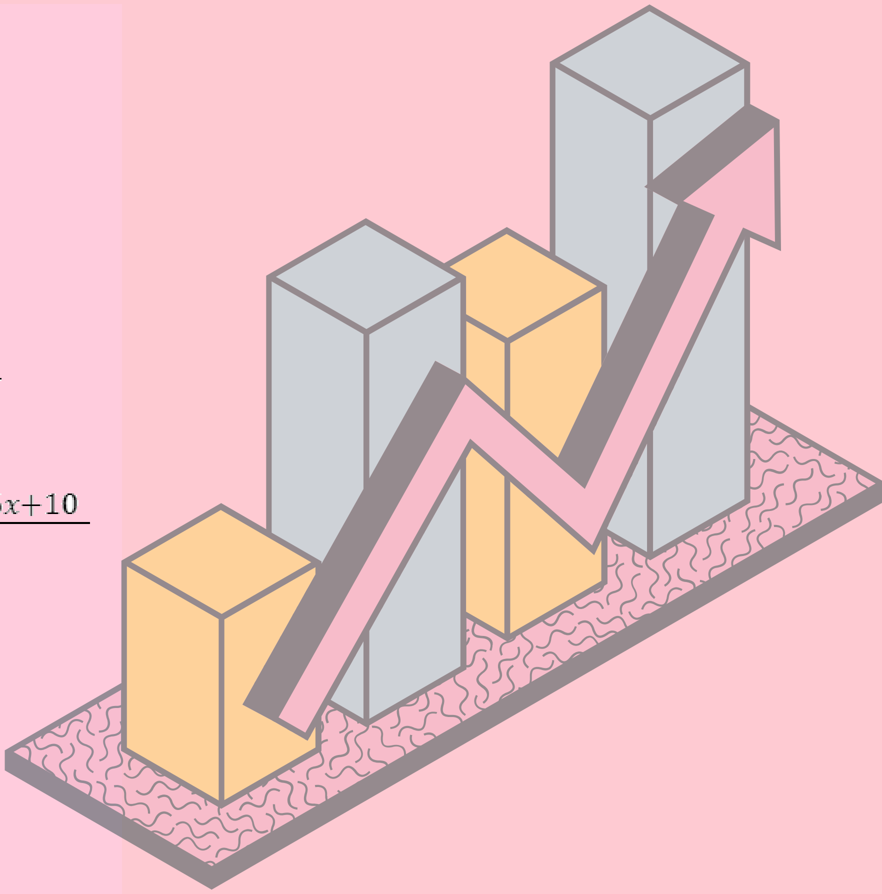
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2+6x+6\Delta x-10-x^2-6x+10}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x+\Delta x^2+6\Delta x}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x+\Delta x\ +6)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x + 6$$

$$= 2x + 6$$



- $G(x)=5x^2 - 23x$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{5(x+\Delta x)^2-23(x+\Delta x)-5x^2+23x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{5(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2)\ -23x+23\Delta x-5x^2+23x)}{\Delta x}$$

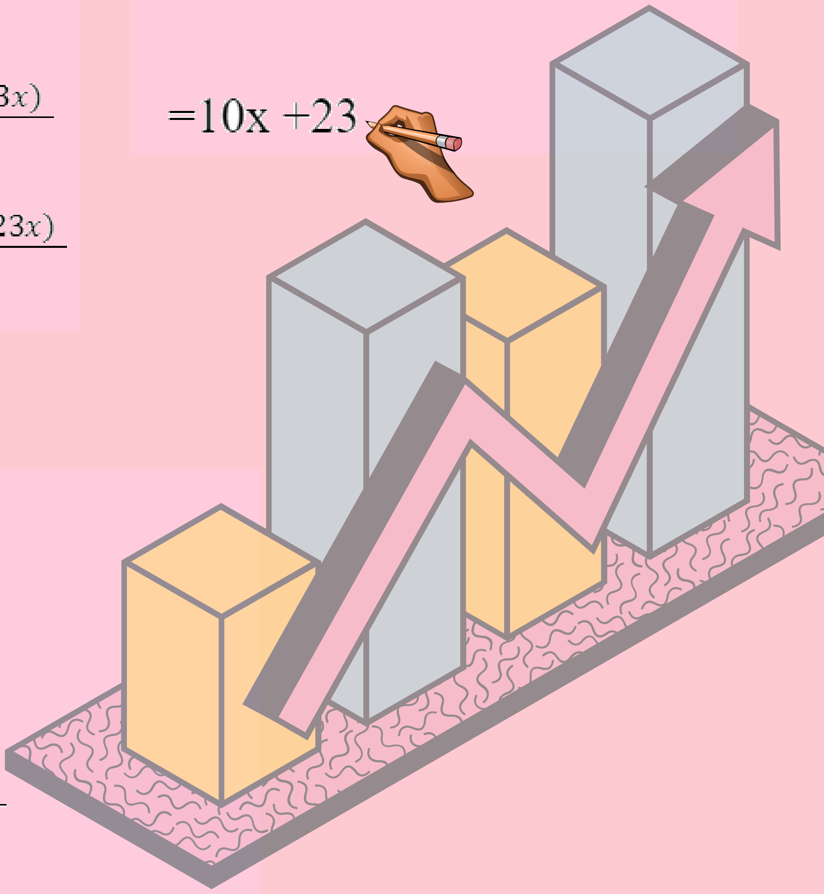
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{5x^2+10x\Delta x+10\Delta x^2-23x+23\Delta x-5x^2+23x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{+10x\Delta x+10\Delta x^2+23\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(10x+10\Delta x\ +23)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} 10x + 10\Delta x + 23$$

$=10x+23$



- $S(x)=x^3 - 3x - 3$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3-3(x+\Delta x)-3-x^3+3x+3}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3)\ -3x-3\Delta x-3-x^3+3x+3}{\Delta x}$$

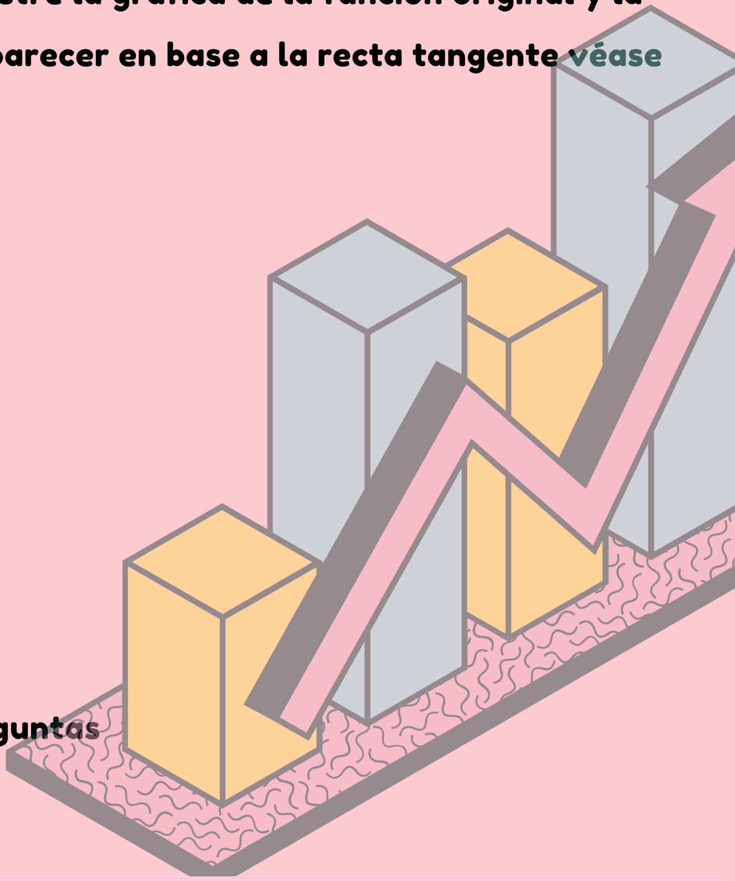
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3\ -3\Delta x}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(3x^2+3x\Delta x\ +\Delta x^2\ -3)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 - 3$$

$= 3x^2 -$

2) Encontrar la derivada de las siguientes funciones usando Geogebra . Además realizar una simulación para exponer en la clase, donde se muestre la gráfica de la función original y la derivada (la gráfica de la función derivada debe aparecer en base a la recta tangente véase como ejemplo en LINK).



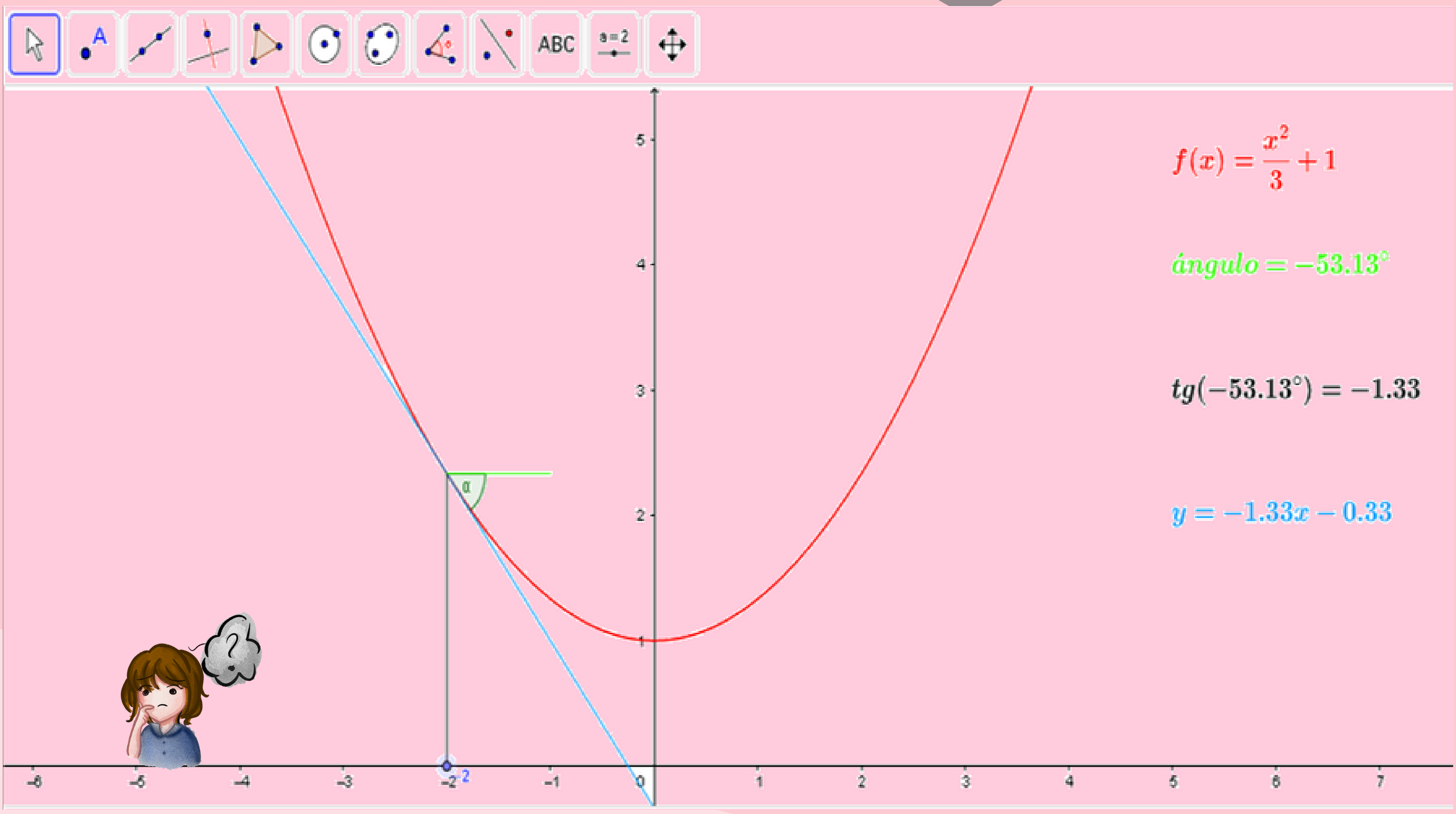
- $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 15$

  https://www.geogebra.org/m/zbsezpfp

- $h(x) = x^2 - 1.5x - 2$

  https://www.geogebra.org/m/n9hvvdzv

3)Analice la siguiente situación y responda las preguntas



a) ¿Cuál es el grado de la función de la gráfica? (2ndo grado)

b) ¿ Cuál es el valor de la pendiente en el punto x=-2 según los datos adjuntos a la gráfica?

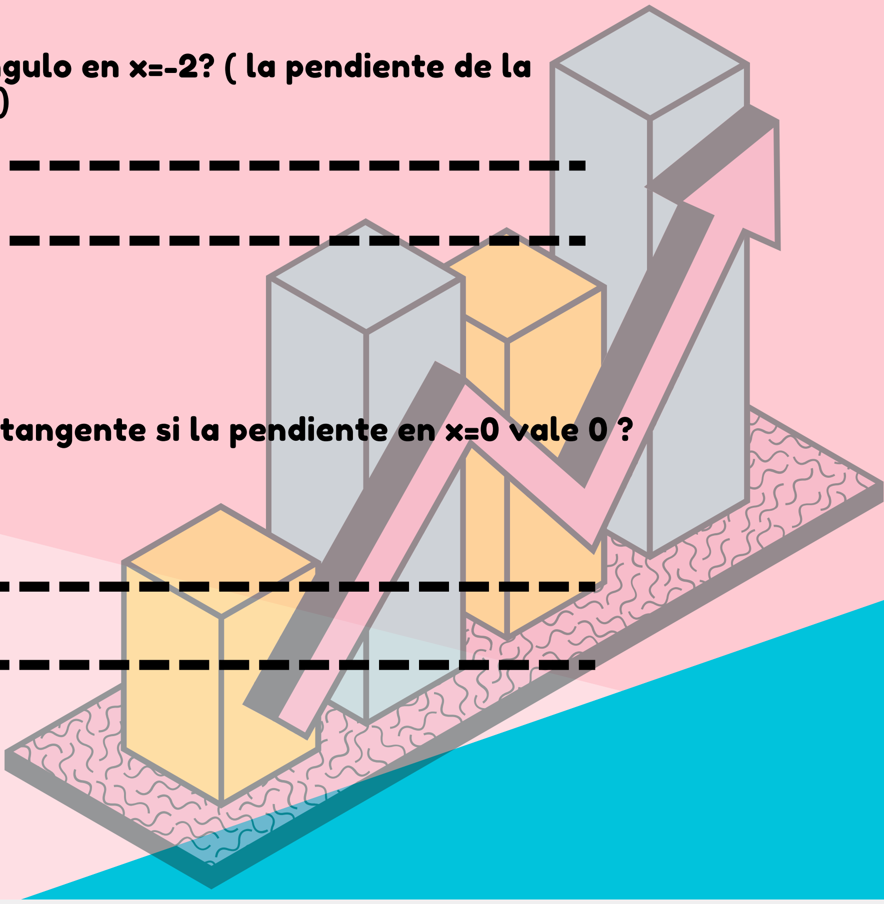
(m=-1.33)

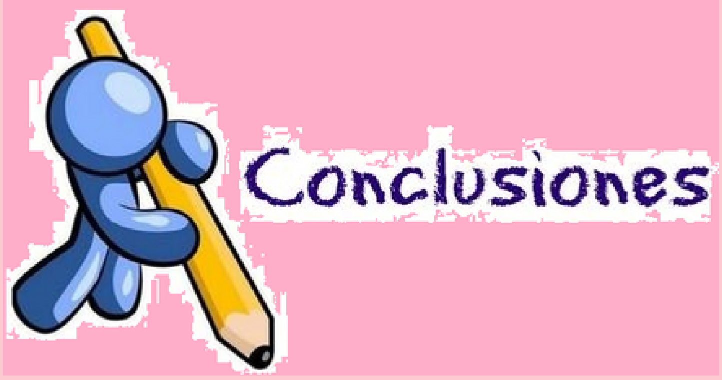
c) ¿ La pendiente en x=-2 es positiva o negativa? (negativa)

d) ¿ Qué representa la tangente del ángulo en x=-2? (la pendiente de la recta)

e) ¿ Cuál sería la ecuación de la recta tangente si la pendiente en x=0 vale 0 ?

(y=1)





a) Si conocemos la pendiente de la recta tangente y las coordenadas del punto de tangencia, podemos hallar
la ecuación de dicha tangente por medio de la formula : y−y1=m(x−x1)

b) Sabiendo que la recta tangente y la recta normal son perpendiculares, podemos hallar la ecuación de la recta normal aplicando la misma fórmula anterior, pero considerando que la pendiente de la normal es:

$$\mathrm{m(normal)} = -\frac{1}{m(tangente)}$$

c) ¿Qué representa geométricamente la derivada de una función?

d) ¿Para que exista la derivada de una función en un punto, tiene que existir necesariamente un?

RECORTABLE PARA ALUMNO

ACTIVIDADES

1) Encontrar la derivada de las siguientes funciones usando la fórmula por definición

- $A(x)= x^2+6x-10$

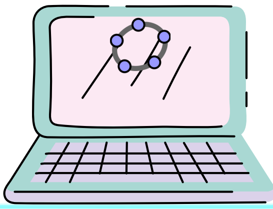
- $G(x)=5x^2-23x$

RECORTABLE PARA ALUMNO

- $S(x)=x^3-3x-3$

2) Encontrar la derivada de las siguientes funciones usando Geogebra . Además realizar una simulación para exponer en la clase, donde se muestre la gráfica de la función original y la derivada (la gráfica de la función derivada debe aparecer en base a la recta tangente véase como ejemplo en LINK).

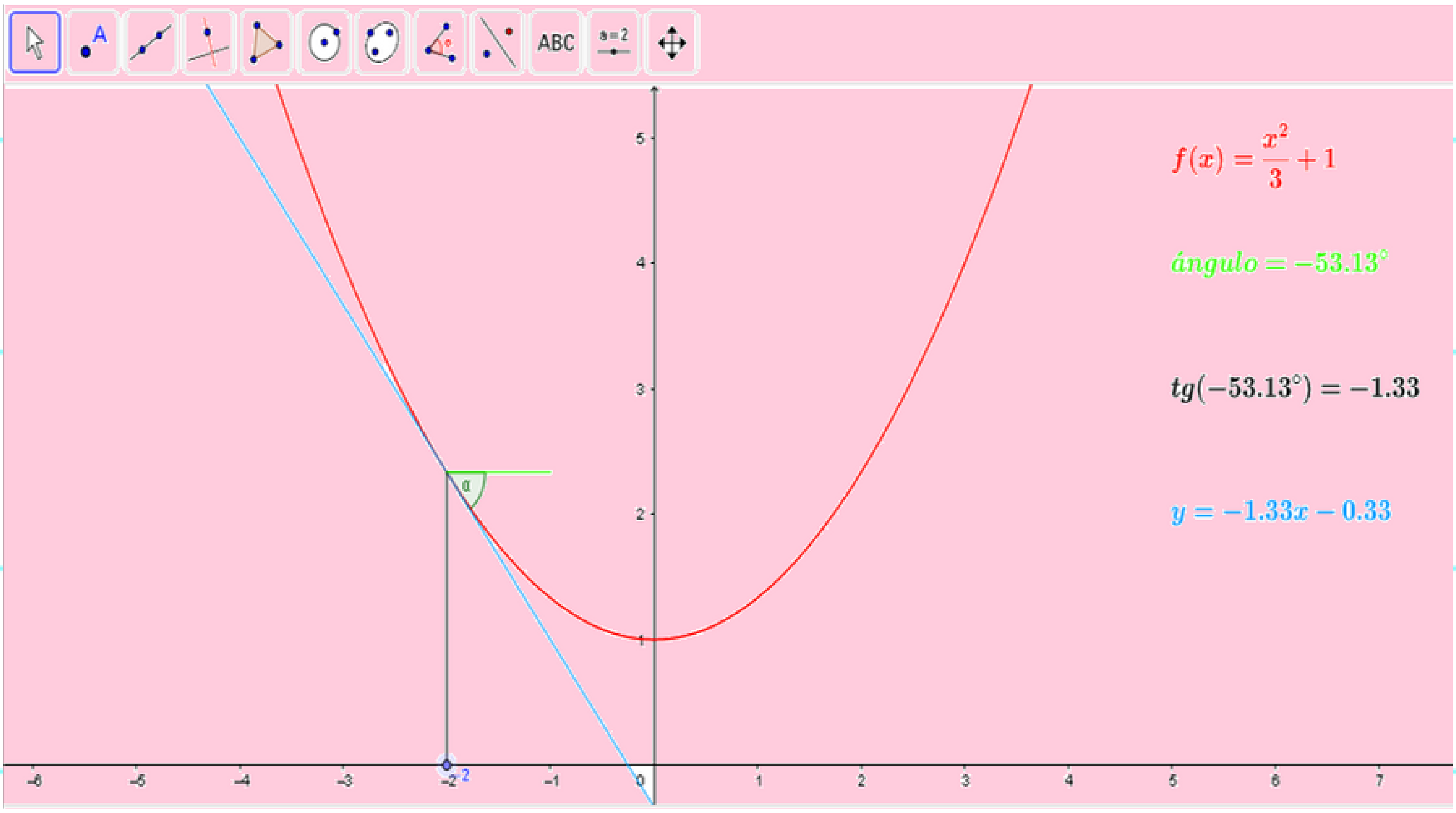
- $f(x)= x^3-3x^2+5x-15$



- $h(x)=x^2-1.5x-2$

RECORTABLE PARA ALUMNO

3)Analice la siguiente situación y responda las preguntas



a) ¿Cuál es el grado de la función de la gráfica? (2ndo grado)

b) ¿ Cuál es el valor de la pendiente en el punto x=-2 según los datos adjuntos a la gráfica?

(m=-1.33)

c) ¿ La pendiente en x=-2 es positiva o negativa? (negativa)

d) ¿ Qué representa la tangente del ángulo en x=-2? (la pendiente de la recta)

e) ¿ Cuál sería la ecuación de la recta tangente si la pendiente en x=0 vale 0 ?

(y=1)

RECORTABLE PARA ALUMNO

CONCLUSIONES

a) Si conocemos la pendiente de la recta tangente y las coordenadas del punto de tangencia, podemos hallar la ecuación de dicha tangente por medio de la formula : y−y1=m(x−x1)

b) Sabiendo que la recta tangente y la recta normal son perpendiculares, podemos hallar la ecuación de la recta normal aplicando la misma fórmula anterior, pero considerando que la pendiente de la normal es:

$$\text{m(normal)} = -\frac{1}{m(tangente)}$$

c) ¿Qué representa geométricamente la derivada de una función?

d) ¿Para que exista la derivada de una función en un punto, tiene que existir necesariamente un?

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

	Muy bien	Bien	Regular	Insuficiente	Observaciones
Pone interés durante la presentación de lo recursos didácticos para poder responder preguntas					
Demuestra interés por aprender y usar Geogebra					
Participa de manera activa en los grupos de trabajo aportando ideas					
Usa Geogebra para plantear y resolver problemas					
Realiza presentaciones adecuadas con simulaciones usando Geogebra					
Respeta los tiempos establecidos en las actividades planteadas					

CLASE NÚMERO 5 TEOREMAS SOBRE DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES Y DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

OBJETIVO

Conocer y aplicar los diferentes teoremas sobre la derivación de funciones, en relación a las diversas reglas que permiten determinar la derivada de una función con mayor facilidad.

LOGROS DE APRENDIZAJE ESPERADO

- Identificar claramente los diferentes teoremas sobre derivadas
- Aplicar correctamente las diferentes reglas para determinar las derivadas con facilidad.
- Resolver derivadas de orden superior.

INTRODUCCIÓN

En esta clase vamos a reforzar los conocimientos sobre la derivada ya qué anteriormente vimos su fundamentación e interpretación geométrica. Aquí vamos a dar paso a los teoremas sobre derivadas para hallar la pendiente de una recta tangente a una curva sin la necesidad de aplicar la definición de derivadas por medio de límites, resolviendo finalmente ejercicios de aplicación aplicando estos teoremas relevantes para la simplicidad del cálculo.

JULIO 2022

ANTICIPACIÓN

(TIEMPO RECOMENDADO 15 MINUTOS)

Algunas formas de representar las derivadas son

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = D_x$$

Se presenta a los alumnos el siguiente video titulado Reglas de Derivación como introducción de los distintos casos de derivación que existe

https://www.youtube.com/watch?v=5phCBxq364A

Luego de observar el video se harán las siguientes preguntas a los alumnos

a) Cuales son las reglas básicas de derivación

____

____

____

____

b) En el video presentado cuáles fueron los teoremas que menciono y anótelos

____

____

____

____

____

____

____

c) Unir con líneas las reglas básicas que se debiera usar para resolver las funciones planteadas

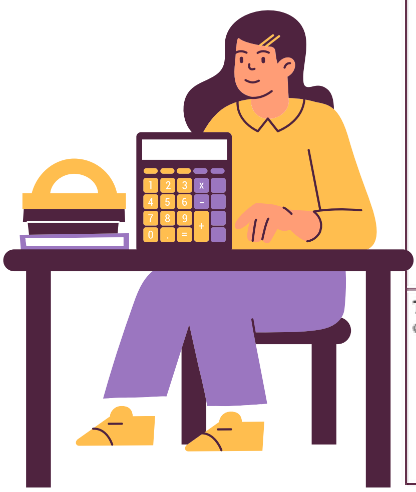
Potencia	$f(x) = \frac{x^2+23x}{x}$
Producto	$f(x) = (4x^2 - 23x + 2)^4$
Cadena	$f(x) = (2x + x^2)(x - 23)$
Cociente	$f(x) = 6x^3 - 2$

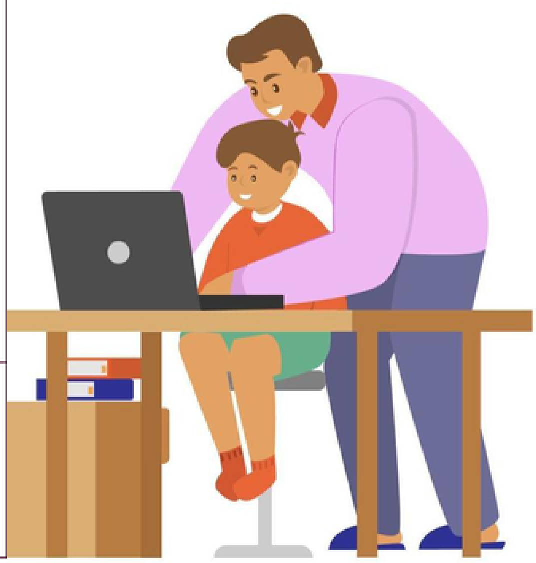
CONSTRUCCIÓN

(TIEMPO RECOMENDADO 45 MINUTOS)

El docente y alumno contara con la siguiente tabla, donde se explica casos generales que pueden haber en la derivación de funciones, es así que la tabla consta de: nombre del teorema, la formula y ejemplo. Esta tabla puede ser usada por el alumno como de ayuda para resolver distintos ejercicios que se pueda presentar

TEOREMA	FÓRMULA	EJEMPLO
Teorema de una constante	f(x)=c $f' = 0$	f(x)=5 $f'(x) = 0$
Teorema para la potenciación	$f(x) = x^n$ $f'(x) = nx^{n-1}$	$f(x) = x^3$ $f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$
Teorema de la función identidad	$f(x) = x$ $f'(x) = 1$	$f(x) = x$ $f'(x) = 1$
Teorema del producto de una constante por función	$f(x) = cx^n$ $f'(x) = cnx^{n-1}$	$f(x) = 6x^2$ $f'(x) = (6 * 2)x^{n-1}$ $=12x$
Teorema para la suma y diferencia	$h(x) = f(x) + g(x)$ $h'(x) = f'(x) + g'(x)$	$h(x) = 5x^2 + 3x$ $\frac{d}{dx}(5x^2 + 3x) =$ $5\frac{d(x^2)}{dx} + 3\frac{d(x)}{dx} =$ $h'(x) = 5 * 2x^{2-1} + 3x^{1-1}$ $h'(x) = 10x + 3$
Teorema para el producto	$h(x) = f(x) * g(x)$ $h'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$	$h(x) = 2x^2 * (3x + 2)$ $h'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x$ $h'(x) = 2x^2(3) + (3x + 2)(4x)$ $h'(x) = 6x^2 + 12x^2 + 8x$
Teorema para el cociente	$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ donde g(x)≠ 0 $h'(x) = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x}{[g(x)]^2}$	$h(x) = \frac{x^2+2}{(5x)}$ $h'(x) = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ $h'(x) = \frac{5x(2x)-(x^2+2)(5)}{[5x]^2}$ $h'(x) = \frac{10x^2-5x^2-10)}{[5x]^2}$ $h'(x) = \frac{5x^2-10)}{[5x]^2}$ $h'(x) = \frac{5x^2-10}{25x^2}$ $h'(x) = \frac{5/5x^2-10/5}{25/5x^2}$ $h'(x) = \frac{x^2-2}{5x^2}$
Teorema regla de la cadena	$h(x) = f(g(x))$ $h'(x) = f'(g(x)) * g'(x)$	$h(x) = (x^3 + 2)^2$ $h'(x) = 2(x^3 + 2)^1(3x^2)$ $h'(x) = (2x^3 + 4)\ (3x^2)$ $h'(x) = 6x^5 + 12x^2)$





ACTIVIDADES

1.- Resolver los siguientes ejercicios propuestos aplicando los distintos teoremas de derivación de la tabla anterior

a) $f(x)=-2$

b) $f(x)=x^2$

c) $f(x)=5x$

d) $f(x)=6(2x-4)$

e) $f(x)=2x^2-3x+1$

d) $f(x)=(3x^2)(5x-1)$

f) $f(x)=(4x^3-2)/2x^2$

e) $f(x)=(3x^2+3x-4)^3$

2.- ¿Cuál es la velocidad que lleva un vehículo se mueve según la ecuación $e(t)=2-3t^2$ en el quinto segundo de su recorrido? El espacio se mide en metros y el tiempo en segundos.

