

UCUENCA

Facultad de Ingeniería

Carrera de Ingeniería Civil

Metodología para realizar análisis no lineal tiempo historia de estructuras y
aplicación en lenguaje de programación

Trabajo de titulación previo a la
obtención del título del Título de
Ingeniero Civil.

Autores:

Tomás Javier Andrade Cobos

CI: 0104902317

Correo electrónico: tomasjandradec@gmail.com

Mateo Sebastián Jaramillo González

CI: 0104816095

Correo electrónico: mateosebastian97@gmail.com

Director:

Ing. Francisco Xavier Flores Solano

CI: 0301547410

Cuenca-Ecuador

05-julio-2022

RESUMEN

A pesar de su importancia, sobre todo en países con una alta actividad sísmica, el análisis dinámico no lineal de estructuras resulta un tema complejo y poco tratado, especialmente en cursos de pregrado. Si bien existen muchos softwares comerciales capaces de ejecutar este tipo de análisis, es necesario conocer los conceptos y procesos que conlleva aplicarlo. El presente trabajo de titulación tiene como objetivo explicar dichos conceptos y procesos, además de evidenciar los problemas que se presentan al aplicarlo, por ello, se expone una metodología detallada para resolver un análisis dinámico no lineal tiempo-historia en pórticos 2D de múltiples grados de libertad dinámico, basándose en el método de Newmark, tanto en diagramas de flujo, como en bloques de código implementados dentro de MATLAB. Este trabajo muestra una metodología base, y dos variaciones orientadas a la explicación de las diferencias presentadas frente a softwares comerciales, y con enfoque didáctico. Para facilitar su entendimiento, se realiza la resolución de ejemplos, con pórticos de 1 y 2 pisos, sometidos a 2 registros sísmicos diferentes, y la comparación con la resolución de estos con el software comercial SAP2000.

Palabras claves: Análisis matricial. Análisis dinámico. Tiempo-historia. Newmark. Rótulas plásticas. Fluencia. No linealidad. Matlab.

ABSTRACT

Despite its importance, particularly in countries with a high seismic activity, the non-linear dynamic analysis of structures is a complex and untreated topic, especially in undergraduate courses. While there are many commercial software systems capable of executing this type of analysis, it is necessary to know the concepts and processes involved when applying it. This paper's purpose is to explain these concepts and processes, in addition to evidencing the problems that arise when applying it. Therefore, a detailed methodology is exposed to solve a non-linear dynamic time-history analysis in 2D frames with multiple degrees of freedom, based on the Newmark method; both in flow diagrams, as in code blocks implemented with MATLAB. This paper presents a base methodology, and two variations which are oriented to explain the differences they present against commercial software, and within a didactic approach. To facilitate its understanding, the solving of examples is carried out with frames of 1 and 2 floors, subjected to 2 different seismic registers, and the comparison with the results obtained using the commercial software SAP2000.

Keywords: Matrix analysis. Dynamic analysis. Time-history. Newmark. Plastic hinge. Yielding. Non-linear.

Contenido

RESUMEN	2
ABSTRACT.....	3
SIMBOLOGIA Y NOMENCLATURA.....	16
1. INTRODUCCION	19
1.1. ANTECEDENTES Y JUSTIFICACION	19
1.2. OBJETIVOS.....	20
1.2.1. GENERAL	20
1.2.2. ESPECIFICOS	20
2. MARCO TEORICO.....	21
2.1. Método matricial	21
2.1.1. Descripción general	21
2.1.2. Matriz de rigidez.....	21
2.1.3. Matriz de rotación.....	22
2.1.4. Matriz de colocación	24
2.1.5. Partición de matrices	24
2.1.6. Condiciones.....	25
2.2. Comportamiento No lineal de los materiales.	27
2.2.1. Diagrama Esfuerzo-Deformación	28
2.2.2. Modelos constitutivos Idealizados	29
2.2.3. Rótulas Plásticas.....	30
2.2.4. Comportamiento Histéretico.....	31
2.3. Análisis dinámico	32
2.3.1. Descripción general	32
2.3.2. Ecuación de movimiento	33
2.3.3. Matriz de masa y vector de incidencia:.....	34
2.3.4. Cálculo del amortiguamiento.....	34
2.3.5. Condensación estática.....	35
2.4. Método de Newmark	36
2.4.1. Estabilidad del método	39
3. MATERIALES Y METODOS.....	41
3.1. Modelo Matlab	43

3.1.1.	Ingreso de datos.....	43
3.1.2.	Definición de matriz de rigidez:	46
3.1.2.1.	Definición de vectores y matrices adicionales:	46
3.1.2.2.	Matrices de transformación:	47
3.1.2.3.	Matriz elemental:	48
3.1.2.4.	Matriz de rigidez:.....	49
3.1.2.5.	Matriz de masa.....	51
3.1.2.6.	Partición de matrices:	51
3.1.3.	Método de Newmark:	52
3.1.4.	Evaluación de estado de rótulas plásticas	55
3.2.	Definición del modelo en SAP2000	62
3.2.1.	Definición de materiales y elementos:	62
3.2.2.	Definición de la geometría:.....	64
3.2.3.	Asignación de masa al sistema:	65
3.2.4.	Definición del análisis:	66
3.3.	Modelos a evaluar	69
3.3.1.	Modelo 1	69
3.3.2.	Modelo 2	70
3.4.	Sismos utilizados.....	71
4.	RESULTADOS Y DISCUSIÓN	73
4.1.	Metodología Propuesta.....	73
4.1.1.	Resultados Obtenidos	81
4.1.2.	Comparación SAP2000	85
4.2.	Variaciones a la metodología propuesta	87
4.2.1.	Variación A	87
4.2.1.1.	Resultados obtenidos.	96
4.2.1.2.	Comparación con SAP2000:.....	98
4.2.2.	Variación B.....	100
4.2.2.1.	Presentación de resultados:	102
4.2.2.2.	Comparación con SAP2000:.....	104
4.3.	Discusión de resultados	107
5.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	110

6. BIBLIOGRAFÍA.....	112
7. ANEXOS	114

Ilustraciones

<i>Ilustración 1: Coordenadas locales vs globales.</i>	23
<i>Ilustración 2: Ejemplo de transformación de dimensiones.</i>	24
<i>Ilustración 3: Diagrama esfuerzo-deformación del acero. Fuente: (Hibbeler et al., 2017).</i>	28
<i>Ilustración 4: Modelo elástico lineal perfectamente plástico.</i>	30
<i>Ilustración 5: Modelo elasto plástico bilineal con endurecimiento.</i>	30
<i>Ilustración 6: Curva histerética para un modelo elasto plástico con endurecimiento.</i>	32
<i>Ilustración 7: Modelo de pórtico.</i>	33
<i>Ilustración 8: Fuerzas actuantes en el modelo.</i>	33
<i>Ilustración 9: Agrupación de términos para obtener K condensada.</i>	35
<i>Ilustración 10: Fuente: Tabla 5.4.1 (Chopra, 2012).</i>	39
<i>Ilustración 11: Diagrama de flujo simplificado para la metodología propuesta.</i>	42
<i>Ilustración 12: Modelo general de un pórtico.</i>	43
<i>Ilustración 13: Gráfica de aceleración vs tiempo.</i>	46
<i>Ilustración 14: Diagrama de flujo de un paso de Newmark, 1 de 2.</i>	53
<i>Ilustración 15: Diagrama de flujo de un paso de Newmark, 2 de 2.</i>	54
<i>Ilustración 16: Curva modelo para comportamiento de los resortes.</i>	56
<i>Ilustración 17: Detalle de la curva de comportamiento de los resortes.</i>	57
<i>Ilustración 18: Diagrama de flujo para la función no linealidad.</i>	58
<i>Ilustración 19: Propiedades de la sección SAP2000.</i>	62
<i>Ilustración 20: Propiedades de los materiales SAP2000.</i>	63
<i>Ilustración 21: Elementos tipo Link en SAP2000.</i>	63
<i>Ilustración 22: Propiedades no lineales de los resortes en SAP2000.</i>	64
<i>Ilustración 23: Ejemplo de colocación nodos/resortes en SAP 2000.</i>	64
<i>Ilustración 24: Asignación de masa en SAP2000.</i>	65
<i>Ilustración 25: Fuente de masa en SAP2000.</i>	66
<i>Ilustración 26: Función tiempo-historia en SAP2000.</i>	66
<i>Ilustración 27: Amortiguamiento del sistema en SAP2000.</i>	67
<i>Ilustración 28: Análisis tiempo - Historia en SAP2000.</i>	68
<i>Ilustración 29: Esquema del modelo 1.</i>	70
<i>Ilustración 30: Esquema del modelo 2.</i>	71
<i>Ilustración 31: Gráfica tiempo-aceleración del sismo BOL000.</i>	71
<i>Ilustración 32: Gráfica tiempo-aceleración del sismo RIO270.</i>	72
<i>Ilustración 33: Diagrama d flujo para la metodología propuesta, 1 de 2.</i>	75
<i>Ilustración 34: Diagrama de flujo para la metodología propuesta, 2 de 2.</i>	76
<i>Ilustración 35: Modelo 1 sometido al sismo BOL000, paso i=952.</i>	77
<i>Ilustración 36: Modelo 1 sometido al sismo BOL000, paso i=953.</i>	78
<i>Ilustración 37: Modelo 1 sometido al sismo BOL000, paso i=960.</i>	79
<i>Ilustración 38: Modelo 1 sometido al sismo BOL000, paso i=970.</i>	80
<i>Ilustración 39: Modelo 1 sometido al sismo BOL000, paso i=1070.</i>	81
<i>Ilustración 40: Deformación lateral vs tiempo, Modelo 1, sismo BOL000.</i>	82
<i>Ilustración 41: Momento vs Deformación Rotacional, Resorte 1, Modelo 1, sismo BOL000.</i>	82
<i>Ilustración 42: Deformación lateral vs tiempo, Modelo 1, sismo RIO270.</i>	83
<i>Ilustración 43: Momento vs Deformación Rotacional, Resorte 1, Modelo 1, sismo RIO270.</i>	83
<i>Ilustración 44: Comparación SAP 2000 vs Metodología propuesta, Deformación lateral vs tiempo, Modelo 1, sismo BOL000.</i>	85

<i>Ilustración 45: Comparación SAP2000 vs Metodología propuesta, Momento vs Deformación Rotacional, Resorte 1, Modelo 1, sismo BOL000, Hasta t=10.12 s.</i>	86
<i>Ilustración 46: Comparación SAP 2000 vs Metodología propuesta, Deformación lateral vs tiempo, Modelo 1, sismo RIO270.</i>	86
<i>Ilustración 47: Comparación SAP2000 vs Metodología propuesta, Momento vs Deformación Rotacional, Resorte 1, Modelo 1, sismo RIO270, Hasta t=5 s.</i>	87
<i>Ilustración 48: Gráfica de rotación vs tiempo de nodo inicial y final del resorte.</i>	88
<i>Ilustración 49: Interpolación del punto i'.</i>	89
<i>Ilustración 50: Variación a la evaluación de rótulas plásticas.</i>	90
<i>Ilustración 51: Diagrama de flujo general de la variación A.</i>	91
<i>Ilustración 52: Diagrama de flujo de variación A, obtención punto exacto de fluencia.</i>	92
<i>Ilustración 53: Comparación Variación A vs Metodología propuesta, Deformación lateral vs tiempo, Modelo 1, sismo BOL000.</i>	96
<i>Ilustración 54: Comparación Variación A vs Metodología propuesta, Momento vs Deformación Rotacional, Resorte 1, Modelo 1, sismo BOL000, Hasta t=10.12 s.</i>	97
<i>Ilustración 55: Ampliación de Ilustración 54.</i>	97
<i>Ilustración 56: Comparación SAP2000 vs Variación A, Deformación lateral vs tiempo, Modelo 1, sismo BOL000.</i>	98
<i>Ilustración 57: Comparación SAP 2000 vs Variación A, Desplazamiento lateral vs tiempo, Modelo 1, sismo RIO270.</i>	99
<i>Ilustración 58: Comparación SAP2000 vs Variación A, Momento vs Deformación Rotacional, Resorte 1, Modelo 1, sismo BOL000, Hasta t=10.12 s.</i>	99
<i>Ilustración 59: Comparación SAP2000 vs Variación A, Momento vs Deformación Rotacional, Resorte 1, Modelo 1, sismo RIO270, Hasta t=5 s.</i>	100
<i>Ilustración 60: Diagrama de flujo interpolación del registro sísmico.</i>	101
<i>Ilustración 61: Comparación entre Variación B, Variación A y Metodología Base, Deformación lateral vs tiempo, Modelo 1, sismo BOL000.</i>	102
<i>Ilustración 62: Comparación entre Variación B, Variación A y Metodología Base, Momento vs Deformación Rotacional, Modelo 1, sismo BOL000.</i>	103
<i>Ilustración 63: Ampliación de Ilustración 62.</i>	104
<i>Ilustración 64: Comparación SAP2000 vs Variación B, Deformación lateral vs tiempo, Modelo 1, sismo BOL000.</i>	105
<i>Ilustración 65: Comparación SAP2000 vs Variación B, Momento vs Deformación Rotacional, Resorte 1, Modelo 1, sismo BOL000, Hasta t=10.12 s.</i>	105
<i>Ilustración 66: Comparación SAP 2000 vs variación B, Desplazamiento lateral vs tiempo, Modelo 1, sismo RIO270.</i>	106
<i>Ilustración 67: Comparación SAP2000 vs Variación B, Momento vs Deformación Rotacional, Resorte 1, Modelo 1, sismo RIO270, Hasta t=5 s.</i>	106
<i>Ilustración 68: Comparación entre SAP2000, Variación B, Variación A y Metodología Base, Deformación lateral vs tiempo, Modelo 1, sismo BOL000.</i>	107
<i>Ilustración 69: Comparación entre SAP2000, Variación B, Variación A y Metodología Base, Deformación lateral vs tiempo, Modelo 1, sismo RIO270.</i>	108
<i>Ilustración 70: Tiempos de cálculo de los distintos análisis.</i>	108
<i>Ilustración 71: Variación del análisis respecto al parámetro dt, Modelo 1, Sismo BOL000.</i>	109

Bloques de código

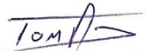
<i>Bloque de código 1: Función para obtener las longitudes de los elementos.</i>	46
<i>Bloque de código 2: Función para obtener el vector de restricciones de los nodos.</i>	47
<i>Bloque de código 3: Función de matriz beta.</i>	47
<i>Bloque de código 4: Matriz de colocación para elementos.</i>	48
<i>Bloque de código 5: Matriz de colocación para resortes.</i>	48
<i>Bloque de código 6: Constrains del modelo.</i>	49
<i>Bloque de código 7: Matriz elemental.</i>	49
<i>Bloque de código 8: Matriz de rigidez de elementos.</i>	50
<i>Bloque de código 9: Matriz de rigidez de resortes.</i>	50
<i>Bloque de código 10: Creación de matriz de masa.</i>	51
<i>Bloque de código 11: Partición de matrices.</i>	51
<i>Bloque de código 12: Condensación estática.</i>	52
<i>Bloque de código 13: Paso de Newmark.</i>	55
<i>Bloque de código 14: Función no linealidad, 1 de 3.</i>	59
<i>Bloque de código 15: Función no linealidad, 2 de 3.</i>	60
<i>Bloque de código 16: Función no linealidad, 3 de 3.</i>	61
<i>Bloque de código 17: Metodología base propuesta 1 de 2.</i>	84
<i>Bloque de código 18: Variación A de la metodología propuesta, 1 de 3.</i>	93
<i>Bloque de código 19: Variación A de la metodología propuesta, 2 de 3.</i>	94
<i>Bloque de código 20: Variación A de la metodología propuesta, 3 de 3.</i>	95
<i>Bloque de código 21: Variación B de la metodología propuesta.</i>	101

Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio Institucional

Tomás Javier Andrade Cobos en calidad de autor/a y titular de los derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación "Metodología para realizar análisis no lineal tiempo historia de estructuras y aplicación en lenguaje de programación", de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, 05 de julio de 2022



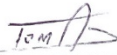
Tomás Javier Andrade Cobos

C.I: 0104902317

Cláusula de Propiedad Intelectual

Tomás Javier Andrade Cobos, autor/a del trabajo de titulación "Metodología para realizar análisis no lineal tiempo historia de estructuras y aplicación en lenguaje de programación", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor/a.

Cuenca, 05 de julio de 2022



Tomás Javier Andrade Cobos

C.I: 0104902317

Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio Institucional

Mateo Sebastián Jaramillo González en calidad de autor y titular de los derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación "Metodología para realizar análisis no lineal tiempo historia de estructuras y aplicación en lenguaje de programación", de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, 5 de julio de 2022



Mateo Sebastián Jaramillo González

C.I: 0104816095

Cláusula de Propiedad Intelectual

Mateo Sebastián Jaramillo González, autor del trabajo de titulación "Metodología para realizar análisis no lineal tiempo historia de estructuras y aplicación en lenguaje de programación", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor.

Cuenca, 5 de julio de 2022



Mateo Sebastián Jaramillo González

C.I: 0104816095

AGRADECIMIENTO

A nuestras familias por el apoyo brindado en todo este proceso, a nuestros amigos y compañeros por acompañarnos en el camino y amenizar la carga de estudio, a todos nuestros profesores y directivos por guiarnos a lo largo de la carrera universitaria. Finalmente, a la Universidad de Cuenca por la formación brindada.

Mateo y Tomás

DEDICATORIA

A mis padres, y hermanas, que me han apoyado y la confianza durante todo el camino.

A mis amigos que me acompañaron en el proceso.

Gracias a todos ellos he podido llegar hasta aquí, y no podría haberlo hecho sin ustedes.

Mateo Jaramillo González.

A mi madre bella en el cielo, al igual que todos los logros de mi vida.

Tomás Andrade Cobos.

SIMBOLOGIA Y NOMENCLATURA

A	Área de la sección transversal.
a	Aceleración.
a_0	Factor de amortiguamiento proporcional a la masa.
a_1	Factor de amortiguamiento proporcional a la rigidez.
B	Matriz de rotación.
C	Matriz de amortiguamiento.
CON	Matriz de conexión de elementos.
CON_res	Matriz de conexión de resortes.
def_Res	Deformación del resorte.
drot	Variación de rotación del resorte.
dt	Diferencial de tiempo.
dt'	Diferencial de tiempo para alcanzar la fluencia.
E	Módulo de elasticidad.
e	Matriz elemental.
equalDOF	Matriz de ingreso de condiciones.
F	Vector de fuerzas.
F_{cond}	Vector de fuerzas condensado.
F_D	Fuerza de amortiguamiento.
F_o	Vector de fuerzas de grados de libertad estáticos.
F_p	Vector de fuerzas de grados de libertad conocidos.
F_r	Fuerza actual del resorte.
F_s	Vector de fuerzas de grados de libertad desconocidos.
F_s	Fuerza restauradora.
F_t	Vector de fuerzas de grados de libertad dinámicos.
F_y	Esfuerzo de fluencia.
g	Aceleración de la gravedad.
GDL	Grados de libertad.
I	Inercia del elemento.
iota	Vector de incidencia.
K	Matriz de rigidez.
k_1	Matriz de rigidez del resorte en estado elástico.
k_2	Matriz de rigidez del resorte en estado plástico, en el sentido positivo.
k_3	Matriz de rigidez del resorte en estado plástico, en el sentido negativo.
K_{cond}	Matriz de rigidez condensada.
$K_{Elementos}$	Matriz de rigidez base para vigas y columnas.
$K_{Estructura}$	Matriz de rigidez de la estructura.
k_{global}	Matriz de rigidez en coordenadas globales.

k_{local}	Matriz de rigidez en coordenadas locales.
K_{oo}	Matriz de rigidez de grados de libertad estáticos.
K_{ot}	Matriz de rigidez compuesta por grados de libertad o y t.
K_{pp}	Matriz de rigidez de grados de libertad conocidos.
K_{ps}	Matriz de rigidez compuesta por grados de libertad p y s.
k_r	Rigidez rotacional del resorte.
$K_{Resortes}$	Matriz de rigidez base para resortes.
K_{sp}	Matriz de rigidez compuesta por grados de libertad s y p.
K_{ss}	Matriz de rigidez de grados de libertad desconocidos.
K_{to}	Matriz de rigidez compuesta por grados de libertad t y o.
K_{tt}	Matriz de rigidez de grados de libertad dinámicos.
L	Longitud del elemento.
m	Masa.
M	Matriz de ingreso de masas.
MAT	Matriz de materiales.
M_y	Momento de fluencia o momento plástico.
M_{yn}	Momento de fluencia en el sentido negativo.
M_{yp}	Momento de fluencia en el sentido positivo.
o	Grado de libertad estático.
ON	Bandera para indicar el estado de las rotulas plásticas.
p	Grados de libertad desconocidos.
P	Fuerza externa aplicada al sistema.
$PROP$	Matriz de propiedades de las secciones.
R	Matriz de restricciones
s	Grados de libertad conocidos.
S_x	Módulo de sección plástica.
t	Grado de libertad dinámico.
T_n	Periodo natural.
U	Vector de desplazamientos.
u	Desplazamiento.
u'	Primera derivada del desplazamiento / Velocidad.
u''	Segunda derivada del desplazamiento / Aceleración.
u_f	Deformación de fluencia.
u_g''	Aceleración del suelo.
U_o	Vector de desplazamientos de grados de libertad estáticos.
u_{off}	Deformación residual del resorte.
U_p	Vector de desplazamientos de grados de libertad conocidos.
U_s	Vector de desplazamientos de grados de libertad desconocidos.
U_t	Vector de desplazamientos de grados de libertad dinámicos.

u_{yn}	Deformación de fluencia negativa.
u_{yp}	Deformación de fluencia positiva.
w	Frecuencia Natural
x_1	Coordenada en x del nodo 1.
x_2	Coordenada en x del nodo 2.
X_{final}	Coordenada final del elemento en el eje x.
$X_{inicial}$	Coordenada inicial del elemento en el eje x.
XY	Matriz de nodos.
y_1	Coordenada en y del nodo 1.
y_2	Coordenada en y del nodo 2.
Y_{final}	Coordenada final del elemento en el eje y.
$Y_{inicial}$	Coordenada inicial del elemento en el eje y.
z_i	Razón de amortiguamiento.
β	Constante de Newmark.
γ	Constante de Newmark.
ΔP	Incremento de fuerza externa aplicada al sistema.
Δt	Incremento de tiempo.
Δu	Incremento de desplazamiento.
$\Delta u'$	Incremento de velocidad.
$\Delta u''$	Incremento de aceleración.
ε	Deformación.
ξ	Razón de amortiguamiento.

1. INTRODUCCION

1.1. ANTECEDENTES Y JUSTIFICACION

En el diseño por capacidad se toma ventaja del comportamiento no lineal de los materiales de una estructura, con la intención de que bajo fuertes eventos sísmicos se presente daño en puntos específicos de sus elementos. Bajo esta metodología de diseño para establecer las fuerzas laterales ocasionadas por el sismo, ya sea utilizando el método estático, modal espectral o tiempo historia, se aplica un factor designado en la norma NEC-SE-DS 15 (Ministerio de desarrollo urbano y vivienda, 2014) como “R”, cuya función es reducir las fuerzas sísmicas de diseño de acuerdo con el sistema sismo resistente de la estructura, el cual deberá resistir esta sollicitación dentro de su rango elástico. Pasado este límite de carga se considera que la estructura incurrirá dentro del rango no lineal y para incluir estos efectos se evalúan las derivas inelásticas, las cuales son calculadas al amplificar las derivas elásticas determinadas en el análisis lineal por un factor de ductilidad basado en el factor de reducción R ($0.75R$, según la NEC-SE-DS 15). Estas consideraciones permiten incluir de manera implícita los efectos de la no linealidad, dentro de un análisis lineal.

Para garantizar este comportamiento en la estructura, sus conexiones deben ser diseñadas para desarrollar un mecanismo de falla predecible, esto se logra proporcionando una adecuada ductilidad y capacidad de disipación de energía. Así, se logra que el daño se concentre en estas secciones, funcionando como rótulas plásticas. La existencia de estos elementos como requisito sismo resistente, puede ser aprovechada para facilitar la modelación del análisis no lineal, ya que dentro de las conexiones se incluirá el comportamiento inelástico de los materiales (resortes).

A diferencia del análisis lineal, el no lineal incorpora la ductilidad de los elementos dentro del modelo, por lo tanto, una vez que se alcance la capacidad máxima dentro del rango elástico, cambiará el comportamiento de toda la estructura, ya que las rótulas plásticas entraran en un estado de fluencia. Al presentarse el cambio de estado, la carga de entrada al sistema se verá limitada, debido a un mayor incremento en las deformaciones sin que se dé un aumento de carga considerable. Dicho efecto se pretende incorporar implícitamente en el análisis lineal mediante el factor de reducción de carga R, y el factor de ductilidad. Adicionalmente, dentro del análisis no lineal, se simula el comportamiento cíclico de los elementos frente a los efectos de carga y descarga, dando como resultado la deformación residual provocada por los cambios de estado, siendo este el principal mecanismo de disipación de energía del sistema. Debido a todas las consideraciones mencionadas, el realizar un análisis no lineal permite obtener las deformaciones máximas de la estructura de manera explícita y más realista.

Realizar un análisis dinámico no lineal resultaría la herramienta ideal para comprobar los criterios implícitos en el diseño por capacidad y todas las asunciones hechas en este, como columna fuerte viga débil, la secuencia de formación de rótulas plásticas y derivas inelásticas, sin embargo, debido a la complejidad que conlleva realizarlo, dichas comprobaciones suelen ser obviadas en la mayoría de los casos. Si bien en la literatura se explican las bases teóricas, no se presenta de manera clara la metodología ni los mecanismos necesarios para implementarlo. Es por esto que, el presente trabajo de titulación tiene por finalidad presentar una guía con un enfoque didáctico, en la que se explique y entienda el desarrollo del análisis no lineal tiempo historia, apoyándose en un ejemplo en el que se muestre paso a paso los conceptos y procesos necesarios para llegar al resultado deseado.

Si bien las herramientas informáticas existentes hoy en día, son lo suficientemente poderosas para poder desarrollar procedimientos de análisis dinámico no lineal, este ha sido poco entendido o estudiado por parte de estudiantes de pregrado, y aunque gran parte de profesionales conocen del tema, no todos comprenden o aplican a cabalidad una metodología para realizarlo. Se piensa que este trabajo de titulación puede ser un útil instrumento para la formación de futuros estudiantes y profesionales interesados en el área. Actualmente dentro de la malla de la carrera de Ingeniería civil en la Universidad de Cuenca, en las optativas enfocadas a la rama estructural, se analiza el comportamiento dinámico de las estructuras, únicamente dentro del rango lineal, por lo que este trabajo se podría considerar como una continuación del curso de Dinámica estructural, apoyándose en los conceptos impartidos en las asignaturas de Análisis matricial, e Ingeniería sísmica.

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. GENERAL

Implementar una metodología de análisis no lineal tiempo historia de estructuras en una plataforma computacional como herramienta de apoyo didáctico a la dinámica estructural avanzada.

1.2.2. ESPECIFICOS

- Describir los fundamentos teóricos del análisis matricial, dinámica estructural y resistencia de materiales aplicables al proyecto de titulación.
- Identificar los principales problemas que surgen en el desarrollo del análisis y sus posibles soluciones.
- Presentar un ejemplo de carácter didáctico aplicando un procedimiento a detalle para el análisis dinámico no lineal.
- Desarrollar una herramienta de análisis no lineal tiempo historia de estructuras mediante el uso de una plataforma de programación.

2. MARCO TEORICO

Esta sección presenta los fundamentos teóricos necesarios para el desarrollo del análisis dinámico no lineal. Inicialmente se expone información referente al método matricial, que constituye la base para el cálculo de desplazamientos en el presente proyecto. Posteriormente es explicado el comportamiento no lineal de los materiales, enfocándose en los principios y asunciones relacionados con el trabajo de titulación. Más adelante se muestran algunos principios del análisis dinámico, los cuales han sido considerados como importantes para un correcto entendimiento de los procedimientos a realizarse. Finalmente son exhibidos algunos conceptos y formulaciones del método de Newmark, indispensables para la resolución de las ecuaciones existentes en la metodología.

2.1. Método matricial

2.1.1. Descripción general

El método matricial consiste en modelar el comportamiento de cualquier estructura frente a una fuerza, utilizando un sistema de matrices. Este sistema puede ser basado en las fuerzas o basado en los desplazamientos; para el presente trabajo se hará uso de este último.

El método de los desplazamientos obedece a la siguiente relación fundamental:

$$F = K * U \quad (1)$$

Donde F representa a el vector de fuerzas, K la matriz de rigidez y U el vector de desplazamientos. De la ecuación (1) se obtendrán los desplazamientos a partir de las fuerzas que entren al sistema, dependiendo de las características de la estructura representadas en la rigidez.

La matriz K dependerá entonces de las propiedades geométricas de la estructura y las propiedades físicas de sus elementos, es decir, se obtiene a partir del modelo analítico de la estructura.

El modelo analítico consiste en una simplificación de la estructura, obviando detalles que no causan mayor impacto en el comportamiento de esta, por lo cual, es importante comprender que la respuesta generada por el análisis depende de la capacidad del modelo de representar una estructura real.

El modelo utilizado para representar a la estructura consiste en miembros conectados por nodos, Se define a un miembros como una parte de la estructura para el cual la relación fuerza desplazamiento es válida, y al nodo como una parte estructural de tamaño infinitesimal al cual se conectan el final de los miembros (Kassimali, 2012).

Los soportes de las estructuras se modelan restringiendo el movimiento en ciertos grados de libertad (GDL) en los nodos. Por grados de libertad se entiende a los desplazamientos posibles que tiene un nodo para definir su posición en el espacio.

2.1.2. Matriz de rigidez

La rigidez se define como la fuerza necesaria para obtener un desplazamiento unitario en un nodo, si el desplazamiento en todos los demás nodos es restringido (McCormac, 2007). Esto obedece a la relación fundamental establecida en la ecuación (1), tanto si se analiza a los elementos por separado, como a toda la estructura como un solo sistema, por lo tanto, existe una matriz de rigidez para cada

elemento en coordenadas locales y una matriz de rigidez para toda la estructura en coordenadas globales.

La matriz de rigidez es una matriz cuadrada simétrica de orden igual a los grados de libertad de la estructura.

La matriz de rigidez elemental para el caso de un pórtico 2D en coordenadas locales, es decir el sistema de coordenadas propio de cada elemento, se expresa como:

$$K_{Elementos} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

La obtención de esta matriz se puede ver en el libro “Matrix analysis of structures” (Kassimali, 2012)

Para elementos tipo resorte, la rigidez k_r viene asignada directamente por las cualidades del material y se ensamblan en los grados de libertad a los cuales estén conectados, en este caso los referentes a la rotación, por lo tanto, la matriz de cada elemento tipo resorte viene dado por:

$$K_{Resortes} = \begin{bmatrix} k_r & -k_r \\ -k_r & k_r \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez global de la estructura a modelar será la resultante de la suma de todas las matrices elementales transformadas al sistema de coordenadas y dimensiones globales. Para lograr esta transformación se utiliza una matriz de rotación, también conocida como matriz β y la matriz de colocación.

2.1.3. Matriz de rotación

La matriz de rotación se encarga de transformar el sistema de coordenadas local ($x'-y'$) del elemento al sistema de coordenadas globales de la estructura ($x-y$)

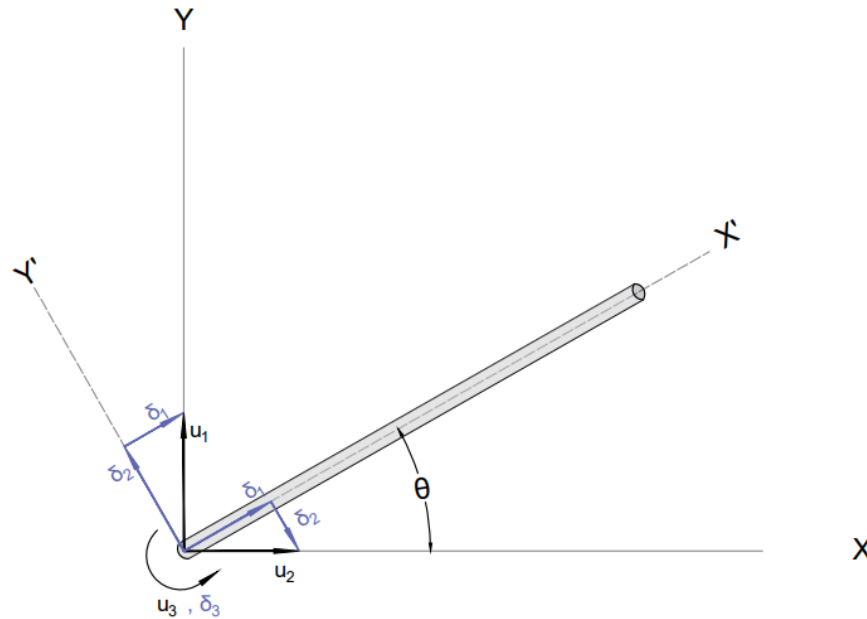


Ilustración 1: Coordenadas locales vs globales.

Para el caso de un pórtico 2D esta matriz queda definida como:

$$\beta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La transformación de coordenadas entonces viene dada por la relación:

$$k_{global} = \beta^T * k_{local} * \beta \quad (2)$$

Cabe mencionar que el cuadrante del ángulo es importante para una correcta transformación de coordenadas, el cual depende de la definición del nodo inicial y final del elemento, sin embargo, para evitar los problemas que esto pueda causar, se puede calcular directamente la relación de seno y coseno, sin necesidad de calcular este ángulo:

$$\cos(\theta) = \frac{X_{final} - X_{inicial}}{Longitud} \quad (3)$$

$$\sin(\theta) = \frac{Y_{final} - Y_{inicial}}{Longitud} \quad (4)$$

2.1.4. Matriz de colocación

La matriz de colocación L tiene como función transformar una matriz o vector de las dimensiones de un elemento a las dimensiones de la estructura o viceversa, colocando las variables en los grados de libertad correctos respecto a la estructura.

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} U_2 \\ U_5 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0 \\ U_2 \\ 0 \\ 0 \\ U_5 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \text{Matriz} & & \text{Dimensiones} & & \text{Dimensiones} \\ \text{L} & & \text{Locales} & & \text{Estructura} \end{matrix}$$

Ilustración 2: Ejemplo de transformación de dimensiones.

A diferencia de la matriz β , la matriz L no tiene una matriz base, y difiere para cada elemento según las conexiones de sus nodos, por esto, debe ser implementada mediante programación al método, su construcción se verá en la sección 3.1.2.2.

La relación final para la transformación de dimensiones queda definida entonces como:

$$K_{estructura} = L^T * k_{global} * L \quad (5)$$

2.1.5. Partición de matrices

Para facilidad al resolver la relación de la ecuación (1) como un sistema de ecuaciones, se puede separar al sistema entre grados de libertad conocidos (s) y desconocidos (p), los primeros serán los que tengan una restricción, y por ende su desplazamiento final será igual a 0.

Entonces la partición de matrices queda representada como:

$$\begin{bmatrix} F_p \\ F_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{pp} \\ K_{sp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{ps} \\ K_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_p \\ U_s \end{bmatrix} \quad (6)$$

Se destacan las siguientes características de las sub matrices:

- K_{pp} y K_{ss} son matrices cuadradas
- K_{sp} es igual a K_{ps}^T

Adicionalmente se observa que el vector F_p corresponde a las fuerzas aplicadas y el vector F_s corresponde a las reacciones de los apoyos.

De aquí se obtienen dos ecuaciones:

$$F_p = K_{pp} \cdot U_p + K_{ps} \cdot U_s \quad (7)$$

$$F_s = K_{sp} \cdot U_p + K_{ss} \cdot U_s \quad (8)$$

De estas dos relaciones podemos despejar U_p obteniendo:

$$U_p = K_{pp}^{-1} \cdot (F_p - K_{ps} \cdot U_s) \quad (9)$$

En caso de que no se tenga desplazamientos iniciales, U_p quedaría expresado como:

$$U_p = K_{pp}^{-1} \cdot F_p \quad (10)$$

2.1.6. Condiciones

Una condición, también conocida como “Constrain” en inglés, en un modelo estructural básicamente consiste en dar el mismo desplazamiento a dos grados de libertad dentro de una estructura, estas son útiles en diferentes casos, entre los más importantes se encuentran:

- Eliminar la deformación axial de un elemento
- Aplicar condiciones de deformaciones en estructuras
- Unir dos elementos
- Colocar resortes
- Modelar rótulas plásticas mediante la aplicación de resortes rotacionales.