Resuelva el problema de forma analítica en su cuaderno y realice la simulación en Geogebra de tal manera que a partir de la tangente se genere la función derivada, puede guiarse en la siguiente simulación y video

Enlace Simulación:
https://www.geogebra.org/m/yvrxsjye

APRENDE+

Enlace del video de como hacer la simulación:
https://www.youtube.com/watch?v=n_hZoBICbWk

3.-Resuelva el siguiente problema de forma analítica en su cuaderno con su respectiva gráfica, y compruebe los resultados obtenidos mediante el comando (derivar) y las gráficas respectiva de la función original como derivada con la ayuda de Geogebra.

El desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por $s=t^2-8t+18$, donde t se mide en segundo

Enlace Simulación:
https://www.geogebra.org/m/fdt9yepg

a. Encuentre la velocidad promedio en cada intervalo de tiempo:

1. [3;4]

2. [3,5;4]

3. [4;5]

4. [4;4,5]

b. Halle la velocidad instantánea cuando t = 4

CONSOLIDACIÓN

(TIEMPO RECOMENDADO 20 MINUTOS)

Actividades propuestos

1. Resolver cada ejemplo con su regla respectiva

a) $f(x) = 7x^4 - 2x^3 + 8x + 5$

$f'(x) = \frac{dy}{dx}(7x^4) - \frac{dy}{dx}(2x^3) + \frac{dy}{dx}(8x) + \frac{dy}{dx}(5)$

$f'(x) = 28x^3 - 6x^2 + 8$

b) $g(x) = (2x^3 - 4x^2)(3x^5 + x^2)$

$g(x) = 6x^8 - 12x^7 + 2x^5 - 4x^4$

$g'(x) = \frac{dy}{dx}(6x^8) - \frac{dy}{dx}(12x^7) + \frac{dy}{dx}(2x^5) - \frac{dy}{dx}(4x^4)$

$g'(x) = 48x^7 - 84x^6 + 10x^4 - 16x^3$

c) $y = (3x^4 + 15x)(4x^7 - 3x^5)$

$f'(x) = (4x^7 - 3x^5)(\frac{dy}{dx}\, 3x^4 + 15x) + (3x^4 + 15x)(\frac{dy}{dx} 4x^7 - 3x^5)$

$f'(x) = (4x^7 - 3x^5)(12x^3 + 15) + (3x^4 + 15x)(28x^6 - 15x^4)$

d) $y = \frac{3x^4 - 18}{x^2 + 5x}$

$f'(x) = \frac{(x^2+5x)(\frac{dy}{dx}3x^4 - 18) - (3x^4 - 18)(\frac{dy}{dx}x^2 + 5x)}{(x^2+5x)^2}$

$f'(x) = \frac{(x^2+5x)(12x^3) - (3x^4 - 18)(2x+5)}{(x^2+5x)^2}$

$f'(x) = \frac{6x^5 + 45x^4 + 36x + 90}{x^4 + 10x^3 + 25x^2}$

2 Resolver y graficar en las siguientes funciones con sus respectivas derivadas., además realizar a manera de comprobación la grafica y su derivada en Geogebra, finalmente preséntelo al docente en clases

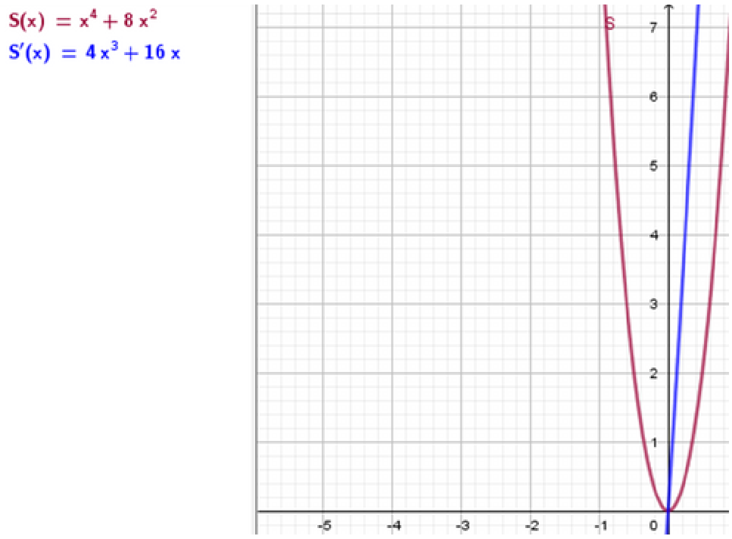
a) $S(x) = x^4 + 8x^2$

$$\frac{d(x^4)}{dx} + 8\frac{d(x^2)}{dx} =$$

$$x^3 + 8 * 2x =$$

$$x^3 + 16x$$

Enlace Simulación:
https://www.geogebra.org/m/ggm2sve3



b) $U(t) = \frac{6t^2+3t}{2t}$

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$U'(t) = \frac{2t(12t+3)-(6t^2+3t)(2)}{[2t]^2}$$

$$U'(t) = \frac{24t^2+6t-12t^2-6t}{4t^2}$$

$$U'(t) = \frac{24t^2-12t^2}{4t^2}$$

$$U'(t) = \frac{12t^2}{4t^2} = 3$$

Enlace Simulación:
https://www.geogebra.org/m/upuaa5mn

GeoGebra

c) $A(c) = (3c^2 + 3)^2$

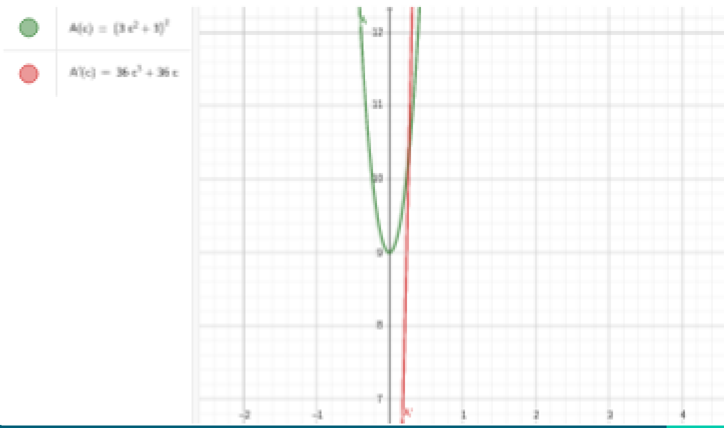
$$h'(x) = f'(g(x)) * g'(x)$$

$$A'(c) = f'(g(c)) * g'(c)$$

$$A'(c) = 2(3c^2 + 3) * 6c$$

$$A'(c) = 36c^3 + 36c$$

Enlace Simulación:
https://www.geogebra.org/m/jv3wswsg



CONCLUSIÓN

1- Marque Verdadero o Falso.

a) La derivada de una función constante es igual a uno.

Verdadero
Falso

b) En la regla del cociente su denominador queda elevado al cuadrado.

Verdadero
Falso

c) Las reglas de derivación agilitan el tiempo para calcular la derivada de una función

Verdadero
Falso

d)Complete. La derivada de una función permite encontrar la pendiente de la **recta tangente** en ese punto,

RECORTABLE

Actividades propuestos

1. Resolver cada ejemplo con su regla respectiva

a) $f(x) = 7x^4 - 2x^3 + 8x + 5$

b) $g(x) = (2x^3 - 4x^2)(3x^5 + x^2)$

c) $y = (3x^4 + 15x)(4x^7 - 3x^5)$

d) $y = \frac{3x^4 - 18}{x^2 + 5x}$

2 Resolver y graficar en las siguientes funciones con sus respectivas derivadas., además realizar a manera de comprobación la grafica y su derivada en Geogebra, finalmente preséntelo al docente en clases

a) $S(x) = x^4 + 8x^2$

b) $U(t) = \frac{6t^2+3t}{2t}$

c) $A(c) = (3c^2 + 3)^2$

CONCLUSIÓN

1- Marque Verdadero o Falso.

a) La derivada de una función constante es igual a uno.

Verdadero
Falso

b) En la regla del cociente su denominador queda elevado al cuadrado.

Verdadero
Falso

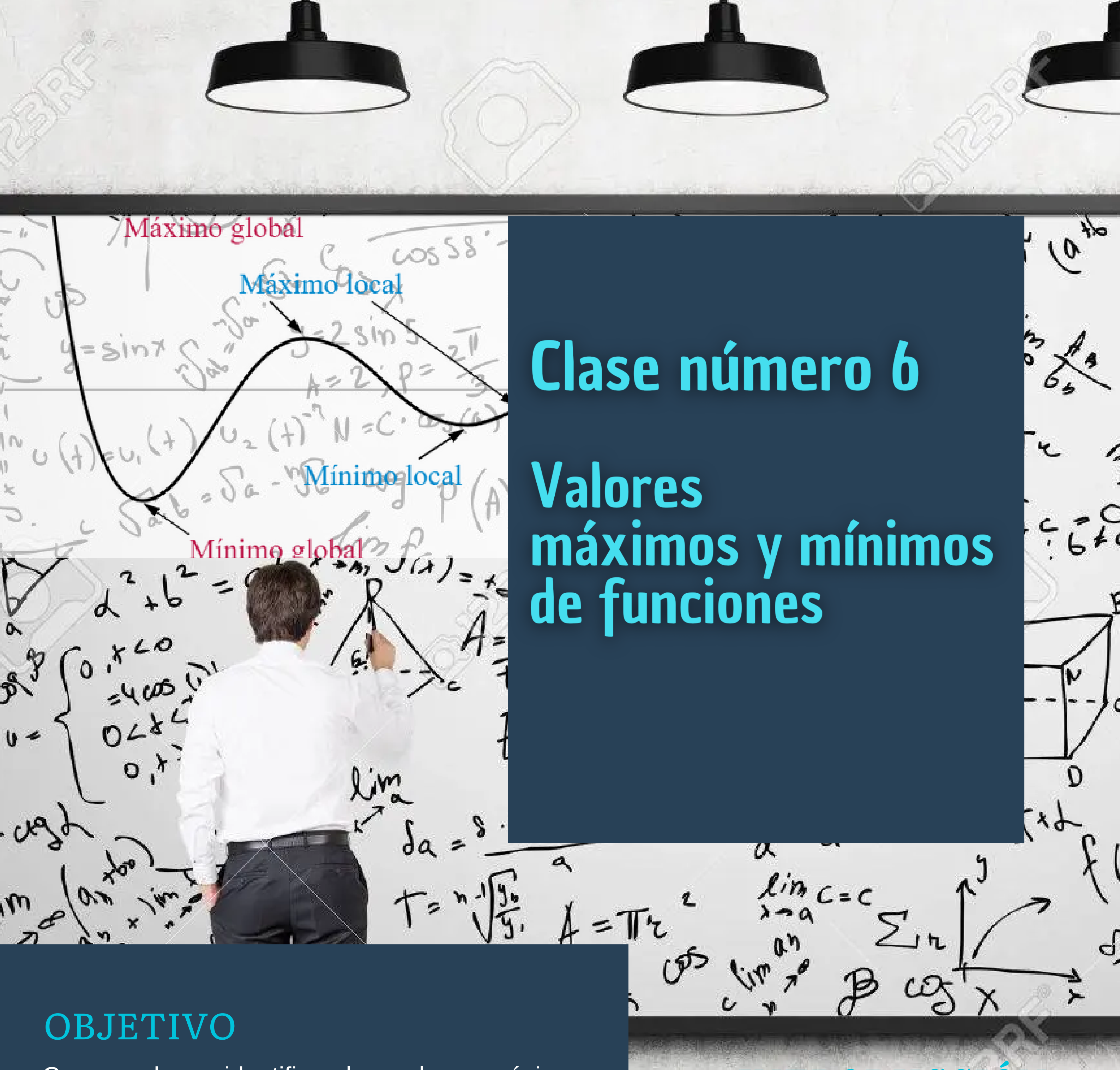
c) Las reglas de derivación agilitan el tiempo para calcular la derivada de una función

Verdadero
Falso

d)Complete. La derivada de una función permite encontrar la pendiente de la ______________________________en ese punto,

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

	Muy bien	Bien	Regular	Insuficiente	Observaciones
Muestra interés usando los recursos para resolver problemas					
Demuestra interés por aprender y usar Geogebra					
Relaciona los problemas planteados con las reglas respectivas					
Usa Geogebra para plantear y resolver problemas					
Realiza presentacione s adecuadas usando Geogebra					
Respeta los tiempos establecidos en las actividades					



Clase número 6

Valores máximos y mínimos de funciones

OBJETIVO

Comprender e identificar los valores máximos y mínimos de una función f(x) cualquiera mediante Geogebra

Logros de aprendizaje esperado

- Aplica la primera derivada para determinar máximos y mínimos en una función
- Identifica gráficamente los máximos y mínimos en cualquier función f(x)
- Interpretar la representación de las máximos y mínimos en la gráfica mediante Geogebra

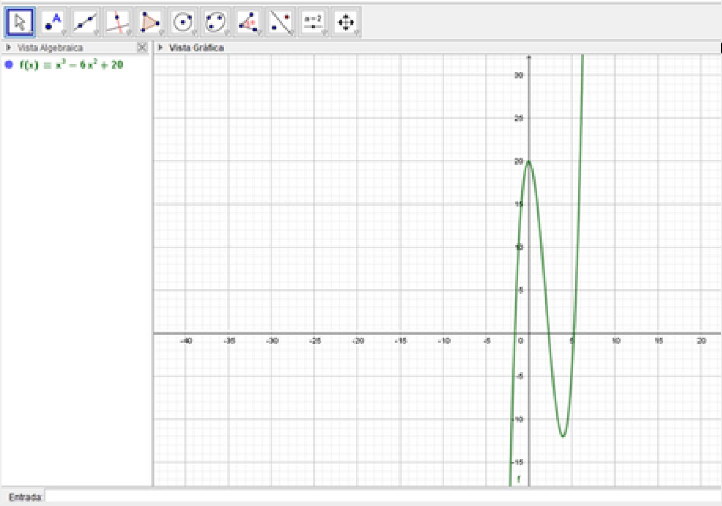
INTRODUCCIÓN

En esta clase se abordará los conceptos como máximos y mínimos relativos, absolutos, a la vez se verá gráficamente estos extremos a través del software geogebra como apoyo visual. El estudiante trabajará activamente modelando gráficas, a la vez identificando cuáles son los máximos y mínimos de cada función lo cual es de vital importancia para resolver y abordar temas posteriores como la optimización de funciones.

ANTICIPACIÓN

(TIEMPO RECOMENDADO DE 20 MINUTOS)

1. Se presenta a los alumnos las siguientes imágenes como introducción al tema, se puede observar el



Enlace Grafica:
https://www.geogebra.org/m/wrpgfkdz

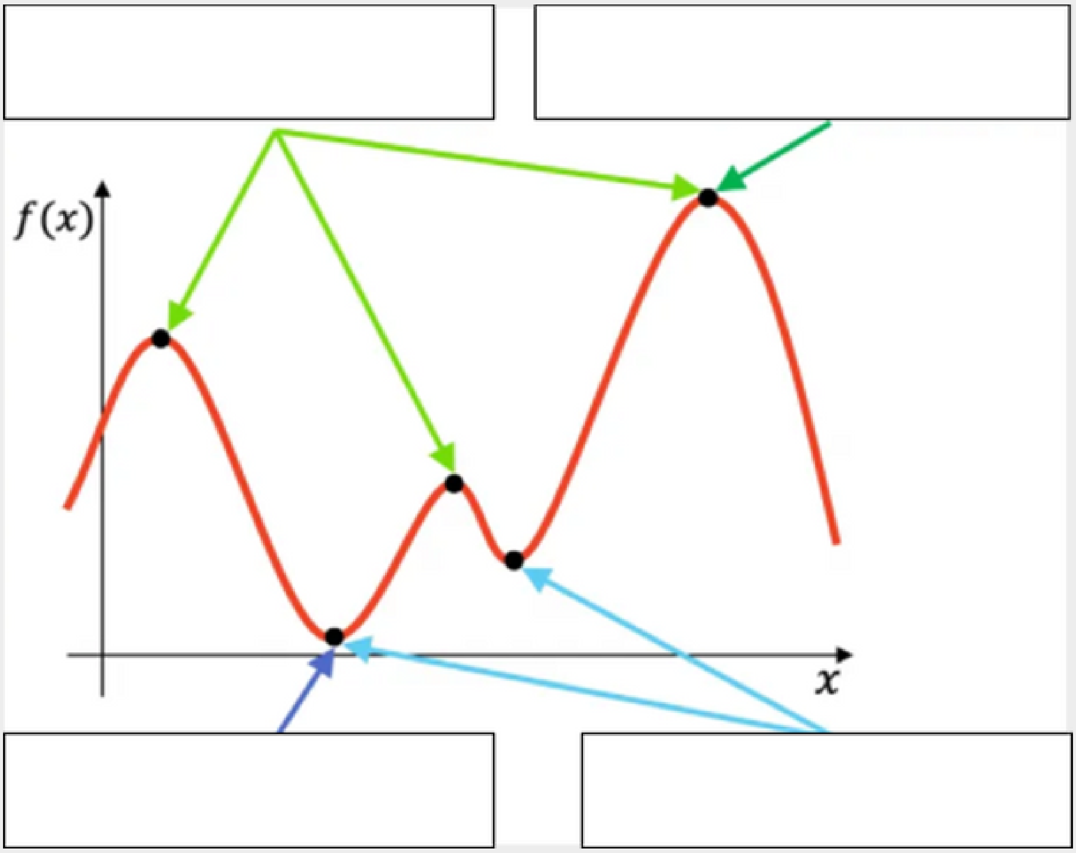
El estudiante procederá a ver la siguiente imagen y posteriormente responder las siguientes preguntas

A) EN LA IMAGEN SE MUESTRA UNA FUNCIÓN F(X) CUALQUIERA. DIBUJE Y SEÑALE CUÁL PODRÍA SER UN MÁXIMO ?

B) SEÑALE CUÁL PODRÍA SER UN MÍNIMO EN LA MISMA IMAGEN Y DIBÚJELO?

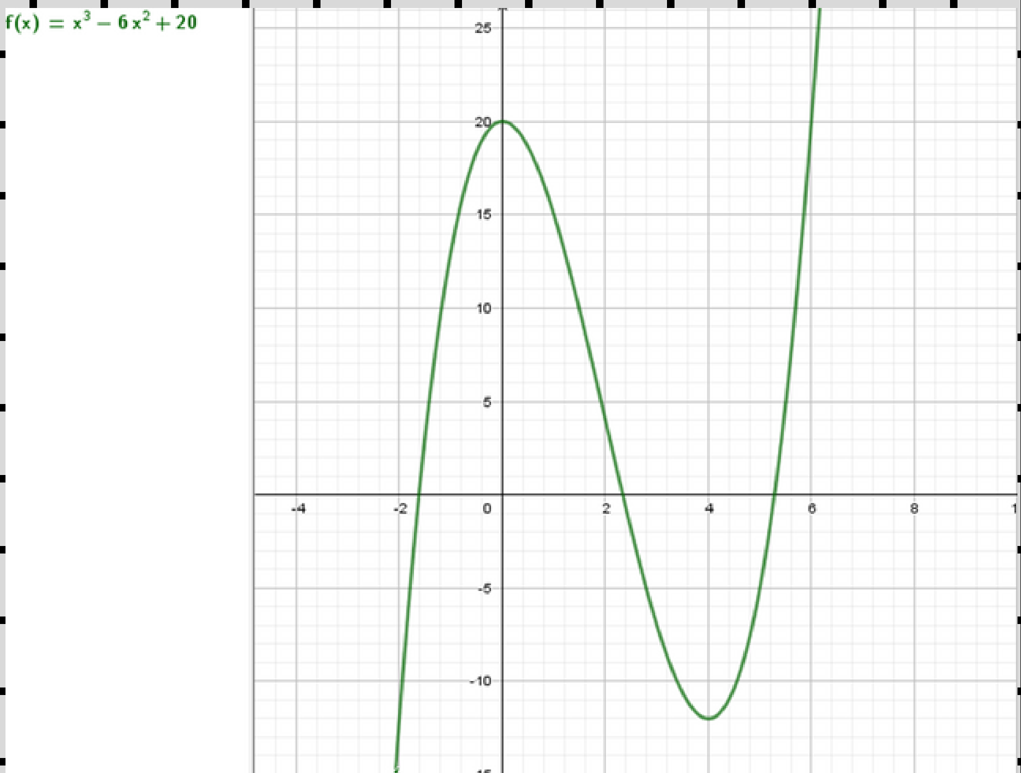
C) EN LA SIGUIENTE IMAGEN LLENAR LOS RECUADROS CON LAS SIGUIENTES PALABRAS

- MÁXIMOS RELATIVOS
- MÁXIMO ABSOLUTO
- MÍNIMO RELATIVO
- MÍNIMO ABSOLUTO



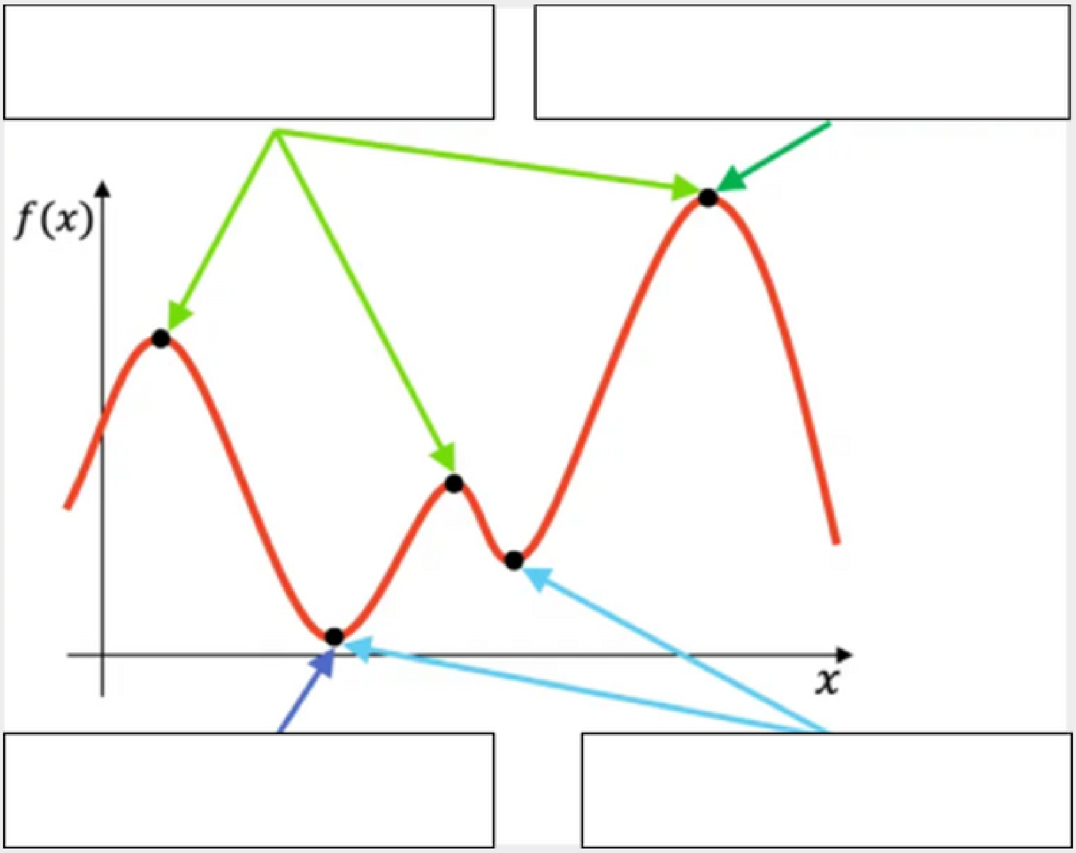
D) EN LA SIGUIENTE IMÁGENES SEÑALE CUÁLES PODRÍAN SER UN MÁXIMO O MÍNIMO Y ANOTEL LOS PARES ORDENADOS DONDE SE UBICAN

Enlace grafica:
https://www.geogebra.org/m/bdkw7gmx



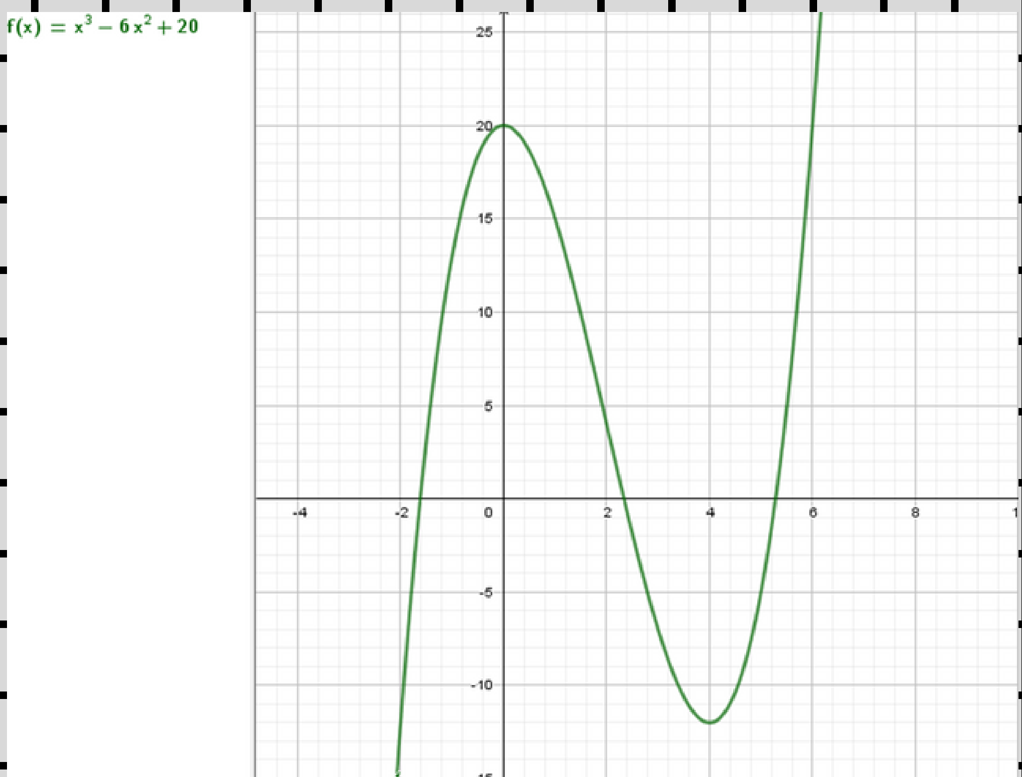
C) EN LA SIGUIENTE IMAGEN LLENAR LOS RECUADROS CON LAS SIGUIENTES PALABRAS

- MÁXIMOS RELATIVOS
- MÁXIMO ABSOLUTO
- MÍNIMO RELATIVO
- MÍNIMO ABSOLUTO



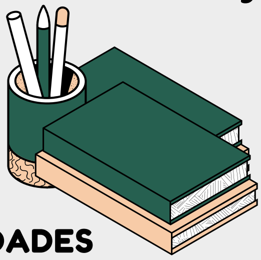
D) EN LA SIGUIENTE IMÁGENES SEÑALE CUÁLES PODRÍAN SER UN MÁXIMO O MÍNIMO Y ANOTEL LOS PARES ORDENADOS DONDE SE UBICAN

Enlace grafica:
https://www.geogebra.org/m/bdkw7gmx



CONSTRUCCIÓN

(TIEMPO RECOMENDADO DE 45 MINUTOS)



ACTIVIDADES

1 DEFINA CON SUS PROPIAS PALABRAS QUÉ ES UN MÁXIMO ABSOLUTO Y RELATIVOS

____

____

____

____

____

____

2 DEFINA CON SUS PROPIAS PALABRAS QUÉ ES UN MÍNIMO ABSOLUTO Y RELATIVOS

____

____

____

____

____

____

DEFINICIONES

En esta parte de la clase tanto docente y alumno podrán observa las simulaciones de las definiciones para poder entender de mejor manera

Máximos absoluto

El valor máximo absoluto de una función f es un único valor más grande en un intervalo I para el cuál se cumple qué f(c)$\geq f(x)$, para todo x del intervalo en el cuál se encuentra **c**.

Enlace simulación:
https://www.geogebra.org/m/eevpkdh9

Mínimo absoluto

El valor mínimo absoluto de una función f es un único valor más pequeño en un intervalo I en el cuál se debe cumplir siempre qué f(c)$\leq f(x)$, para todo x del intervalo en el cuál se encuentra **c**.

Enlace simulación:
https://www.geogebra.org/m/pk9tjdfv

Máximo relativo

La función f tiene un valor máximo relativo en c, si $f(c) \geq f(x)$ para toda x en dicho intervalo, es decir que f(c) es mayor a los valores que estén tanto a lado derecho e izquierdo

Enlace simulación:
https://www.geogebra.org/m/zwydhmhc

Mínimo relativo

La función f tiene un valor mínimo relativo en c, si $f(c) \leq f(x)$ para toda x en dicho intervalo, es decir que f(c) es menor a los valores que estén tanto a lado derecho e izquierdo

Enlace simulación:
https://www.geogebra.org/m/ec96pyed

3 EN PAREJAS REALIZAR LA SIGUIENTE ACTIVIDAD: GRAFICAR LA FUNCIÓN CON INTERVALOS EN GEOGEBRA PARA PRESENTAR EN CLASES, COMO APOYO MIRE EL SIGUIENTE VIDEO.

APRENDE+

Enlace del video de como graficar con intervalos
https://www.youtube.com/watch?v=eD9HrlNM8B0

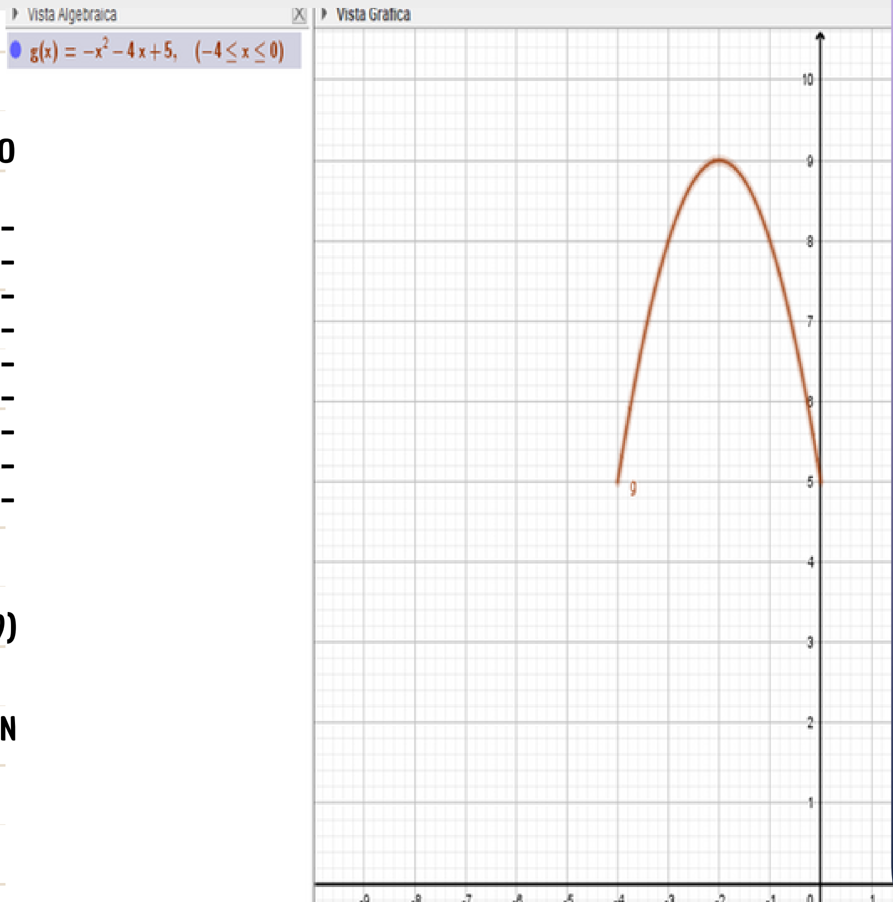
- f(x)= $-x^2 - 4x + 5 \quad (-4 \leq x \leq 0)$

RESPONDER LAS SIGUIENTES PREGUNTAS
EL PUNTO (-2,9) SE CONSIDERA UN MÁXIMO RELATIVO O MÍNIMO RELATIVO Y POR QUÉ ?

VERDADERO O FALSO
HAY VALORES MAYORES QUE EL PUNTO (-2,9)
V F

HAY DOS MÁXIMOS EN LA FUNCIÓN
V F

SOLO TIENE MINIMOS
V F



- $f(x) = x^2 - 4x + 5 \quad (-1 \leq x \leq 5)$

RRESPONDER LAS SIGUIENTES PREGUNTAS

1. EL PUNTO (2,1) SE CONSIDERA UN MÁXIMO RELATIVO O MÍNIMO RELATIVO Y POR QUÉ ?

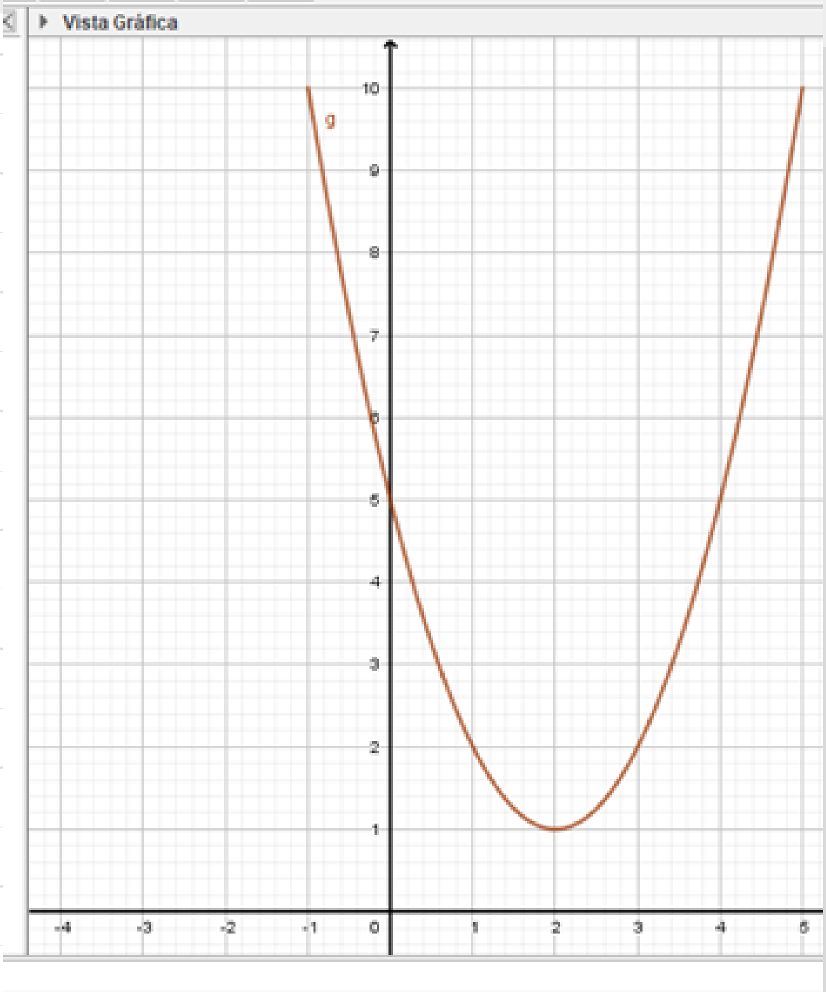
----

1. VERDADERO O FALSO

EXISTEN PUNTOS DE MAYOR VALOR QUE EL (-2,9) V F

HAY DOS MÁXIMOS EN LA FUNCIÓN V F

SOLO TIENE 1 MÍNIMO V F

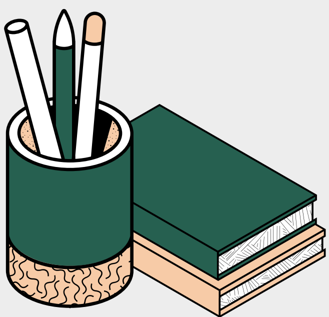


4 EN LA SIGUIENTE GRÁFICO DETERMINE TODOS LOS MÁXIMOS Y MÍNIMOS QUE ENCUENTRE EN LA FUNCIÓN, SE SUGIERE REVISAR LA GRAFICA EN GEOGEBRA PARA MEJOR RESOLUCIÓN

- $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 5 \quad (-1.5 \leq x \leq 1)$

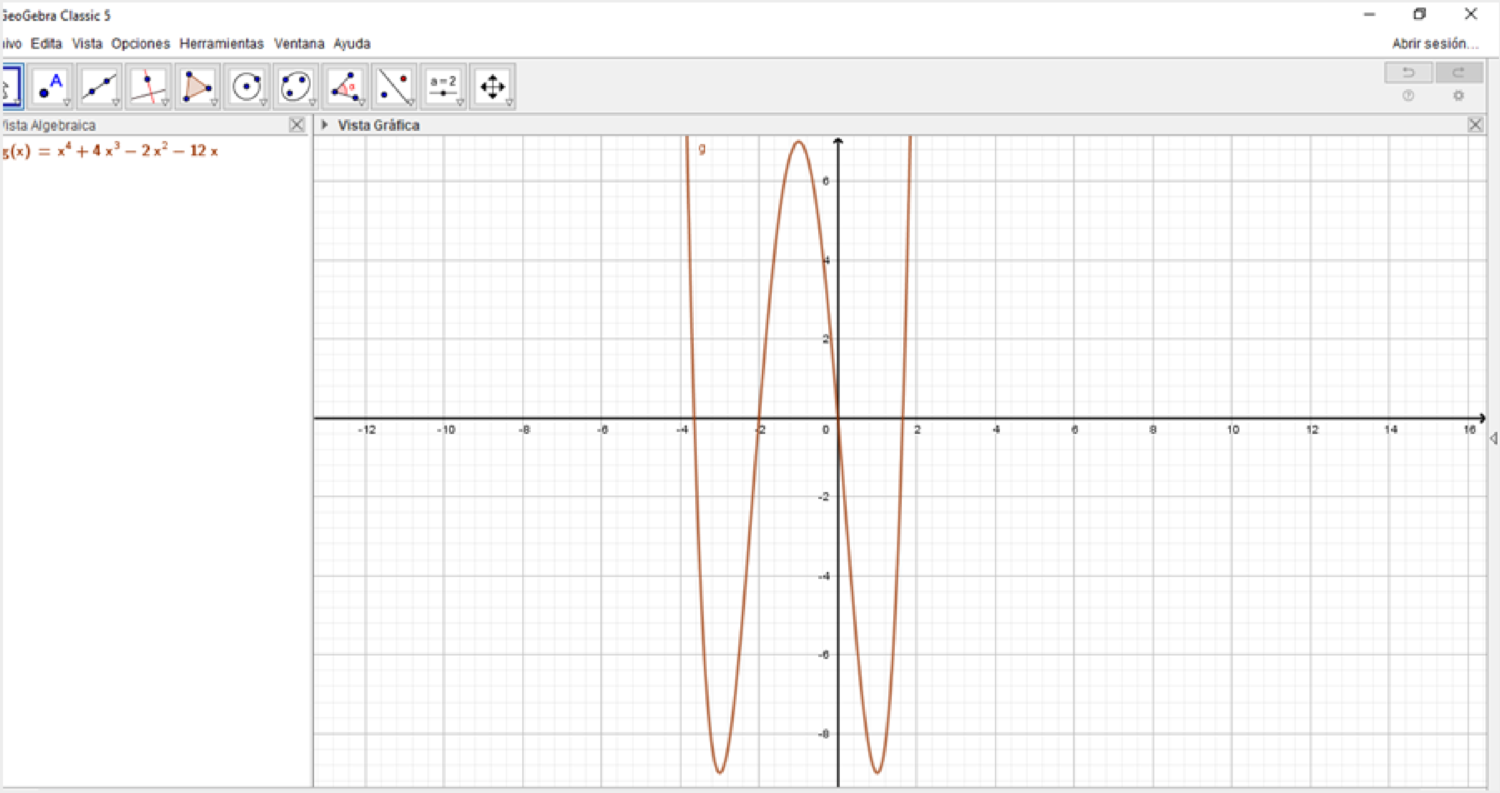
Los puntos críticos son aquellos puntos donde se puede presentar un máximo relativo o un mínimo relativo. Los puntos críticos resultan de igualar la derivada de una función a cero.

Enlace grafica
https://www.geogebra.org/m/scdfkpq5



PARA REFLEXIONAR

1. COMPLETE EN BASE A LA IMAGEN



Para calcular el máximo o mínimo de una función, si no se contaría con la gráfica, se debe usar los puntos críticos. ¿En la gráfica señale cuáles serían los puntos críticos que nos ayudarán a encontrar ya sea máximos o mínimos ?

Complete: Si quiero encontrar los puntos críticos necesito usar la _______________ por qué además de permitir encontrar la pendiente de la recta tangente, nos permite ver los cambios de la función en los puntos críticos

2. En grupo de 3 alumnos resolver el siguiente ejercicio conjuntamente con el docente

- Dos montañas están unidas por la siguiente función $x^{2} - 4x + 5,$

se requiere construir un puente para eso el constructor necesita saber el punto mínimo de la unión de las dos montañas, para así construir el puente a un nivel de referencia según la norma de construcción. Calcule dicho punto mínimo realizando la gráfica para visualizar su respuesta mediante Geogebra y presente en clases.

CONSOLIDACIÓN

(TIEMPO RECOMENDADO DE 20 MINUTOS)

ACTIVIDADES EN CASA

1. Encontrar máximos y mínimos de las siguientes gráficas de funciones, se debe realizarlo en Geogebra con la opción extremos relativos y anote las respuestas según que tipo de máximos y mínimos que encuentre

a) $f(x) = x^3 - x^2 + 1$

Enlace grafica solucionado
https://www.geogebra.org/m/npsbwsjy

b) $f(x) = x^4 - x^2 + 1$

Enlace grafica solucionado
https://www.geogebra.org/m/vfvzrhax

c) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x \quad (-2 \leq x \leq 1.5)$

Enlace grafica solucionado
https://www.geogebra.org/m/wyckfdft

2. Un fabricante de cajas de cartón plantea elaborar cajas abiertas a partir de trozos rectangulares de cartón con dimensiones de 20 cm por 34 cm, para lo cuál se procede a cortar cuadrados en las cuatro esquinas y doblando los lados hacia arriba.

Enlace simulación del problema
https://www.geogebra.org/m/mzekgdf5

a) Encuentre la función matemática qué defina la situación qué plantea el enunciado.

$V(x) = (20\text{-}2x)(34\text{-}2x)(x)$

$V(x) = 4x^3\text{-}108x^2\text{+}680x$

b) Determine los puntos críticos de la función matemática del inciso anterior

$V'(x) = 12x^2 - 216x + 680$

$V'(x) = 0$

$12x^2 - 216x + 680 = 0$

$x1 = 13.93 \qquad x2 = 4.06$

c) Determine la longitud del lado de los cuadrados qué se deben cortar para qué el volumen de la caja resulte el mayor posible.

Dominio de $V(x)$ $[0; 10]$

$x1 = 13.93$ fuera del dominio

$x2 = 4.06$ dentro del dominio

$x2 = 4.06$ dentro del dominio

$$V(x2) = 4(4.06)^3 - 108(4.06)^2 + 680(4.06)$$

$$V(x2) = 1248.27 \text{ cm}^3$$

d) Con la ayuda de la simulación de Geogebra verifique si el punto x2= 4.06 es máximo o mínimo

CONCLUSIÓN

Responda las siguientes preguntas

1 Defina los conceptos de máximo relativo y absoluto

____

____

____

____

____

2. Defina los conceptos de mínimos relativos y absolutos

____

____

____

____

__

3. Defina que es un punto crítico

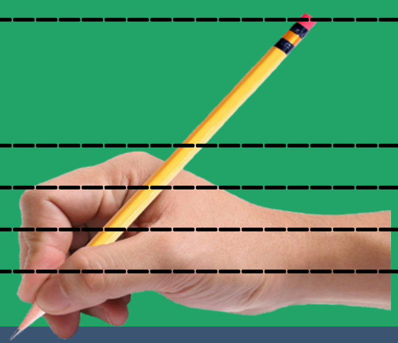
____

____

____

____

____



RECORTABLE

ACTIVIDADES EN CASA

1. Encontrar máximos y mínimos de las siguientes gráficas de funciones, se debe realizarlo en Geogebra con la opción extremos relativos y anote las respuestas según que tipo de máximos y mínimos que encuentre

a) $f(x) = x^3 - x^2 + 1$

b) $f(x) = x^4 - x^2 + 1$

c) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x \quad (-2 \leq x \leq 1.5)$

RECORTABLE

2. Un fabricante de cajas de cartón plantea elaborar cajas abiertas a partir de trozos rectangulares de cartón con dimensiones de 20 cm por 34 cm, para lo cuál se procede a cortar cuadrados en las cuatro esquinas y doblando los lados hacia arriba.

Enlace simulación del problema
https://www.geogebra.org/m/mzekgdf5

a) Encuentre la función matemática qué defina la situación qué plantea el enunciado.

b) Determine los puntos críticos de la función matemática encontrada en el inciso anterior

c) Determine la longitud del lado de los cuadrados qué se deben cortar para qué el volumen de la caja resulte el mayor posible.

d) Con la ayuda de la simulación de Geogebra verifique si el punto x2= 4.06 es máximo o mínimo

CONCLUSIÓN

Responda las siguientes preguntas

1 Defina los conceptos de máximo relativo y absoluto

____

____

____

____

____

2. Defina los conceptos de mínimos relativos y absolutos

____

____

____

____

__

3. Defina que es un punto crítico

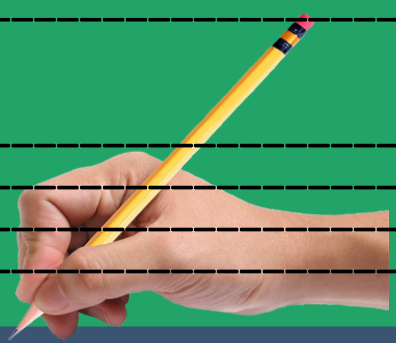
____

____

____

____

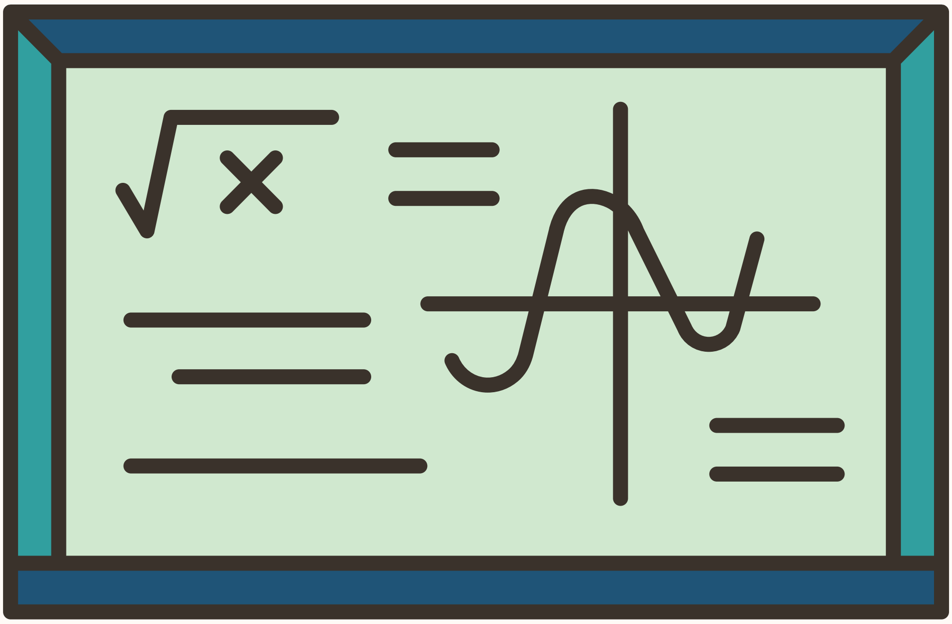
____



CRITERIOS DE EVALUACIÓN

	Muy bien	Bien	Regular	Insuficiente	Observaciones
Realiza y participa en todas las actividades de planteadas r					
Demuestra interés por aprender y usar Geogebra					
Reflexiona sobre actividades de razonamiento					
Usa Geogebra para plantear y resolver problemas					
Resuelve los ejercicios de manera ordena y clara					
Respeta los tiempos establecidos en las actividades					

CLASE NÚMERO 7 FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES, CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA



01

INTRODUCCIÓN

En esta clase se va a tratar conceptos como función creciente, decreciente,puntos críticos y la forma de gráfica a partir de los puntos en un cierto intervalo, tanto de manera manual y en Geogebra para así poder ponerlas en prácticas frente a los problemas diarios que se pueden dar en diferentes aspectos de la vida cotidiana . Para comenzar esta clase se procederá con la metodología lluvia de ideas acerca del vídeo propuesto a mostrar, consiguiente se plantea situaciones didácticas en la que se procederá a realizar un análisis de la interpretación geométrica y analítica del tema y finalmente se procederá a realizar una evaluación para constatar los conocimientos adquiridos.

02

OBJETIVO

Obtener las propiedades gráficas y el comportamiento de cualquier función mediante la aplicación de la primera derivada con su respectivo análisis a través de Geogebra

03

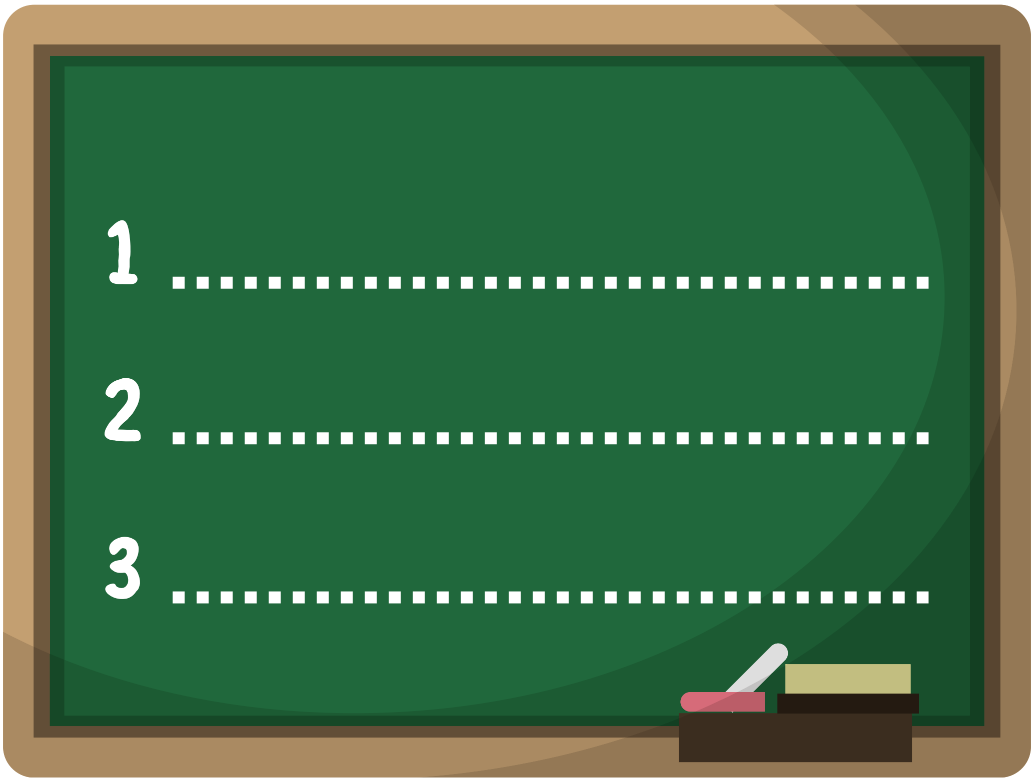
LOGROS DE APRENDIZAJE ESPERADO

1. - Determina si las funciones son crecientes o decrecientes en diferentes tramos
2. - Relacionar los puntos críticos de una función con el comportamiento de la función
3. - Graficar a partir de una tabla de análisis de los puntos críticos y comprobar mediante Geogebra

ANTICIPACIÓN

(TIEMPO RECOMENDADO DE 20 MINUTOS)

Se hará una lluvia de ideas acerca de que son las funcione crecientes y decreciente



El alumno responderá las siguientes preguntas para recordar los conocimientos previos

a) ¿A que se conoce como función creciente ?