Esta última es de gran importancia para el presente trabajo, y será explicada a detalle más adelante.

Para explicar este proceso se considera como ejemplo el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

Supongamos que se decide poner una condición en la cual el GDL U_2 será igual al GDL U_3 ,

Es decir, se impone la condición al modelo $U_2=U_3$, en este caso U_2 será nuestro grado Slave y U_3 será nuestro grado Máster. Representando a la operación matricial como un sistema de ecuaciones, tenemos:

$$F_1 = K_{11} \cdot U_1 + K_{12} \cdot U_2 + K_{13} \cdot U_3$$

$$F_2 = K_{21} \cdot U_1 + K_{22} \cdot U_2 + K_{23} \cdot U_3$$

$$F_3 = K_{31} \cdot U_1 + K_{32} \cdot U_2 + K_{33} \cdot U_3$$

Si aplicamos la condición $U_2=U_3$, las ecuaciones se pueden escribir como:

$$F_1 = K_{11} \cdot U_1 + (K_{12} + K_{13}) \cdot U_3$$

$$F_2 = K_{21} \cdot U_1 + (K_{22} + K_{23}) \cdot U_3$$

$$F_3 = K_{31} \cdot U_1 + (K_{32} + K_{33}) \cdot U_3$$

Esta operación de forma matricial quedaría expresada como:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{12} + K_{13} \\ K_{21} & 0 & K_{22} + K_{23} \\ K_{31} & 0 & K_{32} + K_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

Se observa que únicamente se ha sumado la columna correspondiente al GDL U_2 a la columna de U_3 en la matriz de rigidez.

Otra consideración necesaria, respecto al vector fuerzas, es que este contiene las fuerzas externas aplicadas sobre cada grado de libertad; al aplicar la condición a los grados de libertad Máster y Slave se comportan como un solo grado de libertad, por ende, se puede sumar las fuerzas aplicadas, y asignarla únicamente al grado Máster, esto quedaría expresado como:

$$F_1 = K_{11} \cdot U_1 + (K_{12} + K_{13}) \cdot U_3$$

$$F_2 + F_3 = (K_{21} + K_{31}) \cdot U_1 + ((K_{22} + K_{23}) + (K_{32} + K_{33})) \cdot U_3$$

Y expresado de manera matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_2 + F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{12} + K_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ K_{21} + K_{31} & 0 & K_{22} + K_{23} + K_{32} + K_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

Una vez realizadas estas operaciones podemos eliminar el grado Slave del sistema, obteniendo como resultado un sistema reducido con una matriz de rigidez de 2×2 :

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} + K_{13} \\ K_{21} + K_{31} & K_{22} + K_{23} + K_{32} + K_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

Por ende, la aplicación de la condición de un GDL se puede resumir en 3 pasos:

- Sumar la columna del grado Slave a la columna del grado Máster
- Sumar la fila del grado Slave a la columna del grado Máster
- Eliminar las filas y columnas del grado Slave

Para implementar este proceso dentro del método se hace uso de una matriz elemental (e), la cual se encargará de sumar las filas y columnas dentro de una sola operación, y con la ventaja de que no es necesario definir una matriz e para cada condición, sino se puede implementar una matriz general, que realice las operaciones de todas las condiciones aplicadas al sistema.

La matriz elemental encargada de sumar las filas es una matriz identidad, de las mismas dimensiones que K , pero se modifica incluyendo un 1 en la fila correspondiente al grado Máster en la columna de grado Slave, y se elimina el 1 de la fila y columna del grado Slave, y esta se multiplica a la izquierda de la matriz K .

La encargada de sumar las columnas será la matriz transpuesta de la matriz descrita anteriormente, y esta se multiplica por la derecha de la matriz K , es decir:

$$e := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e \cdot K \cdot e^T \rightarrow \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{12} + K_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ K_{21} + K_{31} & 0 & K_{22} + K_{23} + K_{32} + K_{33} \end{bmatrix}$$

2.2. Comportamiento No lineal de los materiales.

Por naturaleza, todos los problemas son no lineales, sin embargo, en algunos casos es suficiente tratarlos como lineales para obtener resultados razonablemente buenos. No obstante, en ciertos tipos de problemas, la no linealidad debe ser considerada para llegar a resultados realistas, como por ejemplo para obtener el comportamiento post fluencia (Nagarajan, 2019). Algunos autores distinguen cuatro clases o procedencias de la no linealidad:

- No linealidad del Material: Se debe a la relación esfuerzo-deformación del material (relación constitutiva). Se considera que un material tiene un comportamiento no lineal cuando dicha relación no obedece la ley de Hooke.
- No linealidad Geométrica: En una estructura se considera que existe linealidad geométrica cuando sus desplazamientos son pequeños en comparación con sus dimensiones de tal manera que las ecuaciones de equilibrio pueden plantearse en función de la geometría original no deformada.
- No linealidad de la fuerza: En estos casos la dirección y/o magnitud de las fuerzas aplicadas varían con la deformación.

- No linealidad Cinética: Se presenta cuando las condiciones de contorno del desplazamiento cambian con las deformaciones de la estructura.

En este apartado se abarca únicamente el primero de los antes mencionados. Generalmente dentro de un análisis no lineal, las restricciones de un análisis lineal son removidas al formular las ecuaciones de equilibrio considerando la geometría deformada de la estructura que no se sabe de antemano, y/o al tomar en cuenta los efectos de inelasticidad estructural del material. Las relaciones de deformación de carga para la estructura así obtenida son no lineales y comúnmente se resuelven mediante procesos iterativos (Kassimali, 2012).

En breves palabras, en un material no lineal su relación constitutiva cambia frente a distintos niveles de carga. El comportamiento de un material frente a las deformaciones que experimenta está definido netamente por sus propiedades inherentes, para evaluar esta respuesta se usan métodos experimentales, como ensayos de tensión o compresión, los cuales permiten obtener valores de esfuerzos con sus correspondientes deformaciones, definiendo así el diagrama esfuerzo-deformación del ejemplar.

2.2.1. Diagrama Esfuerzo-Deformación

En un diagrama convencional se determina el esfuerzo nominal al dividir la carga aplicada entre el área de la sección transversal del elemento y es graficado en el eje de las ordenadas, mientras que al eje de las abscisas le corresponde el valor de deformación nominal encontrada al dividir el cambio de longitud experimentado por el material entre su longitud. La importancia de esta gráfica radica en poder determinar datos de resistencia (a tensión o a compresión, de acuerdo con el ensayo) de un material sin tener información de características como su tamaño y forma geométrica. A continuación, de manera ilustrativa se muestra el diagrama característico de esfuerzo-deformación de un material dúctil como el acero.

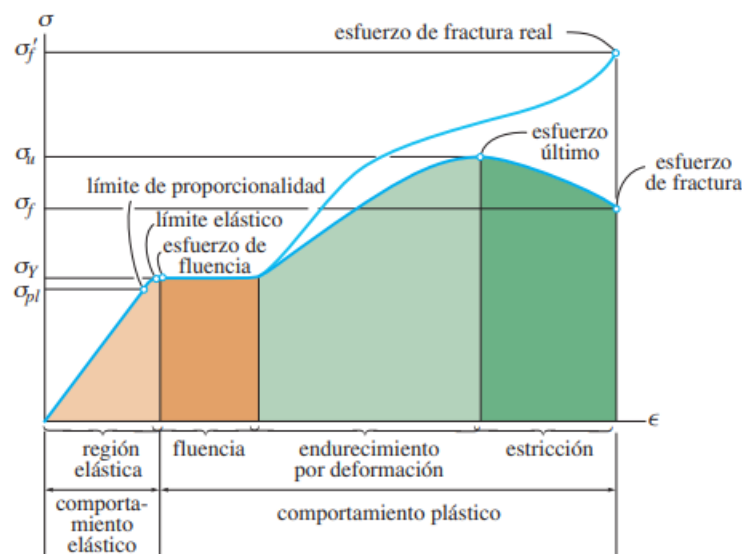


Ilustración 3: Diagrama esfuerzo-deformación del acero. Fuente: (Hibbeler et al., 2017).

En la ilustración 3 puede notarse dos curvas que, si bien tienen un mismo inicio, a medida que ϵ gana valor, estas difieren. La curva superior, llamado diagrama real es el resultado de utilizar los valores de área y longitud al momento que se aplica la carga, mientras que en la curva inferior o diagrama convencional se mantienen constante la longitud y área con sus valores iniciales.

Pueden distinguirse 4 diferentes zonas dignas de analizar. Una primera región elástica en la cual la curva describe una línea recta; en esta, el material obedece la ley de Hooke, es decir, la deformación varía proporcionalmente al esfuerzo y las deformaciones no son permanentes, pues, si existe descarga, el elemento regresa a su estado original. Una segunda región conocida como la fluencia, en la cual el material cede y su deformación aumenta sin que lo haga su capacidad de soportar carga. A partir de este punto, las deformaciones son permanentes y en caso de descarga existirá una deformación residual en el elemento, seguido por la zona conocida como endurecimiento por deformación en la cual de cierta forma termina la fluencia y el material nuevamente gana capacidad de tomar carga conforme avance su deformación, aunque ya no de manera lineal como en un principio. Esta curva se va aplanando hasta alcanzar el punto de esfuerzo último, que representa la máxima carga que puede tomar el elemento. Por último, en la estricción, el espécimen sufre una gran disminución de sección transversal en una zona localizada, por ende, la capacidad de soportar carga decrece hasta un punto en el que el material se rompe, determinando el esfuerzo de fractura.

2.2.2. Modelos constitutivos Idealizados

Un modelo o ley constitutiva es un modelo mecánico-matemático que describe una idea del comportamiento tenso-deformacional del material. Dicho de otra forma, simula matemáticamente una idealización del comportamiento físico. Su validez depende del grado en el que se ha entendido el modelo físico y de su aproximación mecánica y numérica con la que se represente su simulación (Luccioni, 1993).

La necesidad de idealizar un modelo de comportamiento de un material yace en facilitar los cálculos y procesos dentro del análisis, representando lo más cercano posible la realidad y haciendo aproximaciones coherentes. Existen distintos modelos constitutivos idealizados que varían dependiendo del material o de lo que se busque estudiar, como por ejemplo modelos elásticos, de fractura, de daño, entre otros. Al tratar de asimilarse al diagrama mostrado anteriormente (ilustración 3) es de interés específicamente los modelos relacionados con la teoría de la plasticidad.

Puede definirse de manera sencilla a la plasticidad como aquella característica de ciertos materiales de presentar deformaciones permanentes o irreversibles, cuando se encuentran sometidos a esfuerzos más allá de su rango elástico. Para representar este fenómeno los modelos elástico lineal perfectamente plásticos y los modelos elasto plásticos bilineal con endurecimiento o ablandamiento, son utilizados frecuentemente.

- Modelo elástico lineal perfectamente plástico: en esta idealización, el material trabaja en un rango elástico en su zona inicial y posterior a su punto de fluencia presentara una deformación indefinida, manteniendo constante ese valor de esfuerzo.

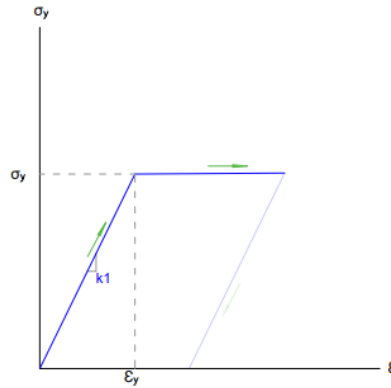


Ilustración 4: Modelo elástico lineal perfectamente plástico.

- Modelo elasto plástico bilineal con endurecimiento o ablandamiento: al igual que en el anterior, en una zona inicial se trabaja elásticamente y una vez alcanzado la fluencia la deformación plástica obedece una ecuación lineal que representa el endurecimiento o ablandamiento definido por la pendiente la recta.

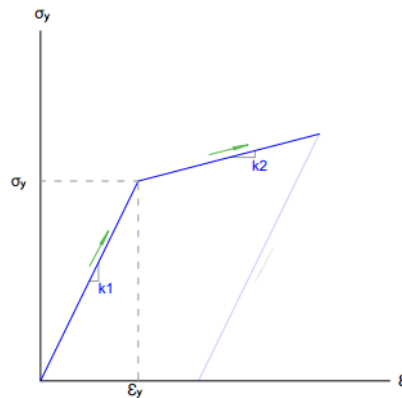


Ilustración 5: Modelo elasto plástico bilineal con endurecimiento.

2.2.3. Rótulas Plásticas

Puede entenderse de manera sencilla a las rótulas plásticas como un sector localizado en el elemento en donde se espera la fluencia. Zonas específicas en los componentes estructurales en las cuales una vez que se ha alcanzado el límite elástico de esfuerzo, la capacidad de resistir carga disminuye abruptamente y ocurre un incremento notorio de deformaciones. Comúnmente en una estructura sometida a flexión, este efecto se suscita cuando en algún punto una sección en particular ha alcanzado un cierto valor límite de momento, conocido como momento plástico, asociado a un determinado valor de rotación.

Se denominan con la palabra rotula ya que la sección del elemento pierde la capacidad de resistir momento, por lo tanto, pasa a comportarse como una articulación común, es decir, permite la rotación libre. De aquí nace la necesidad de representar la curva constitutiva (esfuerzo-deformación) en

términos de Momento y rotación. A pesar de que realmente se forman en pequeñas longitudes del elemento estructural, generalmente son asumidos para los análisis como puntos específicos.

La capacidad de poder incurrir en el rango inelástico, provocar grandes deformaciones y establecer la formación de articulaciones en sitios estratégicos, llevan a considerar las rótulas plásticas como mecanismos mediante cuales la estructura permite la disipación de energía.

2.2.4. Comportamiento Histéretico

Histéresis es el proceso de disipación de energía a través de la deformación (desplazamiento), a diferencia de la viscosidad que es la disipación de energía a mediante la tasa de deformación (velocidad) (CSI, 2017).

Al someterse a fuerzas dinámicas, por lo general las estructuras sufren un proceso de carga cíclica en el que su peculiar comportamiento (curva esfuerzo-deformación) puede describirse de la siguiente manera:

- La carga inicial, ya sea en dirección positiva o negativa, obedece el camino de la curva constitutiva del elemento.
- Si el elemento ha sobrepasado su límite de fluencia, tras una deformación inversa (sentido contrario) la descarga ocurre a lo largo de un camino diferente, el cual habitualmente es paralelo o casi paralelo a la pendiente original en el rango elástico.
- Luego de que el nivel de carga se reduce a cero, la continuación de la deformación inversa conlleva una carga inversa a lo largo de un camino que obedece a la curva constitutiva del elemento en el lado opuesto (CSI, 2017).

Se refiere a la carga como el incremento de la magnitud de la deformación en una dirección dada (positiva o negativa), y descarga como la correspondiente reducción de la deformación hasta que llega a ser cero, de continuarse con la “reducción de deformación” deja de ser una reducción y pasa a ser un incremento de la deformación, entrando en un proceso de carga nuevamente, pero en el sentido contrario a la inicial. Este proceso de carga-descarga se vuelve repetitivo o cíclico abarcando en si una gran magnitud de desplazamientos y por ende disipación de energía, constituyendo lo que se conoce como curva histerética.

La curva histerética procedente de un modelo elasto plástico con endurecimiento, comúnmente observado en los metales, será la utilizado en el presente trabajo y puede observarse en la ilustración 6.

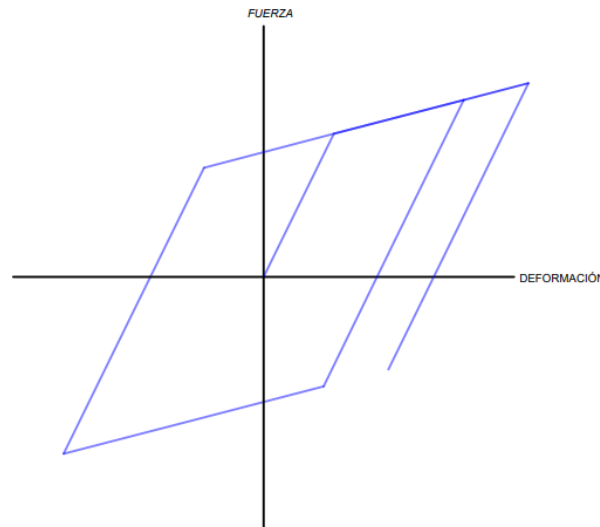


Ilustración 6: Curva histerética para un modelo elasto plástico con endurecimiento.

2.3. Análisis dinámico

2.3.1. Descripción general

A diferencia del análisis estático, en el cual la estructura está sometida a cargas constantes en el tiempo, en un análisis dinámico se consideran cargas variables en el tiempo, como pueden ser cargas sísmicas, de impacto o vibraciones generadas por máquinas, o personas, entre otras. Bajo el efecto de estas cargas la respuesta también será variable, por lo que la solución del sistema no es un único desplazamiento, sino una serie de desplazamientos, velocidades y aceleraciones en el tiempo.

Mientras que, en el análisis estático, únicamente la rigidez del sistema se oponía a las fuerzas aplicadas, en un sistema dinámico aparecen dos nuevas propiedades, la masa y el amortiguamiento.

La masa se concentra en un punto de la estructura para el análisis, englobando el peso propio de los elementos.

El amortiguamiento inherente explica por qué una estructura sometida a una fuerza dinámica alcanza una posición de equilibrio. Chopra (2012) menciona que dicho fenómeno se debe a diversos factores, como el efecto térmico producido por el esfuerzo elástico y la fricción interna del material, a la fricción en las conexiones, apertura y cierre de micro fisuras, y la fricción entre elementos estructurales y no estructurales. Debido a los diversos mecanismos actuantes no existe un modelo matemático para cuantificar este amortiguamiento en función de las características de la estructura, por lo que se lo idealiza con un amortiguamiento viscoso equivalente, dicho esto, la fuerza de amortiguamiento queda definida por:

$$F_D = C \cdot u' \quad (11)$$

Donde C será el coeficiente de amortiguamiento viscoso.

Adicionalmente actuará sobre el sistema una fuerza restauradora F_s dependiente de la rigidez del sistema, esta es la misma que se calcula en el análisis estático:

$$F_s = K \cdot u \quad (12)$$

Por lo tanto, la estructura quedará simplificada con el siguiente modelo para el análisis:

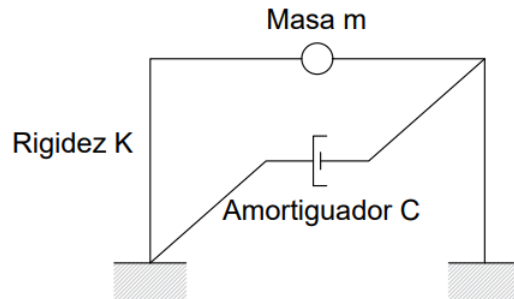


Ilustración 7: Modelo de pórtico.

2.3.2. Ecuación de movimiento

Tomando en cuenta las 3 fuerzas actuantes en el sistema:

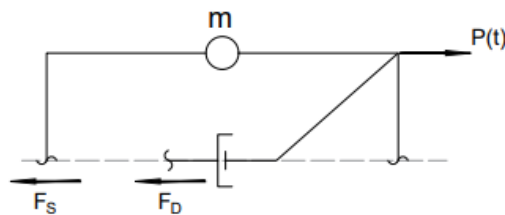


Ilustración 8: Fuerzas actuantes en el modelo.

Aplicando la segunda Ley de Newton obtenemos:

$$\sum F = m \cdot a$$

$$P - F_s - F_D = m \cdot a$$

$$P - K \cdot u - C \cdot u' = m \cdot a$$

Donde P será la fuerza externa aplicada en el sistema, la cual en caso de un sismo proviene de la aceleración del suelo, y la masa del sistema:

$$m \cdot u'' + C \cdot u' + k \cdot u = m \cdot u_g''(t) \quad (13)$$

2.3.3. Matriz de masa y vector de incidencia:

Como se ha presentado antes, para el modelo de análisis dinámico, la masa es concentrada en nodos puntuales del modelo, y esta se expresará dentro de la ecuación de movimiento como una matriz diagonal, con la magnitud de la masa actuante en cada GDL, de la siguiente manera:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

El vector de incidencia *iota* indica el efecto de un sismo en los grados de libertad dinámicos analizados, un valor de 1 indica que la totalidad de la masa es afectada, mientras que, un valor menor a 1 indicará la proporción de la masa que se ve afectado por el sismo. La dimensión de *iota* será igual al número de GDL dinámicos del sistema y para el presente trabajo se considera que el sismo afecta a la totalidad de la masa de cada uno de ellos, el vector puede ejemplificarse de la siguiente manera:

$$iota = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \end{bmatrix}$$

2.3.4. Cálculo del amortiguamiento

Para la resolución de la ecuación matricial de movimiento es necesario una matriz de amortiguamiento, asociada con los grados de libertad dinámicos de la estructura, es decir, los grados de libertad con masas asignadas. Para el presente trabajo se utilizará el modelo de amortiguamiento Rayleigh, el cual es descrito por la siguiente ecuación:

$$C = a_0 \cdot M + a_1 \cdot K \quad (14)$$

El modelo está compuesto por dos sistemas de amortiguamiento, uno proporcional a la masa y otro proporcional a rigidez, los coeficientes a_0 y a_1 , se obtienen al fijar una relación de amortiguamiento ξ , a dos modos de vibración de la estructura, y se los puede obtener resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \xi_i \\ \xi_j \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_i} & \omega_i \\ \frac{1}{\omega_j} & \omega_j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Una explicación más detallada de la obtención de este sistema se puede encontrar en el artículo titulado “Unintended Consequences of Modeling Damping in Structures” de Finley A. Charney (2008), aquí también el autor describe los problemas que acarrea el uso del amortiguamiento proporcional de Rayleigh, en especial al modelar el comportamiento no elástico, ya que la matriz de rigidez cambia dependiendo del estado de los elementos.

Charney (2008) describe 3 metodologías para calcular el amortiguamiento en un análisis no lineal:

- Metodología A: Utilizar la matriz de rigidez inicial y mantener el amortiguamiento constante durante todo el análisis
- Metodología B: Utilizar la matriz de rigidez tangencial, y actualizarla en cada iteración, pero manteniendo los coeficientes constantes
- Metodología C: Utilizar la matriz de rigidez tangencial, y actualizarla en cada iteración al igual que los coeficientes de proporcionalidad, manteniendo constante la relación de amortiguamiento de cada modo, pero actualizando la frecuencia modal de estos.

Para el presente trabajo se utilizará la metodología A, ya que es la que menor trabajo computacional requiere, además de que coincide con la utilizada por softwares comerciales como SAP2000, según lo descrito en su manual (CSI, 2017).

2.3.5. Condensación estática

El procedimiento para la condensación es similar a la partición de matrices explicada en el apartado 2.1.5 del método matricial, pero se realiza sobre la matriz Kpp del modelo, y se lo divide en GDL dinámicos (GDL t) y los GDL estáticos (GDL o), expresando esto en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} F_t \\ F_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{tt} & K_{to} \\ K_{ot} & K_{oo} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_t \\ U_o \end{bmatrix}$$

Si despejamos de la segunda ecuación Uo obtenemos:

$$U_o = K_{oo}^{-1} \cdot (F_o - K_{ot} \cdot U_t) \quad (16)$$

Reemplazando en la primera ecuación, y agrupando los términos con Ut del lado derecho y los términos con Fo, al izquierdo la relación queda descrita como:

$$\underbrace{F_t - K_{to} \cdot K_{oo}^{-1} \cdot F_o}_{\text{F condensada}} = \left(\underbrace{\left(K_{tt} - K_{to} \cdot K_{oo}^{-1} \cdot K_{ot} \right)}_{\text{K condensada}} \right) \cdot U_t$$

Ilustración 9: Agrupación de términos para obtener K condensada.

Así, la relación de fuerza desplazamiento se expresa como:

$$F_{cond} = K_{cond} \cdot U_t$$

Donde:

$$F_{cond} = F_t - K_{to} \cdot K_{oo}^{-1} \cdot F_o \quad (17)$$

$$K_{cond} = K_{tt} - K_{to} \cdot K_{oo}^{-1} \cdot K_{ot} \quad (18)$$

En la ecuación (17) F_o representa las fuerzas que actúan sobre los GDL estáticos, es decir, cargas fijas de la estructura, mientras, F_t representan las cargas dinámicas, por ejemplo, las que un sismo ejerce sobre el sistema.

2.4. Método de Newmark

Obtener una solución analítica para la ecuación de movimiento (13) para un solo grado de libertad por lo común resulta inalcanzable si es que la fuerza aplicada varía indistintamente con el tiempo, o si el sistema en cuestión es no lineal. Dicho dilema puede ser abordado al usar métodos numéricos paso a paso en el tiempo, para la integración de ecuaciones diferenciales (Chopra, 2012). Los métodos proporcionan respuestas al sistema en intervalos discretos de tiempo que por lo general están igualmente espaciados. La solución implica el cálculo de tres parámetros básicos: Aceleración, velocidad y desplazamiento. A continuación, se detalla el método de Newmark, utilizado en el presente trabajo.

En 1959, Newmark ideó una serie de fórmulas de integración numérica las cuales colectivamente son conocidas como métodos Newmark- β (Humar, 2002). El despliegue de la serie de Taylor provee un enfoque riguroso para obtener las siguientes aproximaciones de las ecuaciones de desplazamiento y velocidad (Wilson & Computers and Structures, 2000):

$$u(t + \Delta t) = u(t) + u'(t) \cdot \Delta t + u''(t) \cdot \frac{\Delta t^2}{2} + u'''(t) \cdot \frac{\Delta t^3}{6} + \dots$$

$$u'(t + \Delta t) = u'(t) + u''(t) \cdot \Delta t + u'''(t) \cdot \frac{\Delta t^2}{2} + \dots$$

Newmark trunca estas ecuaciones y las expresa de la siguiente forma:

$$u(t + \Delta t) = u(t) + u'(t) \cdot \Delta t + u''(t) \cdot \frac{\Delta t^2}{2} + \beta \cdot u'''(t) \cdot \Delta t^3$$

$$u'(t + \Delta t) = u'(t) + u''(t) \cdot \Delta t + \gamma \cdot u'''(t) \cdot \Delta t^2$$

Si el cambio de aceleración se asume como lineal entre cada paso de tiempo, se puede escribir la siguiente relación:

$$u'''(t) = \frac{u''(t + \Delta t) - u''(t)}{\Delta t}$$

Al sustituirla en las ecuaciones anteriormente mostradas se obtiene:

$$u(t + \Delta t) = u(t) + u'(t) \cdot \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \cdot \Delta t^2 \cdot u''(t) + \beta \cdot \Delta t^2 \cdot u''(t + \Delta t) \quad (19)$$

$$u'(t + \Delta t) = u'(t) + (1 - \gamma) \cdot \Delta t \cdot u''(t) + \gamma \cdot \Delta t \cdot u''(t + \Delta t) \quad (20)$$

Las ecuaciones (19) y (20), juntamente con la ecuación de movimiento mostrada anteriormente (13) proporcionaran las respuestas del sistema. Con el fin de evitar las iteraciones, las ecuaciones se hacen incrementales al establecer las relaciones:

$$\Delta u = u(t + \Delta t) - u(t)$$

$$\Delta u' = u'(t + \Delta t) - u'(t)$$

$$\Delta u'' = u''(t + \Delta t) - u''(t)$$

$$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t)$$

Reemplazando en las ecuaciones (19) y (20), desarrollando se llega a:

$$\Delta u = \Delta t \cdot u'(t) + \frac{1}{2} \cdot \Delta t^2 \cdot u''(t) + \beta \cdot \Delta t^2 \cdot \Delta u'' \quad (21)$$

$$\Delta u' = \Delta t \cdot u''(t) + \gamma \cdot \Delta t \cdot \Delta u'' \quad (22)$$

De (21) se encuentra una expresión para $\Delta u''$ y se sustituye en (22) para obtener una relación para $\Delta u'$:

$$\Delta u'' = \frac{1}{\beta \cdot \Delta t^2} \cdot \Delta u - \frac{1}{\beta \cdot \Delta t} \cdot u'(t) - \frac{1}{2 \cdot \beta} \cdot u''(t) \quad (23)$$

$$\Delta u' = \frac{\gamma}{\beta \cdot \Delta t} \cdot \Delta u - \frac{\gamma}{\beta} \cdot u'(t) + \Delta t \cdot \left(1 - \frac{\gamma}{2 \cdot \beta}\right) \cdot u''(t) \quad (24)$$

Posteriormente, se plantea la ecuación de movimiento como incremental y se reemplazan las ecuaciones descritas con anterioridad, determinando la siguiente formulación:

$$m \cdot \Delta u'' + C \cdot \Delta u' + k \cdot \Delta u = \Delta P$$

$$\left(\frac{m}{\beta \cdot \Delta t^2} + \frac{C \cdot \gamma}{\beta \cdot \Delta t} + k\right) \cdot \Delta u = \Delta P + \left(\frac{m}{\beta \cdot \Delta t} + \frac{C \cdot \gamma}{\beta}\right) \cdot u'(t) + \left(C \cdot \Delta t \cdot \left(\frac{\gamma}{2 \cdot \beta} - 1\right) + \frac{m}{2 \cdot \beta}\right) \cdot u''(t) \quad (25)$$

Para facilidad de cálculo se definen las siguientes relaciones:

$$\bar{K} = \frac{m}{\beta \cdot \Delta t^2} + \frac{C \cdot \gamma}{\beta \cdot \Delta t} + k \quad (26)$$

$$A = \frac{m}{\beta \cdot \Delta t} + \frac{C \cdot \gamma}{\beta} \quad (27)$$

$$B = C \cdot \Delta t \cdot \left(\frac{\gamma}{2 \cdot \beta} - 1\right) + \frac{m}{2 \cdot \beta} \quad (28)$$

$$\bar{P} = \Delta P + A \cdot u'(t) + B \cdot u''(t) \quad (29)$$

Con lo cual la solución se reduce a encontrar el valor de Δu de la siguiente expresión:

$$\Delta u = \frac{\bar{P}}{\bar{K}} \quad (30)$$

Es importante destacar que, una vez comenzado el análisis, se tendrá inconvenientes en la ecuación (29) por no tener valores iniciales del diferencial de fuerza aplicado ΔP , velocidad $u'(t)$ y aceleración $u''(t)$ del grado de libertad dinámico, por lo tanto es necesario establecer estos valores antes de realizar los cálculos en la primera iteración. Al partir del reposo la velocidad inicial es igual a 0, el diferencial de fuerza aplicado se calcula a partir de la aceleración proveniente del sismo en el primer paso de tiempo y la masa relacionada, por último, para el primer valor de la aceleración se utiliza la ecuación de movimiento (13), estableciéndose las siguientes relaciones:

$$u'(t_1) = 0 \quad (31)$$

$$\Delta P_0 = -m \cdot (u_g''(t_1)) \cdot g \quad (32)$$

$$u''(t_1) = \frac{\Delta P_0 - C \cdot u'(t_1) - K \cdot u(t_1)}{m} \quad (33)$$

Donde:

- $u'(t_1)$: Velocidad inicial del grado de libertad dinámico.
- ΔP_0 : Diferencial de fuerza aplicado en el paso inicial
- $u_g''(t_1)$: Aceleración proveniente del sismo en el primer paso del tiempo
- $u''(t_1)$: Aceleración inicial del grado de libertad dinámico.

- $u'(t_1)$: Desplazamiento inicial del grado de libertad dinámico, considerado como 0 al partir del reposo.

Refiriéndose a (19) los factores β y γ determinarán la variación de la aceleración entre cada paso de tiempo, así como la precisión y estabilidad del método. De acuerdo con Clough & Penzien (2015), estudios sobre el desempeño de esta formulación, notaron que el factor γ controla la cantidad de amortiguamiento artificial que se induce en el procedimiento paso a paso; si γ es igual a $1/2$ no existe amortiguamiento artificial, por tal motivo esta es la elección común para el valor del parámetro. Por otra parte, se ha demostrado que valores de β dentro del rango $1/6 \leq \beta \leq 1/4$ entrega resultados satisfactorios en cuanto a precisión y estabilidad. Una elección de $\gamma = 1/2$ y $\beta = 1/4$ conlleva el mismo resultado que asumir una aceleración promedio constante entre cada paso de tiempo, mientras que una elección de $\gamma = 1/2$ y $\beta = 1/6$ implica la asunción de una variación lineal de la aceleración entre cada paso de tiempo, esta demostración puede verse a detalle en el capítulo 5.4.2 del libro de Chopra (2012).

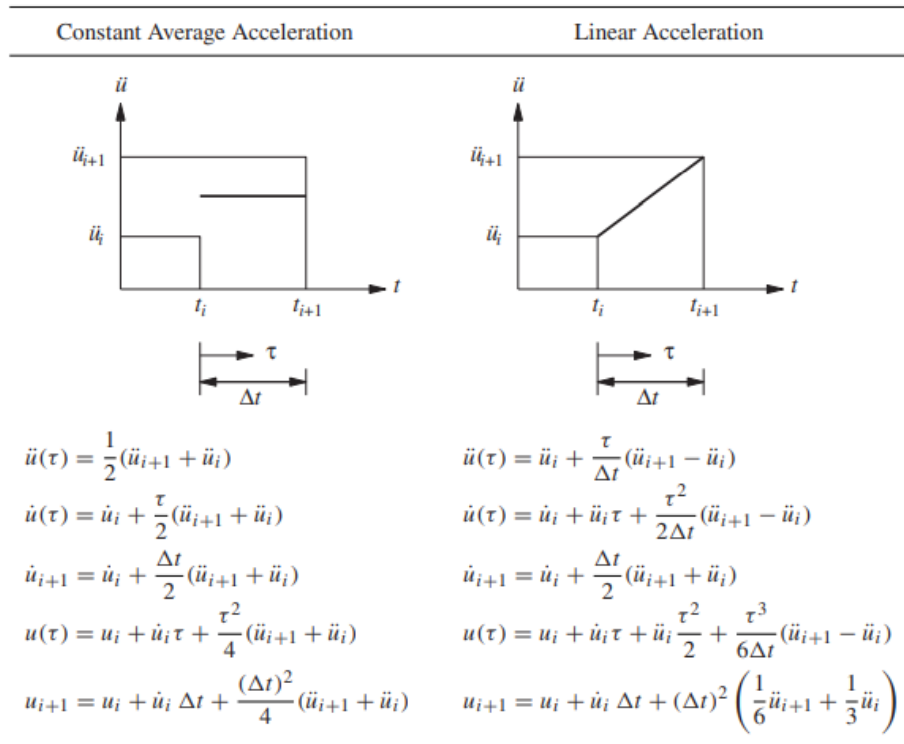


Ilustración 10: Fuente: Tabla 5.4.1 (Chopra, 2012).

2.4.1. Estabilidad del método

Se puede entender a la estabilidad numérica de un método como la manera en la cual los errores se propagan a lo largo del proceso. Un método puede ser considerado como estable si las pequeñas variaciones o errores de la entrada corresponden a pequeñas alteraciones en la salida. En su defecto, si los errores aumentan de manera progresiva causando irregularidades notorias, el método es inestable; dicha situación puede deberse ya sea al manejo de datos numéricos o a la naturaleza misma del modelo matemático en cuestión.

Diversos análisis sobre la estabilidad de la formulación de Newmark pueden ser encontrados en la literatura. Newmark (1959) establece que la estabilidad de este método es evaluada mediante la siguiente expresión:

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma - 2 \cdot \beta}}$$

Donde si la elección de parámetros es $\gamma = 1/2$ y $\beta = 1/4$, se tiene:

$$\frac{\Delta t}{T_n} < \infty$$

Lo cual implica que el método de la aceleración promedio constante entre cada paso de tiempo es estable para cualquier valor de Δt , sin embargo, la precisión de los resultados estará condicionado a seleccionar un intervalo de tiempo lo suficientemente pequeño para garantizar respuestas favorables.

Por otra parte, si los parámetros son $\gamma = 1/2$ y $\beta = 1/6$, se tiene:

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq 0.551$$

Esto indica que la estabilidad del método de variación lineal de la aceleración entre cada paso de tiempo se ve condicionada por la relación anteriormente expuesta, debiéndose escoger un valor de Δt que satisfaga la relación. Para el presente trabajo se escogen los valores de los parámetros como $\gamma = 1/2$ y $\beta = 1/4$.