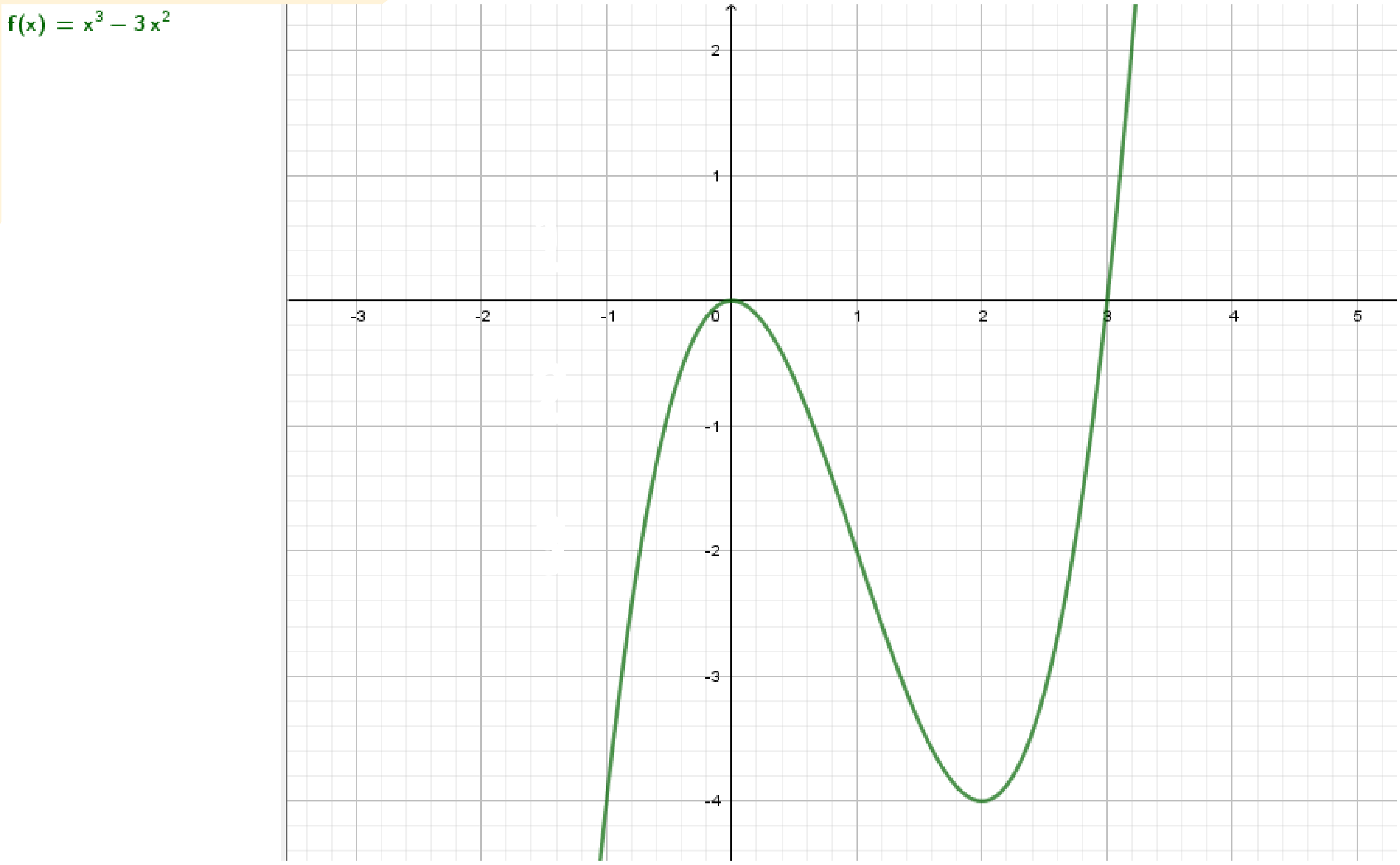
b) ¿A que se conoce como función decreciente?

c) Qué es un punto crítico en la función

A continuación el alumno procederá a ver la siguiente imagen, para mejor visualización de la simulación se puede abrir el siguiente enlace

LINK DE LA FUNCIÓN:

https://www.geogebra.org/m/qcpyavng



- En la gráfica señala en qué intervalos la función es creciente y decreciente, además dibuje con Geogebra por separado los tramos en los que la función crece y decrece.

- En la gráfica señala donde están ubicados los puntos críticos y dibújelos

----

CONSTRUCCIÓN

(TIEMPO RECOMENDADO DE 1 HORA)

ACTIVIDADES

1 ANALICE EL SIGUIENTE CASO

Un arquitecto desea realizar un puente siguiendo el contorno de una montaña, solo cuenta con una función que representa dicha montaña que es $F(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, el arquitecto desea saber las monotonías de dicha función en los tramos, y cómo es su gráfica, ya que necesita saberlo para poder realizar el diseño de dicho puente. Para eso se proporciona las siguiente información y también un cuadro como guía que se debe llenar.

RECUERDA QUE:

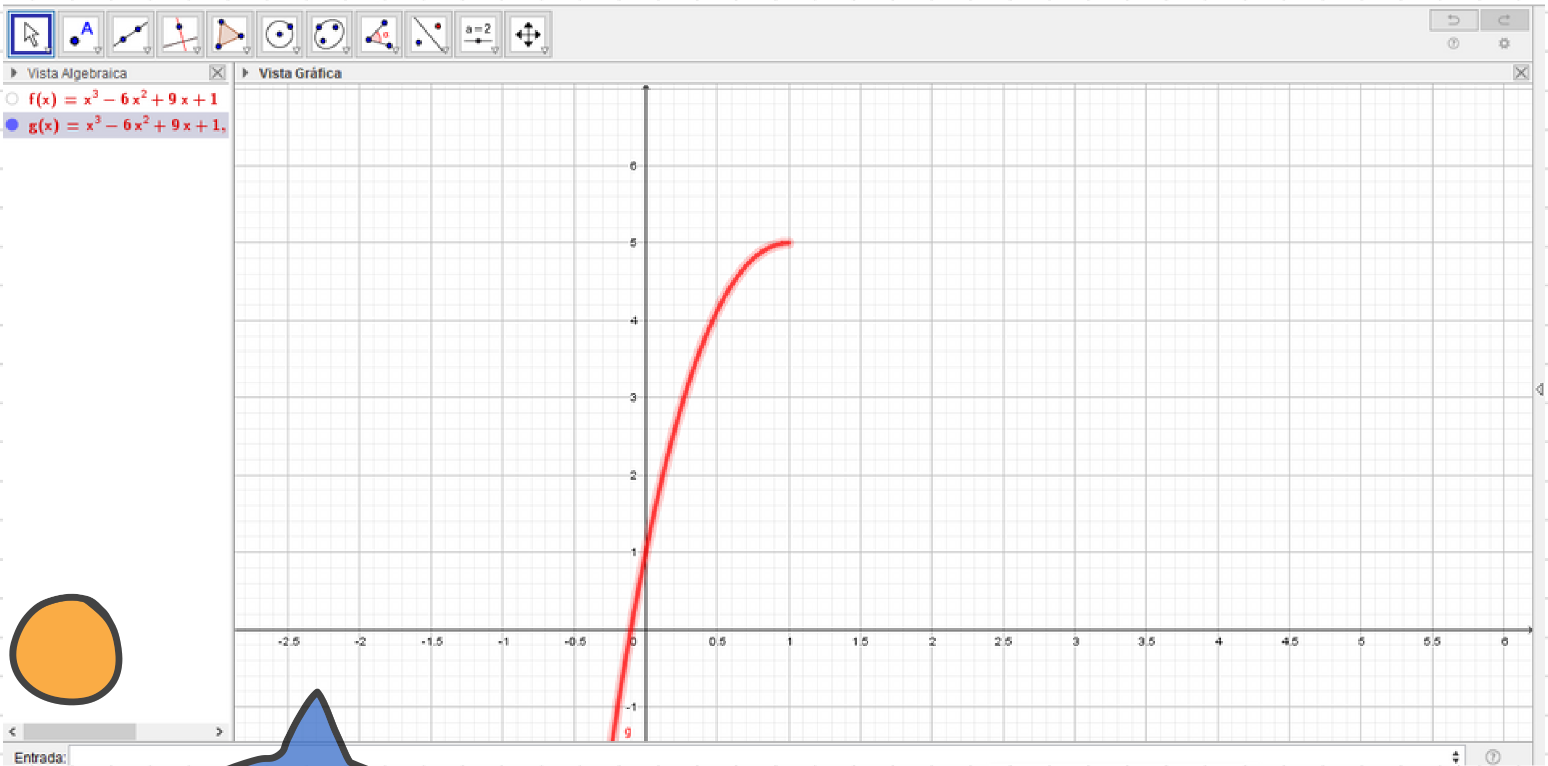
Recuerde que para calcular los puntos críticos se debe usar f,(x)=0 y resolverlo encontrando la solución de la ecuación, dichas soluciones pasan a ser los puntos críticos
Para saber la monotonía se debe tomar en cuenta f,(x) es mayor que cero es creciente y f,(x) menor que cero es decreciente

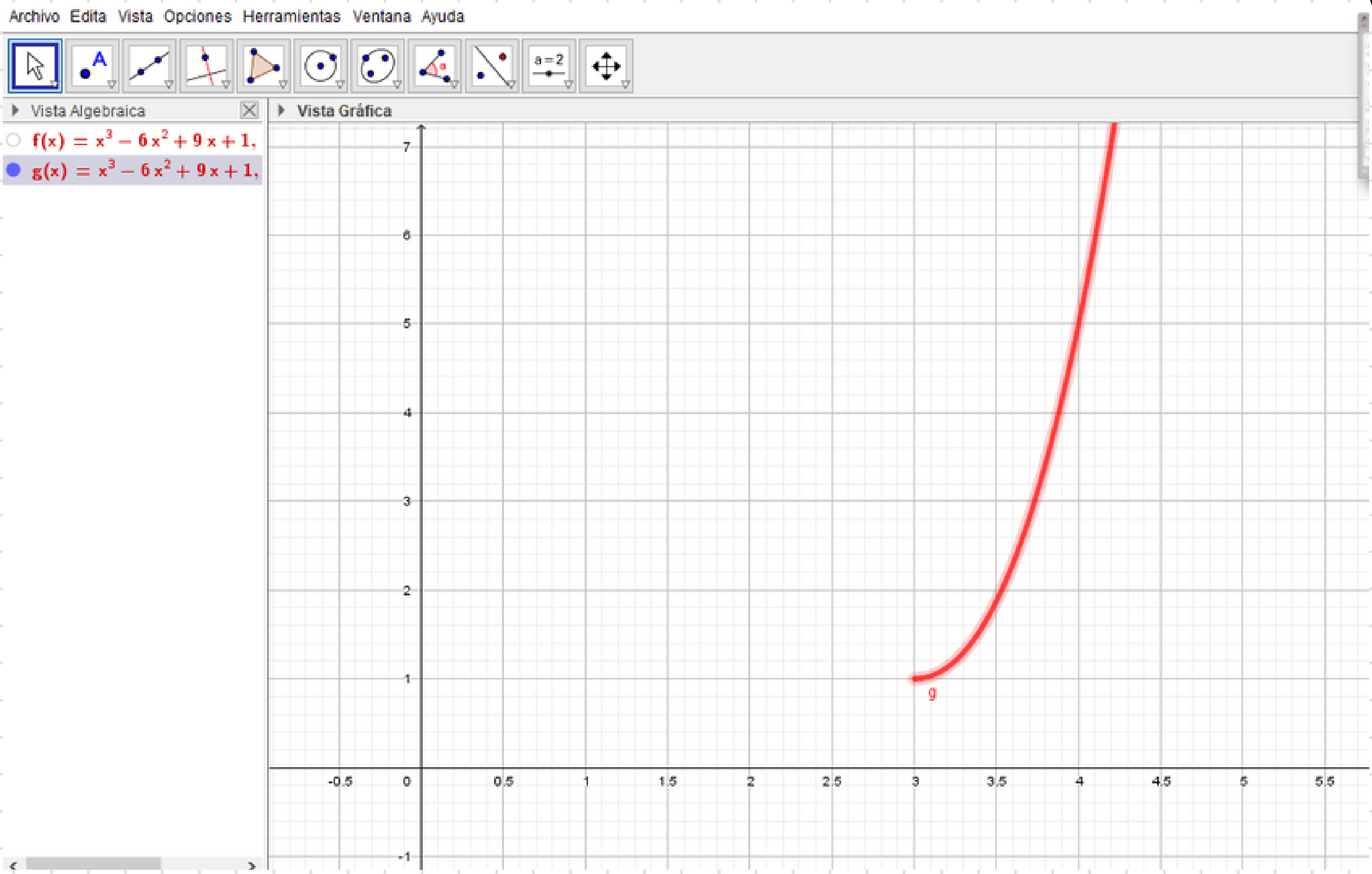
A Continuación se presenta la siguiente tabla como orientación para el desarrollo de la actividad

valores antes del punto crítico x=		**valores intermedios entre los puntos críticos x=**		**valores después del punto crítico x=**
f`(x)=	**Punto crítico calculado =**	**f`(x)**	**Punto crítico calculado =**	**f`(x)**
Signo		**signo**		**signo**
Entonces este tramo es…………………………………… ………………		**Entonces este tramo es………… …………… …………… …………**		**Entonces este tramo es……………………………………… ………………**

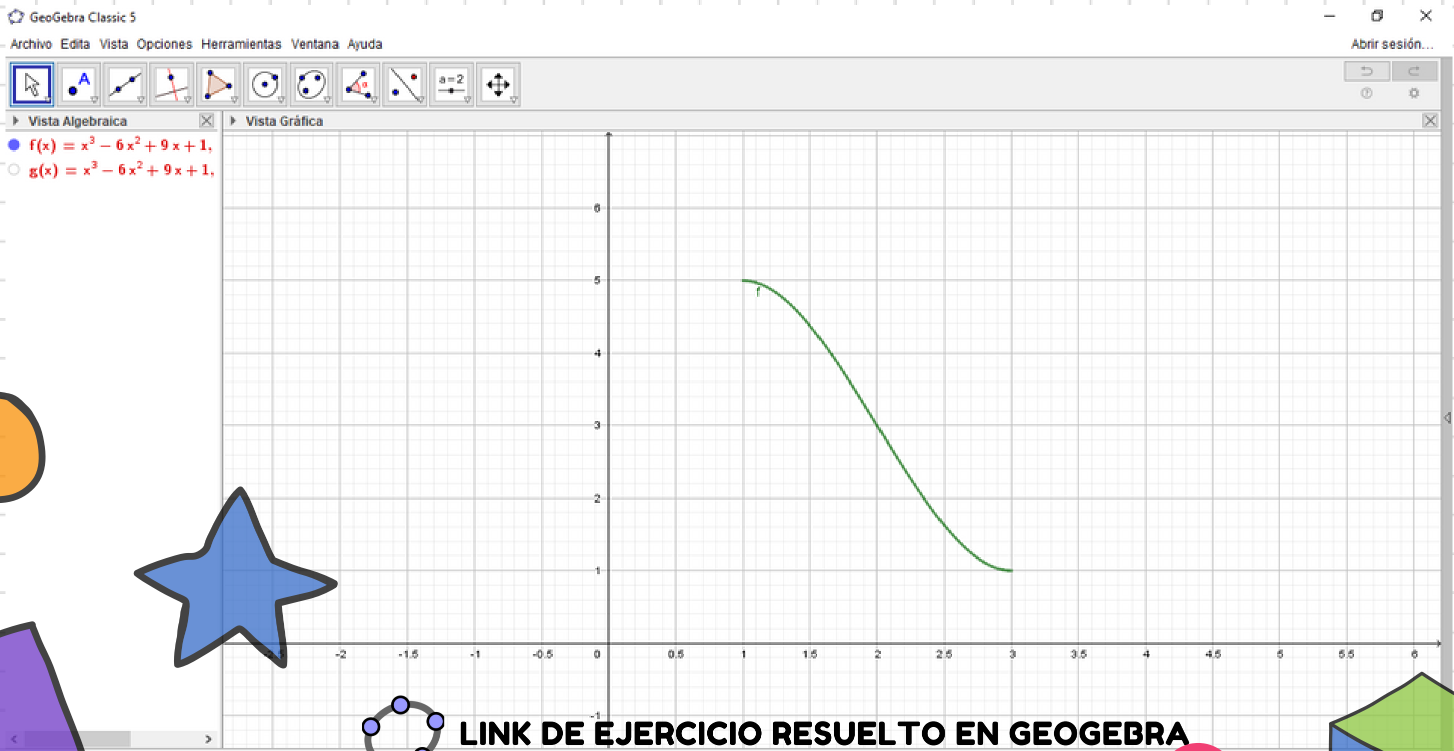
Finalmente para entregar de forma más exacta lo pedido en el problema , realice la gráfica de dicha función en geogebra.

- El tramo de crecimiento de color rojo





- **El tramo decreciente de color verde**



LINK DE EJERCICIO RESUELTO EN GEOGEBRA

https://www.geogebra.org/m/hvn57sd5

2 Consiguiente el docente explicara el siguiente ejercicio resuelto

$s(x)= x^2+2x+2$

$s´(x)=0$

$s´(x)=2x+2$

$2x+2=0$

$2x=-2$

$x=-2/2$

$x=-1$

valores antes del punto críticox= -2	Punto crítico calculado = -1	valores después del punto críticox=2
s,(-2)=-2		s,(2)=6
Signo -		signo +
Entonces este tramo es DECRECIENTE		Entonces este tramo es CRECIENTE

3 LINK VIDEO COMO ENCONTRAR MAXIMOS Y MINIMOS EN GEOGEBRA

APRENDE+

https://www.youtube.com/watch?v=4f0Ze6rWG_4

IMPORTANTE

Se puede deducir los puntos críticos de una función f(x) mediante la gráfica de un funcion f,(x), en donde los puntos críticos están localizados en el cruce de la función f,(x) con el eje de las abscisas.

CONSOLIDACIÓN

(TIEMPO RECOMENDADO DE 25 MINUTOS)

Se tomará una prueba

ACTIVIDADES EN CASA

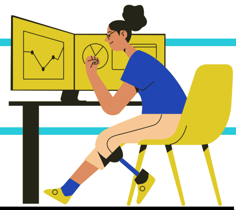
1) Encontrar la monotonía y la gráfica de las siguientes funcione con su respectiva comprobación en Geogebra

a) $f(x)= x^3-x$

$f´(x)= 3x^2-1$

$f´(x)= 0$ Puntos críticos

$3x^2-1= 0$



$x1=\sqrt{\frac{1}{3}}$

$x2= -\sqrt{\frac{1}{3}}$

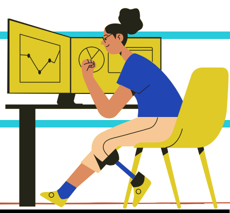
Monotonía	f(x)	f´(x)	Conclusión
x < - 13		+	La función es creciente
x= - 13	0.384	0	La función tiene un máximo
-13 < x < 13		-	La función es decreciente
x= 13	-0.384	0	La función tiene un mínimo
x > 13		+	La función es creciente

LINK DE GEOGEBRA RESUELTO

https://www.geogebra.org/m/bsfupddb

b) $f(x)= x^3-6x^2+9x+1$

$f´(x)= 3x^2-12x+9$



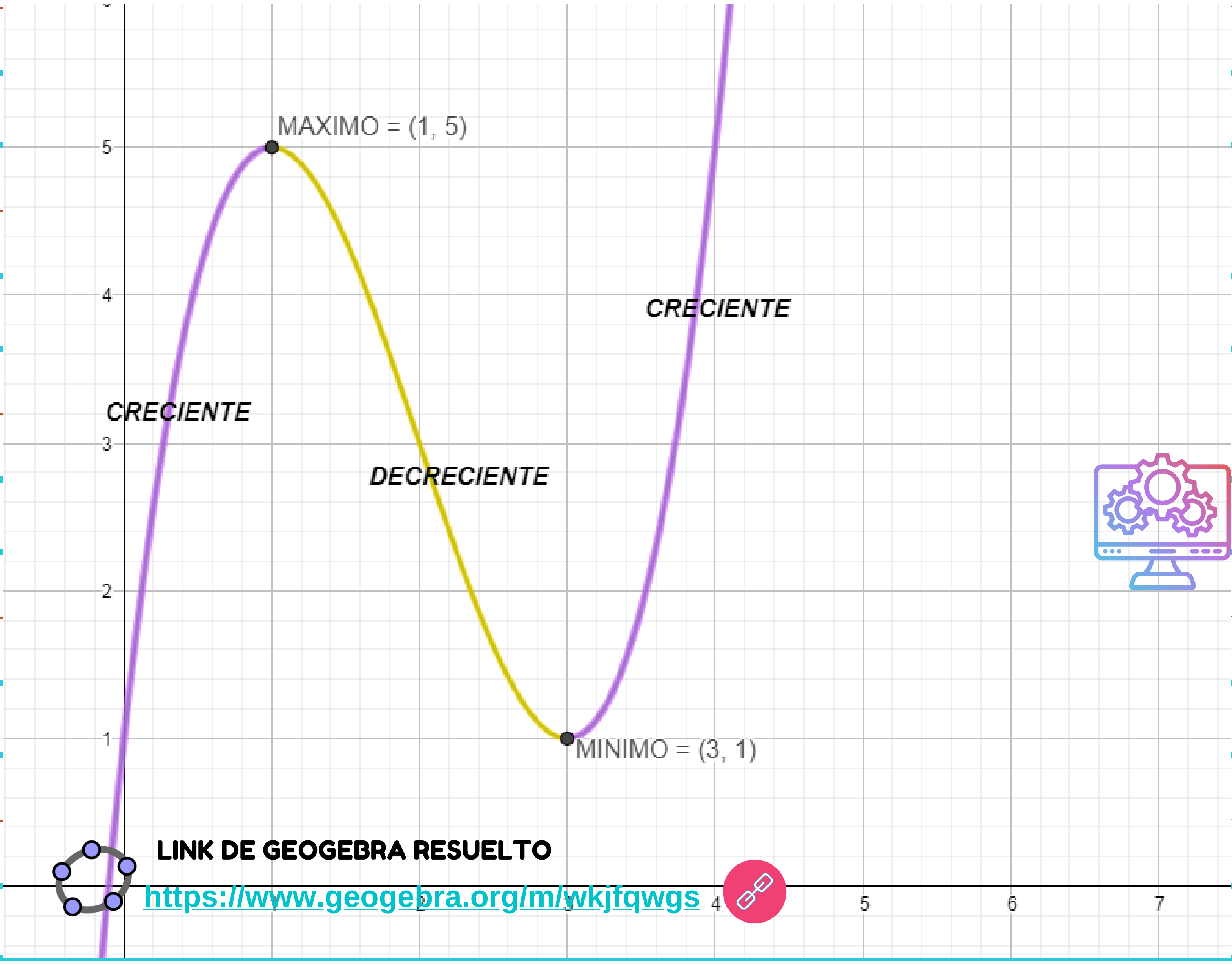
$f´(x)= 0$ Puntos críticos

$3x^2-12x+9=0$

$x_1= 1$

$x_2= 3$

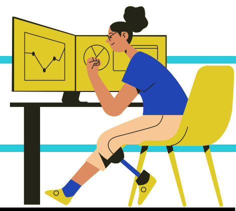
Monotonía	f(x)	f´(x)	Conclusión
x<1		+	La función es creciente
x=1	5	0	La función tiene un máximo
1< x < 3		-	La función es decreciente
x=3	1	0	La función tiene un mínimo
x>3		+	La función es creciente



LINK DE GEOGEBRA RESUELTO

https://www.geogebra.org/m/wkjfqwgs

c) $f(x)= x^2-x+12$



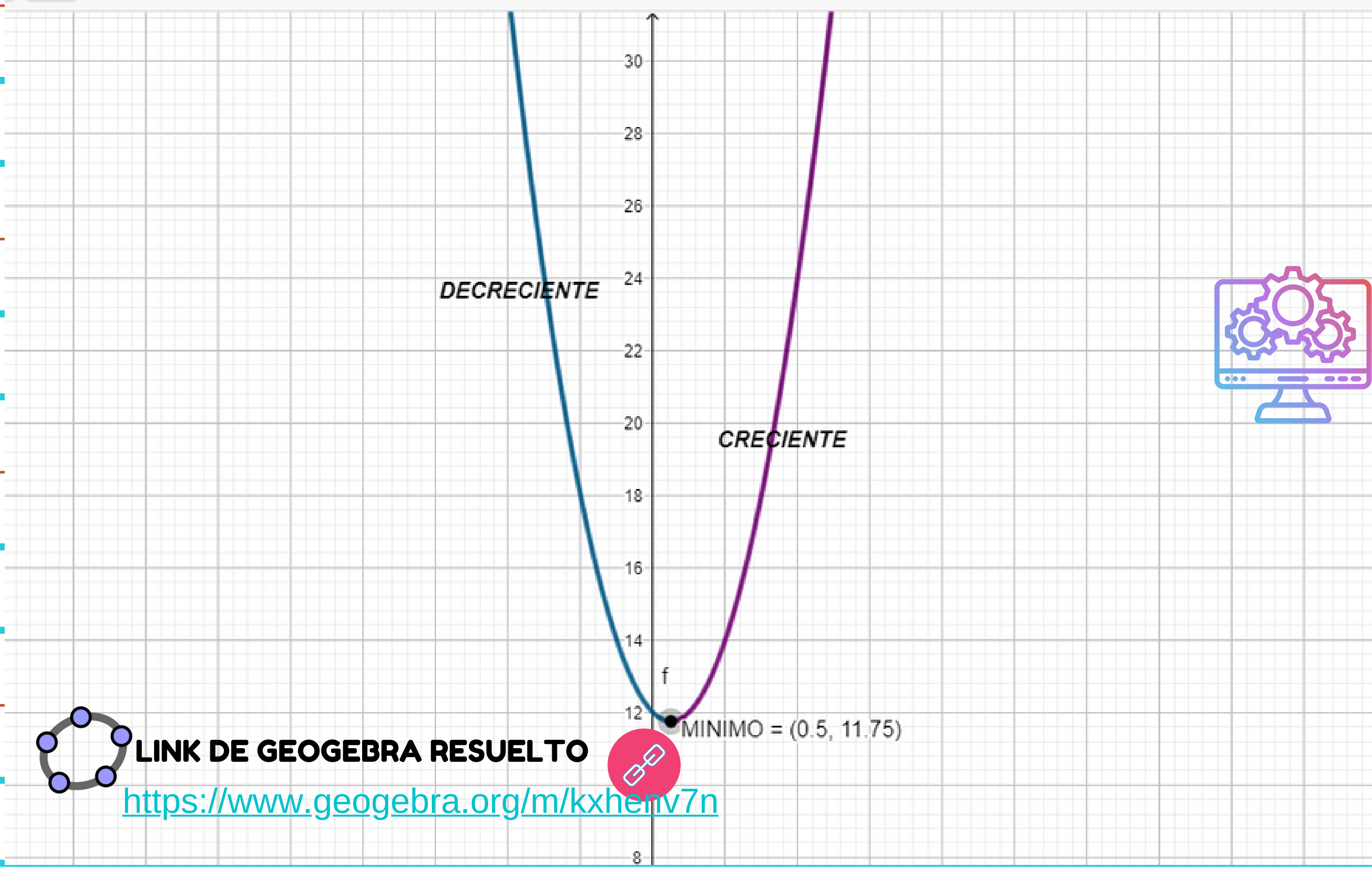
$f´(x)= 2x-1$

$f´(x)= 0$ Puntos críticos

$2x-1=0$

$x= 0.5$

Monotonía	f(x)	f,(x)	Conclusión
x<0.5		-	La función es decreciente
x= 0.5	11.75	0	La función tiene un mínimo
x>0.5		+	La función es creciente



LINK DE GEOGEBRA RESUELTO

https://www.geogebra.org/m/kxhenv7n

2) Escribir los intervalos creciente y decreciente de las funciones anteriores

a) f(x) = x^3-x

Creciente $\left[-\infty < x < -\sqrt{\frac{1}{3}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{1}{3}} < x < \infty\right]$

Decreciente $\left[-\sqrt{\frac{1}{3}} < x < \sqrt{\frac{1}{3}}\right]$

b) f(x)= x^3-6x^2+9x+1

Creciente $[-\infty < x < 1] \cup [3 < x < \infty]$

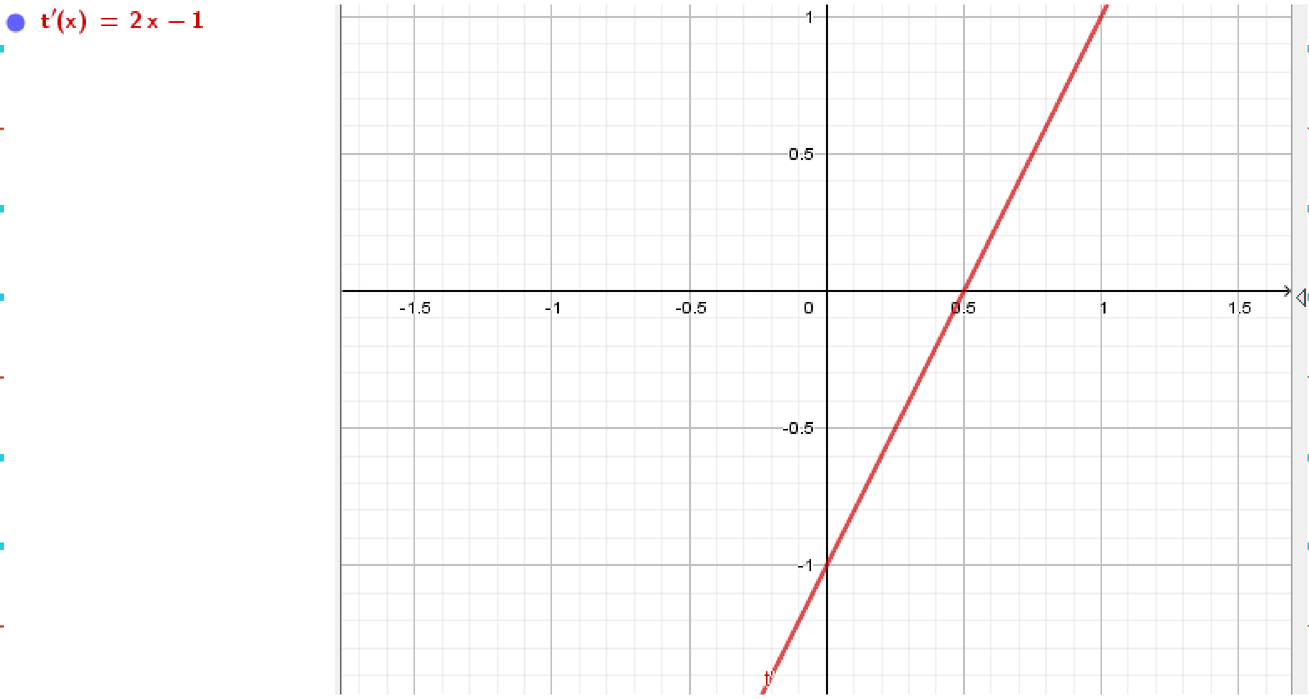
Decreciente $[1 < x < 3]$

c) f(x)= x^2-x+12

Decreciente $[-\infty < x < 0.5]$

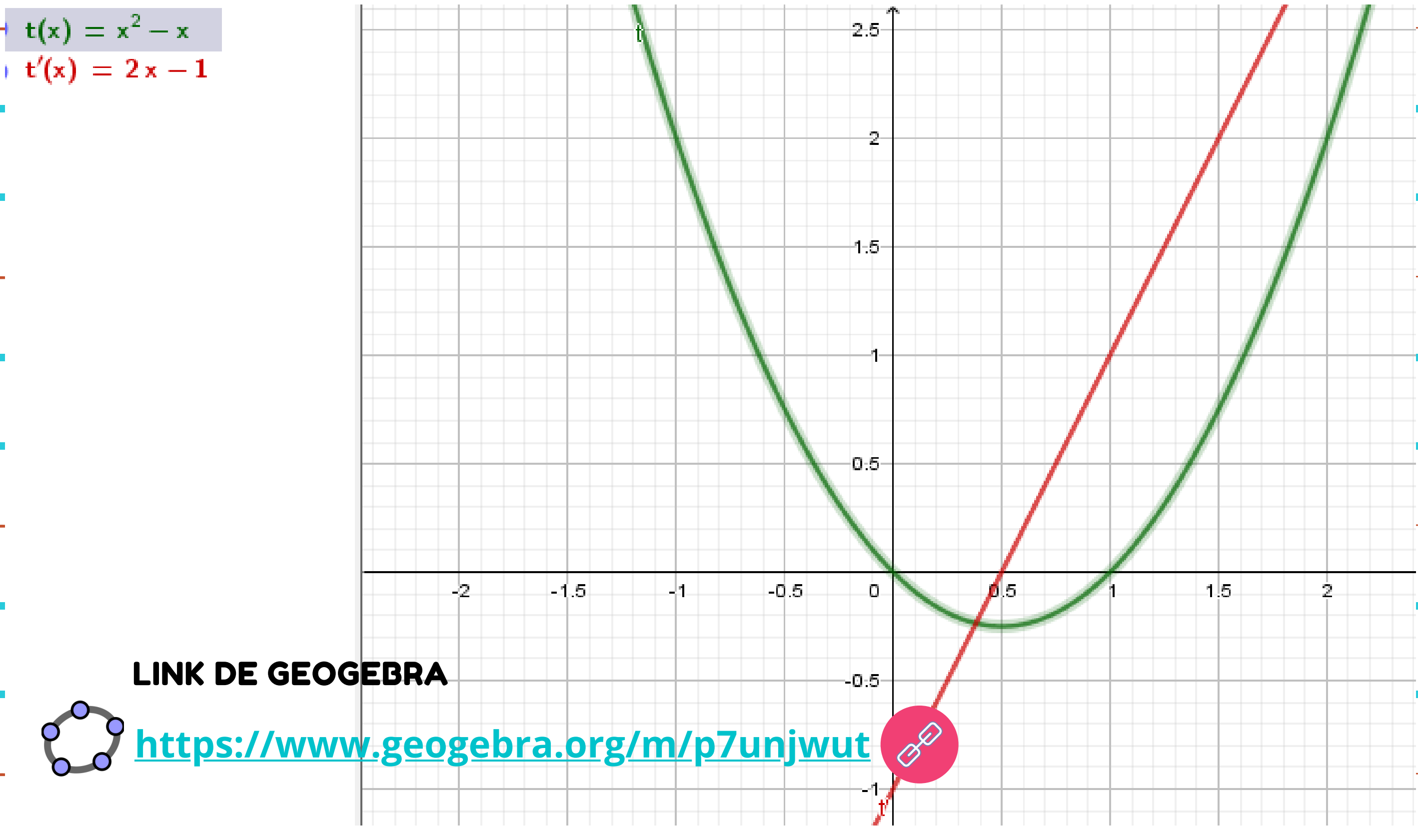
Creciente $[0.5 < x < \infty]$

3) En Cuenca se plantea realizar un parque de diversión, para lo cual distintos mecánicos tienen que construir cierto juego que se le encargó, Esteban está encargado de realizar la montaña rusa pero al momento de construir se da en cuenta que el diseñador se le olvido proporcionar la gráfica de un tramo de la montaña rusa y que solo se encuentran la siguiente gráfica de la función derivada.



Según la gráfica de la función derivada cruza con el eje de las abscisa en el punto 0.5 quiere decir que este es un punto crítico

valores antes del punto críticox= 0		**valores después del punto críticox=1**
t`(0)=-1	**Punto crítico calculado = 0.5**	**t`(1)=1**
Signo -		**signo +**
Entonces este tramo es DECRECIENTE		**Entonces este tramo es CRECIENTE**



LINK DE GEOGEBRA

https://www.geogebra.org/m/p7unjwut

CONCLUSIÓN

1. Verdadero o Falso

- **Si a lado derecho de un punto crítico los valores de f,(x) 0, se puede concluir que el tramo consiguiente es decreciente V F**
- **Si a lado izquierdo de un punto crítico los valores f,(x) 0 , se puede concluir que el tramo consiguientes es creciente V F**
- **Si a lado izquierdo de un punto crítico los valores f,(x) 0e, se puede decir que el tramo anterior es creciente V F**

2. Describa los pasos de manera ordenada para determinar las monotonías de una función con el criterio de la primera derivada

____

____

____

____

____

3.Realice en Geogebra una presentación donde indique los puntos críticos de cualquier función, también de manera manual para realizar la comprobación

RECORTABLE PARA ALUMNO

Se tomará una prueba

ACTIVIDADES EN CASA

1) Encontrar la monotonía y la gráfica de las siguientes funcione con su respectiva comprobació en Geogebra

a) $f(x)= x^3-x$

b) $f(x)= x^3-6x^2+9x+1$

RECORTABLE PARA ALUMNO

c) $f(x)= x^2-x+12$

2) Escribir los intervalos creciente y decreciente de las funciones anteriores

a) $f(x) = x^3-x$

RECORTABLE PARA ALUMNO

b) $f(x)= x^3-6x^2+9x+1$

c) $f(x)= x^2-x+12$

RECORTABLE PARA ALUMNO

3) En Cuenca se plantea realizar un parque de diversión, para lo cual distintos mecánicos tienen que construir cierto juego que se le encargó, Esteban está encargado de realizar la montaña rus pero al momento de construir se da en cuenta que el diseñador se le olvido proporcionar la gráfica de un tramo de la montaña rusa y que solo se encuentran la siguiente gráfica de la función derivada.

RECORTABLE PARA ALUMNO

CONCLUSIÓN

1. Verdadero o Falso

- Si a lado derecho de un punto crítico los valores de f,(x) 0, se puede concluir que el tramo consiguiente es decreciente V F
- Si a lado izquierdo de un punto crítico los valores f,(x) 0 , se puede concluir que el tramo consiguientes es creciente V F
- Si a lado izquierdo de un punto crítico los valores f,(x) 0e, se puede decir que el tramo anterior es creciente V F

2. Describa los pasos de manera ordenada para determinar las monotonías de una función con el criterio de la primera derivada

____

____

____

____

____

3.Realice en Geogebra una presentación donde indique los puntos críticos de cualquier función, también de manera manual para realizar la comprobación

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

	Muy bien	Bien	Regular	Insuficiente	Observaciones
Realiza y participa en todas las actividades de planteadas					
Demuestra interés por aprender y usar Geogebra					
Reflexiona y opina sobre los problemas planteados					
Usa Geogebra para plantear y resolver problemas					
Realiza presentaciones adecuadas usando Geogebra					
Respeta los tiempos establecidos en las actividades					

CLASE NÚMERO 8 CONCAVIDAD, PUNTOS DE INFLEXIÓN Y CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

2022

OBJETIVO

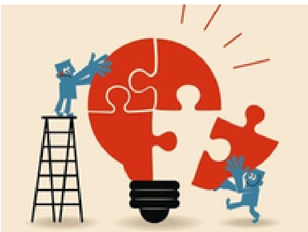
Obtener información sobre el comportamiento y propiedades de una función y su gráfica para obtener datos como la concavidad, punto de inflexión, de cualquier función mediante la segunda derivada.

Logros de aprendizaje esperado

- Determinar las concavidades de las funciones en diferentes tramos.
- Relacionar la segunda derivada con la concavidad de una función.
- Graficar a partir del análisis de los puntos críticos y de la concavidad.
- Comprobar mediante Geogebra las gráficas obtenidas con la primera y segunda derivada.

INTRODUCCIÓN

De acuerdo al análisis qué se vio en el tema anterior sobre el criterio de la primera derivada el cuál proporcionaba información sobre alguna función y cómo se comporta su respectiva gráfica, de la misma manera mediante un análisis minucioso el criterio de la segunda derivada nos proporciona otras características adicionales acerca de la función y su gráfica. En esta clase se va a tratar conceptos como la concavidad de la gráfica de una función qué puede ser cóncava, convexa y puntos de inflexión basado en el criterio de la segunda derivada tanto de manera manual y en geogebra como una forma de comprobar los conceptos para proseguir con la resolución de ejercicios aplicados.



ANTICIPACIÓN

(Tiempo recomendado 20 minutos)

1 El docente realizara una charla participativa con los alumno, en donde se les ara las siguientes preguntas para recordar los conocimientos previos

a) ¿Qué entiende por función convexa?

b) ¿Qué entiende por función cóncava?

c) Recuerde e indique para qué sirve el criterio de la primera derivada y los pasos que se debe seguir para encontrar la monotonía de cualquier grafica

2 Se presentará el siguiente vídeo centrado en este tema a tratar sobre la concavidad de una función y sobre sus puntos de inflexión, para posteriormente responder las siguientes preguntas.

https://youtu.be/exIpX2c3GhM

a) Describa con sus propias palabras cuando una función es convexa, plantee un ejemplo donde se puede visualizar de manera real este tipo de concavidad.

____
____
____
____
____
____
____
____
____

b) Describa con sus propias palabras cuando una función es cóncava, plantee un ejemplo donde se puede visualizar de manera real este tipo de concavidad.

____
____
____
____
____
____
____
____
____

c) Describa con sus propias palabras una idea acerca de lo qué es un punto de inflexión de una función, plantee un ejemplo donde se puede visualizar de manera real este concepto.

____
____
____
____
____
____
____
____
____

3. A continuación el alumno procederá a ver la siguiente imagen, para mayor visualización abrir el siguiente link

Enlace gráfica:
https://www.geogebra.org/m/j59vzzv5

De la gráfica identifique los intervalos en los que la función es convexa y en donde es cóncava, e indique en qué punto la función cambia de conca a convexa


CONSTRUCCIÓN

(Tiempo recomendado 1 hora)

1 Observe detenidamente la siguiente simulación en Geogebra y llene correctamente los espacios solicitados conjuntamente con el Docente.

Enlace simulación:
https://www.geogebra.org/m/xev3h4kx

Intervalo	f,(x)	f,(x)sentido de giro	posición de f(x)/f´(x)	Concavidad
x=0				
0<x<1				
x=1				
1<x<2				
x=2				
2<x<3				
x=3				
3<x<4				
x=4				

Escriba una conclusión sobre la concavidad, convexidad y punto de inflexión de una función para un cierto intervalo, basados en los datos de la tabla anterior.

____

____

____

____

____

____

Importante:
A continuación se enuncian criterios importantes que los alumnos deben tener en cuenta y recordar

PUNTOS DE INFLEXIÓN

Los puntos de inflexión de cualquier función f en la gráfica representan el cambio de concavidad, es decir que pasa de ser cóncava a convexa o viceversa

CRITERIO DE SEGUNDA DERIVADA PARA MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Si $f''(c) \geq 0$, entonces f tiene un valor mínimo relativo en c

Si $f''(c) \leq 0$, entonces f tiene un valor máximo relativo en c

Enlace del video de como encontrar segunda derivada y puntos de inflexión en Geogebra
https://www.youtube.com/watch?v=jieXEyhxwfg

SITUACION PROBLEMA

2. Se tiene el siguiente situación analice y resuelva

Para diseñar una montaña rusa se tiene varias funciones que representan el diseño de este, para esto existe un tramo que está definido por

$$f(x)=x^2$$

desde -3 a 3, se desea saber si dicho tramo es convexa o cóncava. Consiguiente existe otro tramo que está definido por

$$f(x)=\frac{x}{3}^3 - x^2 + 1.$$

Encuentre las monotonías y las concavidades de dicho tramo para elaboración de un diseño de la montaña rusa

Para eso se proporciona a los estudiantes los siguientes temas conocidos y también un cuadro como guía que se debe llenar

RECUERDE QUE

Para calcular los puntos críticos se usa f´(x)=0
Para calcular los punto de inflexión se debe solucionar f´´(x)=0
Para saber si la monotonía se debe tomar en cuenta f´(x) es mayor que cero es crecientey f´(x) menor que cero es decreciente
Para saber si la función es convexa se debe tomar en cuenta f ´´(x) es mayor que cero y f ´´(x) menor que cero es cóncava

a) $f(x)=x^2$

Enlace grafica
https://www.geogebra.org/m/w2k8bpbv

Se presenta a los alumnos la siguiente tabla como ayuda para determinar criterios tanto de la primera y segunda derivada y así poder sacar conclusiones del problema propuesto

<table>
<tr><td colspan="5">Criterio primera derivada</td></tr>
<tr><td>valores antes del punto crítico</td><td>Punto crítico calculado</td><td>valores intermedios entre</td><td>Punto crítico calculado</td><td>valores después del punto crítico</td></tr>
<tr><td></td><td rowspan="3"></td><td></td><td rowspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td>Signo</td><td>signo</td><td>signo</td></tr>
<tr><td>Entonces este tramo es……………………………………………..</td><td>Entonces este tramo es……………………………………………..</td><td>Entonces este tramo es……………………………………………..</td></tr>
<tr><td colspan="5">Criterio segunda derivada</td></tr>
<tr><td colspan="5">Encuentre f”(x)=0

Punto de inflexión calculado=</td></tr>
<tr><td colspan="2">Valores izquierda punto de inflexión f”(x) =</td><td colspan="3">Valores derecha punto de inflexión f”(x) =</td></tr>
<tr><td colspan="2">signo</td><td colspan="3">signo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Entonces en este tramo es ___________________________</td><td colspan="3">Entonces en este tramo es ______________________________</td></tr>
</table>

b) $f(x)=\frac{x^{3}}{3} - x^{2} + 1.$

Enlace grafica
https://www.geogebra.org/m/pafjkfqz

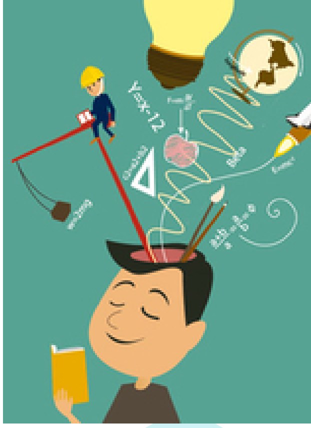
Se presenta a los alumnos la siguiente tabla como ayuda para determinar criterios tanto de la primera y segunda derivada y así poder sacar conclusiones del problema propuesto

<table>
<tr><td colspan="6">Criterio primera derivada</td></tr>
<tr><td>valores antes del punto crítico</td><td colspan="2">Punto crítico calculado</td><td>valores intermedios entre</td><td>Punto crítico calculado</td><td>valores después del punto crítico</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2" rowspan="3"></td><td></td><td rowspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td>Signo</td><td>signo</td><td>signo</td></tr>
<tr><td>Entonces este tramo es……………………………………..</td><td>Entonces este tramo es……………………………………..</td><td>Entonces este tramo es……………………………………..</td></tr>
<tr><td colspan="6">Criterio segunda derivada</td></tr>
<tr><td colspan="6">Encuentre f”(x)=0

Punto de inflexión calculado=</td></tr>
<tr><td colspan="2">Valores izquierda punto de inflexión f”(x) =</td><td colspan="4">Valores derecha punto de inflexión f”(x) =</td></tr>
<tr><td colspan="2">signo</td><td colspan="4">signo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Entonces en este tramo es ------------------------</td><td colspan="4">Entonces en este tramo es ----------------------------</td></tr>
</table>

CONSOLIDACIÓN

(Tiempo recomendado 20 minutos)



ACTIVIDADES EN CASA

1. Encontrar la gráfica, puntos inflexión, intervalos de ya sea cóncavo a convexa o viceversa , máximos y mínimos de las siguientes funciones

a) • $x^4 - x^2 + 1$

$f'(x) = 4x^3 - 2x$

$f''(x) = 12x^2 - 2$ $\quad$ $f''(x) = 0$

$12x^2 - 2=0$

$12x^2 = 2$

$x^2 = 2/12$

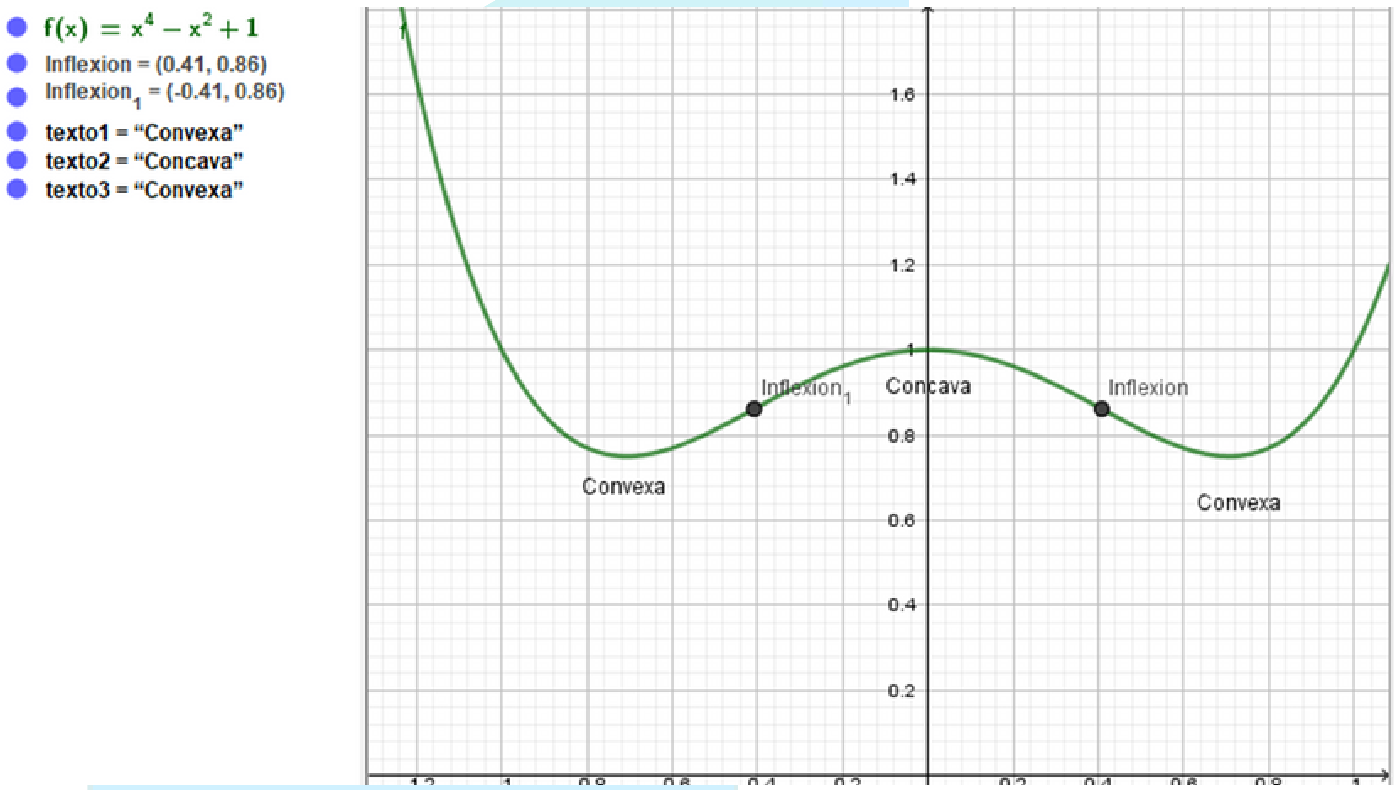
$x = \sqrt{1/6}$

$x1 =+ 0.41$
$x1 =- 0.41$

Enlace grafica
https://www.geogebra.org/m/mpw2whuv

Tabla de criterio de la segunda derivada para realizar análisis

Valores antes	Punto de inflexión	valores intermedios	Punto de inflexión	valores después
$f''(-1) = 12(-1^2) - 2$ $f''(-1) = 10$	-0.41	$f''(0) = 12(0)^2 - 2$ $f''(0) =- 2$	$+0.41$	$f''(1) = 12(1^2) - 2$ $f''(1) = 10$
Signo +		Signo -		Signo +
Entonces en ese tramo es convexa		Entonces en ese tramo es cóncavo		Entonces en ese tramo es convexa
Si $f''(c) \geq 0$, entonces f tiene un valor mínimo relativo en c		Si $f''(c) \leq 0$, entonces f tiene un valor máximo relativo en c		Si $f''(c) \geq 0$, entonces f tiene un valor mínimo relativo en c



b) • $(x^3/2) - x^2 + 1$

Enlace grafica
https://www.geogebra.org/m/ffttamhk

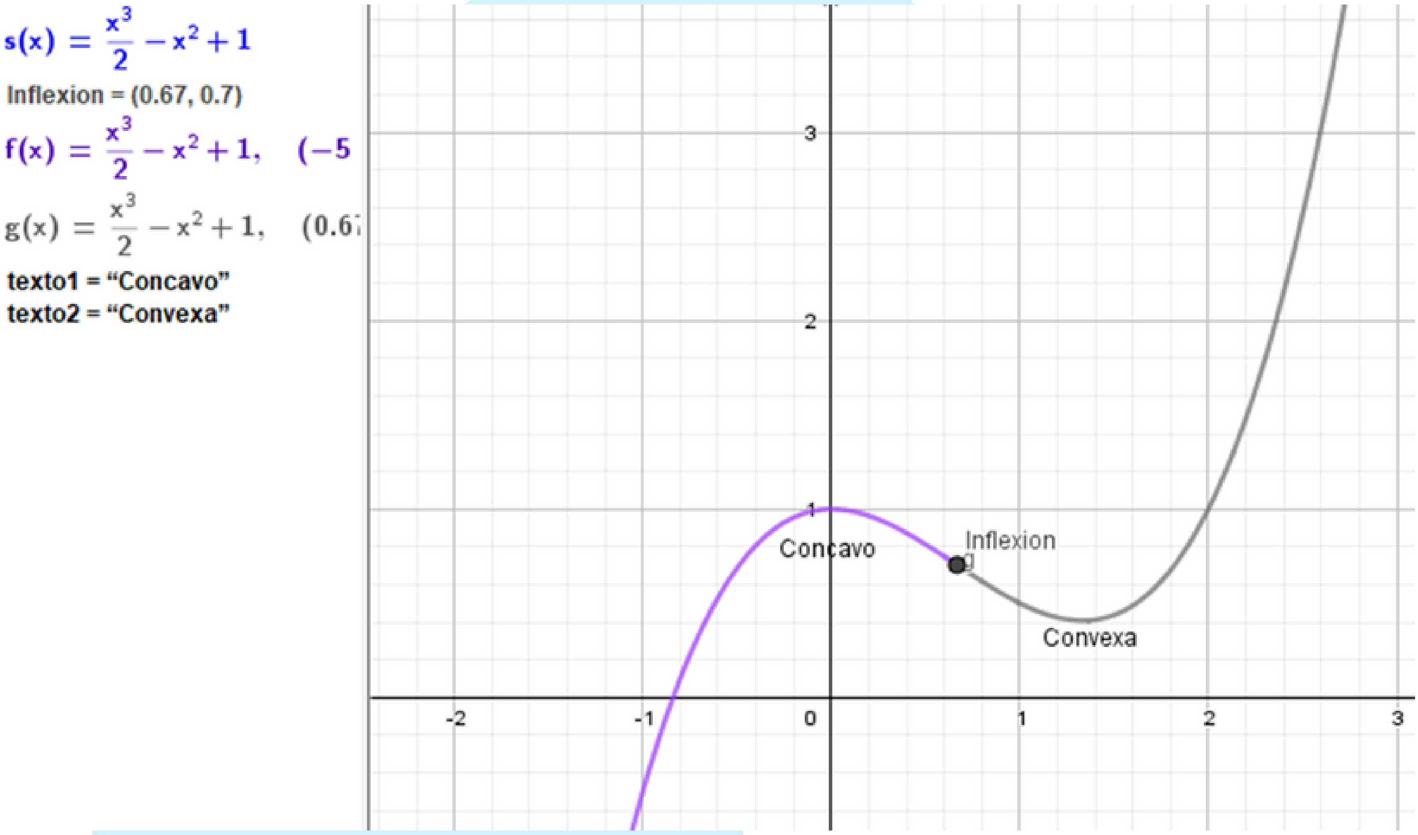
$f'(x) = 3\frac{x^2}{2} - 2x$

$f''(x) = 3x - 2$ $\qquad f''(x) = 0$

$3x - 2 = 0$

$x = \frac{2}{3}$

Valores antes	Punto de inflexión	valores después
$f''(0) = 3(0) - 2$ $f''(0) = -2$	2/3	$f''(1) = 3(1) - 2$ $f''(1) = 1$
Signo -		Signo +
Entonces en ese tramo es cóncavo		Entonces en ese tramo es convexa
Si $f''(c) \leq 0$, entonces f tiene un valor máximo relativo en c		Si $f''(c) \geq 0$, entonces f tiene un valor mínimo relativo en c