3. MATERIALES Y METODOS

En base a los conceptos expuestos en el capítulo anterior, se establece un conjunto de procesos que permita desarrollar una metodología a seguir para el análisis dinámico no lineal. En esta sección se detallan los pasos, operaciones y consideraciones necesarias e importantes para modelar la estructura y obtener su respuesta en el tiempo frente a una carga sísmica. Posteriormente se expone el procedimiento propuesto para el desarrollo del análisis mediante el software SAP2000 que servirá como punto de contraste de los resultados obtenidos en este trabajo.

La complejidad de un análisis dinámico no lineal vendrá definida por una serie de factores, entre los más relevantes están: el grado de precisión con el que se modele el sistema, la definición del comportamiento de los materiales utilizados, la dificultad de la estructura en cuestión, los métodos utilizados, las asunciones que se establezcan. El objetivo no es obtener el análisis más complejo y exacto posible sino implementar una metodología como una herramienta de entendimiento y apoyo didáctico. Bajo este enfoque, un procedimiento simplificado se presenta a continuación mediante el diagrama de flujo de la ilustración 11, en el cual, como punto de partida consta el ingreso de datos de la estructura como coordenadas, materiales, propiedades, restricciones, entre otros; posteriormente el ingreso de la carga sísmica definida en intervalos de tiempo. La parte final del proceso se resume en cada paso tiempo calcular la matriz de rigidez de la estructura, calcular los desplazamientos por el método de Newmark, y evaluar el estado de las rótulas plásticas para después pasar al siguiente intervalo de tiempo.

Si bien el diagrama muestra una síntesis sencilla del análisis, cada paso implica una dificultad particular y por ende problemas a solucionar durante su desarrollo. Estos casos, así como explicaciones a detalle de los métodos más importantes son expuestos más adelante en el presente capítulo.

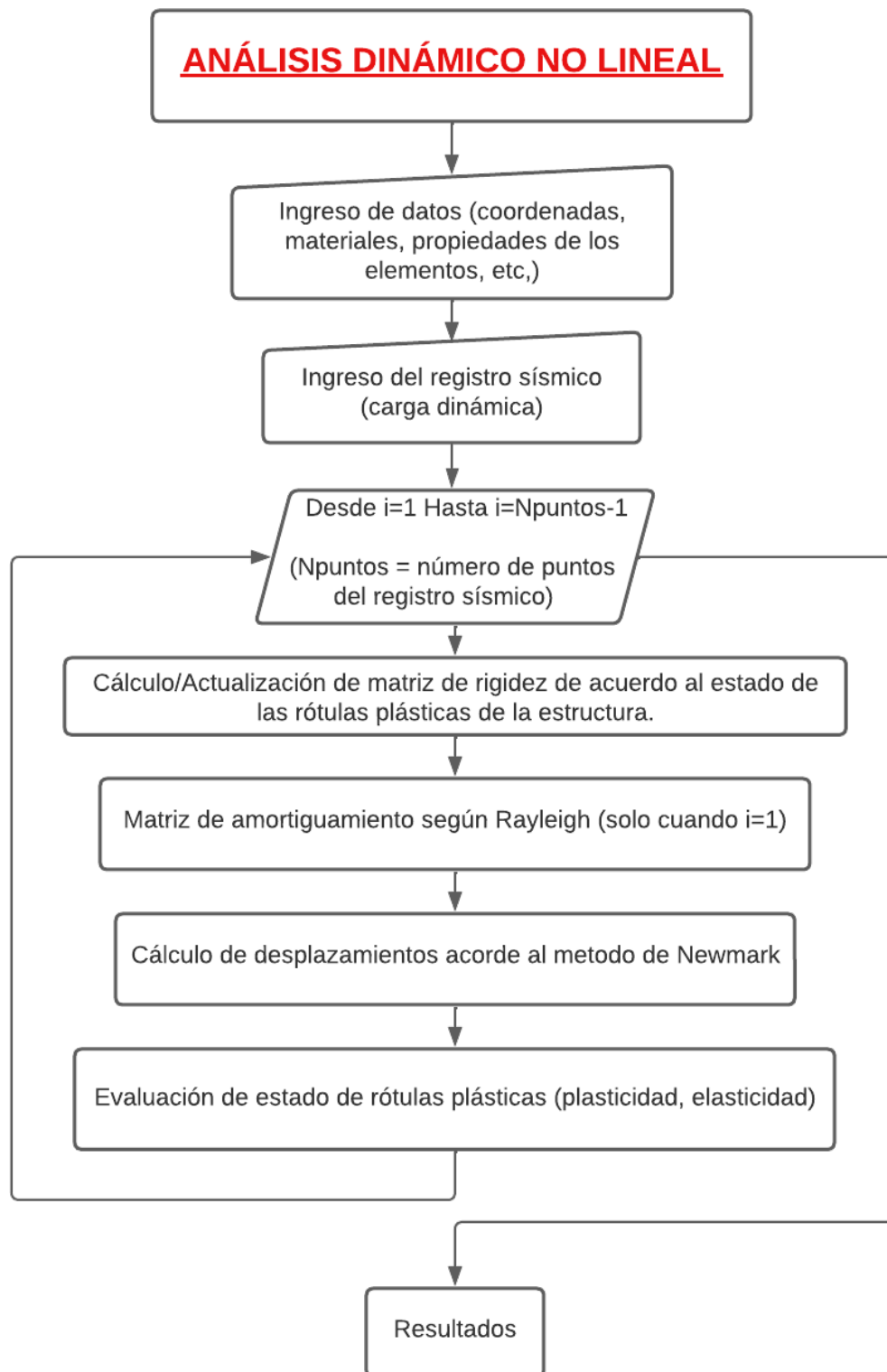


Ilustración 11: Diagrama de flujo simplificado para la metodología propuesta.

3.1. Modelo Matlab

3.1.1. Ingreso de datos

Para definir el modelo tenemos 3 matrices iniciales, estas son:

- Matriz de nodos:

$$XY = \begin{bmatrix} \text{Coordenada } X & \text{Coordenada } Y \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

- Matriz de conexión de elementos:

$$CON = \begin{bmatrix} \#de\ elemento & \text{Nodo inicial} & \text{Nodo final} & \text{Propiedades físicas} & \text{Propiedades geométricas} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Dentro de las propiedades físicas se incluye el módulo de elasticidad, y coeficiente de expansión térmica, sin embargo, este último no será usado para este trabajo, y en las propiedades geométricas se incluye el área y la inercia.

- Matriz de restricciones:

$$R = \begin{bmatrix} \#de\ nodo & \text{Restriccion en } x & \text{Restriccion en } y & \text{Restriccion a rotacion} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

La matriz de restricciones dependerá de los grados de libertad del sistema, el presente trabajo contempla el análisis de un pórtico 2D, por lo que los nodos poseen 3 grados de libertad.

Una vez definidas las matrices bases del modelo, se puede proceder con el armado de la matriz de rigidez.

Para ejemplificar el ingreso de datos se tomará un pórtico genérico de 1 piso, con un grado de libertad dinámico:

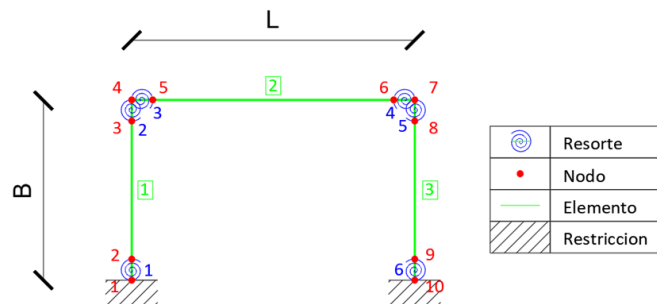


Ilustración 12: Modelo general de un pórtico.

Cabe aclarar que los resortes que conectan a los nodos son elementos de longitud 0.

La primera matriz para definir el modelo será la matriz de nodos, a la cual llamaremos XY, y contiene las coordenadas de los nodos, en la primera columna la coordenada en X y en la segunda la coordenada en y, la fila en la que se encuentran representa el número de nodo.

$$XY = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B \\ 0 & B \\ 0 & B \\ L & B \\ L & B \\ L & B \\ L & 0 \\ L & 0 \end{bmatrix}$$

Debido a que los resortes tienen longitud 0, los nodos que las conectan tienen las mismas coordenadas.

Las restricciones de la estructura se definirán en la matriz R, donde la primera columna indica el nodo en el que se aplica, en la segunda la restricción al movimiento en X, la tercera al movimiento en Y, la cuarta a la rotación. Un 1 representa restricción y un 0 que se encuentra libre al movimiento. Para este ejemplo se tendrá restricción en todos los sentidos en el primer y último nodo.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Las siguientes matrices contienen las propiedades de las secciones y de los materiales. En la matriz materiales (Mat), se define en la primera columna la etiqueta de la sección y en la segunda el módulo de elasticidad E de los diferentes materiales, para el ejemplo se utiliza un único material. Por otro lado, en la matriz de propiedades de la sección (Prop), se coloca la etiqueta de la sección en la primera columna, en la segunda el área de la misma y en la tercera su inercia.

$$Mat = \begin{bmatrix} 1 & E \end{bmatrix} \quad Prop = \begin{bmatrix} 1 & A_{viga} & I_{viga} \\ 2 & A_{columna} & I_{columna} \end{bmatrix}$$

Para definir los elementos se utilizará una matriz de conectividad (CON), en la cual se define en la primera columna la etiqueta del elemento, en la segunda el nodo inicial, en la tercera el nodo final, en la cuarta la etiqueta del material correspondiente, y en la última la etiqueta de las propiedades de la sección.

$$Con = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & 9 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

En esta matriz no se incluyen los elementos de resorte, para estos se crea una nueva matriz en la cual se ingresa las diferentes propiedades de su comportamiento no lineal, en este caso un comportamiento elastoplástico bilineal con endurecimiento.

La matriz de conexión de resortes (CON_res) contiene dentro de sus columnas en orden las siguientes propiedades: etiqueta del elemento, nodo inicial, nodo final, rigidez inicial (k1), momento de fluencia positivo (Myp), deformación de fluencia positiva (Uyp), momento de fluencia negativa (Myn), deformación de fluencia negativa (Uyn), rigidez de endurecimiento (k2).

$$CON_res = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & k1_{columna} & Myp_{columna} & uyp_{columna} & Myn_{columna} & uyn_{columna} & k2_{columna} \\ 2 & 3 & 4 & k1_{columna} & Myp_{columna} & uyp_{columna} & Myn_{columna} & uyn_{columna} & k2_{columna} \\ 3 & 4 & 5 & k1_{viga} & Myp_{viga} & uyp_{viga} & Myn_{viga} & uyn_{viga} & k2_{viga} \\ 4 & 6 & 7 & k1_{viga} & Myp_{viga} & uyp_{viga} & Myn_{viga} & uyn_{viga} & k2_{viga} \\ 5 & 7 & 8 & k1_{columna} & Myp_{columna} & uyp_{columna} & Myn_{columna} & uyn_{columna} & k2_{columna} \\ 6 & 9 & 10 & k1_{columna} & Myp_{columna} & uyp_{columna} & Myn_{columna} & uyn_{columna} & k2_{columna} \end{bmatrix}$$

Para incluir las condiciones del modelo se incluye una matriz especificando los GDL iguales (equalDOF), en esta se especifica primero el nodo máster, seguido por el nodo slave, las siguientes 3 columnas son para especificar el grado de libertad en el que se incluye la condición, entonces la tercera columna corresponde a la dirección en X, la cuarta en Y, finalmente, la quinta a la rotación, estas se rellenan con un 1 en la condición deseada y con 0 en las demás.

La principal función de las condiciones para el modelo será garantizar que los resortes tengan únicamente deformación rotacional, por lo que los grados de libertad en X y Y, de los nodos que lo conforman serán iguales.

$$equalDOF = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

La siguiente matriz para definir será la de ingreso de masas, en esta se especificará en orden, el nodo en el que se aplica, la masa en X, la masa en Y, la masa de rotación. Mas adelante se utilizará esta matriz para definir la matriz de masa del sistema.

$$M = \begin{bmatrix} 4 & m & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Adicional para el análisis dinámico se define la razón de amortiguamiento (ξ) general del sistema:

$$\xi = 0.05$$

Finalmente se ingresa el registro sísmico a ser usado en el análisis, este viene en un documento de texto en el que se detalla el diferencial de tiempo (dt) con el que se encuentra discretizado, el cual será usado para el análisis, y los valores de la aceleración del suelo en fracción de la gravedad. Por lo general, un registro sísmico tiene una gráfica semejante a la mostrada en la ilustración 13.

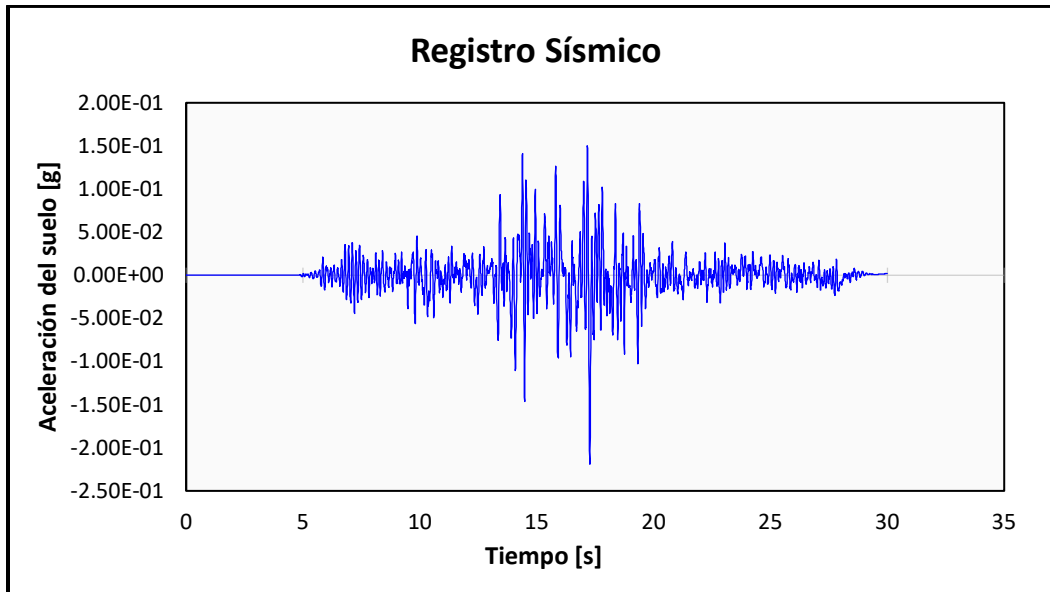


Ilustración 13: Gráfica de aceleración vs tiempo.

3.1.2. Definición de matriz de rigidez:

3.1.2.1. Definición de vectores y matrices adicionales:

A partir de los datos iniciales del modelo, se obtienen vectores y matrices necesarias para el análisis; el primero es el vector de longitudes de los elementos, para calcularlo se refiere a la matriz de conectividad por los nodos iniciales y finales, y con las coordenadas de estos almacenadas en la matriz XY, se obtiene la longitud aplicando la siguiente formula:

$$Lo = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} \quad (34)$$

A continuación, se presenta el código necesario para su implementación en Matlab:

Bloque de código 1: Función para obtener las longitudes de los elementos.

```
Nele=size(CON,1);
for i=1:Nele
    ni=CON(i,2);
    nj=CON(i,3);
    y2=XY(nj,2);
    y1=XY(ni,2);
    x2=XY(nj,1);
    x1=XY(ni,1);
    Lo(i,1)=sqrt((y2-y1)^2+(x2-x1)^2);
end
```

Otro vector necesario para el análisis es el vector de restricciones, este es un vector de n donde, n es el número total de grados de libertad de la estructura, y se almacena como valores un 0 en caso de que el GDL este libre y un 1 si este está restringido, su obtención en Matlab se realiza con el siguiente código:

Bloque de código 2: Función para obtener el vector de restricciones de los nodos.

```
[~,aux]=size(R);
VectorR=zeros((aux-1)*size(XY,1),1);
for i=1:size(R,1)
    for j=1:(aux-1)
        VectorR(3*(R(i,1))-3+j,1)=R(i,j+1);
    end
end
```

3.1.2.2. Matrices de transformación:

La matriz B y L se encargarán de transformar las coordenadas y dimensiones de las matrices de rigidez de cada elemento a coordenadas y dimensiones globales, por lo tanto, se obtiene una matriz B y L para cada elemento, la matriz B se obtiene con el siguiente código:

Bloque de código 3: Función de matriz beta.

```
Nele=size(CON,1);
for i=1:Nele
    ni=CON(i,2);
    nj=CON(i,3);
    y2=XY(nj,2);
    y1=XY(ni,2);
    x2=XY(nj,1);
    x1=XY(ni,1);
    c=(x2-x1)/Lo(i,1);
    s=(y2-y1)/Lo(i,1);
    B(:, :, i)=[
        c   s   0   0   0   0
       -s   c   0   0   0   0
        0   0   1   0   0   0
        0   0   0   c   s   0
        0   0   0  -s   c   0
        0   0   0   0   0   1];
end
```

Debido a que los resortes a implementar funcionan únicamente a rotación y tienen una longitud 0, no es necesario una matriz para transformar sus coordenadas, sin embargo, si es necesaria la matriz de colocación L, por esto se implementa un código para los elementos (columnas y vigas) y otro para los resortes:

Bloque de código 4: Matriz de colocación para elementos.

```
Nnod=size(XY,1);
Nelem=size(CON,1);
for i=1:Nelem
    L0=zeros(2*GDLnodo,Nnod*GDLnodo);
    ni=CON(i,2);
    nj=CON(i,3);
    L0(1,3*ni-2)=1;
    L0(2,3*ni-1)=1;
    L0(3,3*ni)=1;
    L0(4,3*nj-2)=1;
    L0(5,3*nj-1)=1;
    L0(6,3*nj)=1;
    L(:, :, i)=L0;
end
```

Para la matriz de colocación de resortes se debe usar su matriz de conectividad (CON_res), y únicamente tendrán 1 GDL, por lo que el código para los resortes queda de la siguiente forma:

Bloque de código 5: Matriz de colocación para resortes.

```
Nnod=size(XY,1);
Nelem=size(CON_res,1);
GDLres=1;
for i=1:Nelem
    L0=zeros(2*GDLres,Nnod*GDLnodo);
    ni=CON_res(i,2);
    nj=CON_res(i,3);
    L0(1,3*ni)=1;
    L0(2,3*nj)=1;
    L(:, :, i)=L0;
end
```

3.1.2.3. Matriz elemental:

Para armar la matriz elemental primero definimos la matriz Constrains, a partir de la matriz equalDOF, esta contendrá 2 columnas, en la primera se especifica el GDL master y en la segunda el GDL slave, esto se implementa en Matlab con el siguiente código:

Bloque de código 6: Constrains del modelo.

```
cont=0;
for i=1:size(equalDOF,1)
    if equalDOF(i,3)==1
        cont=cont+1;
        Constrains(cont,1)= equalDOF(i,1)*GDLnodo-2;
        Constrains(cont,2)= equalDOF(i,2)*GDLnodo-2;
    end
    if equalDOF(i,4)==1
        cont=cont+1;
        Constrains(cont,1)= equalDOF(i,1)*GDLnodo-1;
        Constrains(cont,2)= equalDOF(i,2)*GDLnodo-1;
    end
    if equalDOF(i,5)==1
        cont=cont+1;
        Constrains(cont,1)= equalDOF(i,1)*GDLnodo;
        Constrains(cont,2)= equalDOF(i,2)*GDLnodo;
    end
end
end
```

Usando como base la matriz constrains, se procede con la obtención de la matriz elemental del sistema, la cual servirá para aplicar las condiciones del sistema, el código de implementación es el siguiente:

Bloque de código 7: Matriz elemental.

```
cont=1;
Melemental=zeros(size(XY,1)*GDLnodo,size(XY,1)*GDLnodo);
for i=1:size(Melemental)
    Melemental(i,i)=1;
end
for i=1:size(XY,1)*GDLnodo
    for j=1:size(Constrains,1)
        if i==Constrains(j,2)
            Melemental(i,i)=0;
            Melemental(i,Constrains(j,1))=1;
            cont=cont+1;
        end
    end
end
Melemental(i,i)=1;
```

3.1.2.4. Matriz de rigidez:

Se obtiene una matriz de rigidez para los elementos (vigas y columnas), y una matriz de rigidez de los resortes por separado, ambas en coordenadas y dimensiones globales de la estructura. La matriz de rigidez de todo el sistema será el resultado de sumar las dos antes mencionadas, como se muestra en la ecuación (35). Esta separación facilita la actualización de la rigidez del sistema frente a los cambios de estado de las rótulas plástica, ya que la matriz de rigidez de los elementos se mantendrá igual para todo el análisis, mientras que la rigidez de los resortes podrá variar para cada paso de tiempo.

$$K_{Estructura} = K_{Elementos} + K_{Resortes} \quad (35)$$

Para obtener la matriz de los elementos, calculamos primero la matriz de rigidez propia de cada elemento en función de una matriz base (2.1.2), y haciendo uso de las matrices de transformación calculadas anteriormente, se suma todas las matrices en coordenadas globales, esto se implementa al código de la siguiente manera:

Bloque de código 8: Matriz de rigidez de elementos.

```
Nele=size(CON,1);
[~,aux,~]=size(L);
K=zeros(aux);
for i=1:Nele
    a=PROP(CON(i,5),2);
    e=MAT(CON(i,4),2);
    In=PROP(CON(i,5),3);
    k_elem(:,:,i)=(e*In)/(long(i,1)^3) *
[a*long(i,1)^2/In    0    0    -a*long(i,1)^2/In    0    0
 0    12    6*long(i,1)    0    -12    6*long(i,1)
 0    6*long(i,1)    4*long(i,1)^2    0    -6*long(i,1)    2*long(i,1)^2
 -a*long(i,1)^2/In    0    0    a*long(i,1)^2/In    0    0
 0    -12    -6*long(i,1)    0    12    -6*long(i,1)
 0    6*long(i,1)    2*long(i,1)^2    0    -6*long(i,1)    4*long(i,1)^2];

    k_estruc(:,:,i)=L(:,:,i)'*beta(:,:,i)*k_elem(:,:,i)*beta(:,:,i)*L(:,:,i);
    K=K+k_estruc(:,:,i);
end
```

Aquí obtenemos tanto las matrices de cada elemento, como de la estructura en general.

El procedimiento para obtener la matriz de rigidez de los resortes es similar, pero la matriz base cambia, además ya no se requiere una matriz B, para transformar las coordenadas, el código de implementación es el siguiente:

Bloque de código 9: Matriz de rigidez de resortes.

```
Nele=size(CON_res,1);
[~,aux,~]=size(L_Res);
KRES=zeros(aux);
for i=1:Nele
    k_reselem(:,:,i)=kr(i,1)*[1    -1
                               -1    1];

    k_estruc(:,:,i)=L_Res(:,:,i)'*k_reselem(:,:,i)*L_Res(:,:,i);
    KRES=KRES+k_estruc(:,:,i);
end
```

La rigidez de los resortes depende del estado actual, y se almacena dentro del vector kr, el cual se actualiza cuando se comprueba el estado de las fuerzas en los resortes. Para obtener la matriz final del sistema realizamos la siguiente operación:

```
K=K_+KRES;
K=transpose(Melemental)*K*Melemental;
```

3.1.2.5. Matriz de masa

Se crea una matriz cuadrada con dimensiones igual a los GDL de la estructura, en su diagonal se coloca la masa en los GDL correspondientes, a partir de las especificadas en la matriz de ingreso de masa, siguiendo el proceso mostrado en el siguiente bloque de código:

Bloque de código 10: Creación de matriz de masa.

```
cont=0;
Mm=zeros(size(K,1),size(K,1));
for i=1:size(M,1)
    for j=1:size(M,2)-1
        if M(i,j+1)~= 0
            cont=cont+1;
            Mm(M(i,1)*3-3+j,M(i,1)*3-3+j)=M(i,j+1);
        end
    end
end
```

3.1.2.6. Partición de matrices:

Una vez obtenida la matriz K de toda la estructura, se procede a la simplificación de la misma, primero se realiza la partición de matrices en GDLp y GDLs, mediante el siguiente código a partir del vector R:

Bloque de código 11: Partición de matrices.

```
s=find(VectorR(:,1)~=0);
p=find(VectorR(:,1)==0);
Kpp=K(p,p);
Kps=K(p,s);
Kss=K(s,s);
Ksp=K(s,p);
Us=U(s,1);
```

Posterior a obtener la matriz Kpp, se procede a la condensación estática, esta se realiza a partir de la matriz de ingreso de masas, armando una matriz de diagonal de $n \times n$, la cual contiene las masas del sistema, y en función de la cual se obtienen los GDLt y los GDLo, al final se encuentra la matriz de rigidez condensada, la cual será usada para el análisis dinámico, el proceso se implementa de la siguiente forma al código:

```

for i=1:size(Melemental,1)
    aux(i,1)=Melemental(i,i);
end
V_reduccion=find(aux(:,1)==0);
Mm=transpose(Melemental)*Mm* Melemental;
[t_aux]=find(diag(Mm(:, :)~=0));
[o_aux]=find(diag(Mm(:, :))==0);
cont=1;
s=find(VectorR(:,1)~=0);
for i=1:size(t_aux,1)
    if ismember(t_aux(i,1),V_reduccion) || ismember(t_aux(i,1),s)
    else
        t(cont,1)=t_aux(i,1);
        cont=cont+1;
    end
end
cont=1;
for i=1:size(o_aux,1)
    if ismember(o_aux(i,1),V_reduccion) || ismember(o_aux(i,1),s)
    else
        o(cont,1)=o_aux(i,1);
        cont=cont+1;
    end
end
Mtt=Mm(t,t);
Ktt=K(t,t);
Kto=K(t,o);
Koo=K(o,o);
Kot=K(o,t);
Kcond=Ktt-Kto*inv(Koo)*Kot;
GDLo=o';
GDLt=t';

```

3.1.3. Método de Newmark:

El método de Newmark se implementa como una función, la cual sigue el diagrama de flujo de las ilustraciones 14 y 15:

CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTOS POR EL MÉTODO DE NEWMARK (PARA EL PASO ACTUAL)

CÁLCULO DE CONSTANTES

$$k_s = k_{cond} + C * \gamma / (\beta * dt) + M_{tt} / (\beta * dt^2)$$

Sección 2.4, Ecuación 26.

$$a = ((M_{tt} / (\beta * dt)) + (C * \gamma / \beta))$$

Sección 2.4, Ecuación 27.

$$b = ((M_{tt} / (2 * \beta)) + dt * ((\gamma / (2 * \beta)) - 1) * C)$$

Sección 2.4, Ecuación 28.

CÁLCULO DE INCREMENTOS

$$d_{pi} = -M_{tt} * (a_{g(i+1,1)} - a_{g(i,1)}) * g$$

Fuerza proveniente del sismo para el presente paso de tiempo.

$$d_{Pis} = d_{pi} + a * V(:,i) + b * A(:,i)$$

Diferencial de fuerza aplicado a los GDL dinámicos t, Sección 2.4, Ecuación 29.

$$dU(:,i) = k_s^{-1} * d_{Pis}$$

Incremento de desplazamientos en los GDL dinámicos t, Sección 2.4, Ecuación 30.

$$dU_o(:,i) = \text{inv}(K_{oo}) * (-K_{ot} * dU(:,i))$$

Incremento de desplazamientos en los GDL estáticos o, Sección 2.3.5, Ecuación 16.

$$dV = \gamma / (\beta * dt) * dU(:,i) - \gamma / \beta * V(:,i) - dt * (1 - \gamma / (2 * \beta)) * A(:,i)$$

Incremento de velocidad en los GDL dinámicos t, Sección 2.4, Ecuación 24.

$$dA = 1 / (\beta * dt^2) * dU(:,i) - 1 / (\beta * dt) * V(:,i) - 1 / (2 * \beta) * A(:,i)$$

Incremento de aceleración en los GDL dinámicos t, Sección 2.4, Ecuación 23.

ACUMULACIÓN DE INCREMENTOS

$$U(:,i+1) = U(:,i) + dU(:,i)$$

Desplazamiento total hasta el paso i+1 de los grados de libertad dinámicos t.

$$U_o(:,i+1) = U_o(:,i) + dU_o(:,i)$$

Desplazamiento total hasta el paso i+1 de los grados de libertad estáticos o.

$$V(:,i+1) = V(:,i) + dV$$

Velocidad total hasta el paso i+1 de los grados de libertad dinámicos t.

$$A(:,i+1) = A(:,i) + dA$$

Aceleración total hasta el paso i+1 de los grados de libertad dinámicos t.

A

Ilustración 14: Diagrama de flujo de un paso de Newmark, 1 de 2.

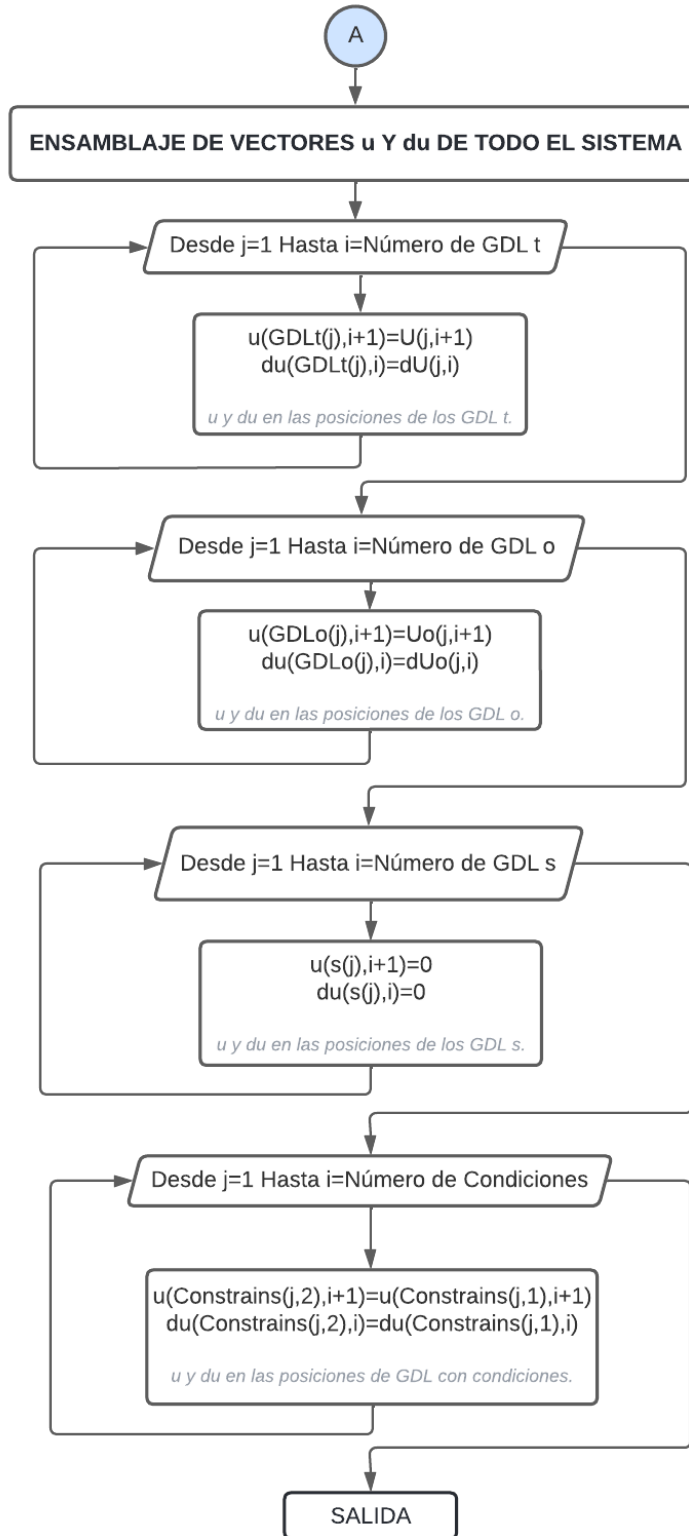


Ilustración 15: Diagrama de flujo de un paso de Newmark, 2 de 2.

Esta función toma los datos calculados en el paso i , y encuentra los resultados para el paso $i+1$, por lo que la función se iterará durante el análisis no lineal. A continuación, se muestra su implementación al código:

Bloque de código 13: Paso de Newmark.

```
ks=kcond+C*gamma/(beta*dt)+Mtt/(beta*dt^2);
a=(Mtt/(beta*dt)+(C*gamma/beta));
b=(Mtt/(2*beta))+dt*(gamma/(2*beta)-1)*C);
dpi=-Mtt*(ag(i+1,1)-ag(i,1))*g;
dPis=dpi+a*V(:,i)+b*A(:,i);
dU(:,i)=inv(ks)*dPis;
dUo(:,i)=inv(Koo)*(-Kot*dU(:,i));
dV=gamma/(beta*dt)*dU(:,i)-gamma/beta*V(:,i)-dt*(1-gamma/(2*beta))*A(:,i);
dA=1/(beta*dt^2)*dU(:,i)-1/(beta*dt)*V(:,i)-1/(2*beta)*A(:,i);

U(:,i+1)=U(:,i)+dU(:,i);
Uo(:,i+1)=Uo(:,i)+dUo(:,i);
V(:,i+1)=V(:,i)+dV;
A(:,i+1)=A(:,i)+dA;

for j=1:size(GDLt,2)
    u(GDLt(j),i+1)=U(j,i+1);
    du(GDLt(j),i)=dU(j,i);
end
for j=1:size(GDLo,2)
    u(GDLo(j),i+1)=Uo(j,i+1);
    du(GDLo(j),i)=dUo(j,i);
end
for j=1:size(s)
    u(s(j),i+1)=0;
    du(s(j),i)=0;
end

for j=1:size(Constrains,1)
    u(Constrains(j,2),i+1)=u(Constrains(j,1),i+1);
    du(Constrains(j,2),i)=du(Constrains(j,1),i);
end
```

3.1.4. Evaluación de estado de rótulas plásticas

Dentro de la metodología planteada, la no linealidad del sistema se incluye en los resortes rotacionales ubicados en los lugares donde se espera la fluencia, en un pórtico común, se da en el inicio y final de cada viga y columna. De acuerdo con lo expuesto en apartados anteriores, el comportamiento de los resortes esta descrito por la siguiente curva:

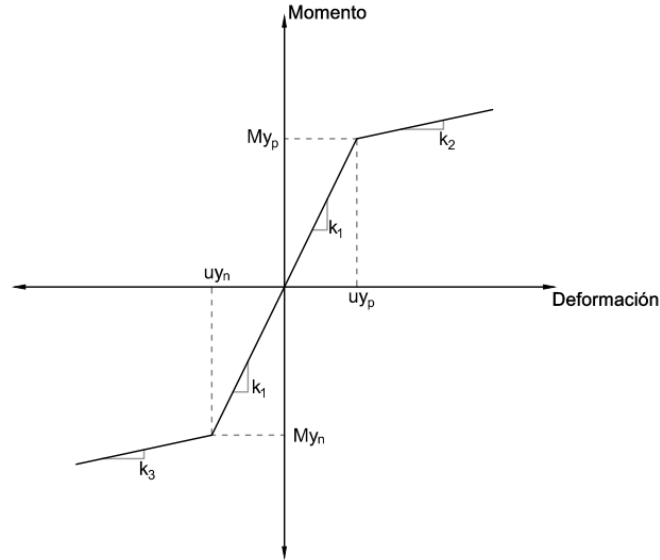


Ilustración 16: Curva modelo para comportamiento de los resortes.

Donde el punto de fluencia está definido por el momento plástico M_y ya sea positivo o negativo (subíndice p y n respectivamente) y la deformación que expresa en este instante u_y ya sea positivo o negativo (subíndice p y n respectivamente). La pendiente de la parte elástica representa la rigidez k_1 del resorte en esta sección, mientras que las pendientes k_2 y k_3 corresponden a la rigidez por endurecimiento de la sección plástica en el sentido positivo y negativo respectivamente.

Con el fin de considerar la no linealidad en el modelo se evalúa el estado de las rótulas plásticas en cada intervalo de tiempo, para lo cual se divide la gráfica anterior en tres secciones y se implementa la bandera denominada “ON” para asignar la sección de la gráfica en la que se encuentra la rótula evaluada.