Enlace grafica
https://www.geogebra.org/m/zzxsjxpf

c) • $x^3 + 10x^2 - 7$

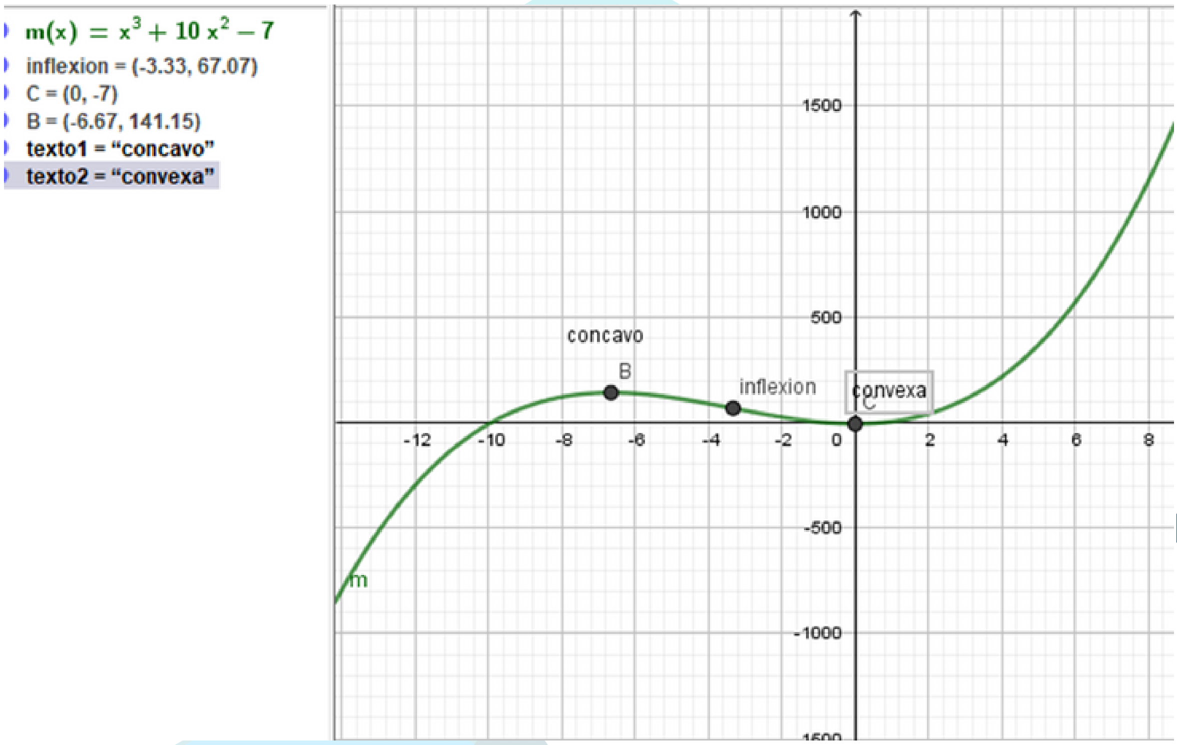
$f'(x) = 3x^2 + 20x$

$f''(x) = 6x + 20$ $\qquad f''(x) = 0$

$6x = -20$

$x = -20/6$

Valores antes	Punto de inflexión	valores después
$f''(-4) = 6(-4) + 20$ $f''(-4) = -4$	-20/6	$f''(0) = 6(0) + 20$ $f''(0) = 20$
Signo -		Signo +
Entonces en ese tramo es cóncavo		Entonces en ese tramo es convexa
Si $f''(c) \leq 0$, entonces f tiene un valor máximo relativo en c		Si $f''(c) \geq 0$, entonces f tiene un valor mínimo relativo en c



2. Grafique la funciones anteriores en Geogebra mediante la distinción de concavidades, la concavidad color rojo y la convexidad de color verde, posteriormente exponga en clases lo realizado en Geogebra

3. Complete la tabla basada en la siguiente imagen de Geogebra

Enlace grafica
https://www.geogebra.org/m/mebagfe3

Intervalos	f(x)	f`(x)	f´´(x)	Conclusión
x<0.33		Signo : negativo	Signo : negativo	la gráfica de f(x) es cóncava
x=0.33	-0.41	-	0	punto de inflexión
0.33<x		Signo : negativo	Signo : positivo	la gráfica de f(x) es convexa

CONCLUSIÓN

Se tomará una prueba corta

1. Verdadero o Falso

Si la segunda derivada es positiva entonces es cóncava V <u>F</u>

Si la segunda derivada es negativa es convexa V <u>F</u>

Si a lado izquierdo de un punto de inflexión los valores son mayores que 0, se puede decir que el tramo anterior hay un máximo V <u>F</u>

2. Describa los pasos de manera ordenada para determinar las monotonías de una función y los pasos para determinar la concavidad de una función con el criterio de la segunda derivada

____
____
____
____
____
____
____
____

3. Es posible que a través de criterio de la segunda derivada puedo calcular los puntos relativos y concluir si son máximo o mínimo y explique el porqué de su respuesta

____
____
____
____
____
____
____
____
____

4. En Geogebra realice la gráfica de la siguiente función $x^3 - x^2 + 1$, con las siguientes condiciones la parte cóncava y convexa sean de diferentes colores

RECORTABLE

ACTIVIDADES EN CASA

1. **Encontrar la gráfica, puntos inflexión, intervalos de ya sea cóncavo a convexa o viceversa , máximos y mínimos de las siguientes funciones**

a) • $x^4 - x^2 + 1$

Enlace grafica
https://www.geogebra.org/m/mpw2whuv

Tabla de criterio de la segunda derivada para realizar análisis

Valores antes	Punto de inflexión	valores intermedios	Punto de inflexión	valores después
f '' ( )		f '' ( )		f '' ( )
Signo ___________-		Signo ______________		Signo _________
Entonces en ese tramo es ________________		Entonces en ese tramo es ____________________		Entonces en ese tramo es _______________
Si $f''(c) \geq 0$, entonces f tiene un _________________ _________________		Si $f''(c) \leq 0$, entonces f tiene un ____________________ ____________________ ___________________		Si $f'(c) \geq 0$, entonces f tiene un ________________ ________________ ________________

RECORTABLE

b) • $(x^3/2) - x^2 + 1$

Enlace grafica
https://www.geogebra.org/m/ffttamhk

Tabla de criterio de la segunda derivada para realizar análisis

<table>
<tr><td>Valores antes</td><td>Punto de inflexión</td><td>valores después</td></tr>
<tr><td>$f''(\quad) =$</td><td rowspan="3"></td><td>$f''(\quad) =$</td></tr>
<tr><td>Signo ____________________</td><td>Signo _________________</td></tr>
<tr><td>Entonces en ese tramo es _______________________</td><td>Entonces en ese tramo es ____________________</td></tr>
<tr><td>Si $f''(c)$.......... 0, entonces f tiene un ________________________</td><td></td><td>Si $f''(c)$......... 0, entonces f tiene un ______________________ _</td></tr>
</table>

RECORTABLE

c) • $x^3 + 10x^2 - 7$

Enlace grafica
https://www.geogebra.org/m/zzxsjxpf

Tabla de criterio de la segunda derivada para realizar análisis

Valores antes	Punto de inflexión	valores después
$f''(\quad) =$		$f''(\quad) =$
Signo ____________________		Signo ________________
Entonces en ese tramo es ________________________		Entonces en ese tramo es ____________________
Si $f''(c)$.......... 0, entonces f tiene un _________________________		Si $f''(c)$......... 0, entonces f tiene un ______________________ _

RECORTABLE

2. Grafique la funciones anteriores en Geogebra mediante la distinción de concavidades, la concavidad color rojo y la convexidad de color verde, posteriormente exponga en clases lo realizado en Geogebra

3. Complete la tabla basada en la siguiente imagen de Geogebra

Enlace grafica
https://www.geogebra.org/m/mebagfe3

Intervalos	f(x)	f`(x)	f´´(x)	Conclusión
x<0.33		Signo : __________	Signo : _________	la gráfica de f(x) es _______________
x=0.33	-0.41	-	0	punto de inflexión
0.33<x		Signo : _________	Signo : __________	la gráfica de f(x) es _______________

RECORTABLE

CONCLUSIÓN

Se tomará una prueba corta

1. Verdadero o Falso

Si la segunda derivada es positiva entonces es cóncava V F

Si la segunda derivada es negativa es convexa V F

Si a lado izquierdo de un punto de inflexión los valores son mayores que 0, se puede decir que el tramo anterior hay un máximo V F

2. Describa los pasos de manera ordenada para determinar las monotonías de una función y los pasos para determinar la concavidad de una función con el criterio de la segunda derivada

____

____

____

____

____

____

____

____

3. Es posible que a través de criterio de la segunda derivada puedo calcular los puntos relativos y concluir si son máximo o mínimo y explique el porqué de su respuesta

____

____

____

____

____

____

____

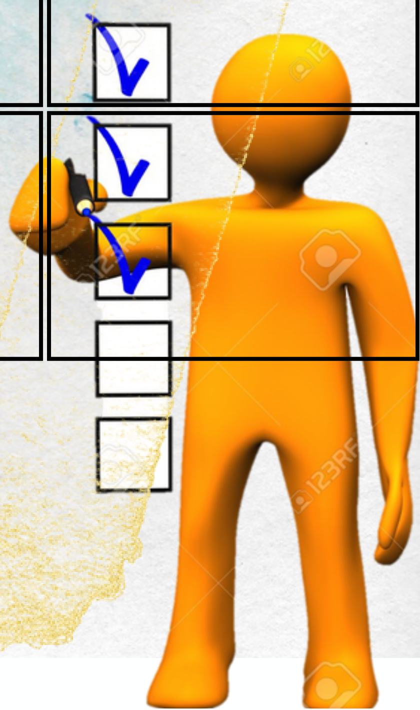
____

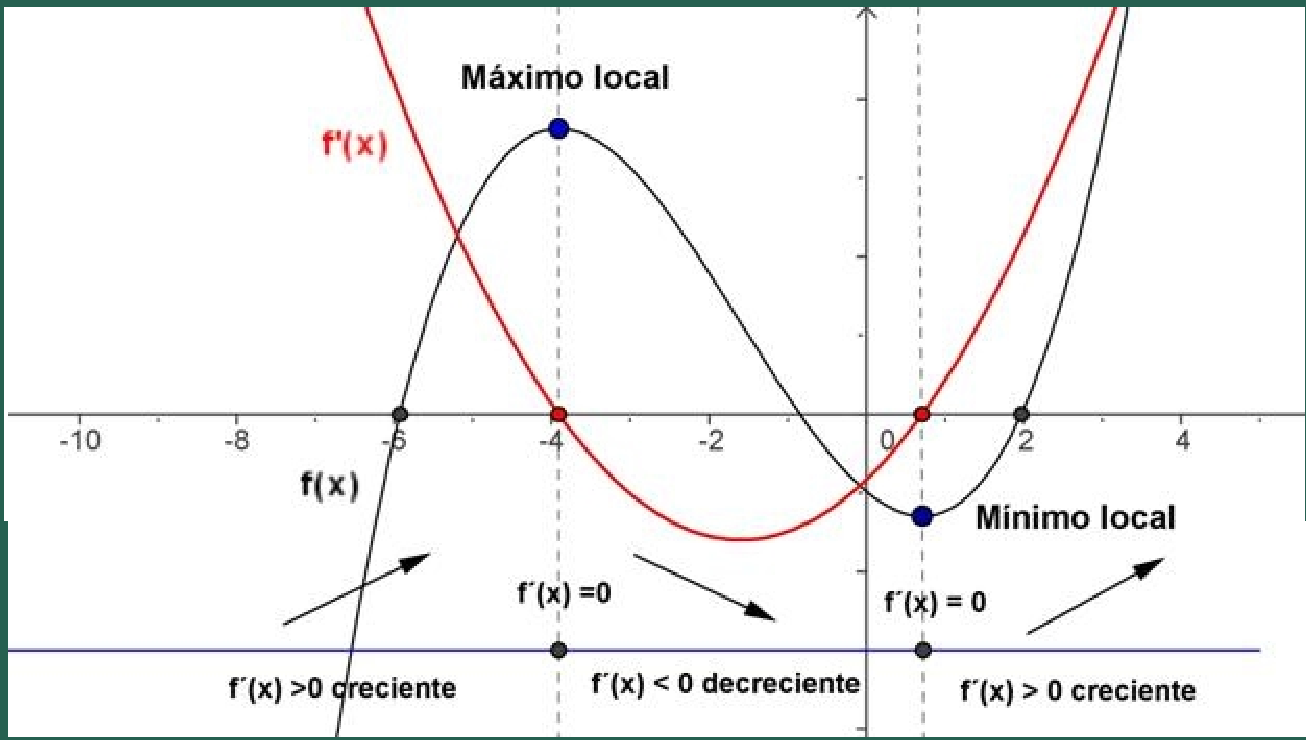
____

4. En Geogebra realice la gráfica de la siguiente función $x^3 - x^2 + 1$, con las siguientes condiciones la parte cóncava y convexa sean de diferentes colores

Criterios de evaluación

	Muy bien	Bien	Regular	Insuficiente	Observaciones
Participa de manera activa en la clase					
Demuestra interés por aprender y usar Geogebra					
Reflexiona y aporta con ideas para resolver situaciones					
Usa Geogebra para plantear y resolver problemas					
Realiza presentaciones adecuadas usando Geogebra					
Respeta los tiempos establecidos en las actividades					





CLASE NÚMERO 9 APLICACIONES SOBRE EXTREMOS ABSOLUTOS (OPTIMIZACIÓN)

2022

OBJETIVO

APLICAR Y PONER EN PRÁCTICA LOS CONOCIMIENTOS DE LOS TEMAS ANTERIORES COMO UN PROCESO PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LOS QUÉ SE PRESENTAN SITUACIONES REALES POR MEDIO DE LA OPTIMIZACIÓN DE UNA FUNCIÓN CON AYUDA DE GEOGEBRA.

LOGROS DE APRENDIZAJE ESPERADO

- IDENTIFICA CLARAMENTE LOS EXTREMOS ABSOLUTOS DE UNA FUNCIÓN PARA UN CIERTO INTERVALO ESPECÍFICO.
- RELACIONAR LOS CRITERIOS DE LA PRIMERA Y DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA HALLAR LA MEJOR SOLUCIÓN REQUERIDA POR EL PROBLEMA PLANTEADO.
- RESUELVE DE MANERA ANALÍTICA Y MEDIANTE GEOGEBRA PROBLEMAS SOBRE OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES.

INTRODUCCIÓN

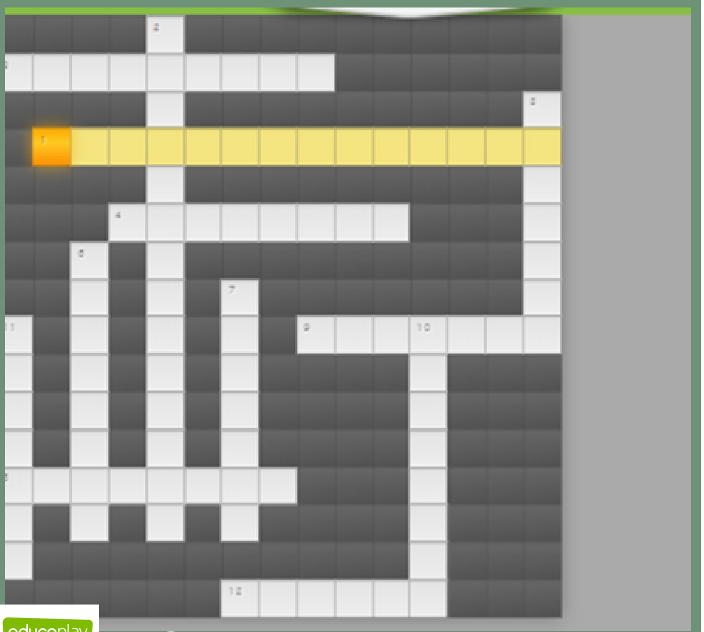
LA OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES ES UNO DE LOS PROBLEMAS MÁS CLÁSICOS A ESTUDIAR Y RESOLVER EN PARTE ESTE INTERÉS SE DEBE A LA MODELIZACIÓN DE PROBLEMAS REALES MEDIANTE FUNCIONES YA QUE ESTE CONLLEVA A LA NECESIDAD DE CONOCER CÓMO SE PODRÍA OBTENER LA MEJOR SOLUCIÓN AL PROBLEMA EN BASE A LOS FACTORES DE LOS QUE DEPENDE ÉSTE, POR EJEMPLO, CUANDO UNA EMPRESA ESTUDIA LOS NIVELES DE COSTE DE SU PRODUCCIÓN EN BASE A LOS DISTINTOS FACTORES QUE INTERVIENEN EN DICHA PRODUCCIÓN (SALARIOS, MATERIA PRIMA, IMPUESTOS…).EN ESTA CLASE VEREMOS CÓMO TOMAR UNA DECISIÓN DE UN CONJUNTO DE RESULTADOS, MÉTODOS ANALÍTICOS Y NUMÉRICOS ENFOCADOS A ENCONTRAR E IDENTIFICAR AL MEJOR CANDIDATO DE ENTRE UNA COLECCIÓN DE ALTERNATIVAS, SIN TENER QUE ENUMERAR Y EVALUAR TODAS ESTAS ALTERNATIVAS.

ANTICIPACIÓN

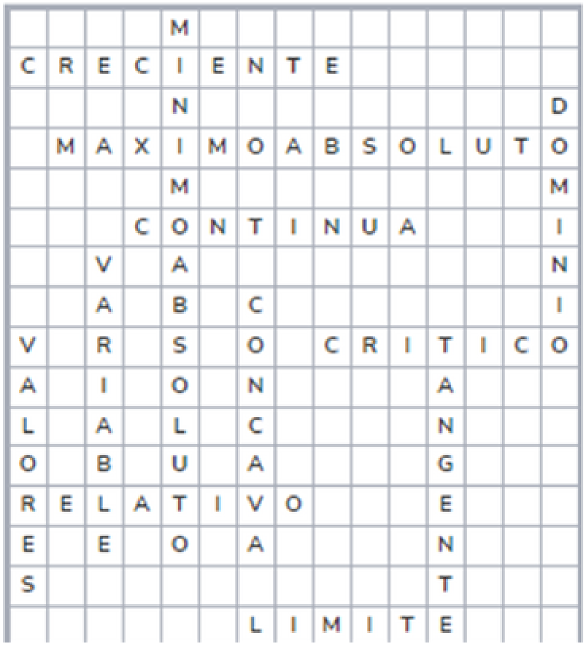
(TIEMPO RECOMENDADO 25 MINUTOS)

1. **El alumno realizará el siguiente crucigrama online**

Link simulación: **https://es.educaplay.com/recursos-educativos/12192613-conocimientos_previos.html**



educaplay https://es.educaplay.com



2. A continuación se presenta el siguiente video titulado Optimización Matemática y consiguiente se debe responder las preguntas planteadas acerca del video

https://youtu.be/dyma1bUJ7_4

Malu Aguilar(1 nov 2015). Optimización Matemática [Archivo de Video].Youtube. https://youtu.be/dyma1bUJ7_4

a) Describa en términos generales qué es la optimización

____
____
____

b) Es posible optimizar una variable con respecto a otra variable mediante una herramienta del cálculo diferencial llamada.

____
____
____
______

c) La finalidad de estudiar el comportamiento de la recta tangente a una curva a través del criterio de la primera y segunda derivada es hallar los.

____
____
____

CONSTRUCCIÓN

(TIEMPO RECOMENDADO 2HORAS)

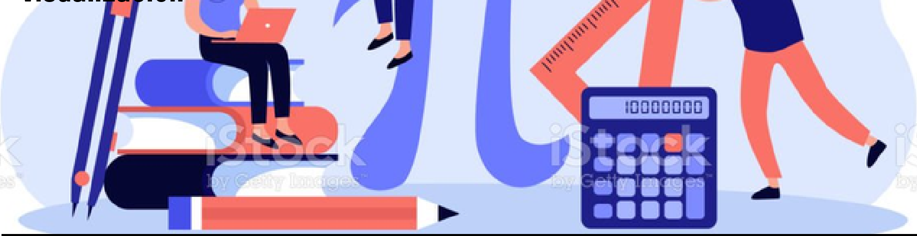
Se presenta a los alumnos el siguiente recuadro donde describe las sugerencias para resolver problemas de optimizaciones

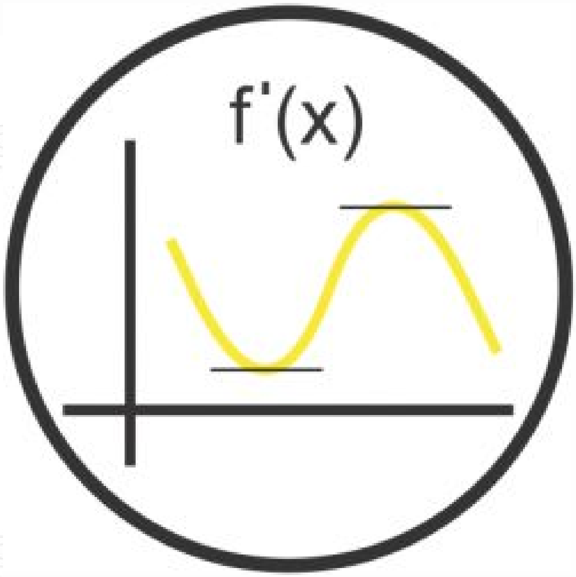
SUGERENCIAS PARA RESOLVER LOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Debido a que podemos encontrar una gran cantidad de ejercicios de optimización planteados de diferentes manera, por lo que no existen pasos específicos para resolverlo , sin embargo se dan las siguientes sugerencias

- Leer detenidamente el problema planteado
- Determinar las variables involucradas en el problema
- Se plantea las ecuaciones que relacionan las variables esta va ser la función que se va a maximizar o minimizar
- Encontrar los valores críticos para determinar cuales son máximos y mínimos según lo pedido

A continuación se presentan los siguientes ejercicios el cual el docente y alumnos lo resolverán de manera conjunta, los ejercicios son basados en la cotidianidad de la vida real, con ello va estar acompañados de simulaciones en Geogebra para mejor visualización



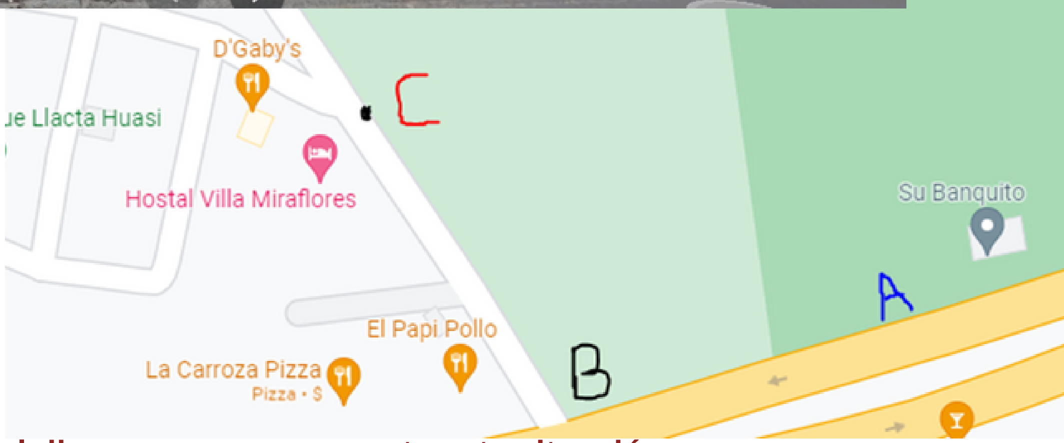


1. **Juan se encuentra en A que está a 6 metros de B (esquina de papi pollo), y en C hay un restaurante llamado D"Gabys a 9 metros de la esquina de papi pollo. Juan desea ir al Hostal Miraflores que está a una distancia x de B para ir llevando a su hermano que trabaja ahí, dentro del parque va a caminar a 4 m/min y en la vereda 5 m/min ¿En qué punto debe salir del parque para emplear el tiempo mínimo para ir de A y C?**

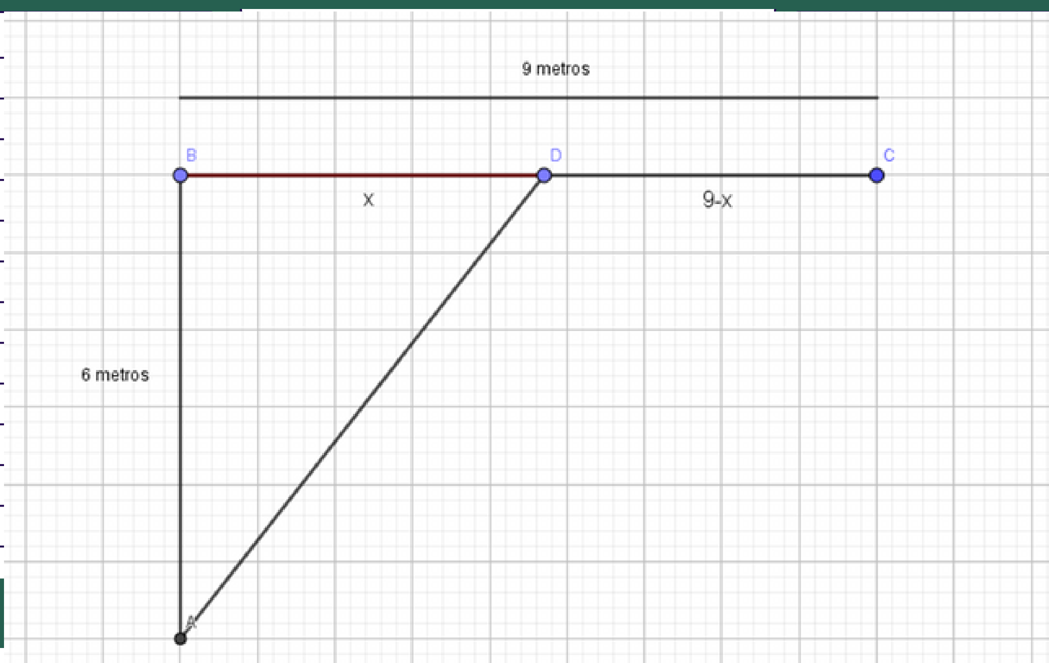
APRENDE+

Enlace del video de como hacer la simulación:
https://www.youtube.com/watch?v=npD9_H3n2Tc

Enlace simulación
https://www.geogebra.org/m/wnednqeg



a) Primer paso dibujemos el diagrama que represente esta situación



b) Analicemos la situación planteada

- Como nos pide el tiempo mínimo, se debe buscar una función con respecto al tiempo que depende de una variable independiente que proporcionó el ejercicio
- Tenemos como datos del ejercicio el tiempo, la distancia y velocidades
- Para relacionar el tiempo con la distancia y velocidad tenemos la fórmula de $V = \frac{Distancia}{Tiempo}$
- Recordemos que el recorrido que debe hacer Juan es desde A hasta D y luego de D hasta C
- La función debe quedar en función de una sola variable

c) Planteo

- Desde A hasta D

$$V = \frac{Distancia}{Tiempo}$$

$$4 = \frac{AD}{T}$$

$$T = \frac{AD}{4}$$

Desde D hasta C

$$V = \frac{Distancia}{Tiempo}$$

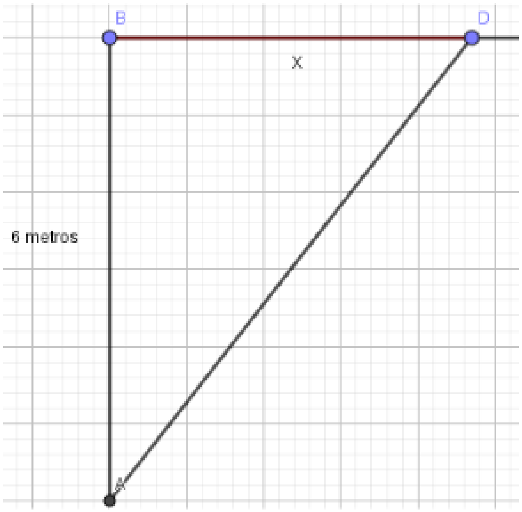
$$5 = \frac{DC}{T}$$

$$T = \frac{DC}{5}$$

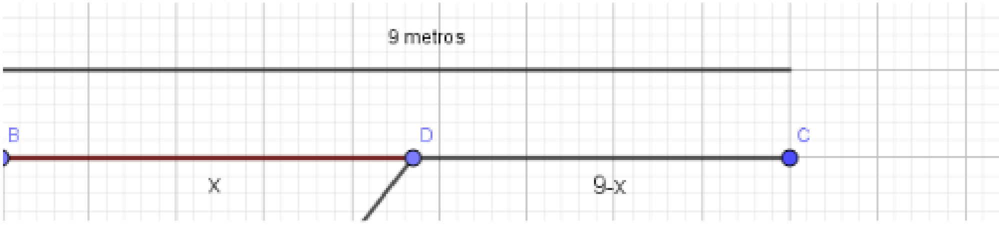
$$Tiempo\ total = \frac{AD}{4} + \frac{DC}{5}$$

d) Cálculo de distancia

- $AD = \sqrt{x^2 + 36}$



- DC = 9-x



e) Función planteada para optimizar

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+36}}{4} + \frac{9-x}{5}$$

- Donde el dominio es de 0 hasta 9 metros

---

f) Optimizamos usando la primera derivada para encontrar lo solicitado

Encontramos la primera derivada para verificar si existen puntos críticos

$$T'(x) = \frac{1(x^2+36)^{1/2}}{4} + \frac{9-x}{5}$$

$$T'(x) = \frac{1}{4}\,\frac{1(x^2+36)^{1/2-1}}{2} + \frac{9-x}{5}$$

$$T'(x) = \frac{1}{4}\,\frac{1(x^2+36)^{-1/2}(2x)}{2} + \frac{1}{5}\,\frac{(9-x)}{}$$

$$T'(x) = \frac{1}{4}\,\frac{(x^2+36)^{-1/2}(x)}{} + \frac{1}{5}\,\frac{(-1)}{}$$

$$T'(x) = \frac{x}{4\sqrt{x^2+36}} - \frac{1}{5}$$

$$T'(x) = 0$$

$$\frac{x}{4\sqrt{x^2+36}} = \frac{1}{5}$$

$$5x = 4\sqrt{x^2 + 36}$$

$$5x = 4\sqrt{x^2 + 36}$$

$$(\frac{5x}{4})^2 = (\sqrt{x^2 + 36})^2$$

$$\frac{25x^2}{16} = x^2 + 36$$

$$25x^2 = 16x^2 + 576$$

$$9x^2 = 576$$

$$9x^2 = 576$$

$$x^2 = 576/9$$

$$x^2 = 576/9$$

$$x = \sqrt{64}$$

x=+8, -8, Escogemos el valor de +8 debido a que el dominio que determinamos está entre [0,9]

$$T'(x) = \frac{x}{4\sqrt{x^2+36}} - \frac{1}{5}$$

Se presenta a los alumnos la siguiente tabla como ayuda para determinar criterios tanto de la primera y segunda derivada y así poder sacar conclusiones del problema propuesto

valores antes del punto crítico x= 7	Punto crítico calculado = 8	valores después del punto crítico x=9
$T'(x) = \frac{x}{4\sqrt{x^2+36}} - \frac{1}{5}$ =-0.01		$T'(x) = \frac{x}{4\sqrt{x^2+36}} - \frac{1}{5}$ $= 0.0008$
Signo -		signo +
Entonces este tramo es DECRECIENTE		Entonces este tramo es CRECIENTE

Resolución: Por lo que podemos concluir que estamos encontrando un mínimo de la función, eso quiere decir que el tiempo mínimo empleado será de 8 metros, es decir que si reemplazamos este valor en la ecuación inicial nos dará el tiempo mínimo empleado para llegar desde A hasta C

$$T(8) = \frac{\sqrt{8^2+36}}{4} + \frac{9-8}{5}$$

$$T(8) = \frac{\sqrt{100}}{4} + \frac{1}{5}$$

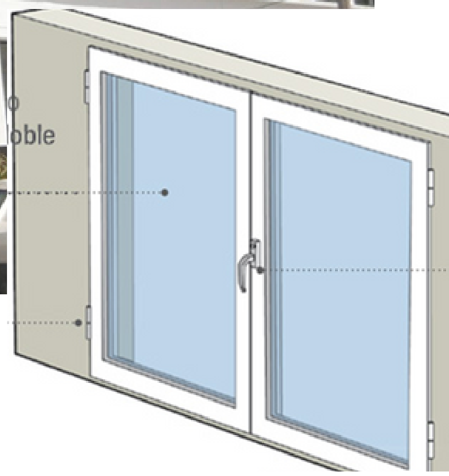
$$T(8) = \frac{10}{4} + \frac{1}{5} = 2.7\ minutos$$

2. En la Universidad de Cuenca se pretende realizar una remodelación, es así que se ha dispuesto que en la planta baja de la Facultad de Filosofía las ventanas en forma rectangular sean remodeladas, el área de la ventana ha de contener unos 40 metros cuadrados. En la remodelación se va a colocar una ventana de aluminio, los márgenes de la parte superior e inferior van ser de 1 metros y los márgenes de la izquierda a derecha es de 0.5 metros ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la ventana para que se use la menor cantidad de material de bloque y mortero ?

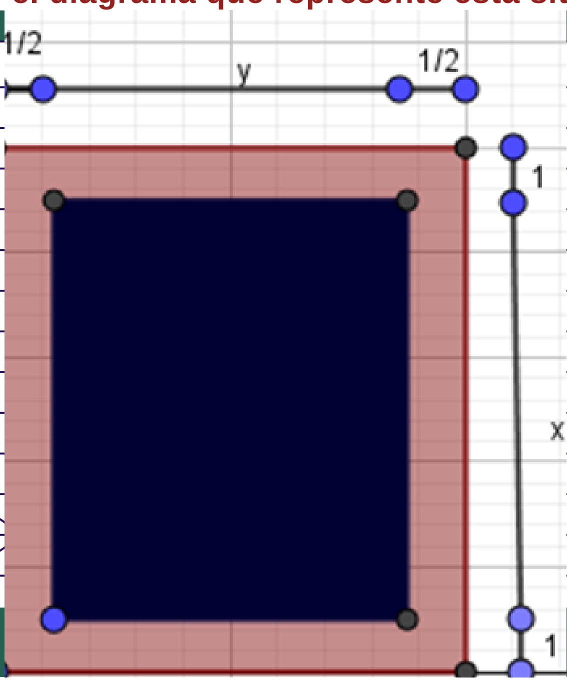
APRENDE+

Enlace del video de como hacer la simulación:
https://www.youtube.com/watch?v=Phc4ZazOZ0o

Enlace grafica solucionado
https://www.geogebra.org/m/fgj9ta9z



a) Primer paso dibujemos el diagrama que represente esta situación



b) Analicemos la situación planteada

- Nos pide el área mínima por lo que debemos buscar una función que relacione el área con uno de sus lados
- Tenemos como datos que el área de la ventana siempre es 40 metros cuadrados
- Para relacionar el área de un rectángulo tenemos la fórmula de $A = b * h$
- La función debe quedar en función de una sola variable

c) Planteo

- Área de la ventana

A ventana =b*h   A ventana=y*x=40

- Área de todo la ventana con los bloques

$A = (x + 2)(y + 1)$ Función a minimizar

- Despejamos la variable y del área de la ventana para tener nuestra función a optimizar en una sola variable

$y = 40/x$

$A(x) = (x + 2)(\frac{40}{x} + 1)$

$A(x) = 40 + \frac{80}{x} + x + 2$

$A(x) = \frac{80}{x} + x + 42$

d) Función planteada para optimizar

$$A(x) = \frac{80}{x} + x + 42$$

- Donde el dominio es todos los valores positivos

e) Optimizamos usando la primera derivada para encontrar lo solicitado

$$A'(x) = \frac{80}{x} + x + 42$$

$$A'(x) = -80x^{-1-1} + 1$$

$$A'(x) = -80x^{-2} + 1$$

$$A'(x) = -\frac{80}{x^2} + 1$$

$$A'(x) = 0$$

$$-\frac{80}{x^2} + 1 = 0$$

$$-\frac{80}{x^2} = -1$$

$$80 = x^2$$

$$\sqrt{80} = x$$

$$x = 4\sqrt{5} \ =8.94$$

Se presenta a los alumnos la siguiente tabla como ayuda para determinar criterios tanto de la primera y segunda derivada y así poder sacar conclusiones del problema propuesto

valores antes del punto crítico x= 8	Punto crítico calculado $= 4\sqrt{5}$=8.94	valores después del punto crítico x=9
$A'(x) =- \frac{80}{8^2} + 1 =- 0.25$		$A'(9) =- \frac{80}{9^2} + 1 =+ 0.01$
Signo -		signo +
Entonces este tramo es DECRECIENTE		Entonces este tramo es CRECIENTE

f) Verificamos con la segunda derivada si se trata de un mínimo

$$A''(x) =- \frac{80}{x^2} + 1$$

$$A''(x) =- 80(- 2)x^{-2-1}$$

$$A''(x) = 160x^{-3}$$

$$A''(x) = \frac{160}{x^3}$$

$$A''(4\sqrt{5}) = \frac{160}{x^3} =0.22 \geq 0 \text{ entonces es un mínimo}$$

---

g) Resolución

Sabiendo que x=8.94, entonces calculamos y

$$y = 40/x$$

y= 4.47

Entonces eso quieres decir que las dimensiones de la ventana deben ser

$(x + 2)$ =(8.94 + 2)= 10.94m

$(y + 1) = (4.47 + 1)$=5.47m

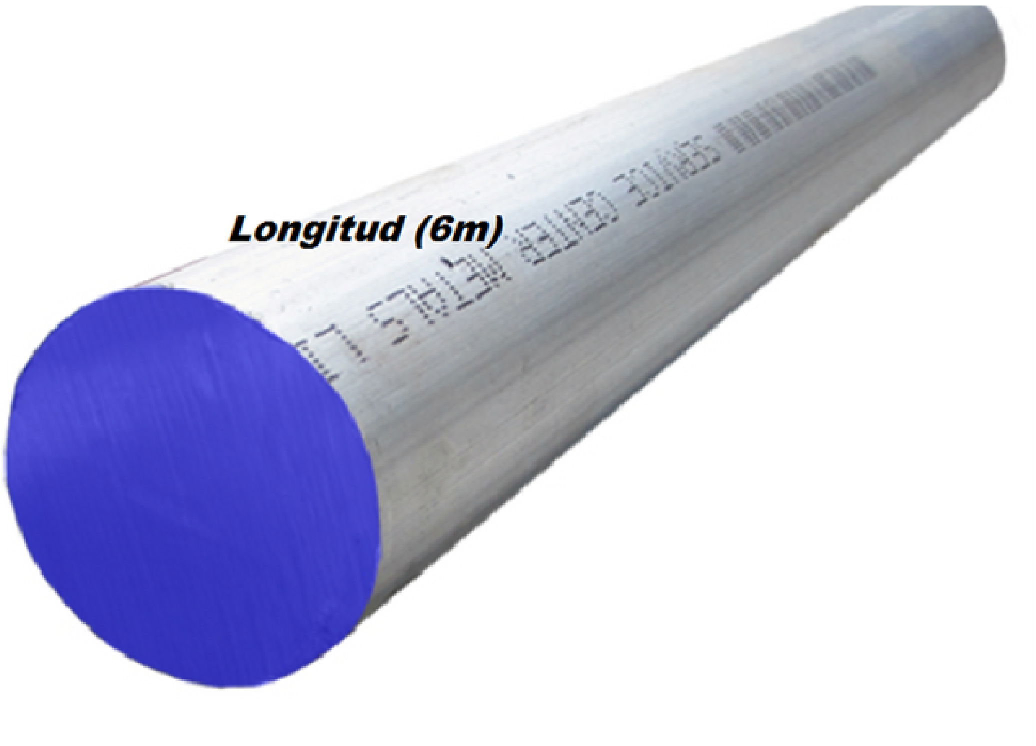
3. En la Facultad de Filosofía de la Universidad de Cuenca los alumnos de la carrera de Cultura de Física requieren de la construcción de una portería de fútbol para lo cuál cuentan con una barra de aluminio de 6m de longitud, desean saber cuánto deben medir los parantes y el larguero de modo qué el área de la portería sea máxima. Para resolver dicha situación se apoyan en los conocimientos de los alumnos de la carrera de Matemáticas y Física pertenecientes a la misma Facultad.

1.

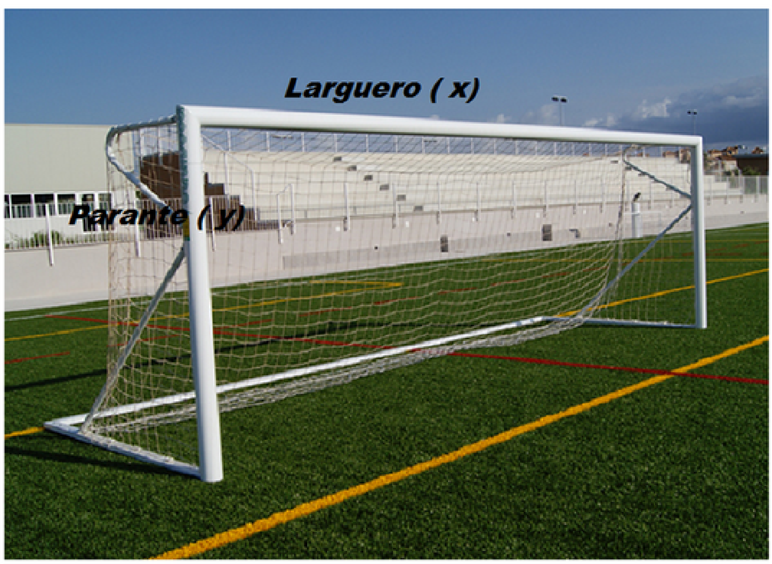
APRENDE+

Enlace del video de como hacer la simulación: https://youtu.be/AtuKuUp7IXk

Enlace grafica solucionado https://www.geogebra.org/m/dpvfdmt



a) Primer paso dibujemos el diagrama que represente esta situación



b) Debido a qué tenemos dos variables como son (x) y (y), necesitamos dos fórmulas qué relacionan a nuestras variables para este caso podemos usar el perímetro y el área.

LONGITUD

1) $y+x+y=6 \quad \Rightarrow \quad x+2y=6$

ÁREA

2) $A=(x)(y)$

c) Ahora procedemos a encontrar una sola fórmula de modo qué obtengamos una sola función qué dependa de una sola variable.

1) Tenemos $y=\frac{6-x}{2}$

2) $A(x)=(x)(\frac{6-x}{2})=(\frac{6x-x^2}{2})=3x-\frac{x^2}{2}$

d) Una vez obtenida la función qué depende de una sola variable, procedemos a derivarla

$$A(x)=3x-\frac{x^2}{2}$$

$$A'(x)=3-x$$

e) Luego igualamos a cero la derivada de la función para obtener los puntos críticos de la misma.

$$A'(x)=3-x=0$$

$x=3 \Rightarrow$ *punto crítico*

f) Por último procedemos a hacer una análisis para saber si el punto crítico hallado es un máximo o mínimo.

Se presenta a los alumnos la siguiente tabla como ayuda para determinar criterios tanto de la primera y segunda derivada y así poder sacar conclusiones del problema propuesto

Monotonía	A(x)	$A'(x)$	Conclusión
x<3		+	La función es creciente
x=3	4.5	0	***La función tiene un máximo***
x>3		-	La función es decreciente

g) Procedemos a dar la solución requerida después de los cálculos realizados

Tenemos $y = \frac{6-x}{2} = \frac{6-3}{2} = 1.5$

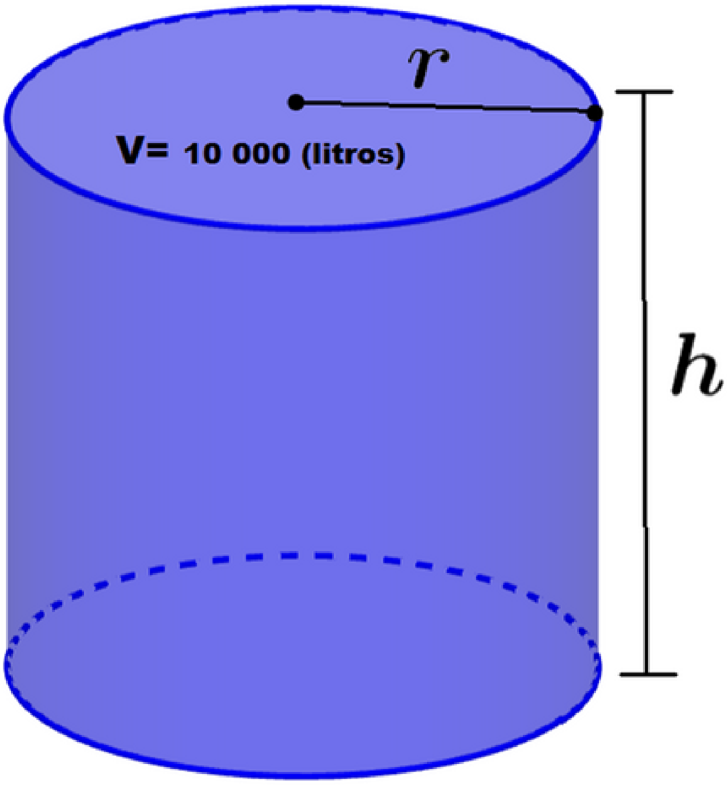
El larguero debe medir (3m) de longitud final y los parantes deben medir (1.5m)

4. La empresa municipal de Cuenca Etapa requiere adquirir depósitos cilíndricos de agua de una capacidad volumétrica fija de 10 000 (litros). Ha recibido la siguiente propuesta de una empresa especialista en este tipo de trabajos la misma qué ha manifestado lo siguiente: qué para fabricar un depósito cilíndrico de agua se necesitan materiales distintos para las bases y el lateral. El precio por metro cuadrado del material de las bases es de $2 y el del lateral es de $15. Entonces Etapa desea conocer con exactitud cuáles serían las medidas del radio y altura del recipiente cilíndrico para qué el costo de la fabricación sea el menor posible.

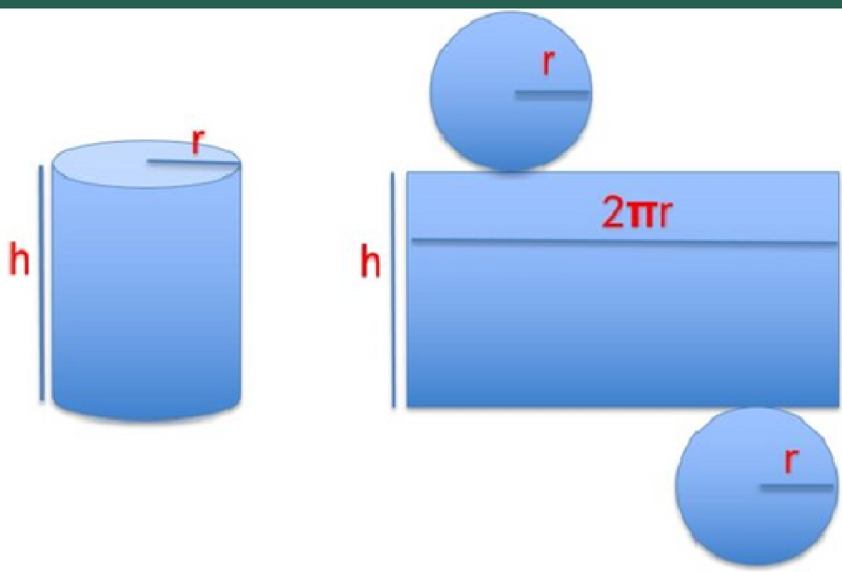
APRENDE+

Enlace del video de como hacer la simulación: https://youtu.be/h5sA6BWS7ac

Enlace grafica solucionado: https://www.geogebra.org/m/ewvsenf



a) Primer paso dibujemos el diagrama que represente esta situación



b) Debido a qué tenemos dos variables como son (h) y (r), necesitamos dos fórmulas qué relacionan a nuestras variables para este caso podemos usar el volumen y el área superficial de un cilindro.

1) V= Área(círculo)×(h)= (πr^2)×(h)= $\pi r^2 h$ =10 000

$\pi r^2 h$ =10 000

2) Área tapas=(πr^2)+(πr^2)= $2\pi r^2$; Area lateral= ($2\pi r$)×(h)=$2\pi rh$

c) Ahora procedemos a encontrar una sola fórmula de modo qué obtengamos una sola función qué dependa de una sola variable.

De 1) Tenemos $h=\dfrac{10\,000(litros)}{\pi r^2}=\dfrac{10\,(m^3)}{\pi r^2}$

3) Obtenemos una función en base al precio de los materiales especificados en (m^2)

Precio= 15$(Área lateral)+2$(Área tapas)

Precio= $15(2\pi rh)+2(2\pi r^2)= 30\pi rh+4\pi r^2$

Precio=$30\pi r(\dfrac{10}{\pi r^2})+4\pi r^2=\dfrac{300}{r}+4\pi r^2$

$P(r)=\dfrac{300}{r}+4\pi r^2$

d) Una vez obtenida la función qué depende de una sola variable, procedemos a derivarla

$$P(r)=\frac{300}{r}+4\pi r^2$$

$$P'(r)=-\frac{300}{r^2}+8\pi r$$

e) Luego igualamos a cero la derivada de la función para obtener los puntos críticos de la misma.

$$P'(r)=-\frac{300}{r^2}+8\pi r=0$$

$$r^3=\frac{300}{8\pi}$$

$$r=2.29 \Rightarrow \textit{punto crítico}$$

f) Por último procedemos a hacer una análisis para saber si el punto crítico hallado es un máximo o mínimo.

Se presenta a los alumnos la siguiente tabla como ayuda para determinar criterios tanto de la primera y segunda derivada y así poder sacar conclusiones del problema propuesto

Monotonía	P(r)	$P'(r)$	Conclusión
r<2.29		-	La función es decreciente
r=2.29	196.90	0	***La función tiene un mínimo***
r>2.29		+	La función es creciente

g) Procedemos a dar la solución requerida después de los cálculos realizados

Tenemos h= $\frac{10\,000(litros)}{\pi r^2} = \frac{10\ (m^3)}{\pi r^2} = \frac{10}{\pi(2.29)^2} = 0.606\ (\mathrm{m})$

El depósito cilíndrico de agua de menor costo posible tendrá un valor de 196.90$ hecho de tal manera qué el radio tenga una longitud de 2.29 (m) y una altura de 0.606 (m).

CONSOLIDACIÓN

(TIEMPO RECOMENDADO 50 MINUTOS)

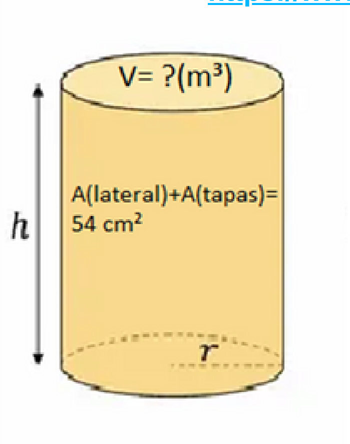
ACTIVIDADES EN CASA

1) Una empresa exportadora de productos de liquidos especiales cuenta con una cantidad específica de material de 54 cm^2 para la elaboración de un depósito en forma de cilindro, para lo cuál necesitan saber cuál debe ser la longitud del radio y la altura del cilindro de modo qué se pueda aprovechar al máximo el volumen del contenido.

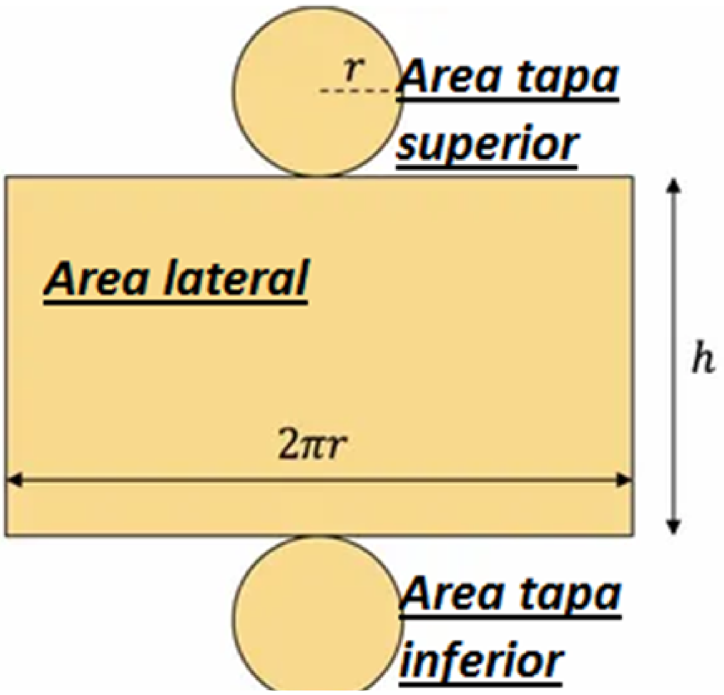
APRENDE+

Enlace del video de como hacer la simulación:
https://youtu.be/YF3tXhCBLPk

Enlace grafica solucionado:
https://www.geogebra.org/m/hw2ejgue



a) Planteamos la situación requerida con sus respectivas variables



b) Debido a qué tenemos dos cantidades qué varían como son (h) y (r), necesitamos dos fórmulas qué relacionan a nuestras variables para este caso podemos usar el volumen qué aún desconocemos y el área superficial de un cilindro el cuál es un valor constante.

Área total= Área lateral+Área tapas = $(2\pi r)\times(h)+(\pi r^2)+(\pi r^2)= 2\pi rh+2\pi r^2$

Área total=$2\pi rh+2\pi r^2=54cm^2$

- 1) $h=\frac{54-2\pi r^2}{2\pi r}$
- 2) Volumen= Área(círculo)×(h)= $(\pi r^2)\times(h)= \pi r^2 h$

c) Ahora procedemos a encontrar una sola fórmula de modo qué obtengamos una sola función qué dependa de una sola variable.