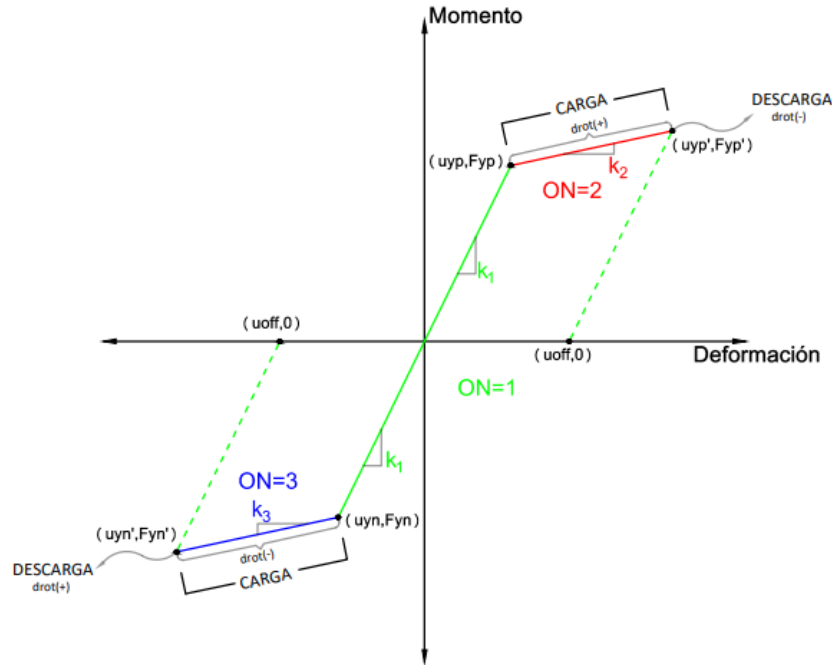


Ilustración 17: Detalle de la curva de comportamiento de los resortes.

Cuando ON toma un valor igual a 1, el resorte se comporta de manera elástica y su rigidez corresponde a un valor de k_1 , un valor de ON igual a 2 indica que el resorte está en la zona plástica en el sentido positivo y su rigidez es igual a k_2 , mientras que un valor de 3 definirá un estado plástico, pero en el sentido negativo y con una rigidez k_3 .

La evaluación del estado de cada rótula plástica y los cálculos afines deben realizarse en cada paso de tiempo. En la presente metodología se propone implementarla en una función, cuyo proceso sigue el diagrama de flujo expuesto en la ilustración 18, se complementa con la gráfica expuesta en la ilustración 17, y se describe a continuación.

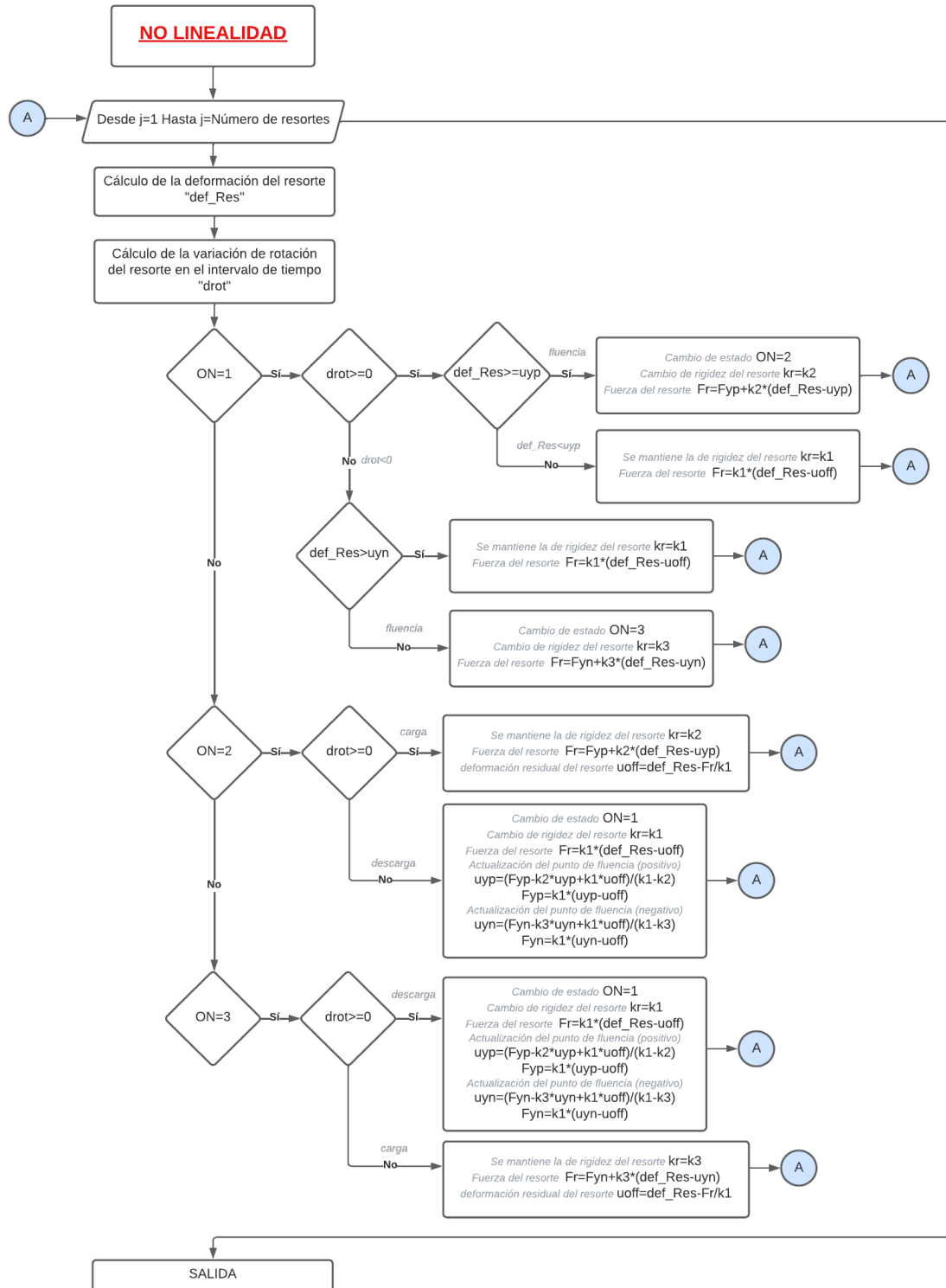


Ilustración 18: Diagrama de flujo para la función no linealidad.

Una vez obtenido el desplazamiento de cada grado de libertad, se calcula la deformación de cada resorte denominada “def_Res”, al restar las rotaciones en su nodo inicial de su nodo final, este deberá ser comparado con la deformación de fluencia. Por otro lado, la variación de rotación del resorte “drot” indica el sentido en el cual se avanza en la ilustración 17. Los valores de la rigidez del resorte en cada estado se inicializan de acuerdo a como están definidos en la matriz de conectividad de resortes. Expresado en código de Matlab se tiene:

Bloque de código 14: Función no linealidad, 1 de 3.

```
rot_Res=L_Res(:, :, j)*u(:, i+1);
def_Res(j,1)=rot_Res(1,1)-rot_Res(2,1);

drot_Res=L_Res(:, :, j)*du(:, i);
drot=drot_Res(1,1)-drot_Res(2,1);

k1=CON_res(j,4);
k2=CON_res(j,end);
k3=k2;
```

En un inicio del análisis se partirá desde el origen y la rótula variara su deformación de manera elástica, es decir, con un valor de ON=1. Si es que drot es mayor (o igual) a cero lo hará en el sentido positivo, caso contrario lo hará en el sentido negativo.

En cada paso de tiempo se evalúa si la deformación del resorte alcanzó la deformación de fluencia, de esta forma si $\text{def_Res} \geq \text{uyp}$ o $\text{def_Res} \leq \text{uyn}$ implica un cambio de estado (ON=2 u ON=3), por consiguiente, debe actualizarse la rigidez del resorte para el siguiente paso de tiempo ($k_r=k_2$ o $k_r=k_3$). Para obtener el valor de la fuerza actual (F_r) se toma ventaja de la gráfica constitutiva y se obtiene la ecuación de la recta en fluencia, obteniendo las siguientes relaciones:

$$F_r = F_{yp} + k_2 \cdot (\text{def_Res} - \text{uyp}) \quad (36)$$

$$F_r = F_{yn} + k_3 \cdot (\text{def_Res} - \text{uyn}) \quad (37)$$

Si no se alcanza el punto de fluencia, no existe un cambio de estado (ON=1), se mantiene la misma rigidez del resorte ($k_r=k_1$) y para el cálculo de la fuerza se utiliza la ecuación de la recta proveniente de la rótula en su zona elástica:

$$F_r = k_1 \cdot \text{def_Res} \quad (38)$$

En este punto es necesario mencionar que deberá considerarse la deformación residual (u_{off}) experimentada por la rótula cuando se presente un estado elástico (ON=1) después de haberse sometido a un estado plástico. Esta situación será abordada más adelante, no obstante, surge la necesidad de generalizar la ecuación (38) en función de la mencionada deformación residual, que en un inicio recibirá un valor de cero, por lo que se expresa mediante la siguiente relación:

$$F_r = k_1 \cdot (\text{def_Res} - u_{off}) \quad (39)$$

El proceso explicado anteriormente se refleja en lenguaje de programación de Matlab como se muestra a continuación:

Bloque de código 15: Función no linealidad, 2 de 3.

```
if ON(j,1)==1
    if drot>=0
        if def_Res(j,1)>=uyp(j,1)
            ON(j,1)=2;
            kr(j,1)=k2;
            Fr(j,1)=Fyp(j,1)+k2*(def_Res(j,1)-uyp(j,1));

            elseif def_Res(j,1)< uyp(j,1)
                Fr(j,1)=k1*(def_Res(j,1)-uoff(j,1));
                kr(j,1)=k1;
            end
        elseif drot<0
            if def_Res(j,1)>uyn(j,1)
                Fr(j,1)=k1*(def_Res(j,1)-uoff(j,1));
                kr(j,1)=k1;
            elseif def_Res(j,1)<=uyn(j,1)
                ON(j,1)=3;
                kr(j,1)=k3;
                Fr(j,1)=Fyn(j,1)+k3*(def_Res(j,1)-uyn(j,1));
            end
        end
    end
end
```

Con la rótula actuando en estado plástico, es decir, ON=2 u ON=3, la variación de la rotación indicará si el resorte experimenta un proceso de carga o descarga, entendiéndose como carga un aumento en la deformación del resorte, por ende, un aumento en la fuerza que experimenta, debido a que el sentido de drot se mantiene respecto al paso de tiempo anterior. Al contrario, si drot cambia su sentido, se entiende a este proceso como descarga e implicará un cambio de estado. Ante una descarga, el elemento actuará de manera elástica nuevamente, sin embargo, el precedente estado plástico supone una deformación residual e irreversible en el elemento, por tal motivo, es necesario calcular durante la carga la deformación residual correspondiente, que para facilidad ha sido denominada como “uoff”. A partir de la recta resultante de la descarga se obtiene la ecuación:

$$uoff = def_Res - \frac{Fr}{k1} \quad (40)$$

En síntesis, durante ON=2 u ON=3 y en proceso de carga (drot>0 y drot<0 respectivamente), se mantiene la rigidez kr=k2 o k3, se calcula la fuerza con (36) y (37) según corresponda y se determina la deformación residual para ese paso con (40).

Posteriormente, en una descarga se deberá cambiar de estado (ON=1), cambiar la rigidez del resorte (kr=k1) y calcular la fuerza según (39). Debido al endurecimiento presentado en la zona plástica es imprescindible recalcular los puntos de fluencia tanto positivo como negativo, para esto, se busca la intersección entre las rectas de fluencia en carga (36) y (37) y la ecuación (40), siendo def_Res la variable de deformación u y Fr la variable de fuerza F, se tiene:

$$F = F_{yp} + k_2 \cdot (u - u_{yp}) ; \quad u_{off} = u - \frac{F}{k_1} \quad (41)$$

$$u_{yp}' = u = \frac{F_{yp} - k_2 \cdot u_{yp} + k_1 \cdot u_{off}}{k_1 - k_2} \quad (42)$$

$$F_{yp}' = F = k_1 (u_{off} - u_{yp}') \quad (43)$$

De manera análoga, para el sentido negativo:

$$u_{yn}' = u = \frac{F_{yn} - k_3 \cdot u_{yn} + k_1 \cdot u_{off}}{k_1 - k_3} \quad (44)$$

$$F_{yn}' = F = k_1 (u_{off} - u_{yn}') \quad (45)$$

El proceso descrito se implementa en lenguaje de programación de Matlab de la siguiente forma:

Bloque de código 16: Función no linealidad, 3 de 3.

```
elseif ON(j,1)==2
    if drot>=0
        kr(j,1)=k2;
        Fr(j,1)=Fyp(j,1)+k2*(def_Res(j,1)-uyp(j,1));
        uoff(j,1)=def_Res(j,1)-Fr(j,1)/k1;
    elseif drot<0
        ON(j,1)=1;
        kr(j,1)=k1;
        Fr(j,1)=k1*(def_Res(j,1)-uoff(j,1));
        uyp(j,1)=(Fyp(j,1)-k2*uyp(j,1)+k1*uoff(j,1))/(k1-k2);
        uyn(j,1)=(Fyn(j,1)-k3*uyn(j,1)+k1*uoff(j,1))/(k1-k3);
        Fyp(j,1)=k1*(uyp(j,1)-uoff(j,1));
        Fyn(j,1)=k1*(uyn(j,1)-uoff(j,1));
    end

elseif ON(j,1)==3
    if drot>=0
        ON(j,1)=1;
        kr(j,1)=k1;
        Fr(j,1)=k1*(def_Res(j,1)-uoff(j,1));
        uyp(j,1)=(Fyp(j,1)-k2*uyp(j,1)+k1*uoff(j,1))/(k1-k2);
        uyn(j,1)=(Fyn(j,1)-k3*uyn(j,1)+k1*uoff(j,1))/(k1-k3);
        Fyp(j,1)=k1*(uyp(j,1)-uoff(j,1));
        Fyn(j,1)=k1*(uyn(j,1)-uoff(j,1));
    elseif drot<0
        kr(j,1)=k3;
        Fr(j,1)=Fyn(j,1)+k3*(def_Res(j,1)-uyn(j,1));
        uoff(j,1)=def_Res(j,1)-Fr(j,1)/k1;
    end
end
```

Todo el proceso descrito en esta sección deberá ejecutarse para cada resorte existente en el sistema en cada paso de tiempo. Como resultado de esta sección se tendrán los respectivos valores de deformación y fuerza (def_Res, Fr) utilizados para las gráficas pertinentes, valores actualizados de rigidez para actualizar la matriz de conectividad de resortes (kr), el estado en el que actúa cada resorte (ON) y valores que deberán ser recalculados y actualizados a lo largo del análisis como lo son Fyp, Fyn, uyp, uyn y uoff.

3.2. Definición del modelo en SAP2000

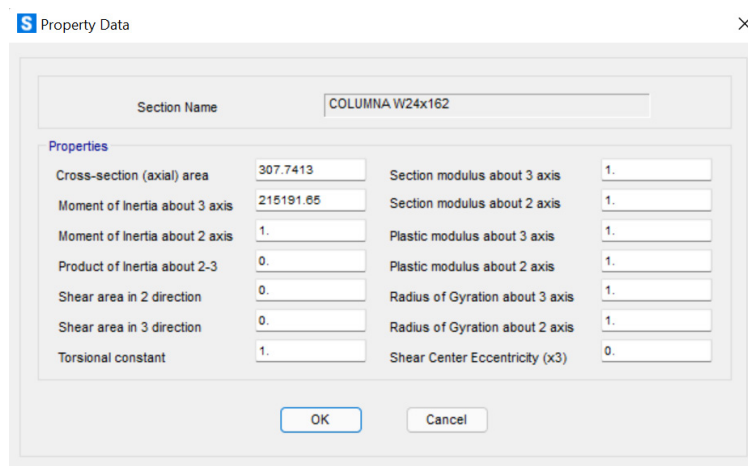
A manera de comparación de los resultados obtenidos en el modelo de Matlab, se realiza el mismo análisis en el software SAP2000, a continuación, se presenta los parámetros y elementos usados para el análisis.

3.2.1. Definición de materiales y elementos:

Para crear el modelo se usará 3 tipos de elementos:

- Vigas
- Columnas
- Resortes rotacionales

Se define las propiedades de los 2 primeros en el menú de Define>>Sections properties>>Frame sections. Aquí se define dos secciones generales de acero, y se modifica su área e inercia respecto al eje 3:



Property Data			
Section Name		COLUMNNA W24x162	
Properties			
Cross-section (axial) area	307.7413	Section modulus about 3 axis	1.
Moment of Inertia about 3 axis	215191.65	Section modulus about 2 axis	1.
Moment of Inertia about 2 axis	1.	Plastic modulus about 3 axis	1.
Product of Inertia about 2-3	0.	Plastic modulus about 2 axis	1.
Shear area in 2 direction	0.	Radius of Gyration about 3 axis	1.
Shear area in 3 direction	0.	Radius of Gyration about 2 axis	1.
Torsional constant	1.	Shear Center Eccentricity (x3)	0.

Ilustración 19: Propiedades de la sección SAP2000.

También se debe definir las propiedades del material, en específico para este análisis es importante el módulo de elasticidad, y el peso por volumen, debido a que toda la masa se concentra en un nodo y se desprecia el peso propio de los elementos, esto se define en el menú Define>>Materials:

Ilustración 20: Propiedades de los materiales SAP2000.

A estos elementos no se agregan las propiedades no lineales.

Para definir los resortes se utiliza un elemento “Link” de tipo multilinear plastic, estas propiedades se definen en el menú Define>>Sections properties>>Link/support properties, aquí se le da propiedades únicamente a la rotación, es decir en R3, a las demás propiedades se las deja igual a la siguiente ilustración:

Ilustración 21: Elementos tipo Link en SAP2000.

Dentro de las propiedades en R3 se definen las características no lineales del elemento, el modelo de histéresis se define como kinematico, y en la gráfica de esfuerzo deformación se ingresan los puntos especificados en la ilustración 16.

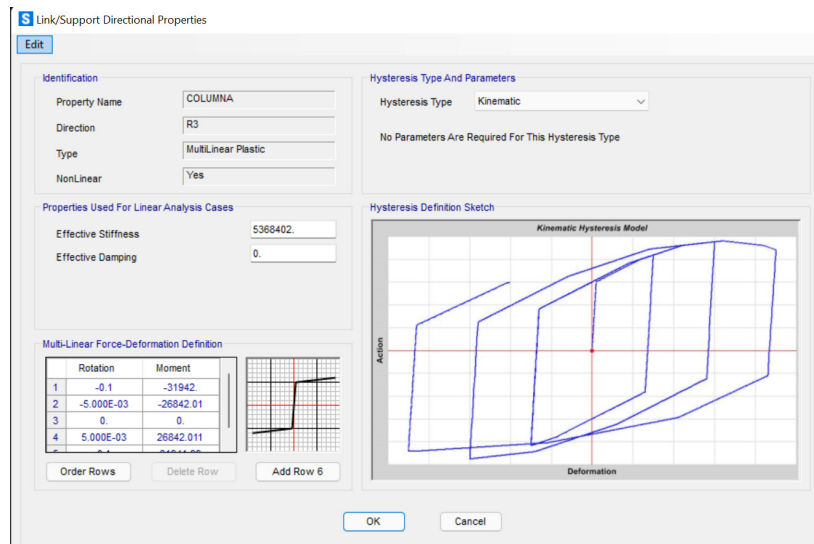


Ilustración 22: Propiedades no lineales de los resortes en SAP2000.

3.2.2. Definición de la geometría:

Se añade cada nodo de la estructura mediante el menú Draw>>Draw Special Joint al ingresar las coordenadas de cada punto. Con el fin de simular elementos de longitud cero se debe colocar nodos lo más cercanos posible, para esto se modifica la tolerancia de unión automática en el menú Options>>Dimensions/Tolerances Preferences y en el recuadro correspondiente a “Auto Merge Tolerance” deberá digitarse un valor cercano a cero, en este caso se utilizó 0.0001.

En el lugar donde corresponda un resorte se dibuja un nodo muy próximo a la ubicación del mismo, a una distancia mayor a la tolerancia de unión automática, como se puede ver en la ilustración 23. La distancia entre el nodo 2 y 5 es 0.001 en el eje x, y la distancia entre el nodo 2 y 17 o 6 es 0.001 en el eje y. Entre estos nodos se dibuja un resorte.

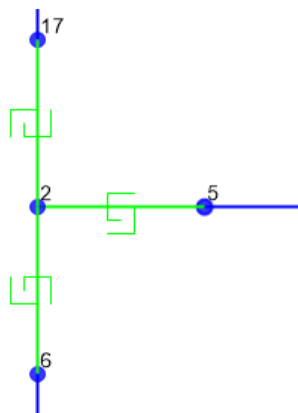


Ilustración 23: Ejemplo de colocación nodos/resortes en SAP 2000.

Para dibujar los elementos como vigas y columnas se usa el menú Draw>>Draw Frame/Cable/Tendon, en el cuadro emergente de propiedades del objeto, se escoge la sección a dibujar y posterior se une los nodos en los que se ubica el elemento. De manera análoga para los resortes, Draw>>Draw 2 Joint Link, en el cuadro emergente se selecciona la propiedad del resorte y se procede a unir los nodos en donde se ubica el elemento.

Las condiciones de apoyo son asignadas en los nodos que correspondan mediante el menú Assign>>Joint>>Restraints, en el cuadro emergente deberá seleccionarse el tipo de restricción asociado al tipo de apoyo.

3.2.3. Asignación de masa al sistema:

La masa de cada piso es concentrada en un nodo específico al cual debe ser asignado el valor de la masa, en el menú Assign>>Joint>>Masses, se cambian las opciones a las mostradas en la ilustración 24 ingresando el valor de la masa en el sentido que corresponda.

Ilustración 24: Asignación de masa en SAP2000.

En el análisis es necesario definir la fuente de masa dentro del menú Define>>Mass Source. Es posible añadir una nueva fuente o de manera más sencilla modificar la predeterminada ya existente. Dentro del menú emergente se marca la opción correspondiente a masa propia de los elementos y masas adicionales, tal como en la ilustración 25.

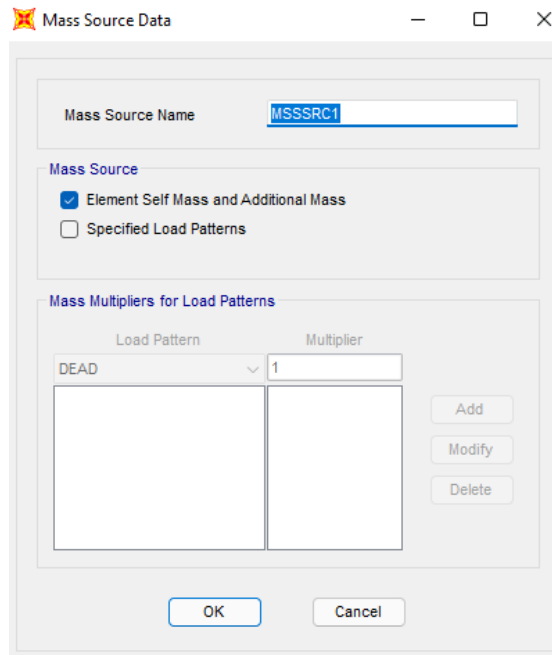


Ilustración 25: Fuente de masa en SAP2000.

3.2.4. Definición del análisis:

Primero se debe definir la función tiempo – historia del sismo, en este caso se define a partir de un archivo .AT2, esto se realiza desde el menú Define >> Functions >> Time History:

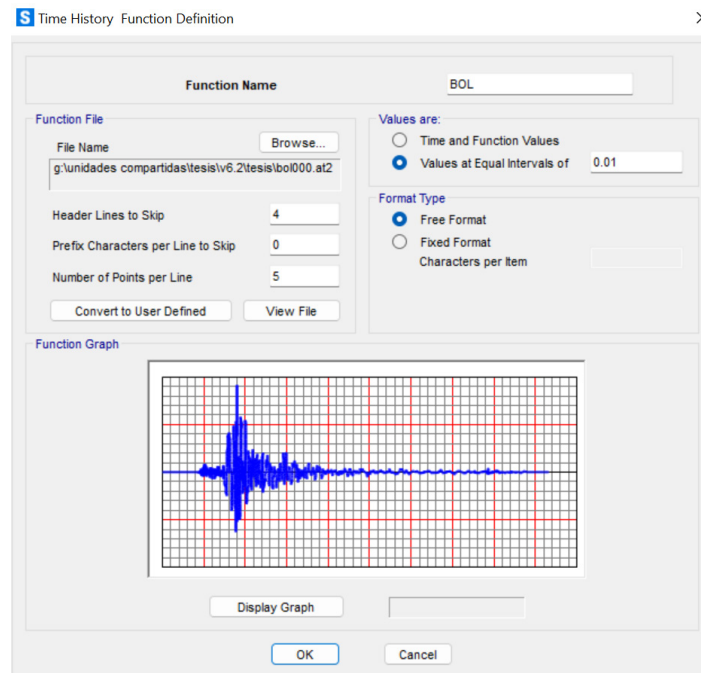


Ilustración 26: Función tiempo-historia en SAP2000.

A partir de esta función se define un caso de carga en el menú Define >> Load cases, de tipo tiempo – historia, para el análisis se especifican las siguientes características:

- Condiciones iniciales: cero
- Tipo de análisis: No lineal
- Tipo de solución: Integración directa
- No linealidad geométrica: Ninguna
- Tipo de carga: Aceleración en U1 (a partir de la función antes definida)
- Factor de escala: Gravedad (980.665 cm/s²)
- Numero de time steps: Número de puntos del sismo ingresado
- Tamaño del Time steps: dt del sismo ingresado
- Fuente de masa: Definida en la sección 3.2.3
- Amortiguamiento: especificación directa, en esta se especifican las constantes a_0 y a_1 calculadas para el modelo, mediante la ecuación (15).

Ilustración 27: Amortiguamiento del sistema en SAP2000.

- Integrador: Newmark con $\Gamma = 0.5$ y $\beta = 0.25$

Estas opciones dentro del programa quedarían de la siguiente manera:

S Load Case Data - Nonlinear Direct Integration History X

Load Case Name

BOL000 Set Def Name

Notes

Modify/Show...

Initial Conditions

☒ Zero Initial Conditions - Start from Unstressed State

☐ Continue from State at End of Nonlinear Case ...

Important Note: Loads from this previous case are included in the current case

Modal Load Case

Use Modes from Case MODAL ...

Loads Applied

Load Type	Load Name	Function	Scale Factor
Accel	U1	BOL	980.665
Accel	U1	BOL	980.665

Add Modify Delete

☐ Show Advanced Load Parameters

Time Step Data

Number of Output Time Steps 5590

Output Time Step Size 0.01

Other Parameters

Damping None Modify/Show...

Time Integration Newmark Modify/Show...

Nonlinear Parameters User Defined Modify/Show...

Load Case Type

Time History Design...

Analysis Type

☐ Linear

☒ Nonlinear

Solution Type

☐ Modal

☒ Direct Integration

Geometric Nonlinearity Parameters

☒ None

☐ P-Delta

☐ P-Delta plus Large Displacements

History Type

☒ Transient ☐ Consider Collapse

☐ Periodic

Mass Source

MSSSRC1 ...

OK

Cancel

Ilustración 28: Análisis tiempo - Historia en SAP2000.

Finalmente, el modelo estará listo para ser evaluado.

3.3. Modelos a evaluar

Para evaluar los resultados se plantean dos modelos distintos, cuyos esquemas pueden observarse en ilustraciones 29 y 30, son estructuras en dos dimensiones donde cada nodo tiene tres grados de libertad, traslación en el eje x, traslación en el eje y, y rotación. Se han tomado ciertas consideraciones con el fin de facilitar el cálculo y el análisis. Los modelos no consideran la deformación por corte y se elimina la deformación axial, se asume que no existe fallas por corte o fallas frágiles, asegurando la formación de rótulas plásticas ante la fluencia. Para los cálculos, el valor de la gravedad (g) es considerado como 980.665 cm/s², y se establece un valor de 0.05 para la razón de amortiguamiento ξ (valor frecuentemente utilizado en los códigos).

Los resortes se ubican en los lugares donde se esperan rótulas plásticas, esto es, al inicio y final de cada viga y columna, a pesar de ser elementos de dimensión nula, se muestran de cierto tamaño con fines ilustrativos, sin embargo, sus nodos de inicio y fin tienen las mismas coordenadas. El momento plástico (Myp o Myn) viene dado por la multiplicación del esfuerzo de fluencia por el módulo de sección plástico de la viga o columna, según donde se ubique el resorte.

$$M_y = F_y \cdot S_x \quad (46)$$

La deformación de fluencia (uyp o uyn) se establece como 0.005, valor característico para el acero, con lo cual la rigidez rotacional de cada resorte se obtiene al dividir el momento plástico para la rotación de fluencia. La rigidez por endurecimiento es considerada como el 1% de la rigidez rotacional inicial.

Las vigas utilizadas en los modelos son de acero ASTM572 Gr 50 con un módulo de elasticidad de 2100 ton/cm² y esfuerzo de fluencia 3.5 ton/cm², su sección es W30x132 y las columnas del mismo material con una sección W24x162. Sus propiedades se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1: Propiedades de las secciones.

Propiedades de las secciones		
Sección	W24x162	W30x132
Área [cm ²]	307.74	250.97
Inercia [cm ⁴]	215191.65	240165.53
Módulo de sección plástico [cm ³]	7669.146	7161.147
Momento plástico [ton*cm]	26842.011	25064.0145
Rigidez rotacional [ton*cm/rad]	5368402.2	5012802.9

3.3.1. Modelo 1

El primer modelo consiste en un pórtico simple, constituido por 10 nodos cuyas coordenadas vienen dadas por las dimensiones mostradas en la ilustración 29. Los nodos 1 y 10 establecen una condición de apoyo de empotramiento, por lo cual presentan restricción de movimiento en el eje x, eje y, y su rotación. El sistema cuenta de 6 resortes, una viga y dos columnas. La masa de toda la estructura se concentra en el nodo 4 con un valor de 1000 ton (peso=1000/g) y será afectado por la aceleración simplemente en el eje x (o grado de libertad lateral), convirtiéndolo en un sistema de un solo gado de libertad dinámico. En el cálculo del amortiguamiento según Rayleigh se utiliza el único modo de vibración existente.

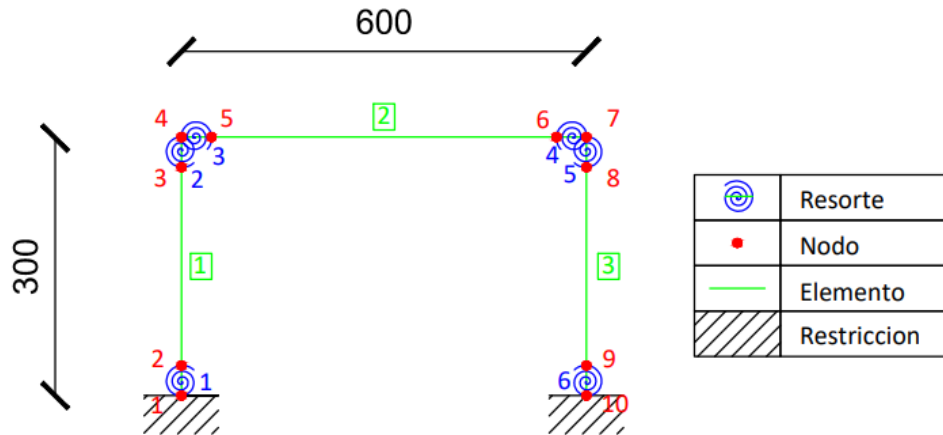


Ilustración 29: Esquema del modelo 1.

3.3.2. Modelo 2

Se plantea un segundo modelo el cual consiste en un pórtico con dos niveles o pisos, el cual está constituido por 18 nodos cuyas coordenadas vienen dadas por las dimensiones mostradas en la ilustración 30. Los nodos 1 y 10 establecen una condición de apoyo de empotramiento, por lo cual presentan restricción de movimiento en el eje x, eje y, y su rotación. El sistema cuenta de 12 resortes, dos vigas y cuatro columnas. La masa del primer nivel se concentra en el nodo 4 y la del segundo nivel en el nodo 13 con un valor de 1000 ton (peso=1000/g) cada una, ambos serán afectados por la aceleración simplemente en el eje x (o grado de libertad lateral), convirtiéndolo en un sistema de dos grados de libertad dinámicos. Para el cálculo del amortiguamiento según Rayleigh se toma en cuenta los dos modos de vibración existentes.

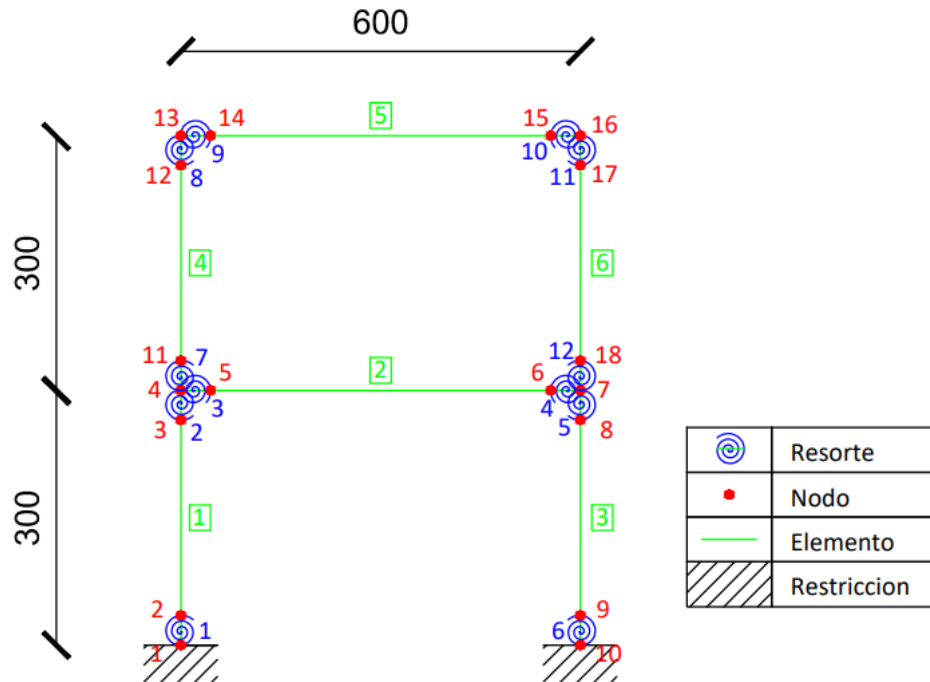


Ilustración 30: Esquema del modelo 2.

3.4. Sismos utilizados

Los modelos planteados serán sometidos a dos registros sísmicos distintos. El primero denominado “BOL000” procedente del sismo de Duzce en 11/12/99. Su gráfica se muestra en la ilustración 31 y sus datos más relevantes en la tabla 2.

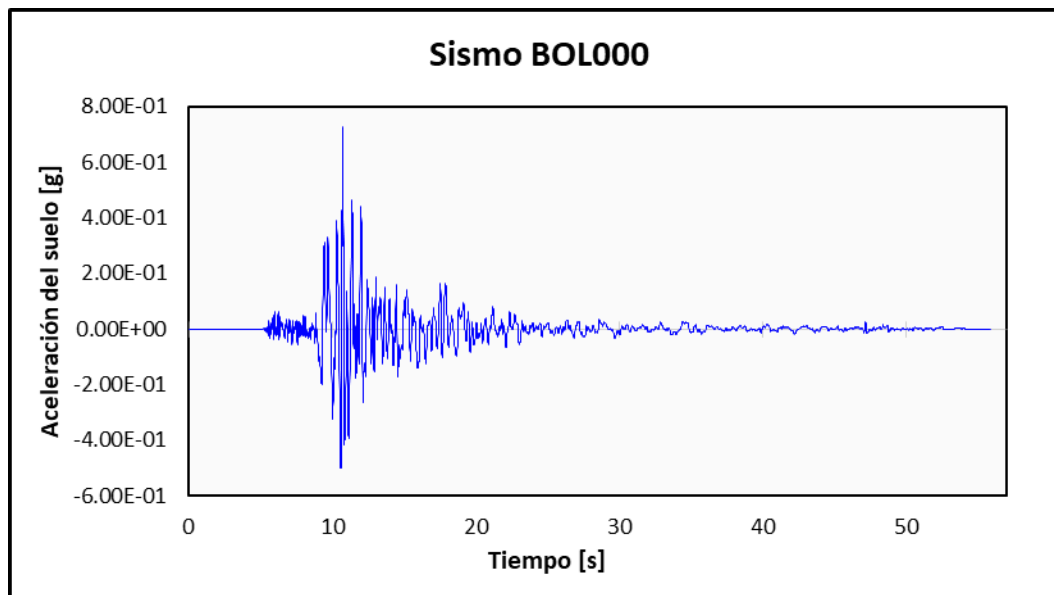


Ilustración 31: Gráfica tiempo-aceleración del sismo BOL000.