De 1) Tenemos qué $V= (\pi r^2)\times(\frac{54-2\pi r^2}{2\pi r})= (r)\times(\frac{54-2\pi r^2}{2})=(r)\times(27-\pi r^2)$

- 3) $V(r)=(r)\times(27-\pi r^2)$

d) Una vez obtenida la función qué depende de una sola variable, procedemos a derivarla

- $V(r)=(r)\times(27-\pi r^2)=27r-\pi r^3$
- $V'(r)= 27-3\pi r^2$

e) Luego igualamos a cero la derivada de la función para obtener los puntos críticos de la misma.

$$V'(r)= 27-3\pi r^2 =0$$

$$3\pi r^2=27$$

$$r^2= \frac{9}{\pi}$$

$$r = 1.69 \Rightarrow \textit{punto crítico}$$

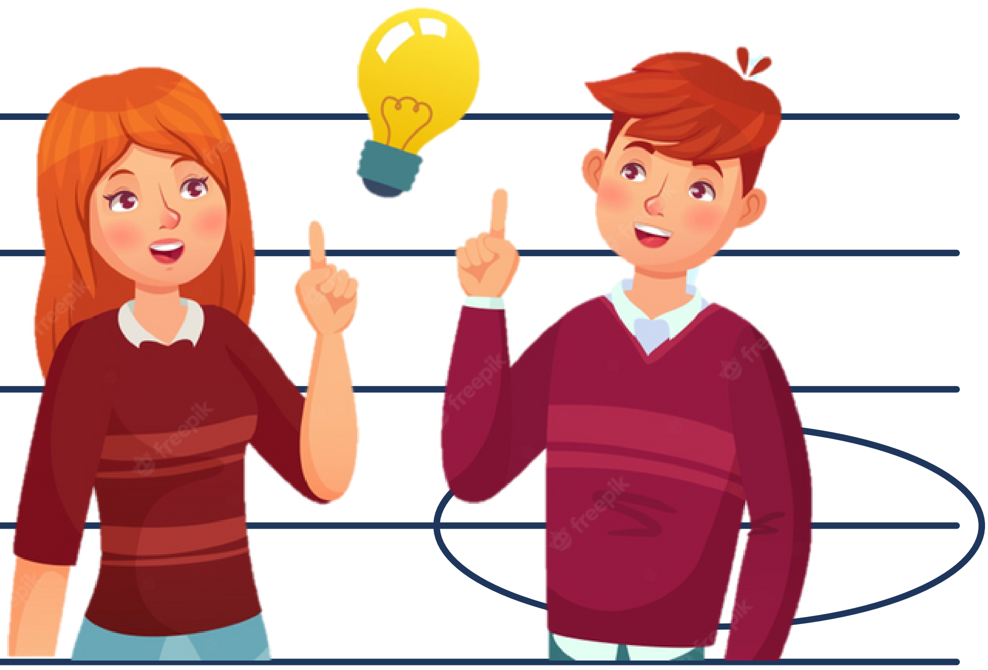
f) Por último procedemos a hacer una análisis para saber si el punto crítico hallado es un máximo o mínimo.

Monotonía	V(r)	V´(r)	Conclusión
r<1.69		+	La función es creciente
r=1.69	30.46	0	***La función tiene un máximo***
r>1.69		-	La función es decreciente

g) Procedemos a dar la solución requerida después de los cálculos realizados

$$\Rightarrow h = \frac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{54 - 2\pi(1.69)^2}{2\pi(1.69)} = 3.39$$

Respuesta :
Los valores qué hacen el volumen máximo son h=3.39 cm y r=1.69 cm obteniendo un volumen máximo de 30.46 cm³

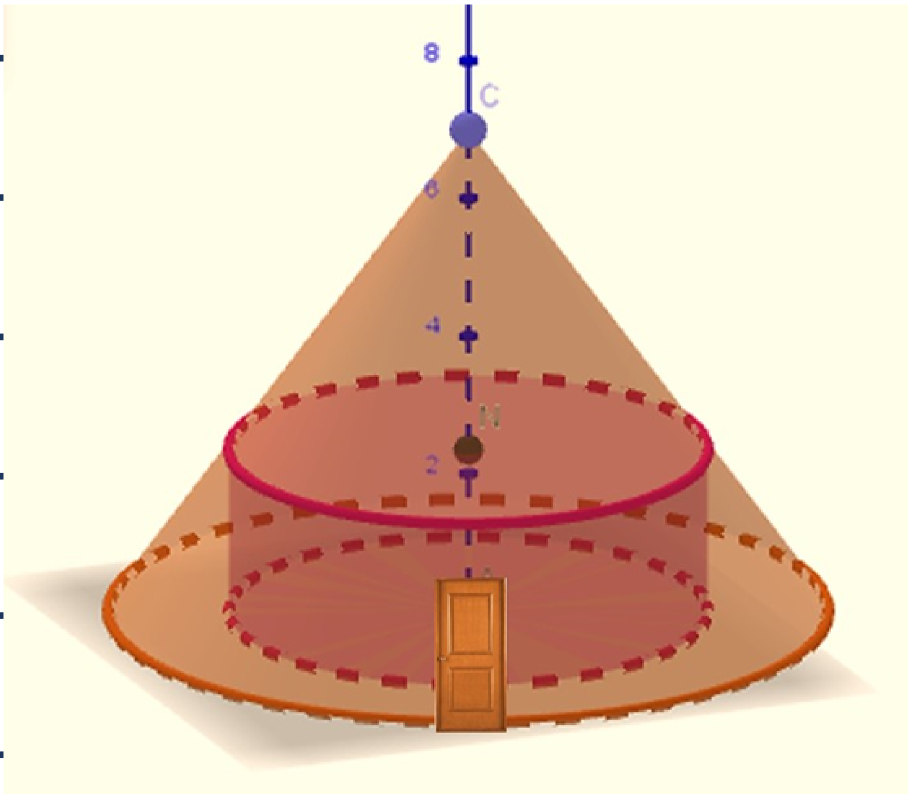


2) Alfonso es un arquitecto, se le encarga diseñar un modelo de casa de forma de un cono para un museo, cuya radio será de 5m y la altura 7m,sin embargo se le solicita inscribir un cilindro circular recto como sala principal de lugar. Determine el cilindro con mayor volumen que se puede inscribir en el cono.

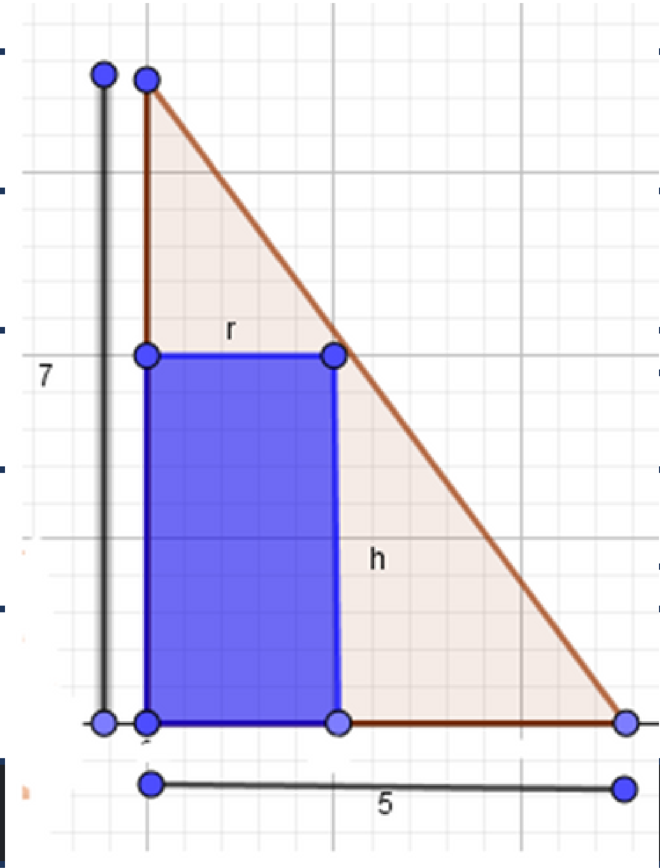
APRENDE+

Enlace del video de como hacer la simulación:
https://www.youtube.com/watch?...3qcwtFASCI

Enlace grafica solucionado:
https://www.geogebra.org/m/quahtkwz



a) Planteamos la gráfica de la situación



b) Analicemos la situación planteada

- Nos pide el cilindro con mayor volumen, por lo que debemos buscar una función que relacione el volumen con el radio del cilindro va a variar para obtener el cilindro máximo
- Tenemos como datos el radio de 5 metros y altura del cono 7 metros
- Para relacionar el volumen de cono y el volumen del cilindro tenemos que darnos en cuenta, fórmula de semejanzas de triángulos por lados y la formula de volumen $V = Área\ de\ la\ base * altura$
- La función debe quedar en función de una sola variable

c) Planteo

$$\frac{7-h}{7} = \frac{r}{5}$$

- despejemos para poder tenerla una función en una sola variable

$$35 - 5h = 7r$$

$$\frac{35-7r}{5} = h$$

- Reemplazamos en la función de volumen

$$V = Área\ de\ la\ base * altura$$
$$V = Área\ de\ la\ base * altura$$

$$V = \pi r^2 * h$$

$V = \pi r^2 * h$ reemplazamos h $\frac{35-7r}{5} = h$

Función a optimizar $V(r) = \pi r^2 * (\frac{35-7r}{5})$

d) Optimizamos usando la primera derivada para encontrar lo solicitado

$$V(r) = \pi r^2 * \left(\frac{35-7r}{5}\right)$$

$$V'(r) = \frac{\pi}{5}(35r^2 - 7r^3)$$

$$V'(r) = \frac{\pi}{5}(35(2)r^{2-1} - 7(3)r^{3-1}$$

$$V'(r) = \frac{\pi}{5}(70r - 21r^2)$$

$$V'(r) = \frac{\pi}{5}(70r - 21r^2)$$

$$V'(r) = 0$$

$$r(70 - 21r) = 0$$

$$21r = 70$$

$$r = 70/21 = 3.333$$

$$V'(r) = \frac{\pi}{5}(70r - 21r^2)$$

valores antes del punto crítico r= 3	Punto crítico calculado = 3.33	valores después del punto crítico r=4
$V'(3) = \frac{\pi}{5}(70(3) - 21(3)^2)$ =13.19		$V'(4) = \frac{\pi}{5}(70(4) - 21(4)^2)$ =-35.18
Signo +		signo -
Entonces este tramo es CRECIENTE		Entonces este tramo es DECRECIENTE

e) Verificamos con la segunda derivada si se trata de un máximo

$$V'(r) = \frac{\pi}{5}(70r - 21r^2)$$

$$V''(r) = \frac{\pi}{5}(70r - 21r^2)$$

$$V''(r) = \frac{\pi}{5}(70 - 21(2)r^{2-1})$$

$$V''(r) = \frac{\pi}{5}(70 - 42r\ )$$

$$V''(3.33) = \frac{\pi}{5}(70 - 42(3.33\ ))$$

$$V''(3.33) = \frac{\pi}{5}(70 - 42(3.33\ ))$$

$$V''(3.33) =- 43.97$$

$V''(3.33) =- 43.97 \leq 0$ entonces es un máximo

Resolución: Por lo que podemos concluir que estamo encontrando un máximo de la función, eso queire decir que el radio máximo empleado será de 3.33 metros, es decir que si reemplazamos este valor en la ecuación inicial nos dará el volumen máximo inscrito en el cono

$$V(3.33) = \pi(3.33)^2 * \left(\frac{35-7(3.33)}{5}\right)$$

$$V(3.33) = \pi(3.33)^2 * \left(\frac{35-7(3.33)}{5}\right)$$

$$V(3.33) = \pi(3.33)^2 * (2.3338)$$

$$V(3.33) = \pi(3.33)^2 * (2.3338) = 81.45\ m^3$$

CONCLUSIÓN

1. Explique qué entiende por la optimización de función

2. De ejemplos de donde puede encontrar casos de la vida real, donde se pueda aplicar la optimización

3. Le parece importante todos los temas vistos anteriormente para entender los ejercicios de optimización ¿Porque ?

4. Según su criterio. Enumera y describe cuáles serían los pasos ordenados para resolver los ejercicios de optimización

5.Se tiene una pieza cuadrada de hojalata cuyo lado mide 89 centímetros, se desea armar una caja abierta de dicho material tal que el volumen que se obtenga sea el máximo posible, para eso se va a realizar cortes iguales en las esquinas para así formar las caras laterales de la caja. Determine de cuanto debería ser los cortes en la esquina para obtener el mayor volumen posible

RECORTABLE

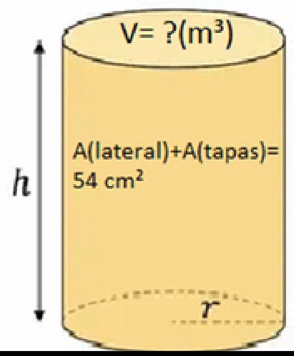
ACTIVIDADES EN CASA

1) Una empresa exportadora de productos de liquidos especiales cuenta con una cantidad específica de material de 54 cm^2 para la elaboración de un depósito en forma de cilindro, para lo cuál necesitan saber cuál debe ser la longitud del radio y la altura del cilindro de modo qué se pueda aprovechar al máximo el volumen del contenido.

APRENDE+

Enlace del video de como hacer la simulación:
https://youtu.be/YF3tXhCBLPk

Enlace grafica solucionado:
https://www.geogebra.org/m/hw2ejgue



RECORTABLE

RECORTABLE

RECORTABLE

2) Alfonso es un arquitecto, se le encarga diseñar un modelo de casa de forma de un cono para un museo, cuya radio será de 5m y la altura 7m,sin embargo se le solicita inscribir un cilindro circular recto como sala principal de lugar. Determine el cilindro con mayor volumen que se puede inscribir en el cono.

APRENDE+

Enlace del video de como hacer la simulación:
https://www.youtube.com/watch?v=s8qcwtFASCI

Enlace grafica solucionado:
https://www.geogebra.org/m/quahtkwz

RECORTABLE

RECORTABLE

RECORTABLE

CONCLUSIÓN

1. Explique qué entiende por la optimización de función

2. De ejemplos de donde puede encontrar casos de la vida real, donde se pueda aplicar la optimización

3. Le parece importante todos los temas vistos anteriormente para entender los ejercicios de optimización ¿Porque ?

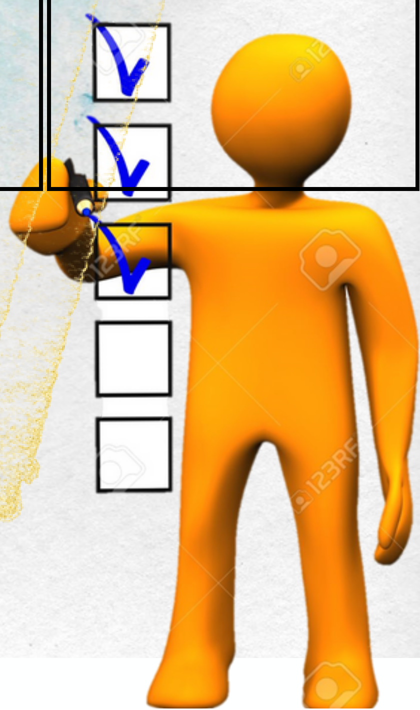
RECORTABLE

4. Según su criterio. Enumera y describe cuáles serían los pasos ordenados para resolver los ejercicios de optimización

5.Se tiene una pieza cuadrada de hojalata cuyo lado mide 89 centímetros, se desea armar una caja abierta de dicho material tal que el volumen que se obtenga sea el máximo posible, para eso se va a realizar cortes iguales en las esquinas para así formar las caras laterales de la caja. Determine de cuanto debería ser los cortes en la esquina para obtener el mayor volumen posible

Criterios de evaluación

	Muy bien	Bien	Regular	Insuficiente	Observaciones
Muestra responsabilidad durante el desarrollo de caso de problemas					
Demuestra interés por aprender y usar Geogebra					
Propone ideas para resolver los casos de estudios					
Usa Geogebra para plantear y resolver problemas					
Realiza presentaciones adecuadas usando Geogebra					



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arteaga Valdés, E., Medina Mendieta, J. F., & Del Sol Martínez, J. L. (2019). Geogebra: una herramienta tecnológica para aprender matemática en la Secundaria Básica haciendo matemática. Revista Conrado, 15(70), 102-108. Recuperado de http://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado

Balseca Núñez, S. V., Moncayo Cajas, M. E., & Muñoz Contreras, E. C. (2013). *Guía docente para trabajar la expresión corporal con niños/as de 3 a 6 años* (Bachelor's thesis, Quito; 2013).

Barreno Layedra, N. D. P., Román Vargas, W. M., & Olalla Pilco, J. M. (2017). Software libre matemático y su incidencia en el aprendizaje del Cálculo Diferencial.

Barreno, P (2015) Desarrollo de aplicaciones con software libre matemático y su incidencia en el aprendizaje del cálculo diferencial en el I semestre de la Espe-L A. Riobamba-Ecuador

Blázquez, S., Nora, S., & Ortega, T. (2008). Concepto de límite funcional: Aprendizaje y memoria. Contextos Educativos: Revista de Educación Vol. 11, 7-21.

Cuicas, M.; Debel, E.; Casadei, L.; Álvarez, Z. (2007) El software matemático como herramienta para el desarrollo de habilidades del pensamiento y mejoramiento del aprendizaje de las matemáticas Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación", vol. 7, núm. 2, mayo-agosto, 2007, p. 0

Elizarraras-Baena, S. (2019). Enseñanza y comprensión del concepto de límite infinitesimal en bachillerato mediante Geogebra. Pedagogía y Práctica Educativa, 1(1), 39-58.

Fernández, I., Riveros, V., & Montiel, G. (2017). Software educativo y las funciones matemáticas. Una estrategia de apropiación. *Omnia*, *23*(1), 9-19.

Flores, A. (2014). Enfoque conceptual del cálculo en la formación de docentes: Ejemplos con uso de tecnología interactiva. *El Cálculo y su Enseñanza*, *5*, 1-26.

Fúneme-Mateus, C. C. (2019). El aula invertida y la construcción de conocimiento en matemáticas. El caso de las aplicaciones de la derivada. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (45), 159-174.

Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de matemáticas. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática

García Aretio, L. (2014): La Guía Didáctica Contextos Universitarios Mediados, nº 14,5 (ISSN: 2340-552X)

Garcia Ortiz, G. A., & Castilla Vargas, I. Y. (2021). Propuesta de optimización del proceso de recibo de combustible por líneas submarinas en el terminal de pozos colorados de la ciudad de Santa Marta.

García Martínez, O. M. (2014). Uso pedagógico del celular en el aula. Ibagué: Universidad del Tolima, 2014. <http://repository.ut.edu.co/handle/001/1459>

Guerrero, F. E. B., Zambrano, C. A. T., & Samaniego, J. F. B. (2017). Reflexiones sobre la evolución de la clase de matemáticas en el bachillerato ecuatoriano. *INNOVA Research Journal*, *2*(7), 1-12.

Guzmán, M. (2007). Enseñanza de ciencias y matemáticas. Revista iberoamericana de educación, 43, 19-58.

Jiménez, A. I. (2017). Estrategias y recursos que utilizan docentes de Educación Básica para la enseñanza del Español. *San Luis Potosí*.

Jiménez García, J. G., & Jiménez Izquierdo, S. (2017). Geogebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Revista Electrónica Sobre Tecnología, Educación Y Sociedad*, *4*(7). Recuperado a partir de https://www.ctes.org.mx/index.php/ctes/article/view/654

Leithold, L. (1998). El Cálculo. Reino Unido.

Llerena Vilema, M. V., & Santillán Calderón, K. B. (2010). *Metodología constructivista en el aprendizaje de matemáticas* (Bachelor 's thesis).

Martínez Bustamante, M., & Portilla Flores, R. (2017). Cálculo diferencial con geometría analítica para ingeniería automotriz. Repositorio

Mejía, L. G. M. (2013). La guía didáctica: práctica de base en el proceso de enseñanza-aprendizaje y en la gestión del conocimiento. Apertura, 5(1), 66-73.

Mosquera Ríos, M. A., & Vivas Idrobo, S. J. (2017). Análisis comparativo de software matemático para la formación de competencias de aprendizaje en cálculo diferencial. *Plumilla Educativa*, *19*(1), 98–113. https://doi.org/10.30554/plumillaedu.19.2476.2017

Muela Pillajo, J. A. (2020). El uso de Geogebra en la enseñanza-aprendizaje de la concepción dinámica del concepto de Límite: una propuesta didáctica para estudiantes de Bachillerato General Unificado (BGU) (Bachelor 's thesis, Quito: UCE).

Muñoz, E. (2015). La importancia del constructivismo y la motivación en el aula. Madrid: tesis.

Muñoz-Suárez, M., & Porras-Fernández, M. (2018, July). Wolfram Alpha, Geogebra y Derive como integrantes de la formación STEM. In Conference Proceedings (Vol. 2, No. 2).

Oyarce Cruz, M. J. (2016). Tecnologías de información y comunicación, TIC y su relación con el desempeño docente con calidad en la Escuela Académica Profesional de Comunicación Social de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, 2015.

Pérez González, F. J. (2000). Cálculo Diferencial e Integral de Funciones de una variable.

Pino, R., & Urías, G. (2020). Guías didácticas en el proceso enseñanza-aprendizaje: ¿Nueva estrategia? Revista Scientific, 5(18), 371-392, e-ISSN: 2542-2987. Recuperado de: https://doi.org/10.29394/Scientific.issn.2542-2987.2020.5.18.20.371

Revelo Rosero, J. (2020). Impacto del uso de las TIC como herramientas para el aprendizaje de la matemática de los estudiantes de educación media. Cátedra, 1(1), 70–91. https://doi.org/10.29166/catedra.v1i1.764 (Original work published 26 de septiembre de 2018)

Río, L. S. D. (2016). Enseñar y aprender cálculo con ayuda de la vista gráfica 3D de Geogebra. Revista Digital Matemática, Educación e Internet, 17.

Rosillo, I. R. (2017). Innovaciones didácticas para el aprendizaje del Cálculo. Machala-Ecuador.

Sampieri, R., Fernández, C., & Baptista, L. (2014). Definiciones de los enfoques cuantitativo y cualitativo, sus similitudes y diferencias. *RH Sampieri*, *Metodología de la Investigación*.

Tigse Parreño, C. M. (2019). El constructivismo, según bases teóricas de César Coll (Ensayos).

Trávez Umatambo, N. L. (2018). Geogebra en la enseñanza de Funciones en los estudiantes de primer año de Bachillerato del Colegio Amazonas, durante el año lectivo 2017–2018 (Bachelor's thesis, Quito: UCE)

Volverás Espinosa, A. F. (2015). Propuesta didáctica para la enseñanza de límites de funciones en el grado undécimo de la institución educativa el rosario integrando Geogebra. Departamento de Matemáticas y Estadística.

Pastuizaca Fernández, E. N., & Galarza Navarro, M. J. (2010). *Recursos didácticos en el aprendizaje significativo de las matemáticas* (Bachelor's thesis)

Pérez, S. (2010). Los recursos didácticos. *Obtenido de Revista Digital para Profesionales de la Enseñanza: https://www. feandalucia. ccoo. es/docu/p5sd7396. pdf*.

Valencia Romero, A. E. (2016). *Prácticas de enseñanza de matemática en décimo año de Educación General Básica del Colegio Bethel de Yaruqui* (Bachelor's thesis)

Valenzuela, Maritza; Barrantes, Elton (2018). *Resolución de problemas de optimización de funciones reales en varias variables asistido por el Geogebra.* En Sema, Luis (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 1892-1900). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

ANEXOS

Estructura encuesta

Link de encuesta online : https://forms.gle/ftTLz3Wrg25jZxaN8

UNIVERSIDAD DE CUENCA FACULTAD DE FILOSOFÍA CIENCIA Y LETRAS DE LA EDUCACIÓN CARRERA DE CIENCIAS EXPERIMENTALES

GUÍA DIDÁCTICA PARA EL USO DE GEOGEBRA APLICADO A PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN EN LA ASIGNATURA DE CALCULO DIFERENCIAL

Objetivo: Determinar las causas y dificultades que presentan los alumnos en el tema de la optimización de variables como una de las aplicaciones de la derivada dentro del cálculo diferencial

Instrucciones: Marque la alternativa que a usted le parezca correcta

1. ¿El docente de cálculo diferencial utiliza recursos tecnológicos para enseñar temas relacionados con aplicaciones de la derivada?

- **Siempre**
- **Casi siempre**
- **Algunas veces**
- **Nunca**

2. ¿Cuáles de los siguientes recursos usa el profesor para desarrollar sus clases? (Se puede marcar más de una). Si su opción es OTROS indicar el recurso.

- **Pizarra**
- **Software**
- **Diapositivas**
- **Laboratorios**
- **Otros**

3. ¿Qué tan difícil es para Ud. imaginar o interpretar geométricamente los conceptos en el tema de aplicaciones de la derivada?

- **Muy difícil**
- **Difícil**
- **Poco**
- **Nada**

4. ¿Considera usted importante utilizar un software matemático educativo gratuito para mejorar el proceso de enseñanza- aprendizaje tanto en el aula como fuera de la misma?

- **Siempre**
- **Casi siempre**
- **Algunas veces**
- **Nunca**

5. ¿Ha tenido usted alguna experiencia con el uso de software matemático educativo para su proceso de aprendizaje?

- **Siempre**
- **Casi siempre**
- **Algunas veces**
- **Nunca**

6. ¿Conoce usted cómo relacionar el contenido implicado en el tema de aplicaciones de la derivada mediante un software matemático?

- **Si**
- **No**
- **Muy poco**

7. Indique qué software matemático ha utilizado en la asignatura de cálculo diferencial para una mejor interpretación en el tema de aplicaciones de la derivada.

- **Derive**
- **Geogebra**

- **Wolfram-Alpha**
- **Solumaths**

8. ¿Resuelve los ejercicios de optimización como una de las aplicaciones de la derivada utilizando algún software matemático?

- **Siempre**
- **Casi siempre**
- **Algunas veces**
- **Nunca**

9. ¿Cree usted qué sería más sencillo para usted resolver un problema de optimización en el tema de aplicaciones de la derivada cuando utiliza un software matemático?

- **Siempre**
- **Casi siempre**
- **Algunas veces**
- **Nunca**

10. ¿Cuándo se abarca el tema de optimización como una de las aplicaciones de la derivada mediante máximos y mínimos, que es lo que más le dificulta para la compresión de dicho tema?

- **La diferencia entre máximo y mínimo**
- **Interpretación geométrica**
- **Explicación del docente**
- **Interpretación del problema**

11. ¿A Ud. le parece correcto que el docente use Geogebra y guías didácticas para impartir la clase de optimización como unas de las aplicaciones de la derivada e indique el porqué de su respuesta?

- **Si**
- **No**

12. El docente al momento de enseñar el tema de optimización como una de las aplicaciones de la derivada ¿Qué modelo pedagógico uso según su criterio?

- **Constructivismo**
- **Tradicional**
- **Cognitivismo**
- **Conductista**

13. Si se elaborara una guía didáctica para el aprendizaje de la optimización como una de las aplicaciones de la derivada. ¿Cree que se mejoraría el aprendizaje del tema?

- **Mucho**
- **Regular**
- **Poco**
- **Nada**

14. ¿Si se incorporarán videos tutoriales de cómo usar Geogebra para resolver problemas de optimización por parte del docente? ¿Cree que sería de gran apoyo para aprender el tema?

- **Si**
- **No**