Tabla 2: Datos Sismo BOL000

Datos Sismo BOL000	
Número de Puntos	5590
Diferencial de tiempo (dt)	0.01
Valor máximo	0.728g
Valor mínimo	-0.499g
Tiempo total (s)	55.89

El segundo registro sísmico es nombrado “RIO270” y es procedente del sismo de Cape Mendocino en 04/25/92. Su gráfica se muestra en la ilustración 32 y sus datos más relevantes en la tabla 3.

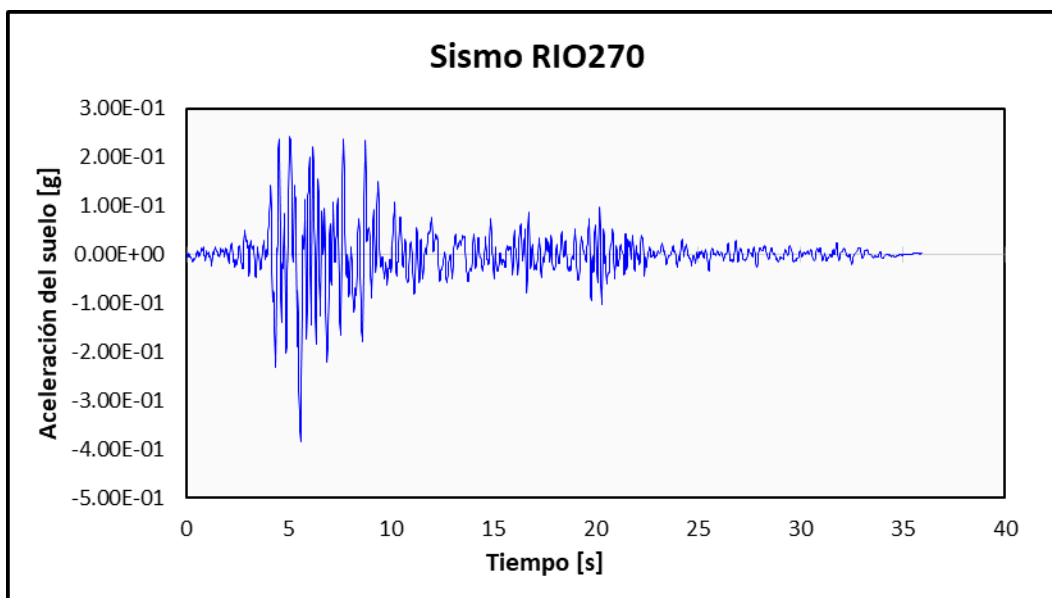


Ilustración 32: Gráfica tiempo-aceleración del sismo RIO270.

Tabla 3: Datos Sismo RIO270.

Datos Sismo RIO270	
Número de Puntos	1800
Diferencial de tiempo (dt)	0.02
Valor máximo	0.244g
Valor mínimo	-0.385g
Tiempo total (s)	35.98

Se espera que ante el sismo BOL000 al mostrar valores más altos de aceleración la estructura presente mayores deformaciones que en el sismo RIO270.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. Metodología Propuesta

La metodología propuesta se presenta a manera de diagrama de flujo en las ilustraciones 33 y 34, y se complementa con los diagramas presentados en las ilustraciones 14 y 18. Las funciones utilizadas han sido explicadas en secciones anteriores.

Se puede dividir la metodología en dos partes principales, en la primera se ingresan los datos del sistema y se realiza una serie de procesos cuya finalidad es obtener los componentes necesarios para llevar a cabo el análisis y una segunda parte en la cual se realiza el análisis dinámico no lineal en sí, ejecutando una serie de pasos para cada paso de tiempo del sismo ingresado mediante un bucle.

Siguiendo la ilustración 33, inicialmente se debe ingresar todos los datos correspondientes al sistema y ciertos valores a usarse que se enlistan a continuación. En la aplicación a lenguaje de programación desarrollada en el software Matlab, este será el único ingreso manual necesario, pues el resto de procesos son ejecutados mediante funciones.

- Número de Grados de libertad por Nodo (GDLnodo).
- Matriz de coordenadas (XY).
- Matriz de Condiciones de Apoyo (R).
- Matriz de materiales (MAT).
- Matriz de propiedades de las secciones (PROP).
- Matriz de conectividad de elementos (CON)
- Matriz de conectividad de resortes (CON_res).
- Gravedad (g).
- Matriz de Masa (M).
- Modo de vibración para Rayleigh 1 (wni) y 2 (wnj): de existir más de un modo de vibración se debe asignar a wni y wnj los números de modos de vibración de los cuales se considerará la frecuencia natural para el amortiguamiento según Rayleigh.
- Relación de amortiguamiento (zi).
- Matriz de grados de libertad iguales (equalDOF).
- Constantes de Newmark gamma y beta.
- Registro sísmico: del registro sísmico es indispensable extraer el valor del diferencial de tiempo y la aceleración del sismo.

Posteriormente, se ejecutan una serie de procesos cuyo objetivo final es obtener la matriz de rigidez del sistema considerando solo los elementos, es decir vigas y columnas, de acuerdo con los datos y condiciones ingresadas, esta permanecerá invariante durante todo el análisis.

Para el correcto funcionamiento del algoritmo deben especificarse los valores con los cuales los resortes inician el análisis (Inicialización de valores de resorte), por lo tanto, en el siguiente paso se asignan a cada resorte la rigidez inicial (k_r), la deformación de fluencia positiva y negativa (u_{yp} , u_{yn}), el Momento de fluencia positivo y negativo (F_{yp} , F_{yn}), valores que han sido ingresados previamente en la matriz de conectividad de resortes. Al comenzar del reposo los resortes no tienen una deformación residual y Momento actual igual a cero, y su estado inicial es elástico ($ON=1$).

En una segunda parte de la metodología, (ilustración 34) se implementa un bucle que abarca todos los puntos del registro sísmico y en el cual se desarrollan una serie de procesos que conforman el análisis dinámico no lineal como tal. Como primer paso dentro del ciclo se obtiene la matriz de rigidez de los resortes, en función del valor que tenga la rigidez k_r de cada uno de estos elementos, este valor se actualiza a lo largo del análisis según el estado en el que se encuentre cada rótula plástica (elástico o plástico). A continuación, se ensambla la matriz de elementos y de resortes obteniendo así la matriz de rigidez de todo el sistema.

El siguiente paso consiste en aplicar las condiciones del sistema acorde a la matriz elemental, para proceder con la partición de matrices y la condensación estática, con el objetivo de hallar la matriz de rigidez condensada, la cual es utilizada en el cálculo de desplazamientos.

Previo al primer cálculo de desplazamientos se debe calcular el amortiguamiento según Rayleigh tal como se ha explicado con anterioridad. Para este proceso es necesario el valor de la matriz de rigidez condensada, por tal motivo se realiza dentro del bucle, sin embargo, esta matriz solo se calcula una vez en todo el análisis, por lo cual con la ayuda de un condicional se restringe esta operación a ser desarrollada en el primer paso del ciclo, antes del cálculo de desplazamientos y la evaluación de rótulas plásticas. De manera similar, para poder comenzar con el método de Newmark es imprescindible tener un primer valor de aceleración (sección 2.4 ecuación (30)), para realizar estas operaciones se aprovecha el mismo condicional planteado anteriormente.

Los últimos pasos del bucle serán: realizar el cálculo de desplazamientos según el método de Newmark explicado en la sección 3.1.3 y evaluar el estado de las rótulas plásticas siguiendo las explicaciones y el método de la sección 3.1.4. Al finalizar estas acciones, el proceso se repite para el siguiente paso del análisis, con un nuevo valor de aceleración según el registro sísmico y así consecutivamente hasta que se abarque todo el sismo ingresado. Durante el desarrollo del análisis se guardan los valores de desplazamientos, fuerzas y deformaciones en cada paso para poder ser presentado en resultados.

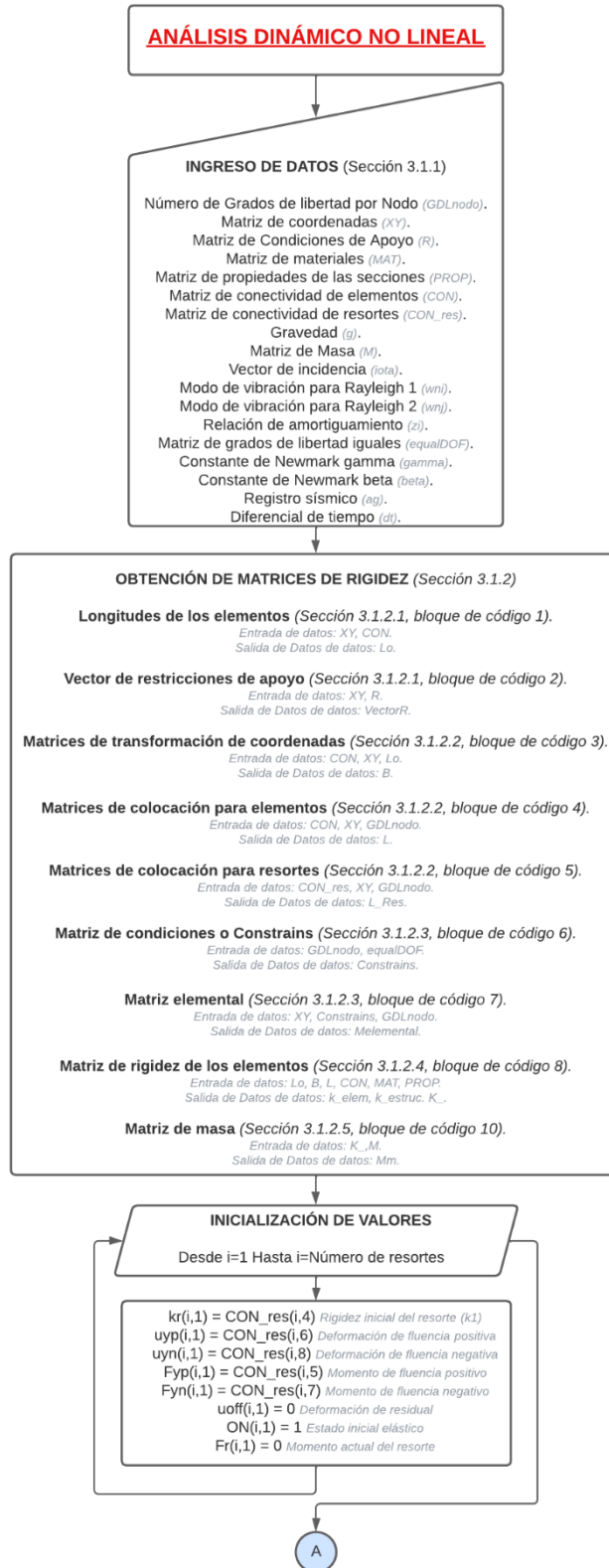


Ilustración 33: Diagrama d flujo para la metodología propuesta, 1 de 2.

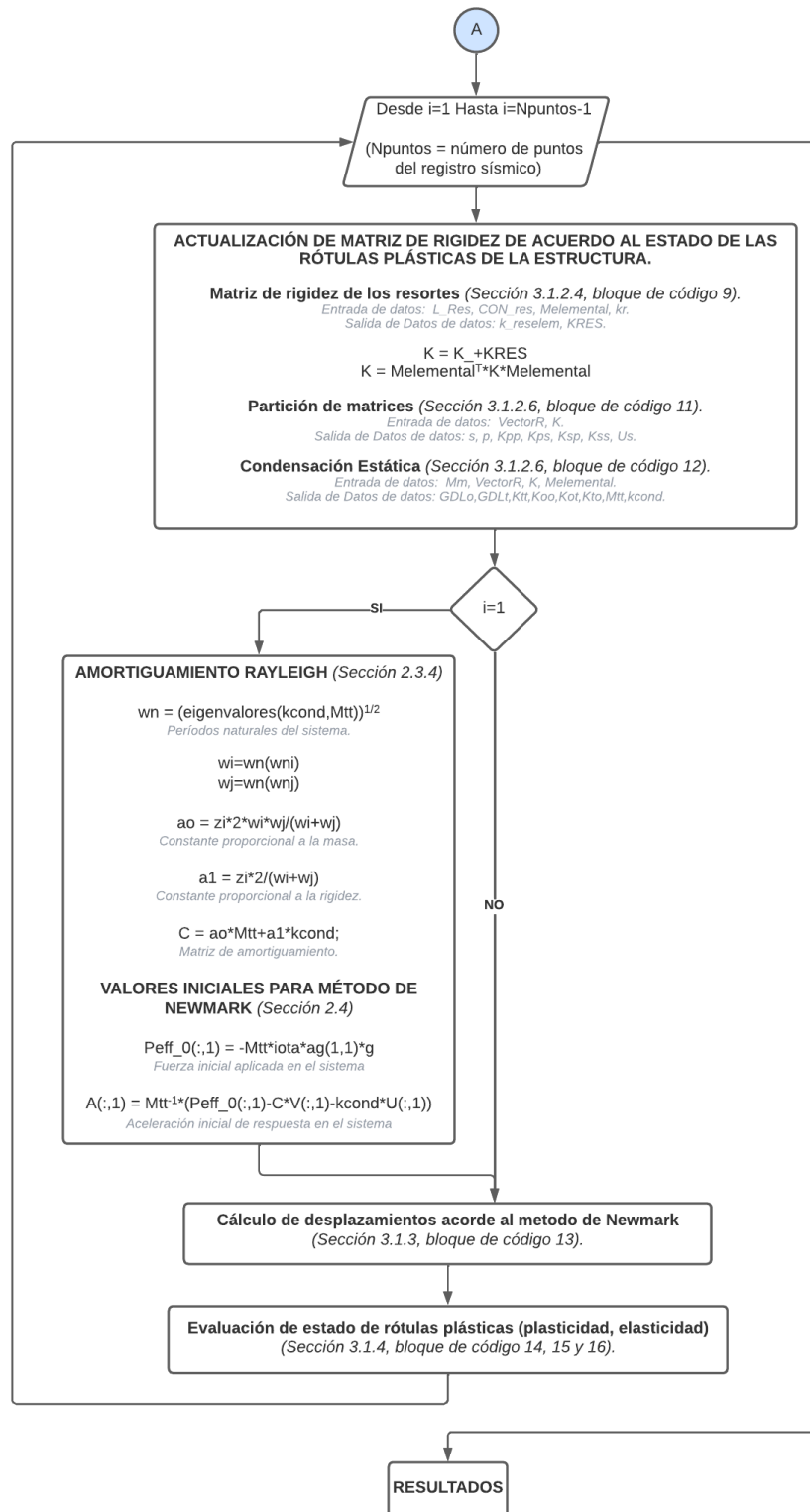


Ilustración 34: Diagrama de flujo para la metodología propuesta, 2 de 2.

Al inicio del análisis todos los resortes actuaran de manera elástica, aumentando o disminuyendo su deformación, en sentido positivo o negativo según la carga a la que se sometan en cada intervalo del tiempo. Durante este periodo el análisis es lineal, pues no se ha superado la deformación de fluencia, es decir, para la metodología planteada el vector ON se mantiene con un valor de 1 para todos sus resortes, el vector kr contiene la rigidez inicial de cada resorte $k1$, los puntos de fluencia (uyp , Fyp y uyn , Fyn) son los determinados originalmente pues aún no han sido alcanzados. Al no existir un estado de plasticidad, los resortes no presentan una deformación residual, por ende, el vector $uoff$ se mantiene con un valor de 0. En otras palabras, durante esta parte del análisis se mantienen los valores con los cuales los resortes fueron inicializados. Para el Modelo 1 planteado (ilustración 29) y sometido al sismo BOL000 (ilustración 31) esta situación se presenta hasta el paso 952, acumulando un tiempo de 9.52 segundos y se detalla a continuación en la ilustración 35.

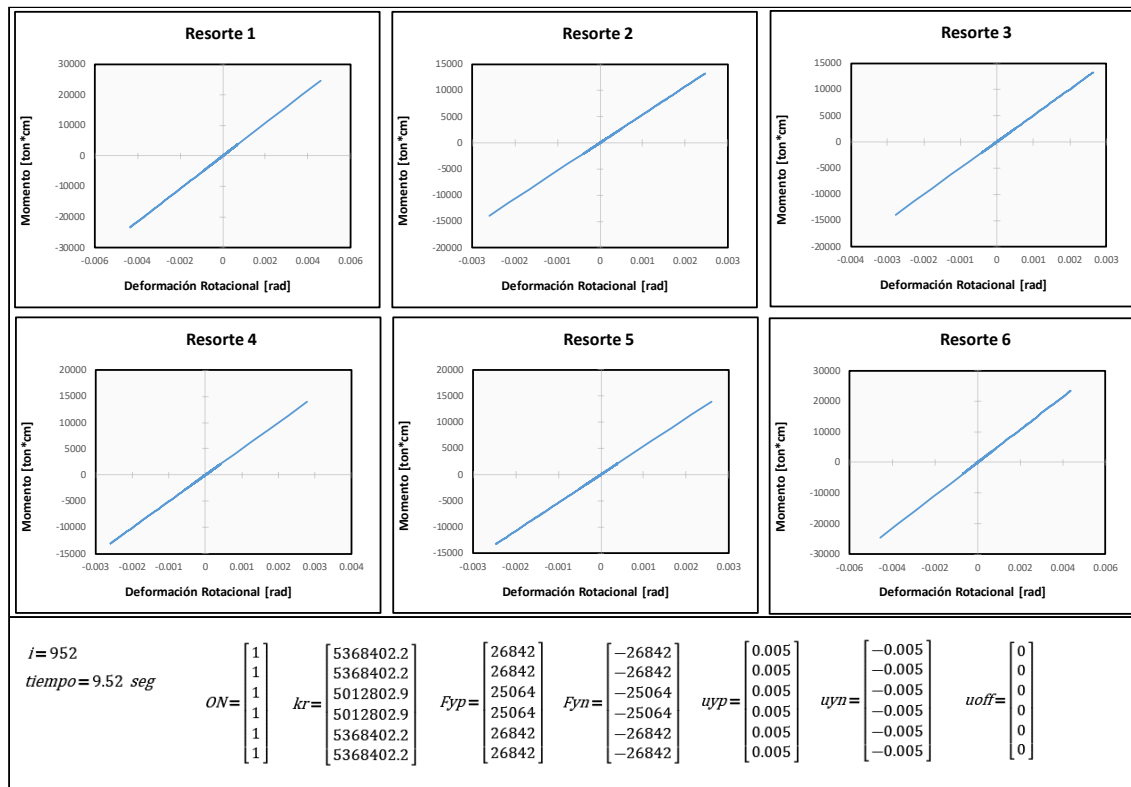


Ilustración 35: Modelo 1 sometido al sismo BOL000, paso $i=952$.

Para el final del paso 953 se ha detectado un cambio de estado en los resortes 1 y 6 correspondientes a las rótulas plásticas de la parte inferior de las columnas, la fuerza actual del resorte F_r se calcula tomando provecho de la geometría conocida de la curva constitutiva como se indicó en las ecuaciones (37) y (38). El vector ON cambia su primer valor a 2 (estado plástico en el sentido positivo) mientras que su sexto valor pasa a ser 3 (estado plástico en el sentido negativo), consecuentemente el vector kr cambia sus valores en las mismas posiciones a los correspondientes a su rigidez por endurecimiento post fluencia k_2 y k_3 . De esta forma la matriz de rigidez del sistema será actualizada para el paso siguiente, en el cual los dos resortes en cuestión actuarán en estado plástico. Lo explicado se muestra en la ilustración 36. La situación antes descrita puede reproducirse para otros resortes del sistema.

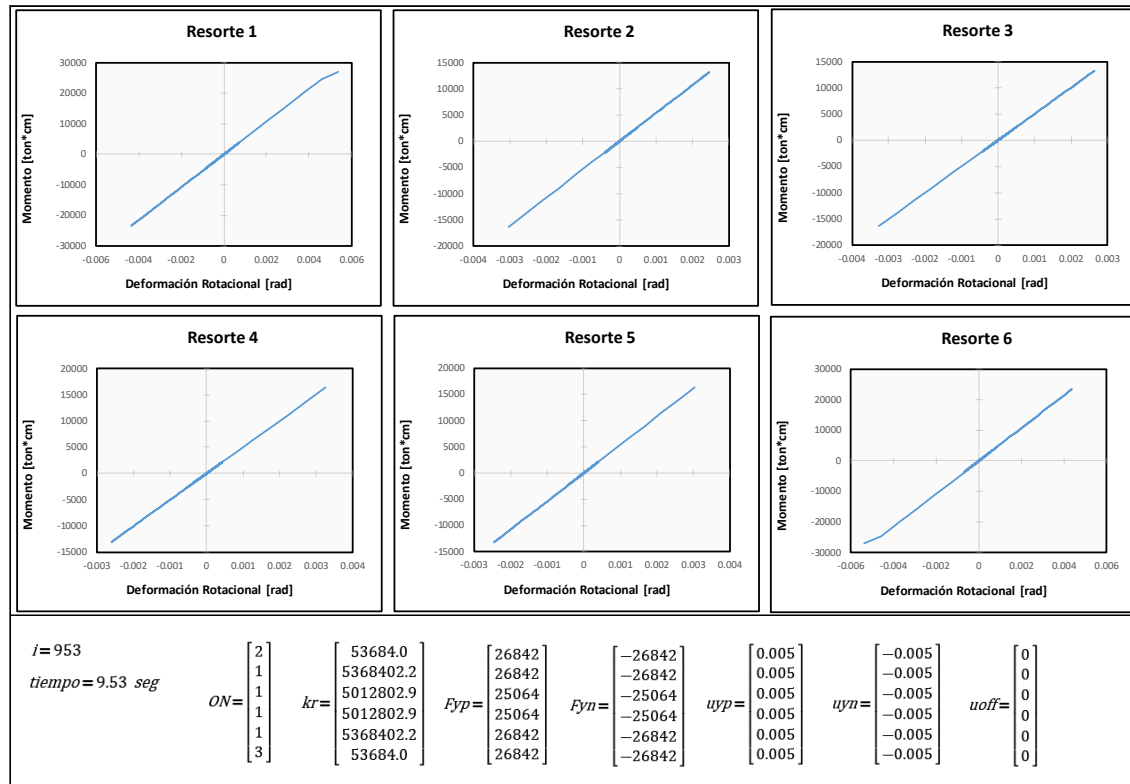


Ilustración 36: Modelo 1 sometido al sismo BOL000, paso $i=953$.

Continuando con el análisis, a manera de ejemplo se muestra el paso 960, en el cual puede notarse que los resortes 3 y 4, aquellos que representan las rótulas ubicadas en la viga, se encuentran actuando en el rango plástico. En este paso existen valores de deformación residual $uoff$ para los resortes 1, 3, 4 y 6 y sus respectivos valores de rigidez en el vector kr son los correspondientes a su estado de fluencia. Por otra parte, las condiciones de los resortes 2 y 5 (rótulas de la parte superior de las columnas) se mantienen invariantes. En la ilustración 37 se puede observar que las rótulas de las vigas llevan pocos pasos en fluencia a diferencia de aquellas ubicadas en la base de las columnas.

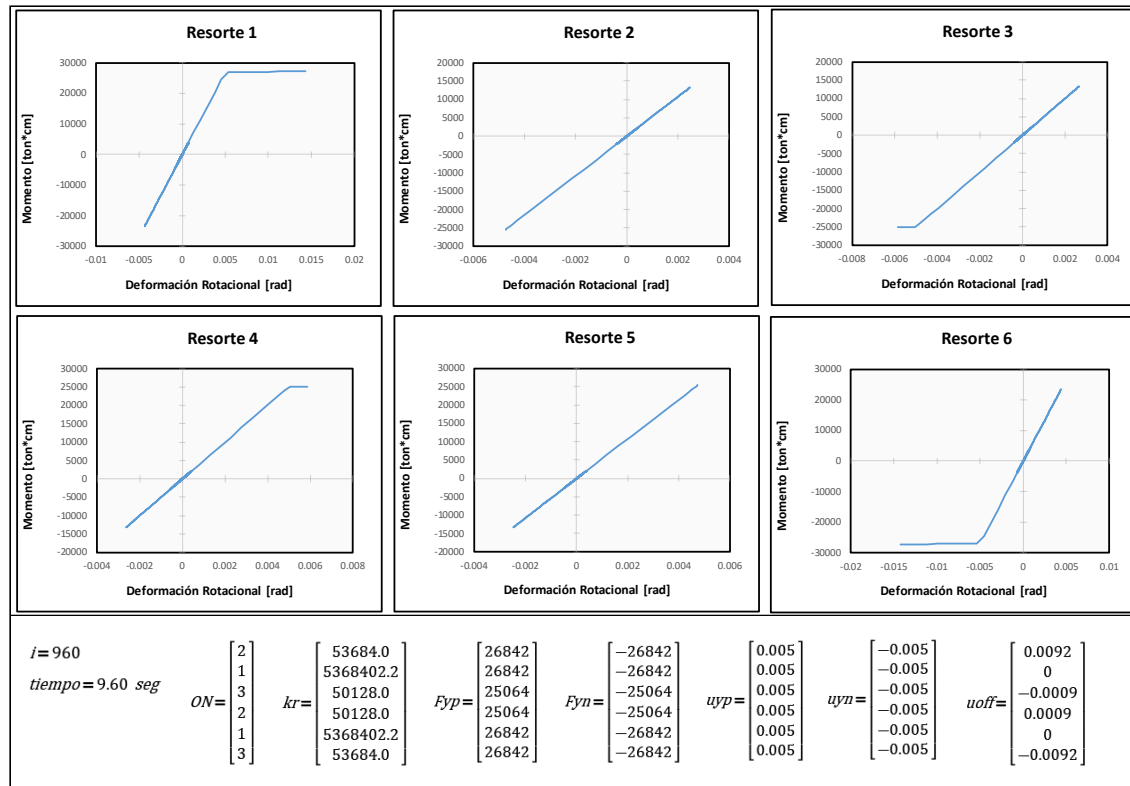


Ilustración 37: Modelo 1 sometido al sismo BOL000, paso $i=960$.

Cuando el análisis alcanza los 9.70 segundos, se detecta una descarga en los resortes que se encontraban en estado plástico, esto conlleva a que el vector ON cambie sus valores a 1, es decir trabajan nuevamente en estado elástico y el vector kr toma valores de la rigidez inicial k_1 de cada elemento. Es necesario que se calculen los nuevos puntos de fluencia como se determinó en 3.1.4 siendo estos los nuevos valores a alcanzarse, tanto en fuerza como deformación, para que se provoque un nuevo cambio de estado. Puede observarse en la ilustración 38 la diferencia de valores de uyp, fyn, uyn fyn con respecto a la ilustración anterior. A partir del paso 971 todos los resortes estarán actuando de manera elástica con su respectiva rigidez inicial k_1 . Es de interés mencionar que a pesar de que en la ilustración 38 no se refleje claramente en los gráficos el cambio de estado de los resortes, este existe y se evidencia cada vez más conforme avanzan los siguientes pasos.

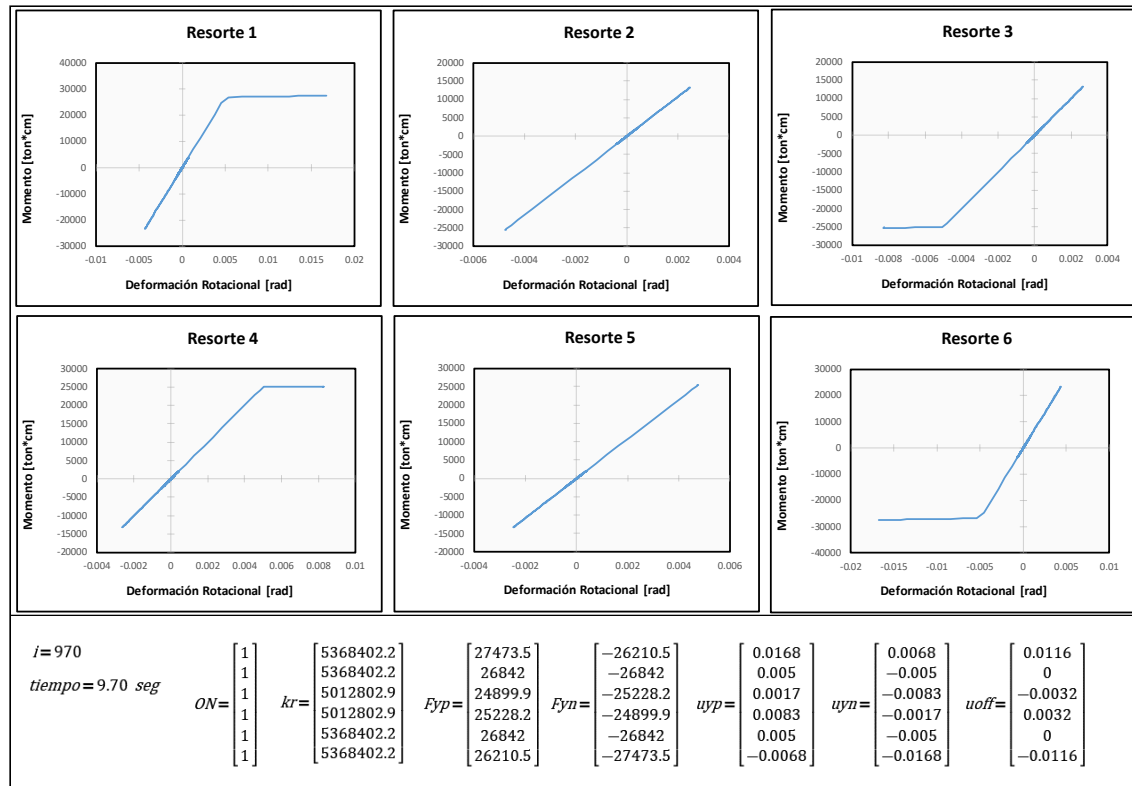


Ilustración 38: Modelo 1 sometido al sismo BOL000, paso $i=970$.

Este proceso y cambio de estados, así como todas las operaciones relacionadas, se repiten conforme se desarrolla el análisis y paso a paso van conformando la curva histerética de cada resorte hasta que se abarque todo el registro sísmico. A manera de ejemplo puede verse la ilustración 39, en la cual después de tan solo 1 segundo se han dado múltiples cambios en las rótulas plásticas.

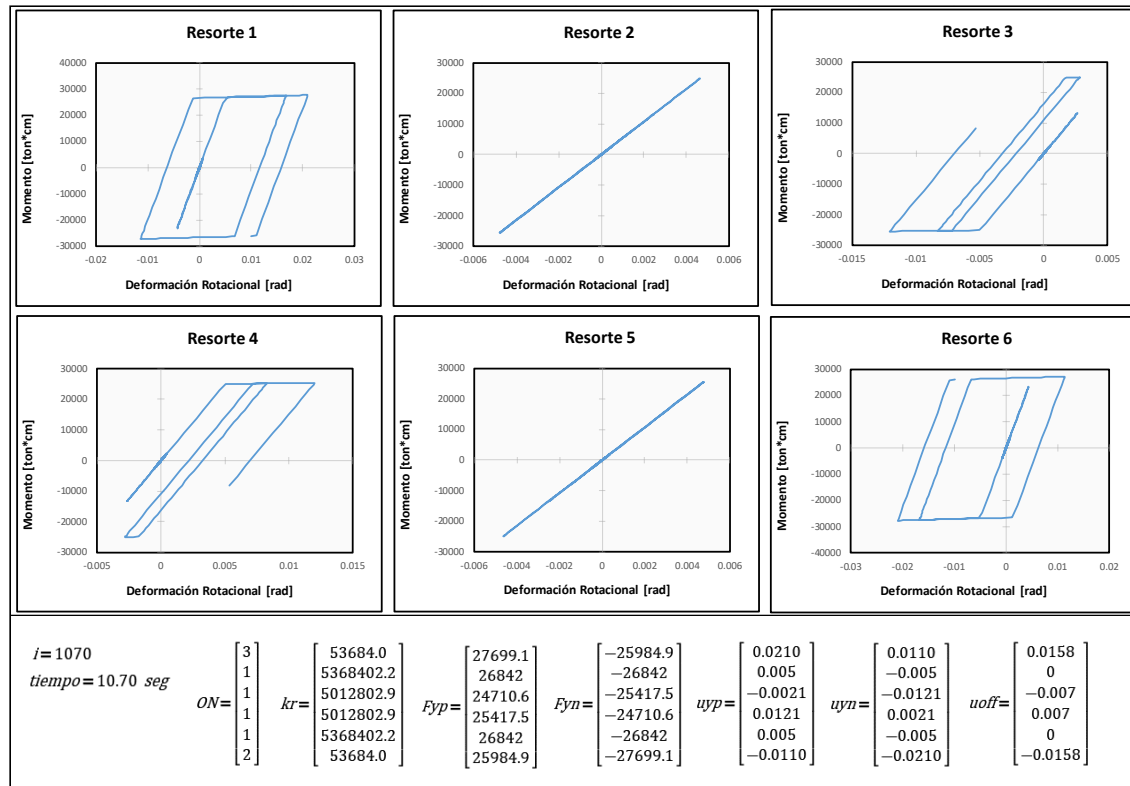


Ilustración 39: Modelo 1 sometido al sismo BOL000, paso $i=1070$.

4.1.1. Resultados Obtenidos

A continuación, se presentan los resultados obtenidos para el análisis dinámico no lineal del modelo 1 con la metodología base propuesta sometida al BOL000 y RIO 270. Las gráficas mostradas corresponden a la deformación lateral del nodo 4 en el cual se concentra la masa del sistema, representando la deformación lateral de piso (ilustraciones 40 y 42) y la gráfica momento rotación o curva histerética del resorte 1, correspondiente la base de la columna izquierda, (ilustraciones 41 y 43). Puede notarse que ante el sismo BOL000 al presentar mayores valores de aceleración, el sistema sufre mayor deformación residual y un mayor número de ciclos de fluencia, carga y descarga con respecto al sismo RIO270.

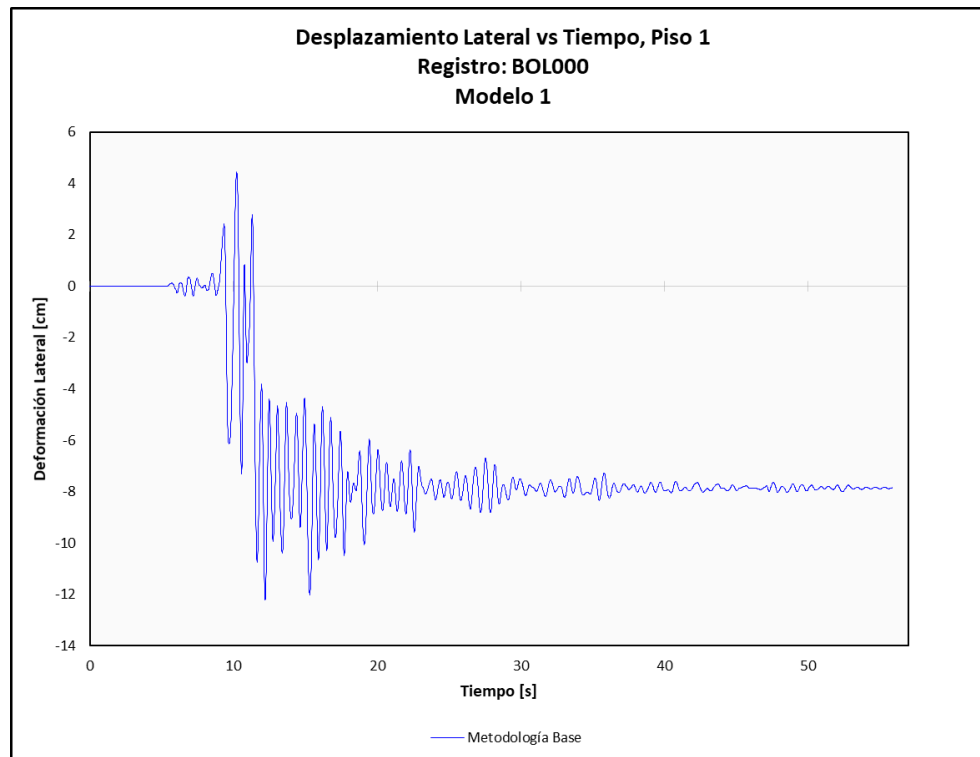


Ilustración 40: Deformación lateral vs tiempo, Modelo 1, sismo BOL000.

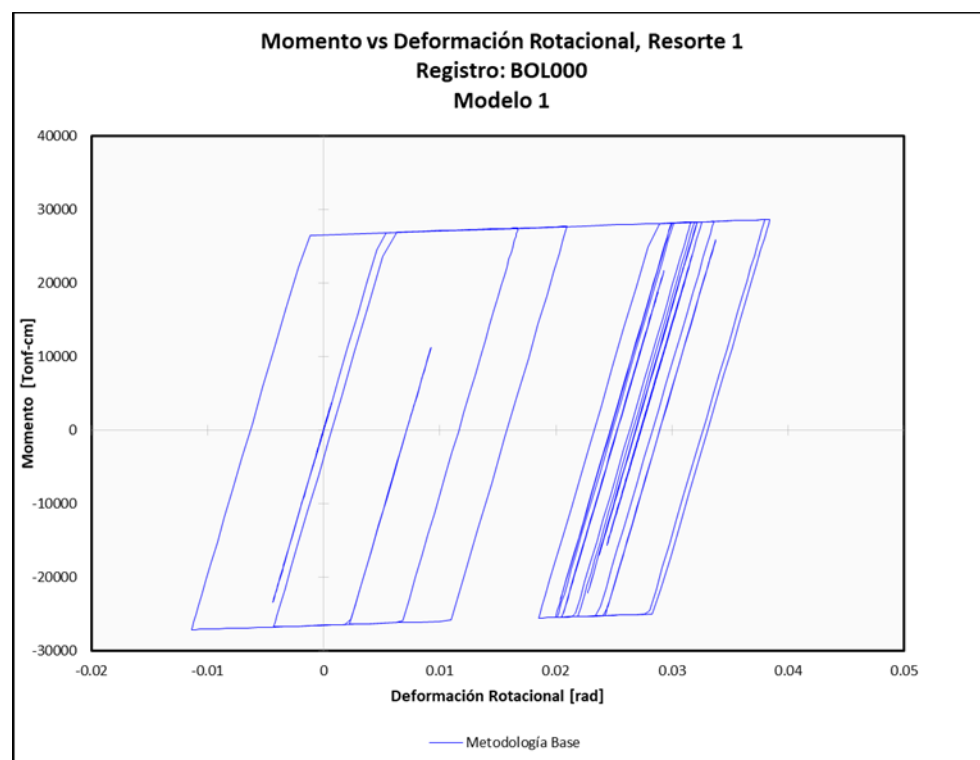


Ilustración 41: Momento vs Deformación Rotacional, Resorte 1, Modelo 1, sismo BOL000.

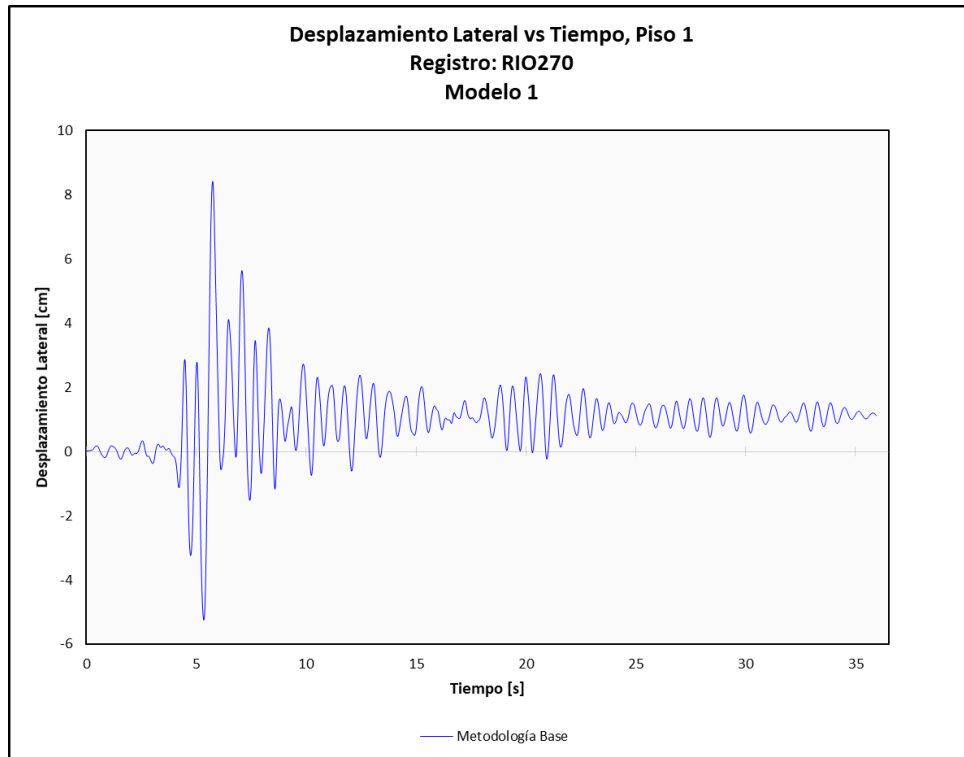


Ilustración 42: Deformación lateral vs tiempo, Modelo 1, sismo RIO270.

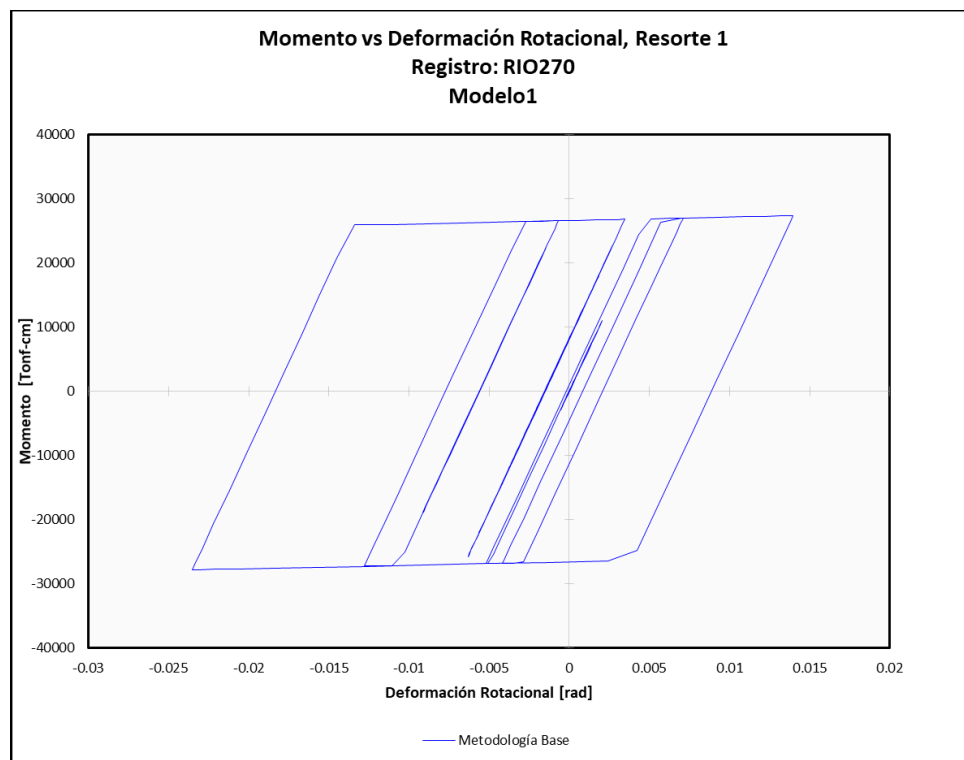


Ilustración 43: Momento vs Deformación Rotacional, Resorte 1, Modelo 1, sismo RIO270.

EL bloque de código correspondiente a la metodología base propuesta se presenta a continuación.

Bloque de código 17: Metodología base propuesta 1 de 2.

```
load(estructura);
GDLnodo=3;
Uaux=zeros(size(XY,1)*GDLnodo,1);
[sismo,dt] = LeerSismo('BOL000.AT2');
ag=sismo(:,2);
Npuntos=size(ag,1);
[Constrains] = Constrains(GDLnodo,equalDOF);
[Melemental] = MatrizElemental(XY,Constrains,GDLnodo);
[Lo,B] = longitudes_Beta(XY,CON);
[L] = MatrizdeColocacion(CON,XY,GDLnodo);
[L_Res] = MatrizdeColocacionRes(CON_res,XY,GDLnodo);
[VectorR] = vectorR(R,XY);
[k_elem,k_estruc,K_] = MatricesDeRigidez(Lo,B,L,CON,MAT,PROP);
[Mm] = Masa(K_,M);
for i=1:size(CON_res,1)
    kr(i,1)=CON_res(i,4);
    uyp(i,1)=CON_res(i,6);
    uyn(i,1)=CON_res(i,8);
    Fyp(i,1)=CON_res(i,5);
    Fyn(i,1)=CON_res(i,7);
    uoff(i,1)=0;
    ON(i,1)=1;
    Fr(i,1)=0;
end
for i=1:Npuntos-1
    [k_reselem,KRES] =
        MatricesDeRigidezResortes(L_Res,CON_res,Melemental,kr);
    K=K_+KRES;
    K=transpose(Melemental)*K*Melemental;
    [s,p,Kpp,Kps,Kss,Ksp,Us] = particion_de_matrices(VectorR,K,Uaux);
    [GDLo,GDLt,Ktt,Koo,Kot,Kto,Mtt,kcond] =
        CondensacionEstatica(Mm,VectorR,K,Melemental);
    if i==1
        wn=sqrt(eig(kcond,Mtt));
        wn=sort(wn);
        Tn=2*pi()./wn;
        wi=wn(wni);
        wj=wn(wnj);
        ao=zi*2*wi*wj/(wi+wj);
        al=zi*2/(wi+wj);
        C=ao*Mtt+al*kcond;
        U(:,1)=zeros(size(GDLt,2),1);
        V(:,1)=zeros(size(GDLt,2),1);
        Uo(:,1)=zeros(size(GDLo,2),1);
        Vo(:,1)=zeros(size(GDLo,2),1);
        Peff_0(:,1)=-Mtt*iota*ag(1,1)*g;
        A(:,1)=inv(Mtt)*(Peff_0(:,1)-C*V(:,1)-kcond*U(:,1));
    end
    [U,V,A,Uo,dU,dUo,u,du,Vo,v] = Newmark(kcond, C, gamma, beta, dt, Mtt,
        iota, ag, g, V,A, Koo, Kot, Uo, U, s,
        Constrains,i,GDLt,GDLo,dUo,u,du,dU,Vo,v);

    [Fr,kr,ON,uoff,def_Res,f_Res,Fyp,Fyn,uyp,uyn,f_graf,DefRes,Fluye,t] =
        Nolinealidad(k_reselem,u,du,L_Res,uoff,ON,i,CON_res,Fyp,Fyn,uyp,uyn,f_gr
        af,DefRes,Fluye,dt,t,V,f_Res);
end
```

4.1.2. Comparación SAP2000

Los resultados obtenidos con la metodología base propuesta son comparados con aquellos procedentes del software SAP2000 y se ven reflejados en las siguientes ilustraciones. Para las gráficas de Momento vs Rotación se toma solamente un rango de tiempo, 10.12 segundos para el sismo BOL000 y 5 segundos para el sismo RIO270, ya que la finalidad es mostrar las diferencias entre ambos análisis y la gráfica completa dificulta este objetivo.

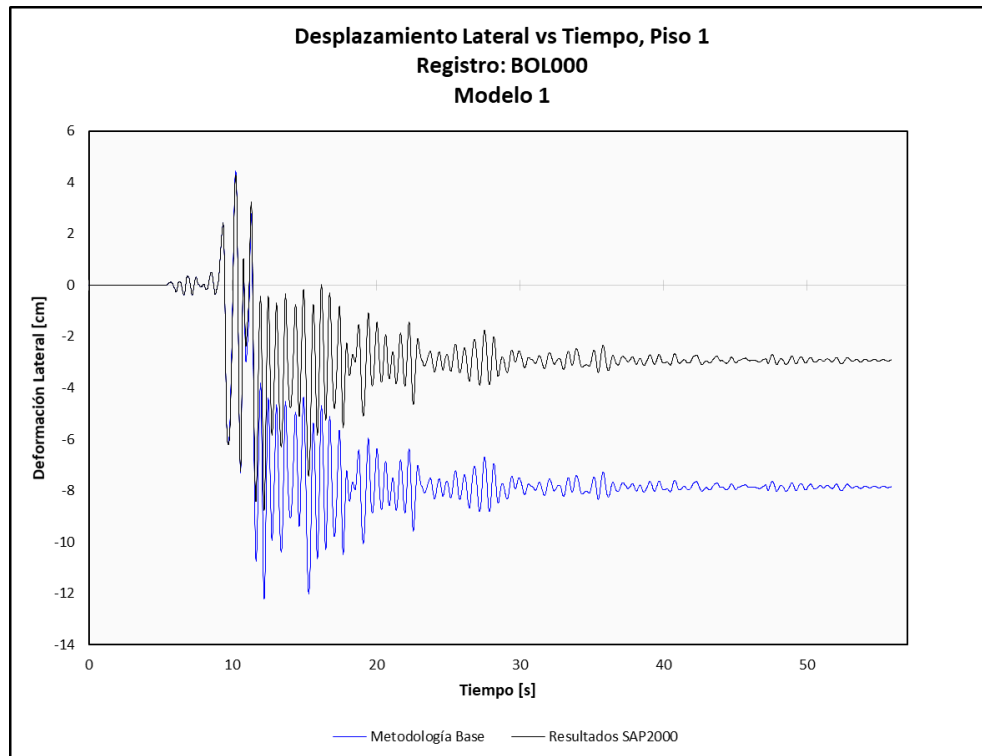


Ilustración 44: Comparación SAP 2000 vs Metodología propuesta, Deformación lateral vs tiempo, Modelo 1, sismo BOL000.

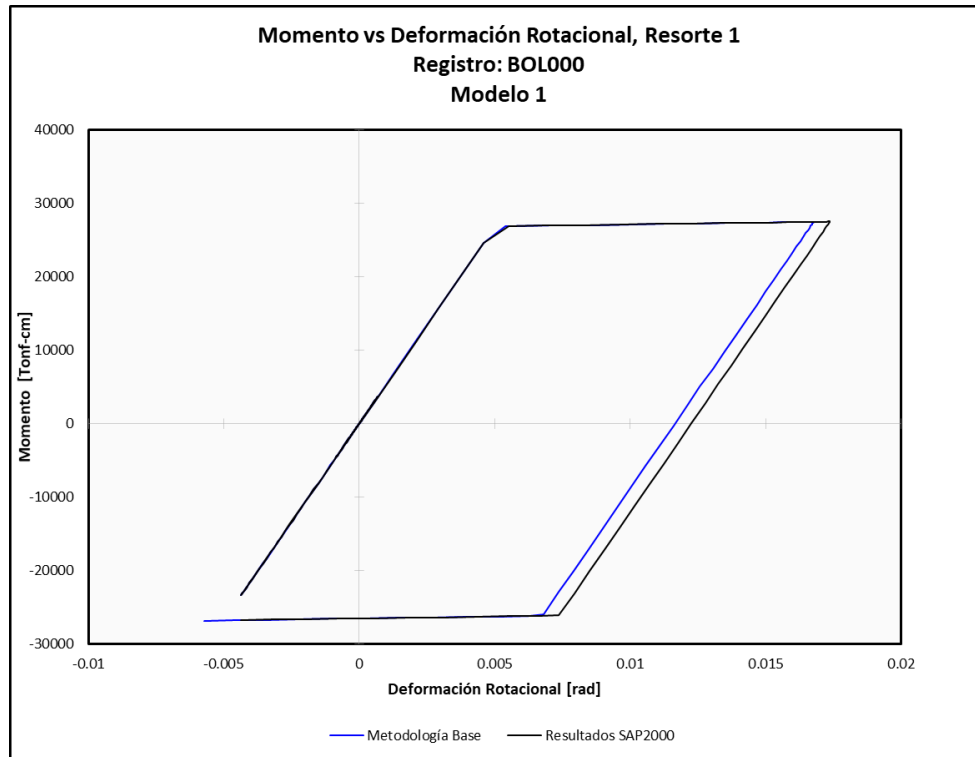


Ilustración 45: Comparación SAP2000 vs Metodología propuesta, Momento vs Deformación Rotacional, Resorte 1, Modelo 1, sismo BOL000, Hasta $t=10.12$ s.

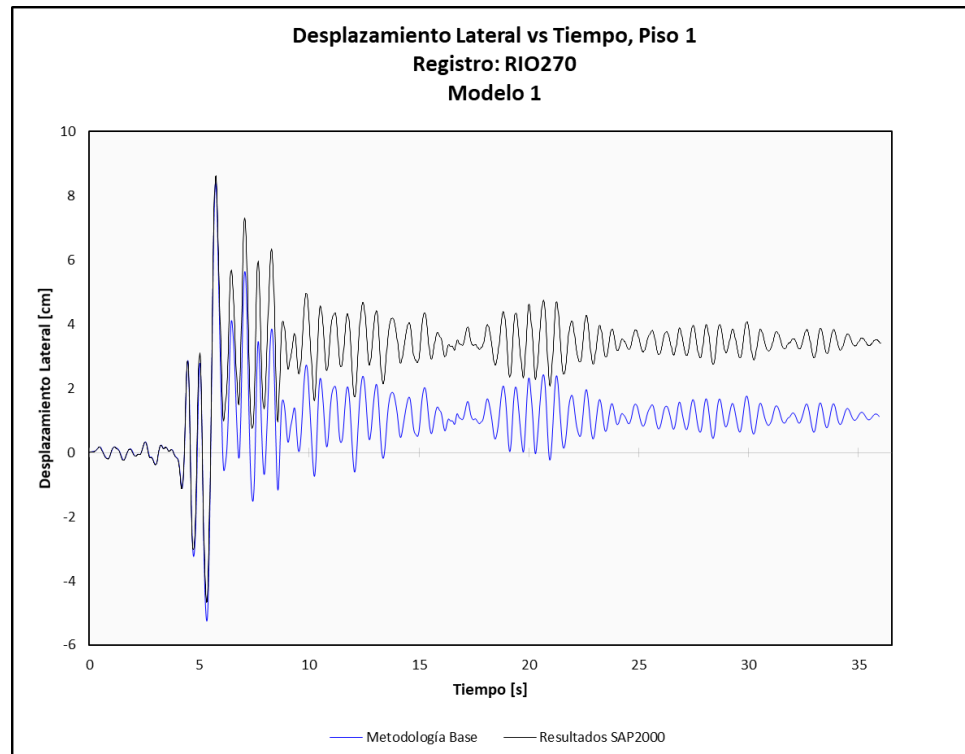


Ilustración 46: Comparación SAP 2000 vs Metodología propuesta, Deformación lateral vs tiempo, Modelo 1, sismo RIO270.

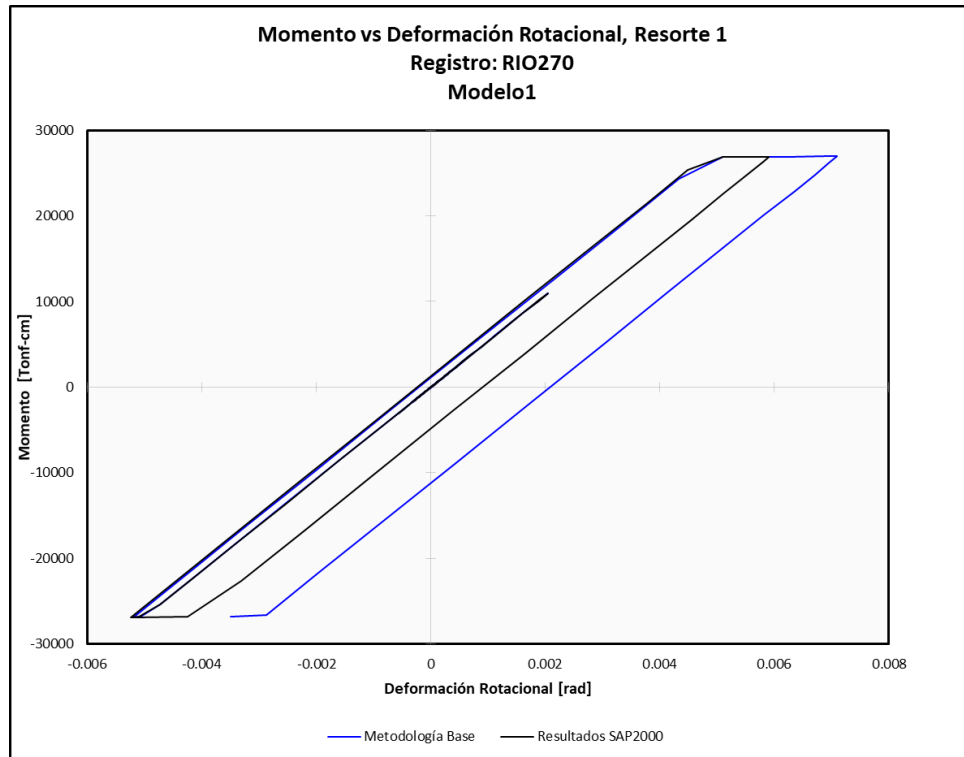


Ilustración 47: Comparación SAP2000 vs Metodología propuesta, Momento vs Deformación Rotacional, Resorte 1, Modelo 1, sismo RIO270, Hasta $t=5$ s.

Existen notables diferencias entre los resultados arrojados por la metodología propuesta y el software SAP200, que son más evidentes en el sismo BOL000 principalmente en la gráfica de deformación lateral. Sus posibles causas y soluciones propuestas son abordadas a continuación.

4.2. Variaciones a la metodología propuesta

Una de las razones para que se presente la diferencia de resultados con el software SAP2000, se encuentra en los puntos del cambio de rigidez, debido a la discretización del sismo, es poco probable que este cambio de rigidez se dé exactamente en uno de los puntos de análisis, por lo que la actualización de la matriz de rigidez no es inmediata, y puede causar diferencias en el cálculo de desplazamientos, estas diferencias se amplifican cuando los intervalos de desplazamiento son muy grandes dentro de los intervalos de tiempo. Para mitigar estas diferencias se propone dos alternativas:

- Variación A: Buscar los puntos exactos de fluencia e integrarlos en el análisis
- Variación B: Reducir el diferencial de tiempo del análisis

4.2.1. Variación A

El método consistirá en detectar dentro del análisis cuando una de las rótulas plásticas entre en estado de fluencia, en ese punto se difiere de la metodología antes presentada, ya que se repetirá esta iteración, realizando un paso intermedio dentro del diferencial de tiempo, para buscar el punto exacto de fluencia.

El primer paso, será entonces encontrar el tiempo exacto en el que se da este cambio, para esto se realiza una interpolación dentro de la rotación del nodo inicial y el nodo final del resorte respecto al tiempo, buscando el tiempo en el que la diferencia de estas dos curvas sea igual a u_y o u_{yn} , dependiendo de su posición en la curva histerética.

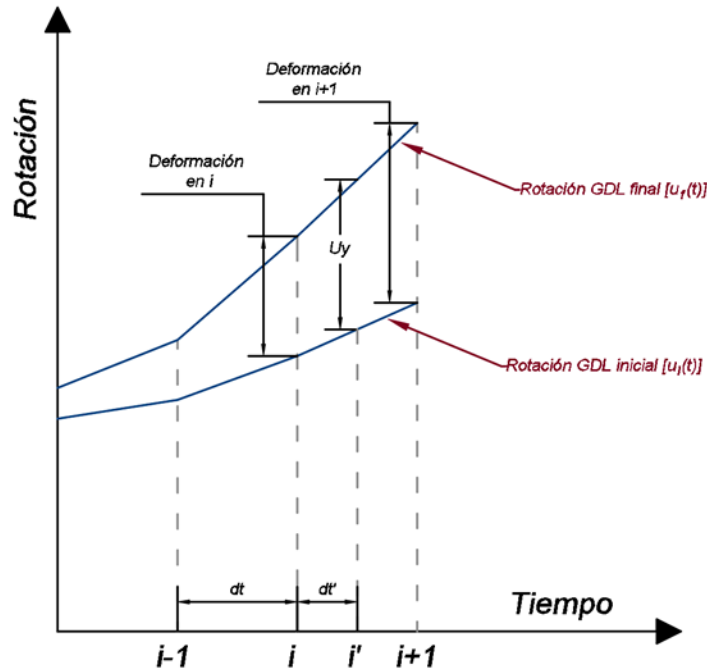


Ilustración 48: Gráfica de rotación vs tiempo de nodo inicial y final del resorte.

Partiendo de este principio encontramos la siguiente relación para encontrar este dt' :

$$u_f(i') - u_i(i') = u_y \quad (47)$$

Si planteamos los segmentos de recta entre i e $i+1$, dentro de un eje de referencia con $i = 0$, podemos expresar a $u(t)$, como una ecuación de recta, tal como se muestra en la ilustración 49.

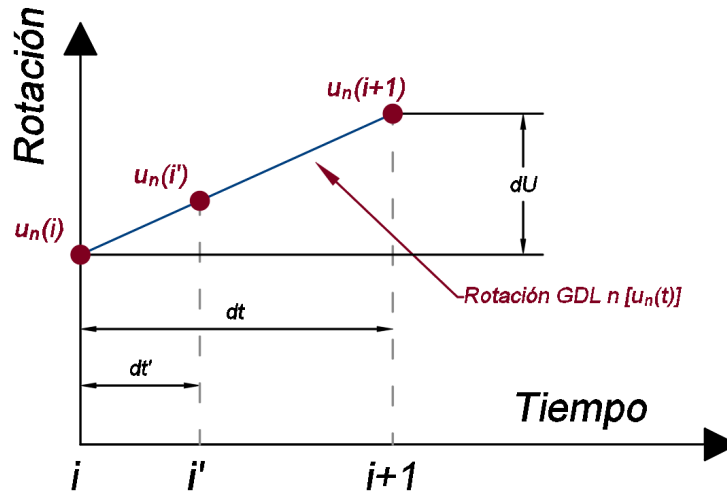


Ilustración 49: Interpolación del punto i' .

$$u_n(dt') = m_n \cdot dt' + u_n(i) \quad (48)$$

Donde:

- m_n : Pendiente de la recta de rotación del GDL n.

Con:

$$m_n = \frac{u_n(i+1) - u_n(i)}{dt} \quad (49)$$

Para despejar dt' reemplazamos (48) en (47), de la cual obtenemos la siguiente expresión:

$$dt' = \frac{u_y - (u_f(i) - u_i(i))}{m_f - m_i} \quad (50)$$

Donde:

- m_i : Pendiente de la recta de rotación del GDL inicial.
- m_f : Pendiente de la recta de rotación del GDL final.

Dentro de esta podemos reemplazar la relación de deformación del resorte j en i:

$$deformacion_j(i) = u_f(i) - u_i(i) \quad (51)$$

Así la expresión final de dt' queda como:

$$dt' = \frac{u_y - (deformacion_j(i))}{m_f - m_i} \quad (52)$$

El dt' es calculado para todos los resortes y se toma el menor valor, en caso de que más de un resorte fluya dentro del mismo paso del tiempo.

Una vez obtenido el dt' para llegar a la fluencia se interpola el valor de la aceleración correspondiente, esto es calculado usando la siguiente ecuación:

$$ag' = \frac{ag(i+1) - ag(i)}{dt} \cdot dt' + ag(i) \quad (53)$$

A continuación, se realiza un paso de Newmark, con los nuevos valores de dt' y ag' , y se comprueba que la nueva deformación del resorte sea igual a u_y , en caso de no cumplir esta condición se recalculan los parámetros partiendo de los resultados obtenidos.

Una vez cumplida la condición de tolerancia, se aplica el tiempo faltante para llegar a dt ($dt - dt'$).

Para implementar esta función en el código se modifica el bloque de código 15, agregando una bandera, para conocer cuando un resorte entra en fluencia.

La modificación dentro de la función no linealidad (ilustración 18) se realiza únicamente en las secciones donde se detalla un cambio de estado, partiendo de $ON=1$, de la siguiente manera:

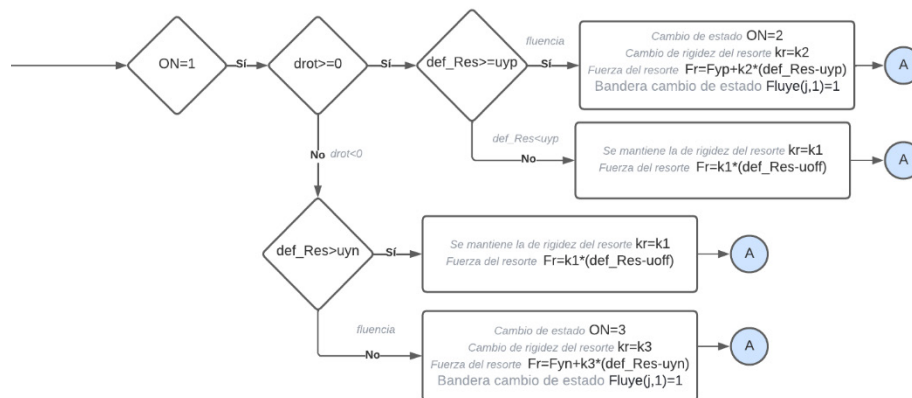


Ilustración 50: Variación a la evaluación de rótulas plásticas.

A partir de esta bandera se modifica la metodología base expuesta en la ilustración 34 como se explica a detalle en los siguientes diagramas de flujo:

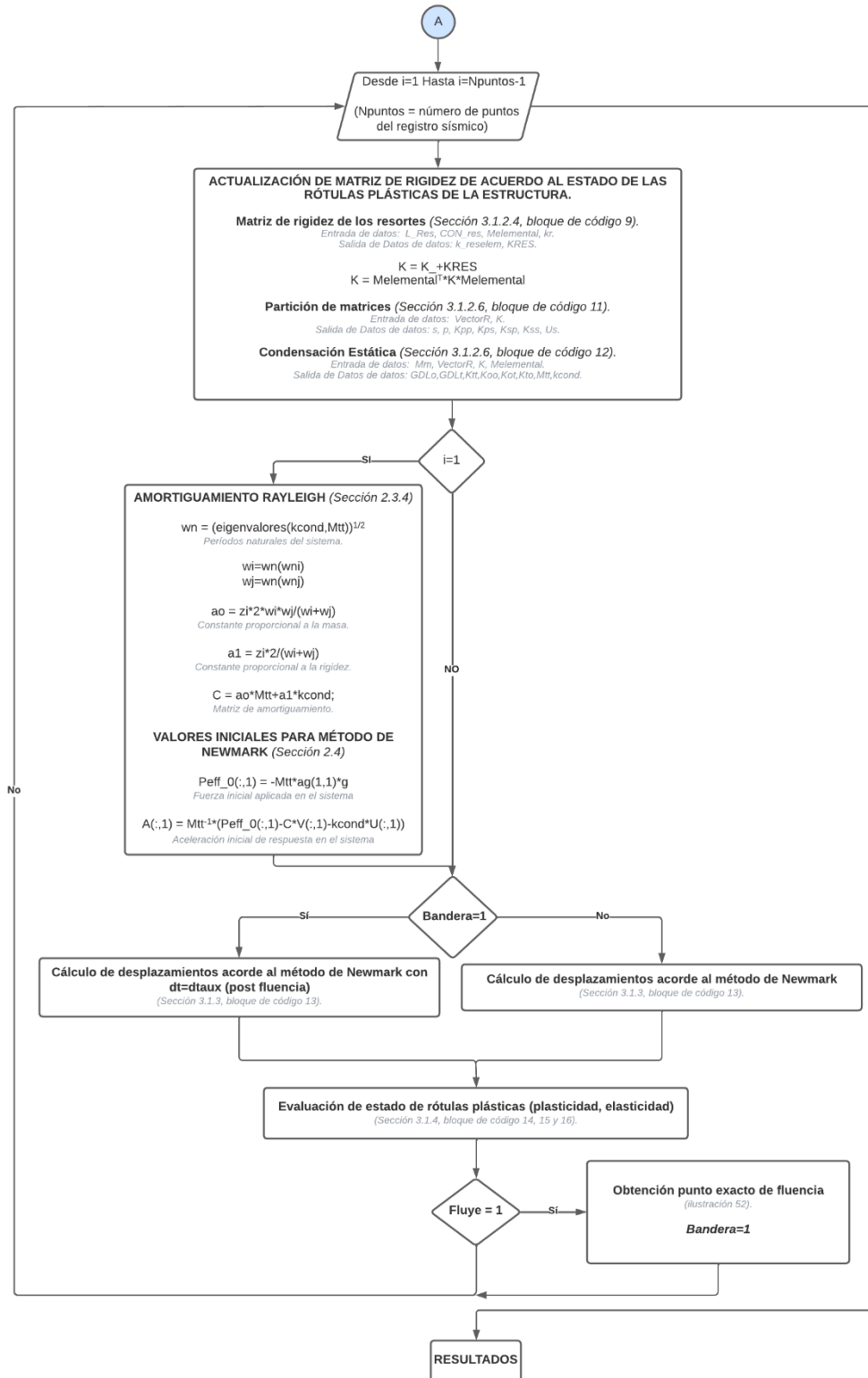


Ilustración 51: Diagrama de flujo general de la variación A.

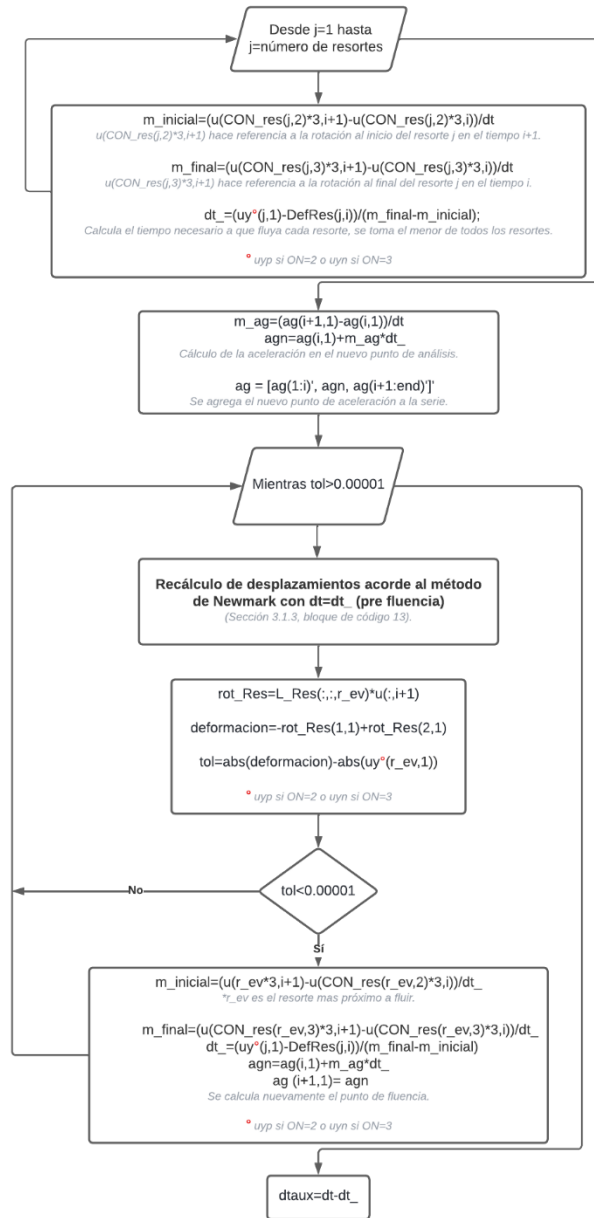


Ilustración 52: Diagrama de flujo de variación A, obtención punto exacto de fluencia.

A continuación, se presenta el bloque de código, referente a esta variación de la metodología principal.

```

load(estructura);
GDLnodo=3;
Uaux=zeros(size(XY,1)*GDLnodo,1);

[sismo,dt] = LeerSismo('BOL000.AT2');
ag=sismo(:,2);
Npuntos=size(ag,1);

[Constrains] = Constrains(GDLnodo,equalDOF );
[Melemental] = MatrizElemental (XY,Constrains,GDLnodo);
[ Lo,B ] = longitudes_Beta( XY,CON );
[ L ] = MatrizdeColocacion(CON,XY,GDLnodo);
[ L_Res ] = MatrizdeColocacionRes(CON_res,XY,GDLnodo);
[ VectorR] = vectorR( R,XY );
[ k_elem,k_estruc,K_] = MatricesDeRigidez( Lo,B,L,CON,MAT,PROP);
[Mm] = Masa(K_,M);

for i=1:size(CON_res,1)
    kr(i,1)=CON_res(i,4);
    uyp(i,1)=CON_res(i,6);
    uyn(i,1)=CON_res(i,8);
    Fyp(i,1)=CON_res(i,5);
    Fyn(i,1)=CON_res(i,7);
    uoff(i,1)=0;
    ON(i,1)=1;
    Fr(i,1)=0;
    Fluye(i,:)=[0 0 0 0];
end

dt_=0;
for i=1:Npuntos-1

    [ k_reselem,KRES ] =
        MatricesDeRigidezResortes(L_Res,CON_res,Melemental,kr);
    K=K_+KRES;
    K=transpose(Melemental)*K*Melemental;
    [ s,p,Kpp,Kps,Kss,Ksp,Us ] = particion_de_matrices( VectorR,K,Uaux );
    [GDLo,GDLt,Ktt,Koo,Kot,Kto,Mtt,kcond] =
        CondensacionEstatica(Mm,VectorR,K,Melemental);

    if i==1
        wn=sqrt(eig(kcond,Mtt));
        wn=sort(wn);
        Tn=2*pi()./wn;
        wi=wn(wni);
        wj=wn(wnj);
        ao=zi*2*wi*wj/(wi+wj);
        al=zi*2/(wi+wj);
        C=ao*Mtt+al*kcond;
        U(:,1)=zeros(size(GDLt,2),1);
        V(:,1)=zeros(size(GDLt,2),1);
        Uo(:,1)=zeros(size(GDLo,2),1);
        Peff_0(:,1)=-Mtt*iota*ag(1,1)*g;
        A(:,1)=inv(Mtt)*(Peff_0(:,1)-C*V(:,1)-kcond*U(:,1));
    end
end

```

```

if flag==1
[U,V,A,Uo,dU,dUo,u,du,Vo,v] = Newmark(kcond, C, gamma, beta, dtaux,
    Mtt, iota, ag, g, V,A, Koo, Kot, Uo, U, s,
    Constrains,i,GDLt,GDLd,dUo,u,du,dU,Vo,v);
[Fr,kr,ON,uoff,def_Res,f_Res,Fyp,Fyn,uy,uy,yn,f_graf,DefRes,Fluye,t] =
    Nolinealidad(k_reselem,u,du,L_Res,uoff,ON,i,CON_res,Fyp,Fyn,uy,
    uyn,f_graf,DefRes,Fluye,dtaux,t,V,f_Res );
flag=0;
for j=1:size(CON_res,1)
    Fluye(r_ev,1)=0;
end

else
[U,V,A,Uo,dU,dUo,u,du,Vo,v] = Newmark(kcond, C, gamma, beta, dt, Mtt,
    iota, ag, g, V,A, Koo, Kot, Uo, U, s,
    Constrains,i,GDLt,GDLd,dUo,u,du,dU,Vo,v);
[Fr,kr,ON,uoff,def_Res,f_Res,Fyp,Fyn,uy,uy,yn,f_graf,DefRes,Fluye,t] =
    Nolinealidad(k_reselem,u,du,L_Res,uoff,ON,i,CON_res,Fyp,Fyn,uy,
    uyn,f_graf,DefRes,Fluye,dt,t,V,f_Res );
end

r_ev=0;
dt_auxiliar=9999;
if sum(Fluye(:,1)>0)
    dt=9999;
    flag=1;
    for j=1:size(CON_res,1)

        if ON(j,1)~=1
            m_inicial=(u(CON_res(j,2)*3,i+1)-u(CON_res(j,2)*3,i))/dt;
            m_final=(u(CON_res(j,3)*3,i+1)-u(CON_res(j,3)*3,i))/dt;

            if ON(j,1)==2
                dt_auxiliar=(uy(j,1)-DefRes(j,i))/(m_final-
                    m_inicial);

            elseif ON(j,1)==3
                dt_auxiliar=(uyn(j,1)-DefRes(j,i))/(m_final-
                    m_inicial);

            end

            if dt_auxiliar<dt_ && dt_auxiliar>0 && dt_auxiliar<dt
                dt=dt_auxiliar;
                r_ev=j;
            end
        end
    end
end

m_ag=(ag(i+1,1)-ag(i,1))/dt;
agn=ag(i,1)+m_ag*dt_;
ag = [ag(1:i)', agn, ag(i+1:end)']';
tol=1;

```

```

while(abs(tol)>0.00000001)
    [U,V,A,Uo,dU,dUo,u,du,Vo,v] = Newmark(kcond, C, gamma, beta,
        dt_, Mtt, iota, ag, g, V,A, Koo, Kot, Uo, U, s,
        Constrains,i,GDLt,GDLd,dUo,u,du,dU,Vo,v);
    rot_Res=L_Res(:, :, r_ev)*u(:, i+1);
    deformacion=-rot_Res(1,1)+rot_Res(2,1);

    if ON(r_ev,1)==2
        tol=abs(deformacion)-abs(uyy(r_ev,1));

    elseif ON(r_ev,1)==3
        tol=abs(deformacion)-abs(uyn(r_ev,1));
    end

    if abs(tol) > 0.000000001
        m_inicial=(u(CON_res(r_ev,2)*3,i+1)-
            u(CON_res(r_ev,2)*3,i))/dt_;
        m_final=(u(CON_res(r_ev,3)*3,i+1)-
            u(CON_res(r_ev,3)*3,i))/dt_;

        if ON(r_ev,1)==2
            dt_=(uyy(r_ev,1)-DefRes(r_ev,i))/(m_final-m_inicial);

        elseif ON(r_ev,1)==3
            dt_=(uyn(r_ev,1)-DefRes(r_ev,i))/(m_final-m_inicial);
        end

        agn=ag(i,1)+m_ag*dt_;
        ag(i+1,1)= agn;
    end
end

dtaux=dt-dt_;

[Fr,kr,ON,uoff,def_Res,f_Res,Fyp,Fyn,uyy,uyn,f_graf,DefRes,Fluye,t] =
    Nolinealidad(k_reselem,u,du,L_Res,uoff,ON,i,CON_res,Fyp,Fyn,uyy,uyn,f_gr
    af,DefRes,Fluye,dt_,t,V,f_Res );
    for j=1:size(CON_res,1)
        Fluye(j,:)= [0 0 0 0];
    end
end
end

```

4.2.1.1. Resultados obtenidos.

A continuación, se presenta una comparación entre los resultados obtenidos con la metodología base, y la variación A, se analizará el caso del modelo 1 bajo la acción del registro BOL000, posteriormente se comparará con los resultados de SAP2000 para todos los casos.

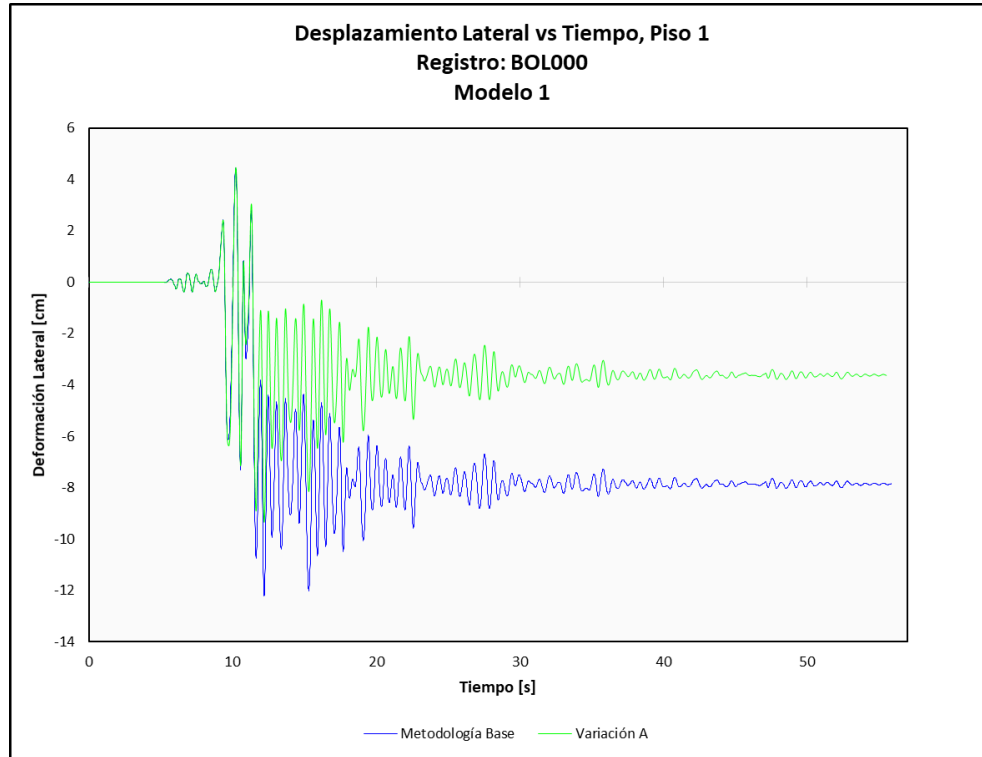


Ilustración 53: Comparación Variación A vs Metodología propuesta, Deformación lateral vs tiempo, Modelo 1, sismo BOL000.

Se observa un cambio importante en la deformación residual del análisis, esta divergencia en los gráficos se encuentra presente cuando el sistema entra en fluencia, para entender por qué se da este cambio se presenta una comparación de una parte de las curvas histeréticas en el resorte 1, en la ilustración 54. En la misma, se aprecia que la curva de la variación A es más amplia, estas pequeñas variaciones se producen en todos los puntos de fluencia del sistema, en los cuales la metodología base, aplicaba la rigidez inicial y actualizaba la matriz de rigidez con un pequeño retraso debido a la discretización, si se realiza un acercamiento en el primer punto de fluencia de la curva se puede observar esta diferencia en los puntos de cálculo de la metodología:

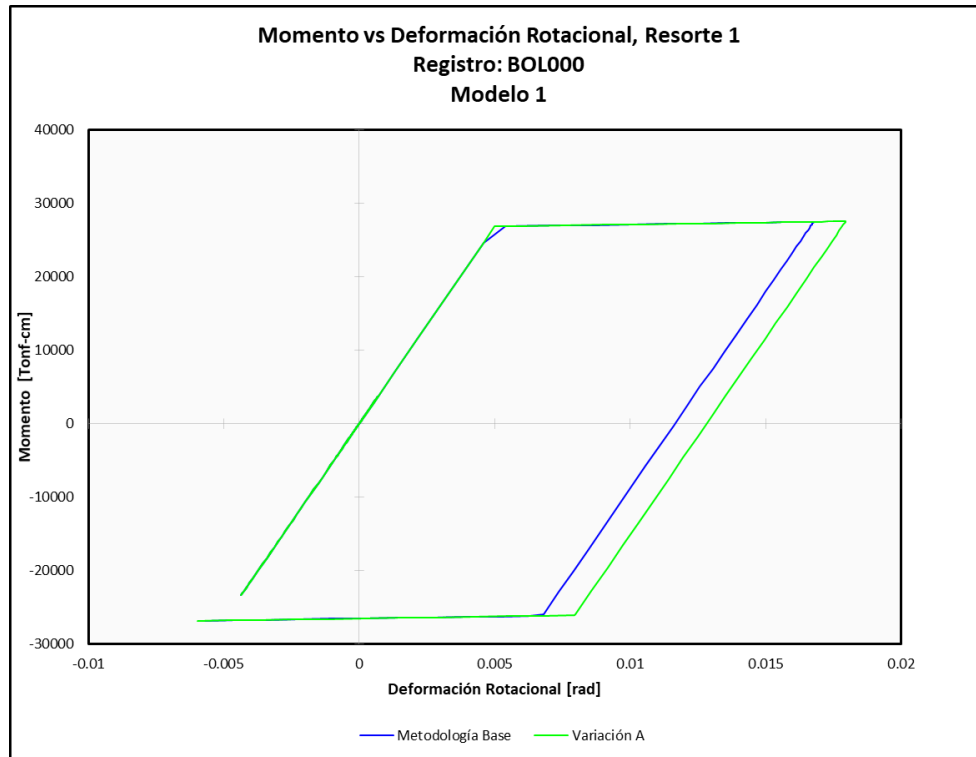


Ilustración 54: Comparación Variación A vs Metodología propuesta, Momento vs Deformación Rotacional, Resorte 1, Modelo 1, sismo BOL000, Hasta $t=10.12$ s.

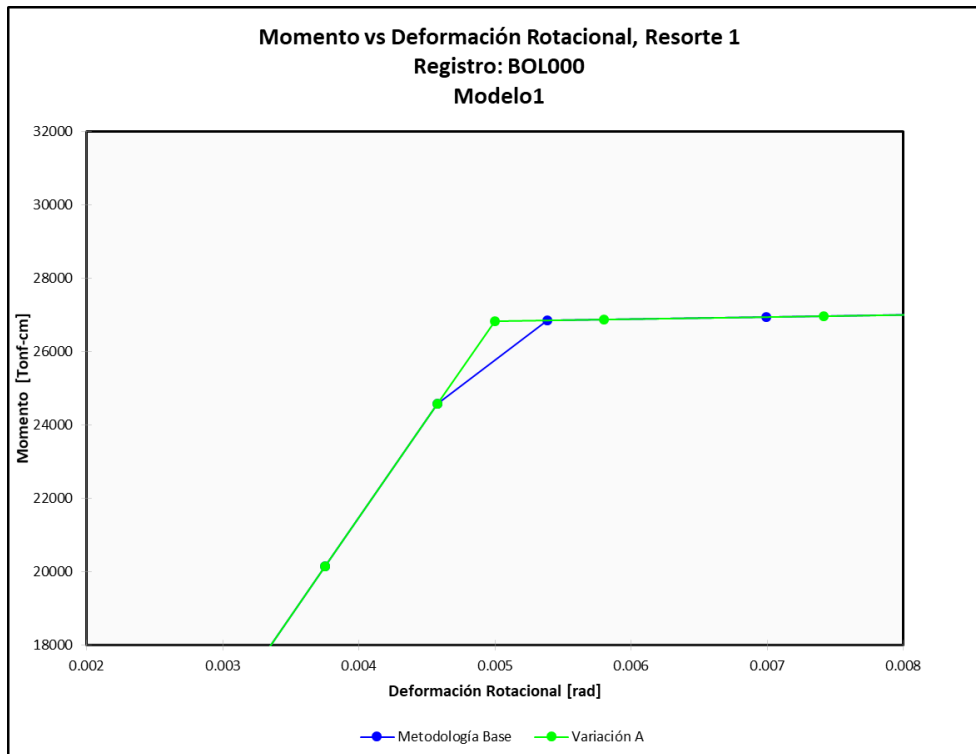


Ilustración 55: Ampliación de Ilustración 54.

La ilustración 55 presenta a mayor detalle los puntos de resultado del análisis, en el caso de la metodología base, se observa que el primer punto después de la fluencia es menor al de la Variación A, ya que la metodología base utiliza la matriz de mayor rigidez, durante todo el intervalo de tiempo, mientras que, en la variación A, gracias al sub paso, se aplica la matriz actualizada dentro del intervalo.

4.2.1.2. Comparación con SAP2000:

Al comparar los resultados con los obtenidos por el programa SAP2000, se observa mayor similitud en la respuesta del sistema, en especial para el registro RIO270, ya que en el registro BOL000 continúa existiendo una pequeña diferencia, esto parece estar en concordancia con la hipótesis planteada de la sensibilidad del método a grandes desplazamientos. Esta tendencia también es apreciable en la comparación de las gráficas histeréticas de los resortes presentadas en las ilustraciones 58 y 59.

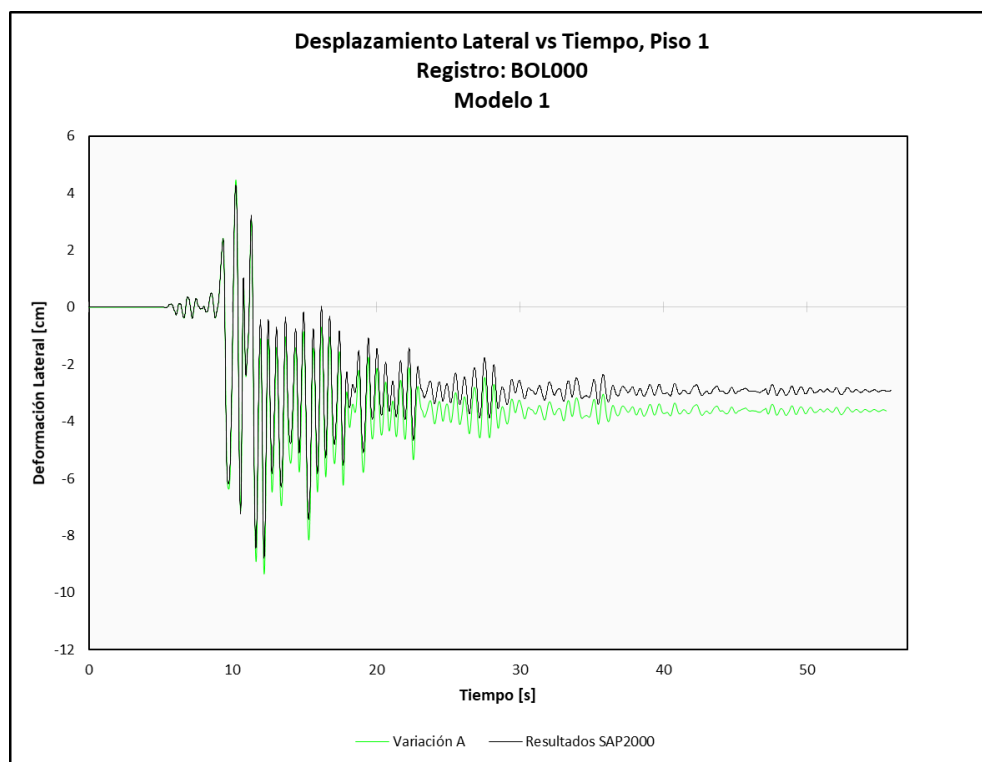


Ilustración 56: Comparación SAP2000 vs Variación A, Deformación lateral vs tiempo, Modelo 1, sismo BOL000.

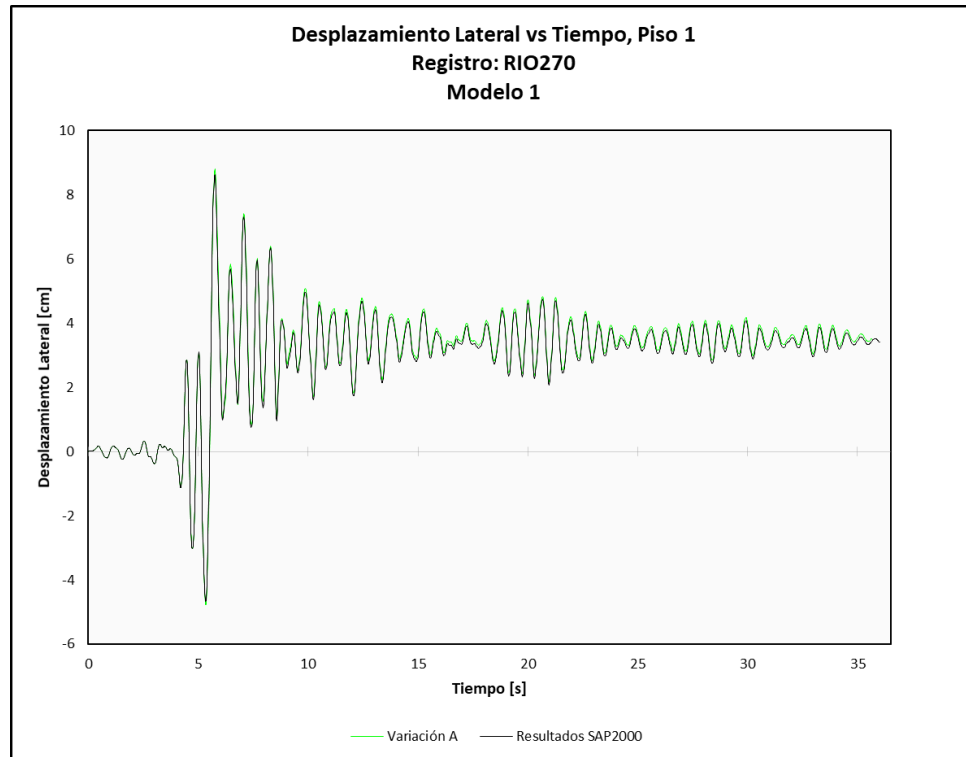


Ilustración 57: Comparación SAP 2000 vs Variación A, Desplazamiento lateral vs tiempo, Modelo 1, sismo RIO270.

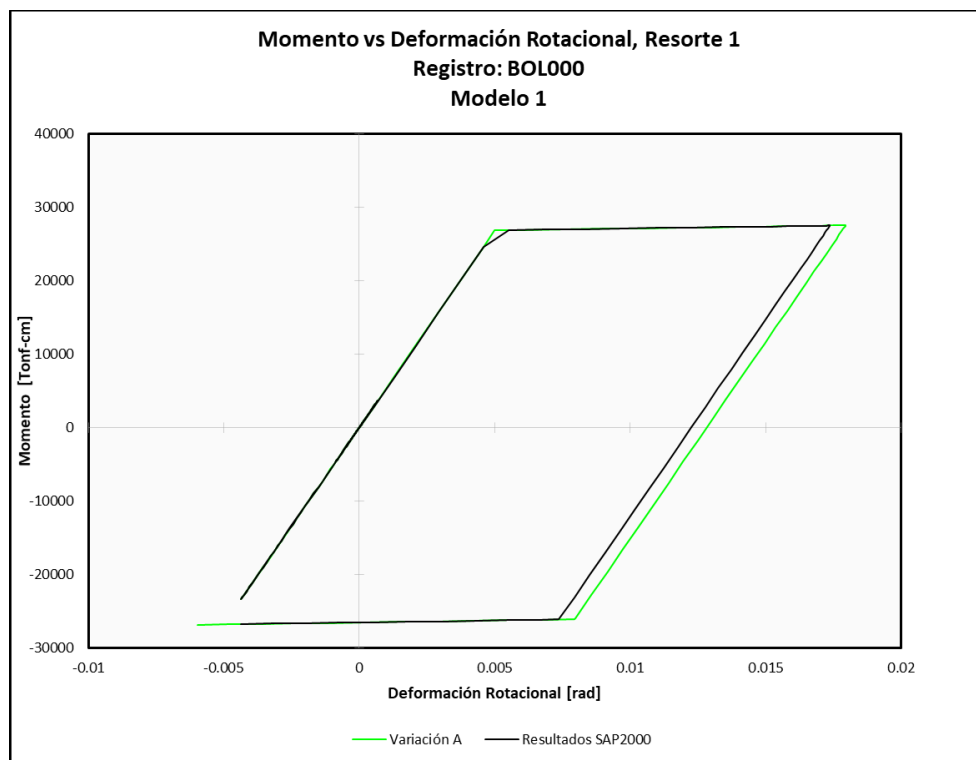


Ilustración 58: Comparación SAP2000 vs Variación A, Momento vs Deformación Rotacional, Resorte 1, Modelo 1, sismo BOL000, Hasta t=10.12 s.

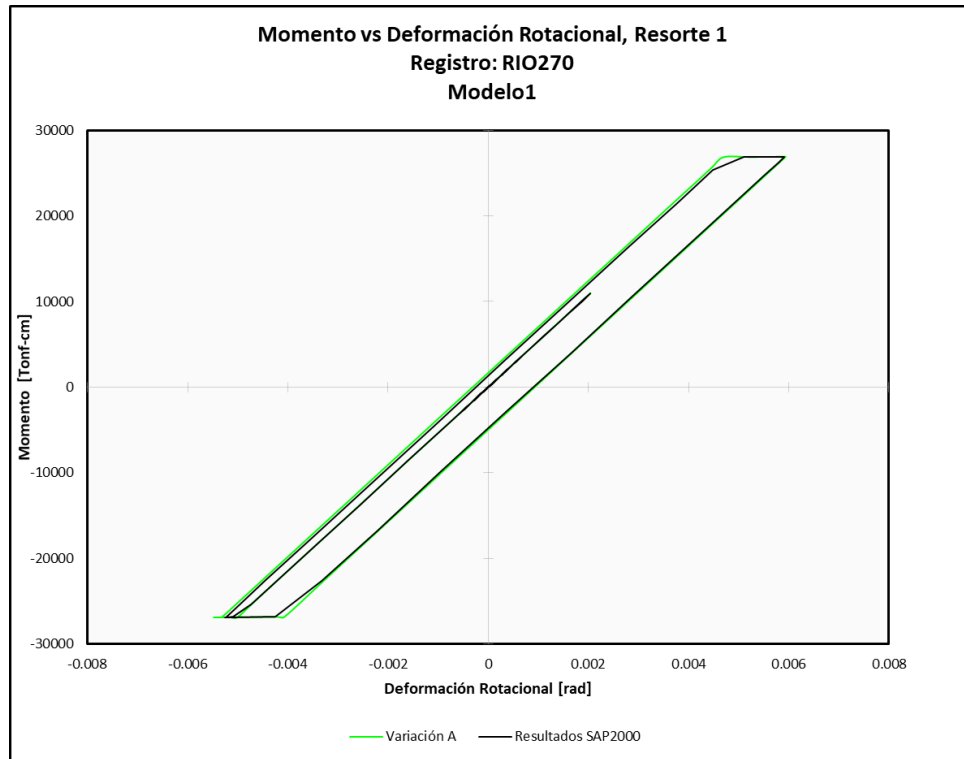


Ilustración 59: Comparación SAP2000 vs Variación A, Momento vs Deformación Rotacional, Resorte 1, Modelo 1, sismo RIO270, Hasta $t=5$ s.

4.2.2. Variación B

Esta variación del método inicial resulta más sencilla e intuitiva de implementar, ya que únicamente consiste en disminuir el diferencial del tiempo, para esto se realiza una interpolación de la función tiempo historia del registro sísmico, añadiendo puntos al registro hasta conseguir el Δt buscado, como consecuencia de la reducción del Δt , las variaciones de desplazamiento en cada paso serán menores, reduciendo la diferencia en resultados que esta produce.

Para facilitar el proceso es recomendable que el nuevo intervalo sea una fracción del Δt proveniente del registro, una vez elegido se procede dentro de un bucle que itere a lo largo del registro, calculando los nuevos puntos a usar en el análisis, para mayor entendimiento se presenta un esquema lógico de esta función:

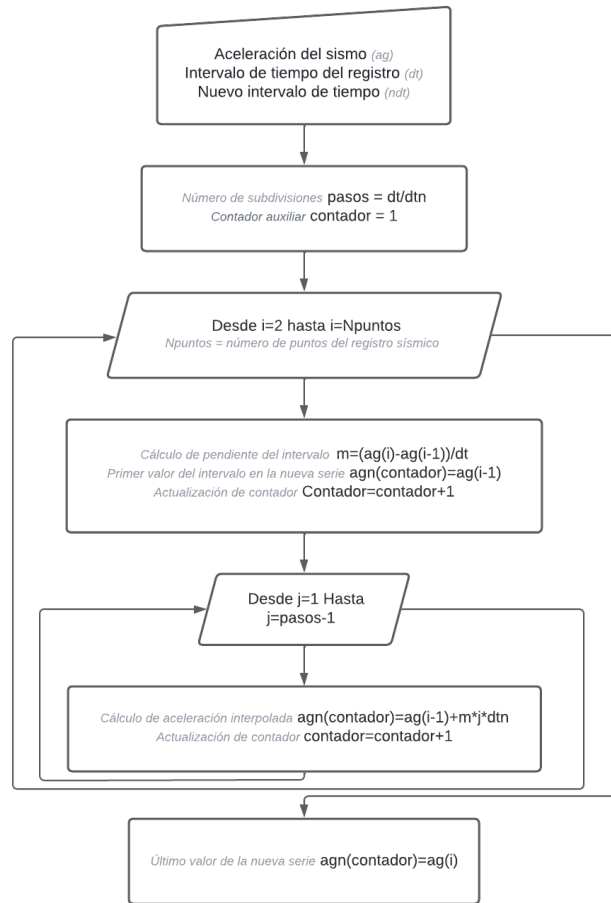


Ilustración 60: Diagrama de flujo interpolación del registro sísmico.

De igual manera se presenta la integración de esta función en el código:

Bloque de código 21: Variación B de la metodología propuesta.

```

pasos=dt/dtn;
cont=1;
tn(1,1)=0;
for i=2:size(ag,1)

    m=(ag(i,1)-ag(i-1,1))/dt;
    agn(cont,1)=ag(i-1);
    cont=cont+1;
    tn(cont,1)=tn((cont-1),1)+dtn;
    for j=1:pasos-1
        agn(cont,1)=ag(i-1,1)+m*(j*dtn);
        cont=cont+1;
        tn(cont,1)=tn((cont-1),1)+dtn;
    end
end
agn(cont,1)=ag(i);
    
```

4.2.2.1. Presentación de resultados:

Una vez aplicada esta variación al código, se evalúan nuevamente los modelos propuestos obteniendo los siguientes resultados:

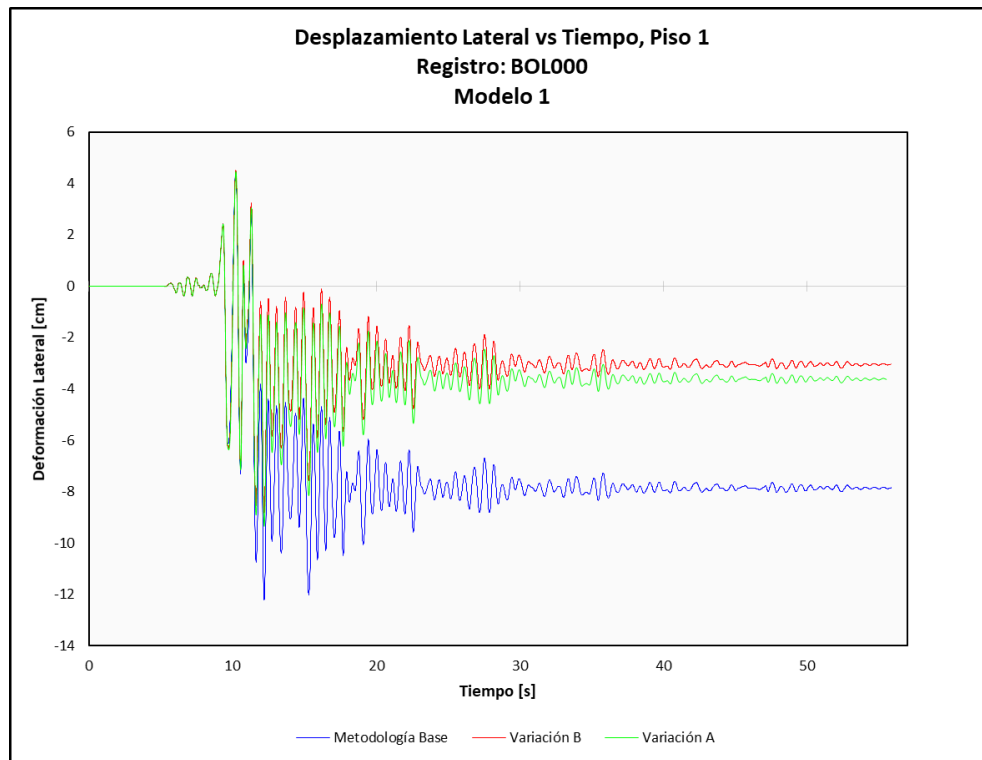


Ilustración 61: Comparación entre Variación B, Variación A y Metodología Base, Deformación lateral vs tiempo, Modelo 1, sismo BOL000.

Se aprecia que existe una pequeña diferencia entre las variaciones A y B, sin embargo, esta no es muy significativa, de igual forma si observamos la curva histerética del resorte, los resultados obtenidos se asemejan:

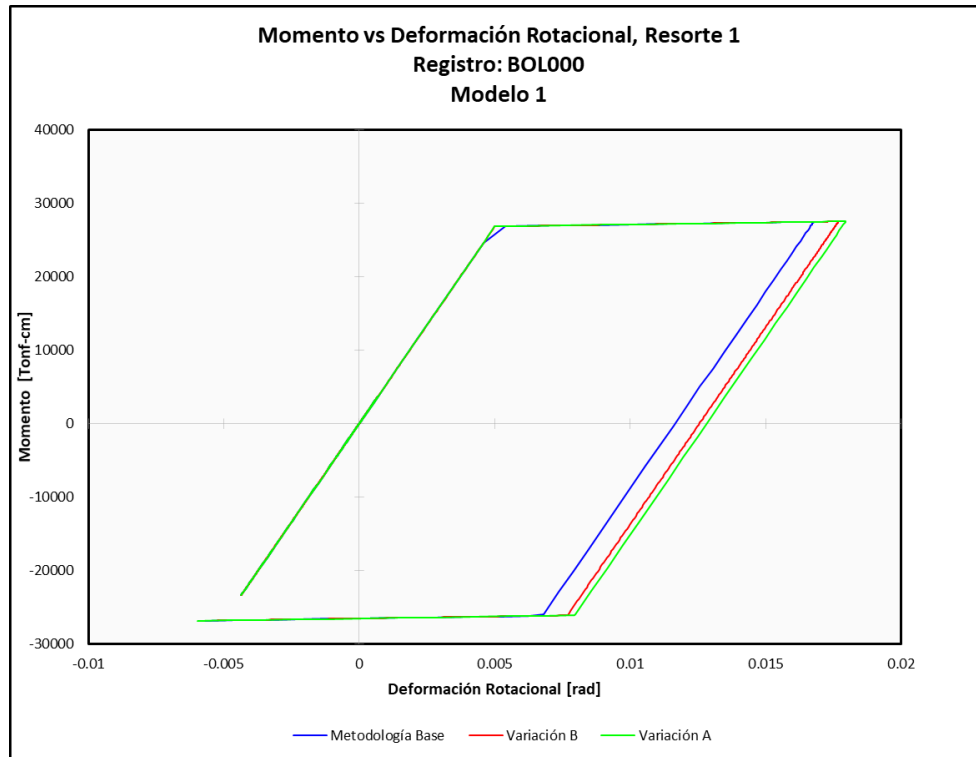


Ilustración 62: Comparación entre Variación B, Variación A y Metodología Base, Momento vs Deformación Rotacional, Modelo 1, sismo BOL000.

Al igual que en la variación A, en la variación B se puede observar en el primer punto de fluencia, que los puntos de análisis se encuentran muy cercanos a este, además en la ilustración se podrá observar el gran aumento de puntos de análisis de esta variación frente a las otras metodologías:

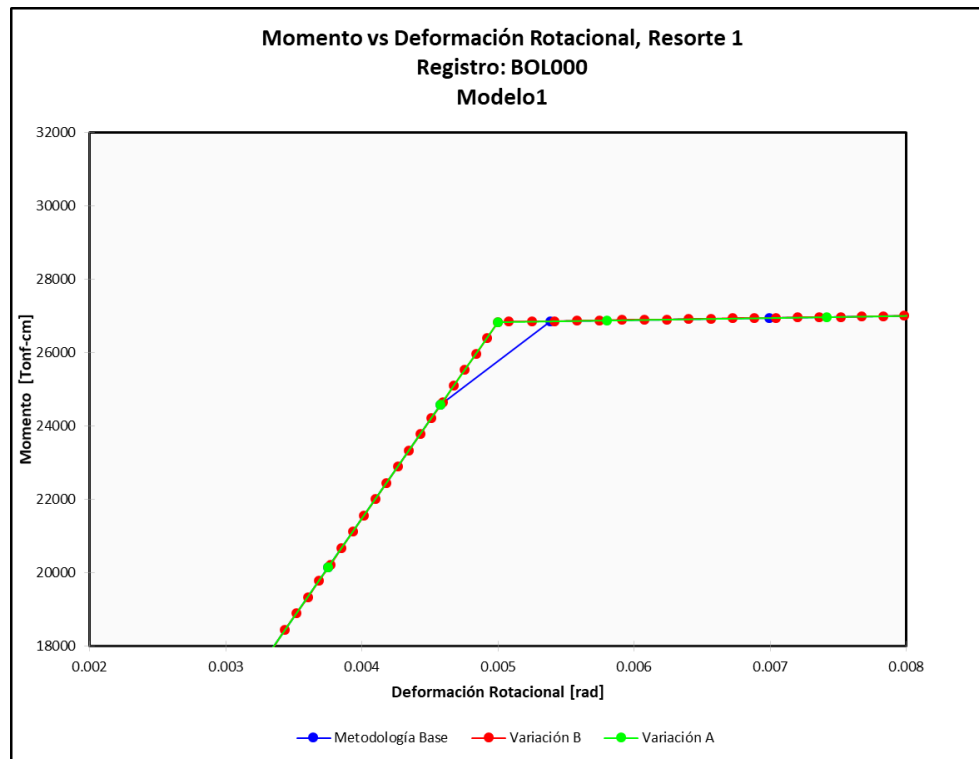


Ilustración 63: Ampliación de Ilustración 62.

Por lo tanto, las dos variaciones resuelven el problema que se ocasionaba al no ser inmediata la actualización de rigidez, sin embargo, aunque se acerca bastante, la segunda variación no encuentra exactamente estos puntos de cambio.

4.2.2.2. Comparación con SAP2000:

Al igual que los resultados de la variación A, los resultados obtenidos por la variación B se muestran muy similares a los obtenidos en el análisis de SAP2000, pero de igual manera presentan una pequeña diferencia.

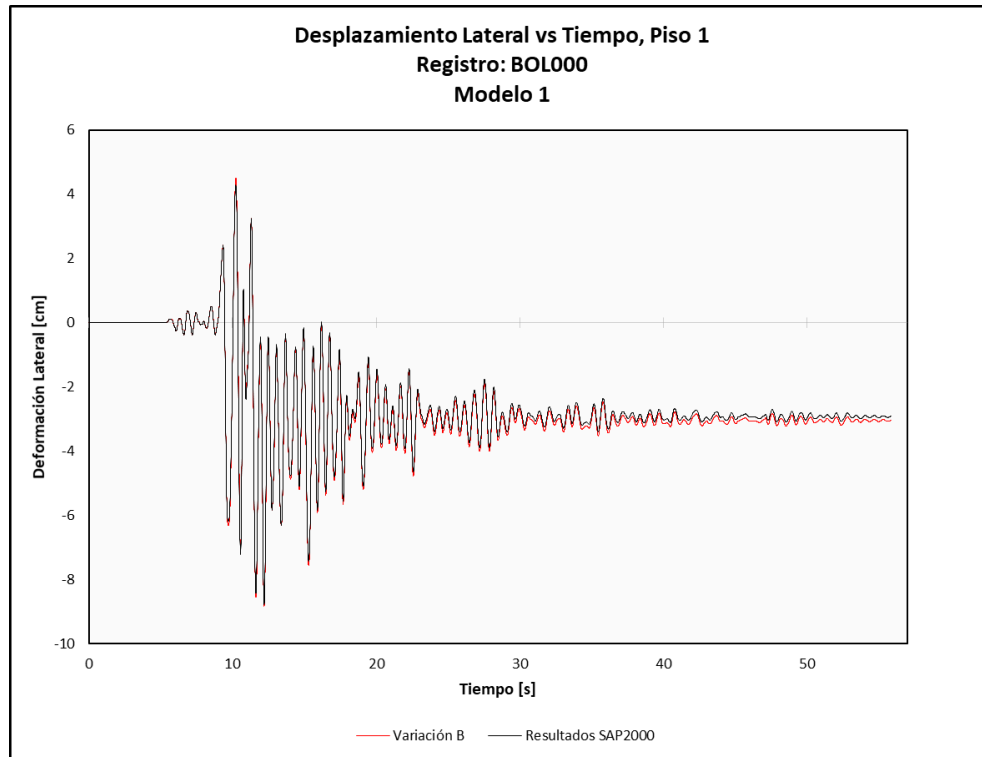


Ilustración 64: Comparación SAP2000 vs Variación B, Deformación lateral vs tiempo, Modelo 1, sismo BOL000.

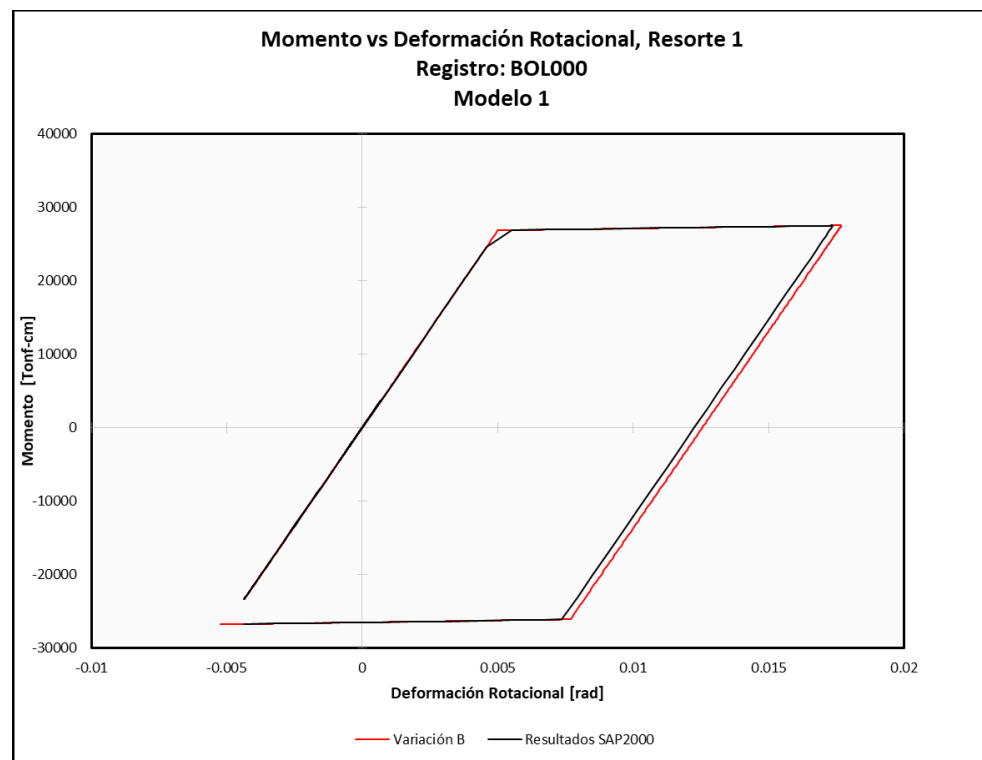


Ilustración 65: Comparación SAP2000 vs Variación B, Momento vs Deformación Rotacional, Resorte 1, Modelo 1, sismo BOL000, Hasta t=10.12 s.

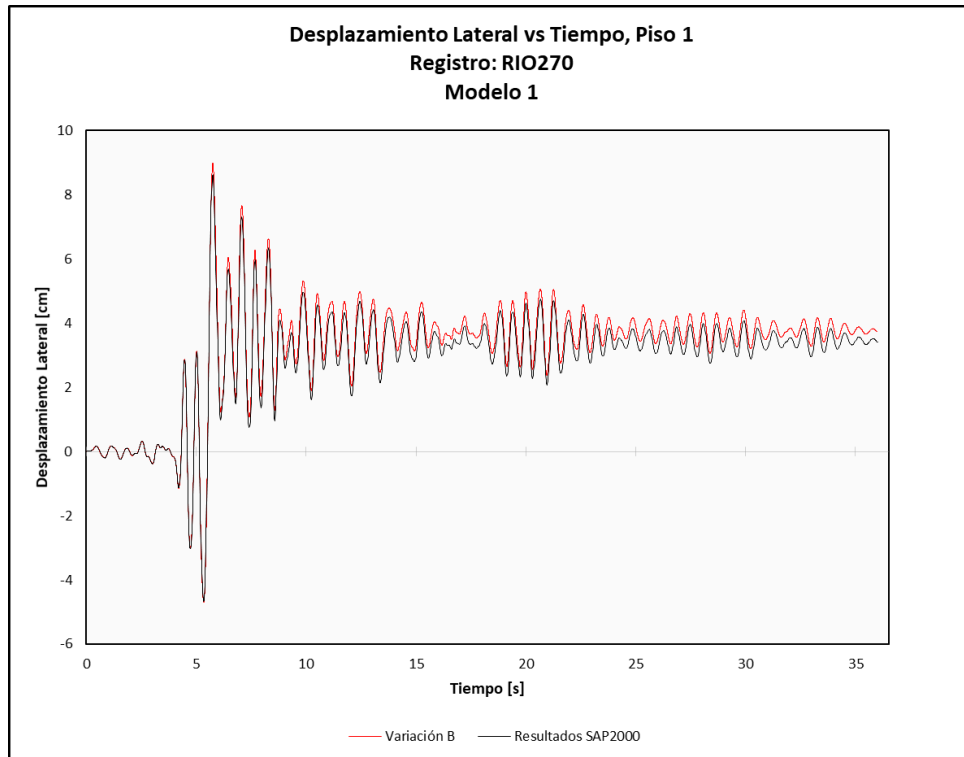


Ilustración 66: Comparación SAP 2000 vs variación B, Desplazamiento lateral vs tiempo, Modelo 1, sismo RIO270.

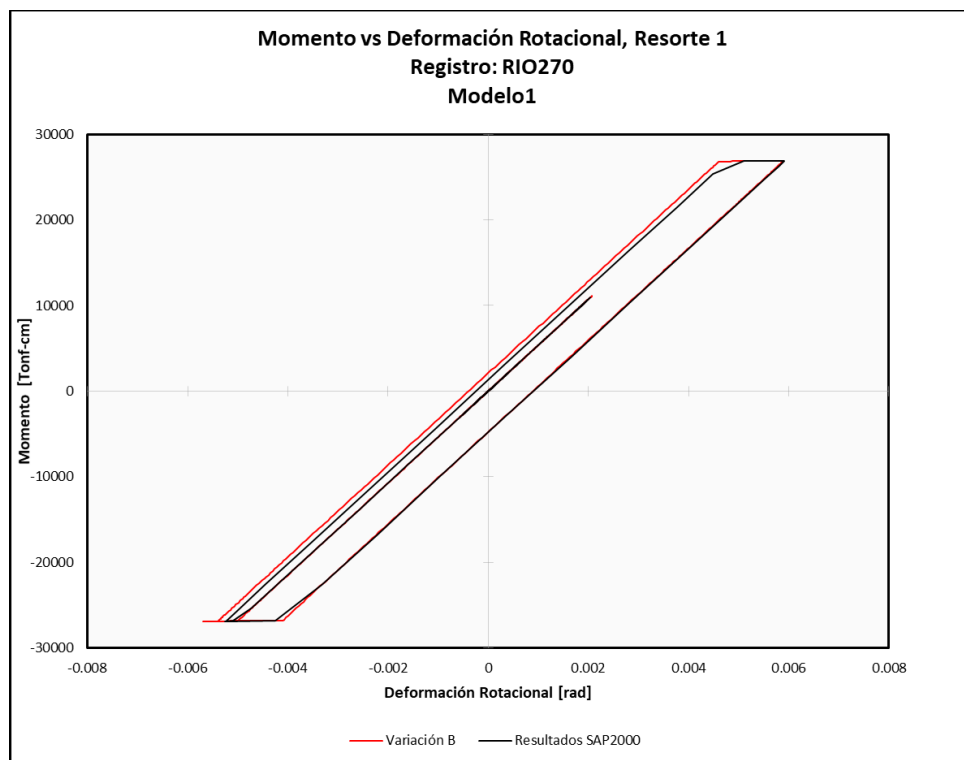


Ilustración 67: Comparación SAP2000 vs Variación B, Momento vs Deformación Rotacional, Resorte 1, Modelo 1, sismo RIO270, Hasta t=5 s.

4.3. Discusión de resultados

Después de presentar la metodología, sus variaciones, y los resultados a los que estas llegan, es evidente que la metodología base propuesta, difiere notablemente en su respuesta, frente a el software comercial, esta diferencia mejora al implementar las variaciones, sin embargo, introduce complejidad al algoritmo.

Entre la variación A y B, se presenta diferencia en el caso del sismo BOL000, la variación B tiene mayor similitud al software comercial a comparación de la variación A, no obstante, en el caso del sismo RIO270, la variación A es la que muestra valores más cercanos al software comercial.

En las ilustraciones 68 y 69 se observa que la diferencia entre los resultados de la variación A y B, es mayor en el sismo BOL000, a comparación del sismo RIO270.

Esta tendencia se presenta al evaluar tanto el modelo 1 como el modelo 2, los resultados de este último se los presenta en los anexos del Anexo 1 Anexo 3.

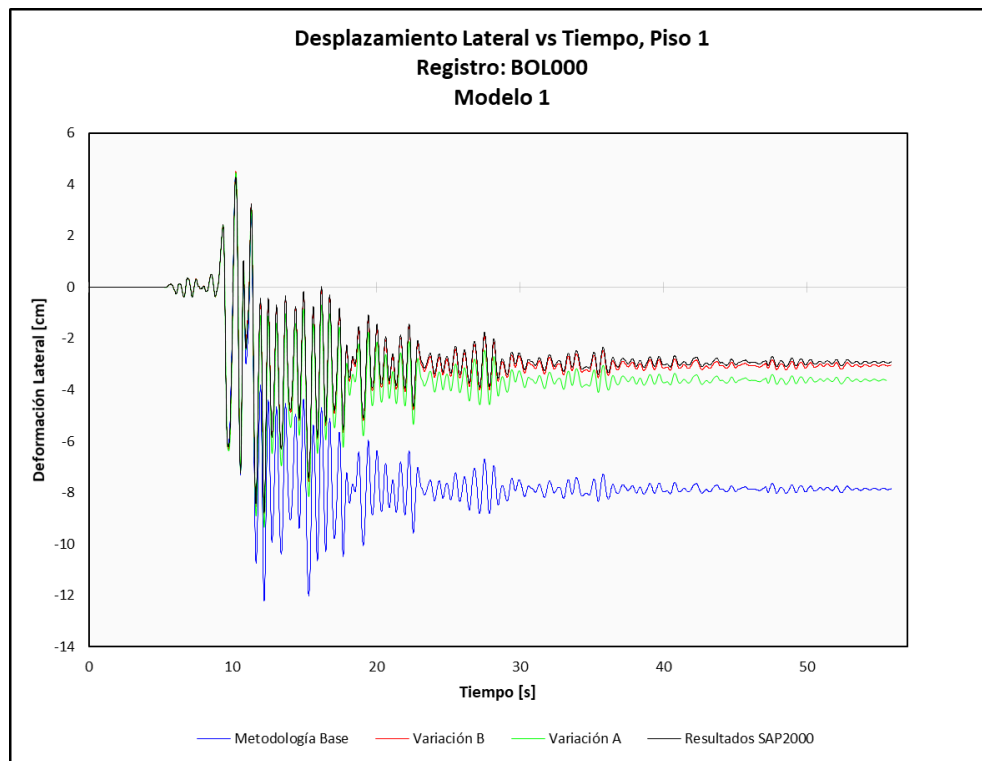


Ilustración 68: Comparación entre SAP2000, Variación B, Variación A y Metodología Base, Deformación lateral vs tiempo, Modelo 1, sismo BOL000.

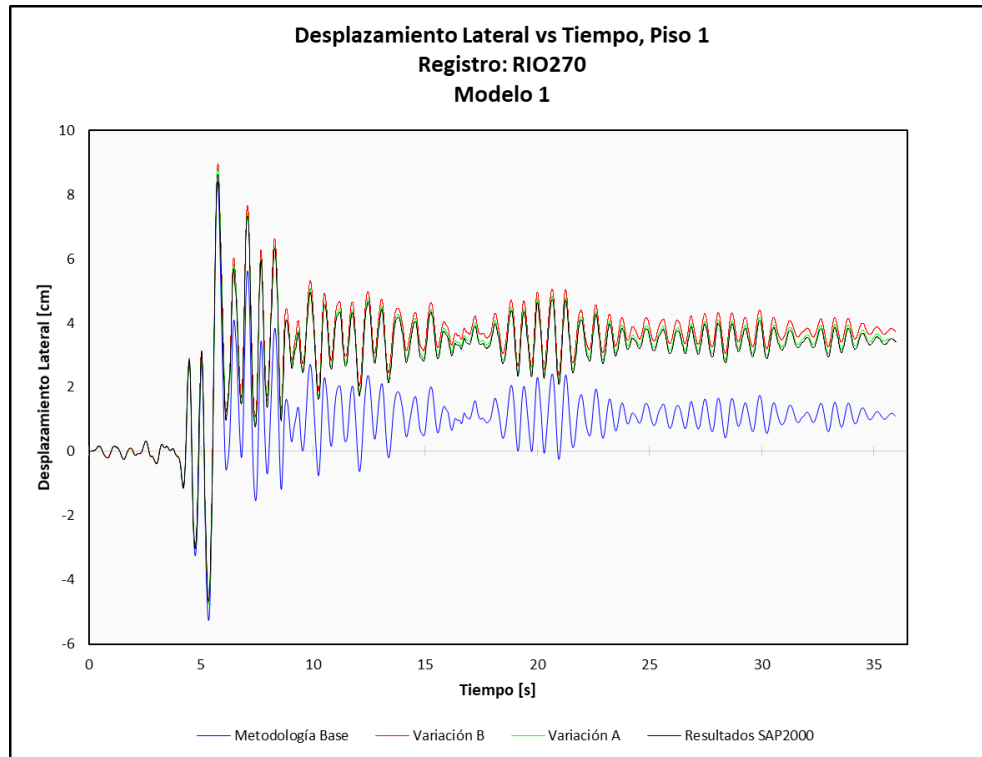


Ilustración 69: Comparación entre SAP2000, Variación B, Variación A y Metodología Base, Deformación lateral vs tiempo, Modelo 1, sismo RIO270.

Ahora, si bien los resultados de las variaciones presentan mayor similitud con SAP2000, estas pueden presentar mayor dificultad al momento de ser implementadas, y en el caso de la variación B se tiene un mayor costo computacional, en especial al evaluar un modelo con más de un grado de libertad dinámico, como se presenta en la ilustración 70.

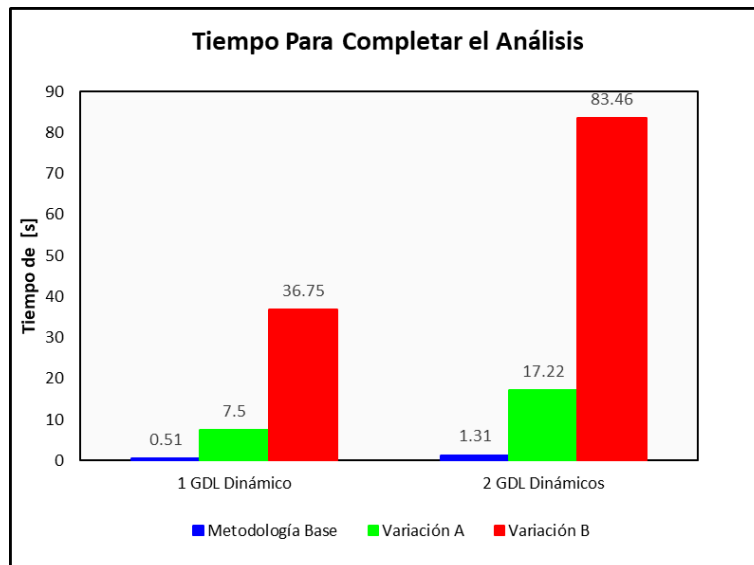


Ilustración 70: Tiempos de cálculo de los distintos análisis.

La variación B deja en evidencia que el análisis presenta una sensibilidad importante al parámetro dt , ya que al reducirlo se presenta una mayor similitud con la respuesta obtenida en SAP2000, dicha similitud varía en función del dt elegido. A manera de visualizar esta tendencia se realizó el mismo análisis para diferentes valores para dt , utilizando de ejemplo el modelo 1 bajo efectos del sismo BOL000. Con el fin de cuantificar la similitud entre los diferentes análisis y los resultados de SAP2000, se obtiene el coeficiente de determinación (R^2), el cual, según Montgomery & Runger (1996) es usado comúnmente para evaluar la adecuación de un modelo, una descripción más detallada de este parámetro y su obtención se puede encontrar en su libro. R^2 toma valores entre 0 y 1, mientras más cercano sea a 1 indica una mayor correlación de los datos, o un mejor ajuste.

Por otra parte, mientras menor sea el dt , mayor será el costo computacional, es decir, es mayor el tiempo necesario para realizar el análisis.

A continuación, en la ilustración 71 se presenta el cambio del parámetro R^2 frente a los diferentes valores de dt , también se contrasta estos resultados con el tiempo de cálculo necesario para cada análisis. Se incluye también las medidas del mismo análisis utilizando la variación A de la metodología.

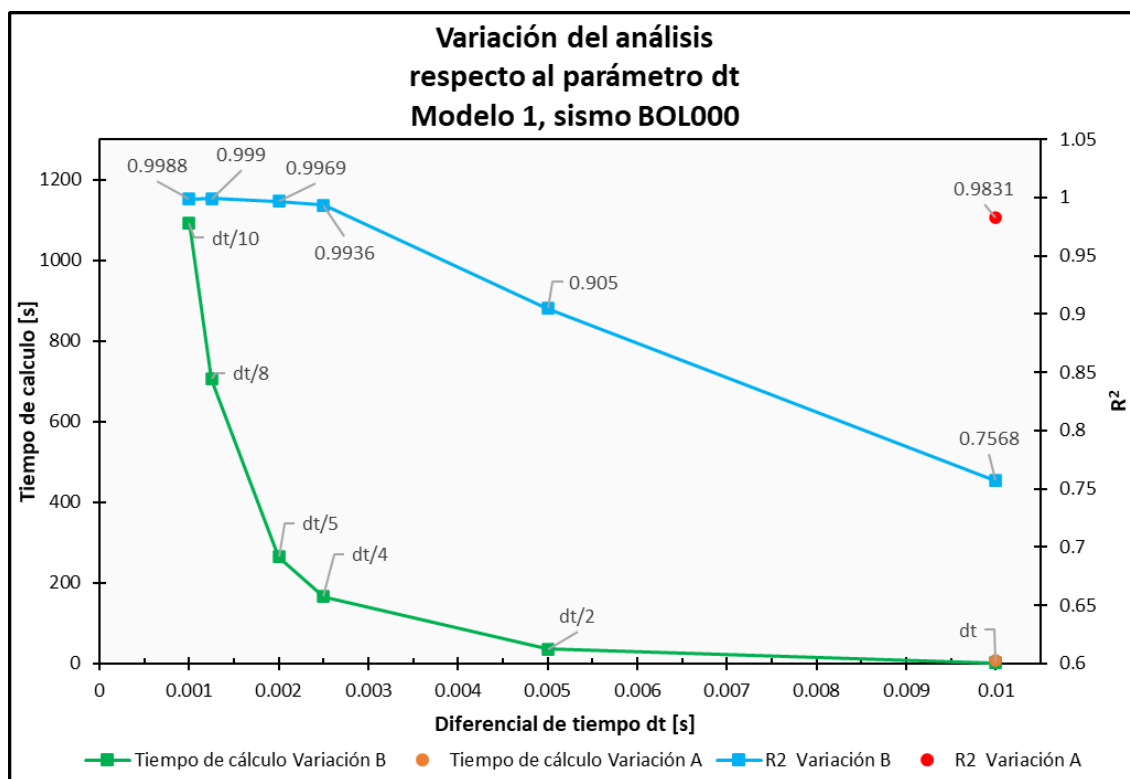


Ilustración 71: Variación del análisis respecto al parámetro dt , Modelo 1, Sismo BOL000.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La metodología para realizar un análisis dinámico no lineal tiempo - historia planteada en el presente trabajo de titulación, se encuentra enfocada desde un punto de vista didáctico y con este fin se implementaron ciertos recursos para facilitar su entendimiento. Entre ellos: modelar rótulas plásticas como resorte, proceso de Newmark incremental, presentación de procesos mediante diagramas de flujo.

Incluir los resortes como rótulas plásticas simplifica la implementación de la no linealidad en el modelo, localizando los puntos donde se espera fluencia de los elementos, esto permite que las variaciones frente a un cambio de estado deban ser reflejadas únicamente en la rigidez de los resortes y no en todo el miembro, lo cual se logra al separar la matriz de rigidez de la estructura en dos componentes: una que se mantiene constante durante todo el análisis, correspondiente a vigas y columnas, y otra que se actualiza en cada paso de tiempo perteneciente a las rótulas. Adicionalmente, la evaluación del comportamiento del material frente a las cargas se realiza únicamente en los resortes, dentro de la función llamada “no linealidad” (3.1.4). Aprovechando la geometría de la curva constitutiva seleccionada, se delimita al comportamiento del material en 3 zonas: rango elástico, rango plástico positivo y rango plástico negativo. Si bien esto reduce la aplicabilidad a únicamente el uso de un modelo bilineal, permite apreciar cuando el sistema se encuentra en fluencia, carga o descarga, así como los cálculos relacionados al cambio de estos estados, y entender el comportamiento histerético del mismo.

La formulación del método de Newmark es planteada de manera incremental, de tal forma que permite realizar los cálculos de un paso de tiempo sin la necesidad de iterar hasta buscar la convergencia. A pesar de presentar ciertas limitaciones, esto simplifica notablemente el análisis, así como agiliza el proceso de cálculo, lo cual resulta de gran utilidad para un ejemplo pedagógico.

A lo largo del desarrollo de este documento la metodología planteada ha sido presentada de dos maneras, mediante bloque de códigos según el lenguaje de programación de Matlab con el objetivo de que pueda ser replicada de manera sencilla, y con el uso de diagramas de flujo explicando la secuencia de cada subproceso. De esta manera, se facilita la comprensión de los criterios base para la implementación de este análisis, ya que puede resultar complejo y laborioso de ejecutar. Por esta razón, dentro del marco teórico se incluye los fundamentos base, que a criterio de los autores, son indispensables entender previo al estudio del análisis no lineal; y si bien estos temas no se exploran a profundidad, contienen lo necesario para la interpretación del trabajo de titulación.

Una de las principales dificultades encontradas al momento de realizar el presente trabajo viene dada por la discretización del análisis en intervalos de tiempo dt , ya que resulta casi imposible que el estado de las rótulas plásticas sea evaluado exactamente en el punto en el cual se provoca la fluencia o un cambio de comportamiento plástico a elástico producto de una descarga, en combinación con la formulación incremental del método de Newmark, ya que parte de la respuesta que debería ser evaluada con una matriz de rigidez actualizada, toma los valores del estado anterior del sistema. Algunos softwares comerciales, como SAP2000, implementan diversos criterios adicionales para abordar este problema, entre ellos una variación iterativa Newton – Rapson de la formulación de Newmark, integrando criterios de convergencia con respecto a los desplazamientos, las fuerzas y la

energía total del sistema, además de la subdivisión del diferencial de tiempo hasta satisfacerlos. Esta metodología de análisis resulta más compleja y confusa, lo cual se aleja del objetivo principal de este trabajo.

Con el fin de mitigar la diferencia de resultados, manteniendo un enfoque didáctico, surgen las variaciones A y B. En la variación A se pretende encontrar el punto exacto de cambio de estado, e incluirlo al análisis, forzando así a que la actualización de la matriz de rigidez sea inmediata, por otra parte, la metodología B, aborda el mismo problema reduciendo el parámetro dt , aumentando así la cantidad general de puntos de análisis. Si bien una unión de estos dos métodos es posible, el costo computacional se incrementa en gran medida, y los resultados obtenidos no presentan una variación importante a los obtenidos con la variación B.

La ilustración 71 compara los 3 métodos presentados con el software comercial, y revela la eficacia de ellos. De igual manera muestra que, si bien la variación A obtiene resultados satisfactorios, la variación B puede llegar a un parámetro R^2 más cercano a 1; esto lleva a inferir que la diferencia entre resultados no se da únicamente por falta de aproximación a los puntos de fluencia, y que la sensibilidad a la discretización posiblemente se presenta en otras partes del análisis. Dicha sensibilidad al parámetro dt se observa al notar el aumento del valor de R^2 conforme dt reduce, sin embargo, el aumento no es lineal, y a medida que disminuye el diferencial, la pendiente de esta tendencia decrece, mientras tanto el tiempo de cálculo computacional incrementa exponencialmente con la disminución de dt , dificultando la implementación de la variación B, en especial al incrementar los grados de libertad del sistema.

Otra observación interesante surge al examinar los últimos puntos de la ilustración antes mencionada, pues para un valor de diferencial de tiempo igual a $dt/10$ el valor de R^2 se reduce frente a $dt/8$, esto puede sugerir la existencia de un valor óptimo de dt para el análisis. Este fenómeno podría ser explorado en investigaciones futuras.

Es importante tener en cuenta que existen ciertas limitaciones para la aplicación de la metodología propuesta, ya que no se considera la deformación por corte ni efectos de segundo orden (P delta), sin embargo, estos pueden ser implementados en caso de ser necesarios, así mismo, utilizar sismos muy densos o reducir el diferencial de tiempo a un valor muy cercano a cero incrementa el tiempo de cómputo notablemente.

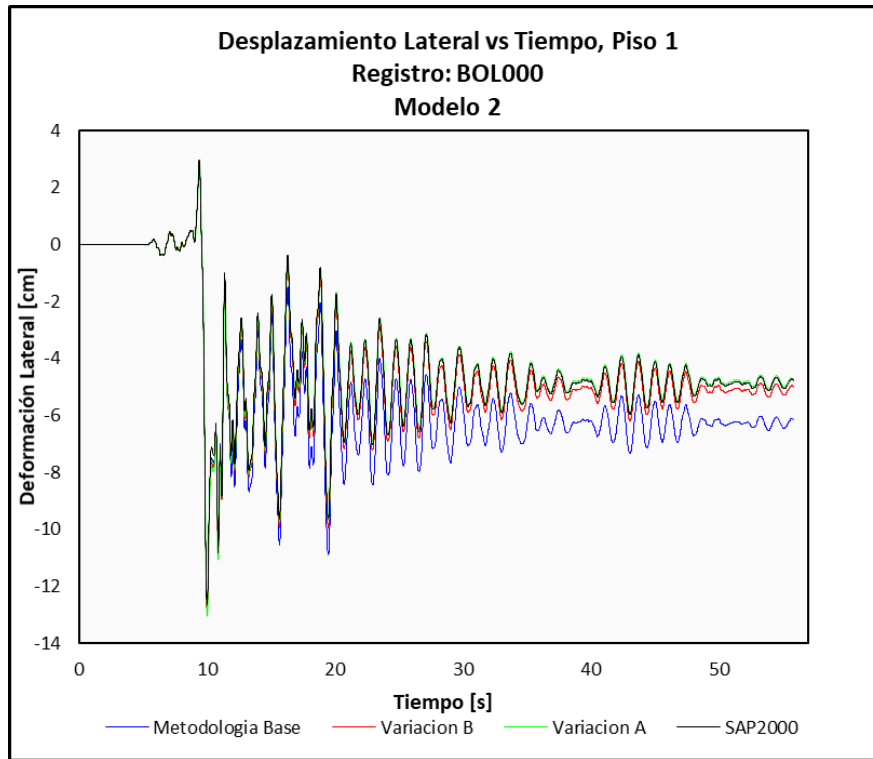
Para finalizar, es necesario aclararla que este trabajo de titulación no tiene como objetivo presentar una metodología con la intención de competir con complejos algoritmos de softwares comerciales, o tratar de abarcar casos específicos, al contrario, está orientado a comprender el proceso necesario para llevar a cabo el análisis no lineal tiempo historia, y entender todo el trasfondo de sus conceptos, operaciones y problemas, para así poder dar un uso correcto a estas herramientas. No obstante, la metodología propuesta obtiene resultados satisfactorios para fines didácticos y académicos.

6. BIBLIOGRAFÍA

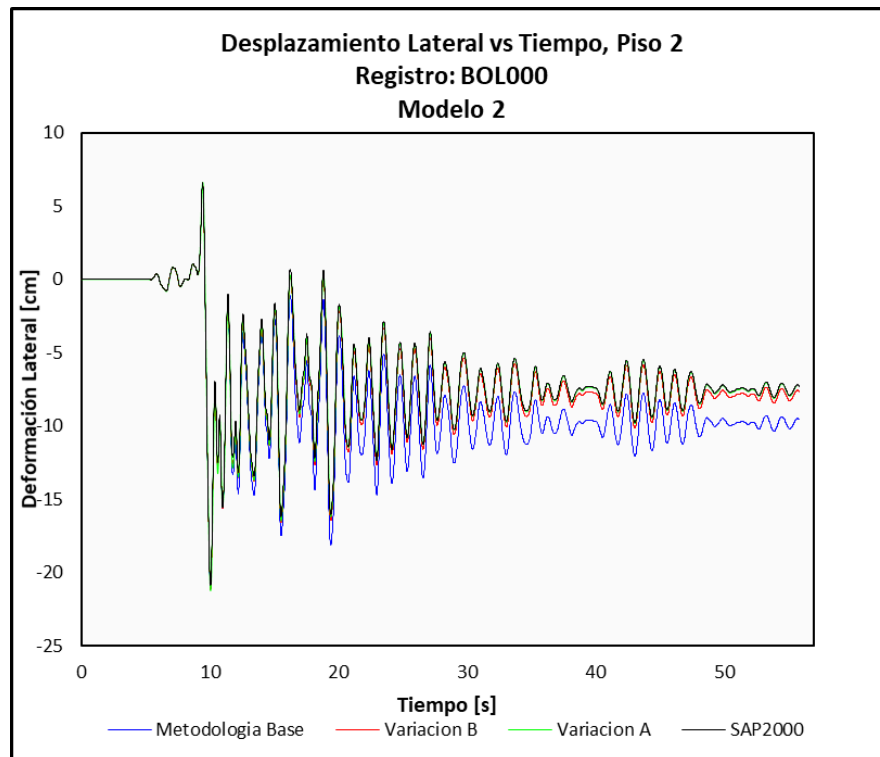
- Angulo, C. A. C. (2011). METODOLOGÍA PARA EL ANÁLISIS ESTÁTICO Y DINÁMICO DE ESTRUCTURAS METÁLICAS APLICANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS. 101.
- Barrea Salamea, D. V. (2018). Modelación elasto-plástica y análisis no lineal de una estructura especial de acero utilizando OpenSees. Universidad de Cuenca.
- Bernal, C. M. C. (2020). Desarrollo del programa de análisis lineal y no lineal de estructuras en dos dimensiones por el método de los desplazamientos. 107.
- Charney, F. A. (2008). Unintended Consequences of Modeling Damping in Structures. *Journal of Structural Engineering*, 134(4), 581–592. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2008\)134:4\(581\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2008)134:4(581))
- Charney, F., Lopez-Garcia, D., Hardyniec, A., & Ugalde, D. (2017). MODELING INHERENT DAMPING IN NONLINEAR DYNAMIC ANALYSIS. 13.
- Chopra, A. K. (2012). Dynamics of structures: Theory and applications to earthquake engineering (4th ed). Prentice Hall.
- Clough, R. W., & Penzien, J. (2015). Dynamics of structures (Second edition). CBS Publishers & Distributors.
- CSI. (2017). CSI Analysis Reference Manual. CSI.
- Delgado, B. L. R., Mendoza, B. V., Fredy, G., Cáceres, I. G., & Héctor, F. (2019). Comportamiento estructural del edificio prisma tower mediante el análisis dinámico no lineal, Lima 2019.
- Fertis, D. G. (2006). Nonlinear structural engineering: With unique theories and methods to solve effectively complex nonlinear problems. Springer-Verlag.
- Ghosh, S. K. (2003). Seismic design using structural dynamics (2000 IBC). International Code Council.
- Hibbeler, R. C., Murrieta Murrieta, J. E., Molina Solís, J. Escar, & Saldaña Sánchez, S. (2017). Mecánica de materiales. Pearson Educación de México.
- Humar, J. L. (2002). Dynamics of structures (2nd ed). A.A. Balkema Publishers.
- Javier, C. R. J., Eduardo, G. C. M., Damian, P. M. V., Alfonso, S. M., & Hugo, T. P. V. (s/f). Aproximación numérica y errores. 16.
- Karnovskii, I. A., Karnovsky, I. A., & Lebed, O. I. (2010). Advanced methods of structural analysis. Springer.
- Kassimali, A. (2012). Matrix analysis of structures (2nd ed). Cengage Learning.

- Luccioni, B. M. (1993). FORMULACION DE UN MODELO CONSTITUTIVO PARA MATERIALES ORTOTROPOS.
- Mathews, J. H., & Fink, K. D. (1999). Numerical methods using MATLAB. Prentice Hall.
- McCormac, J. C. (2007). Structural analysis: Using classical and matrix methods (4th ed). John Wiley.
- McKenzie, W. M. C. (2006). Examples in structural analysis. Taylor & Francis.
- Ministerio de desarrollo urbano y vivienda. (2014). PELIGRO SÍSMICO DISEÑO SISMO RESISTENTE. <https://www.habitatyvivienda.gob.ec/documentos-normativos-nec-norma-ecuatoriana-de-la-construccion/>
- Montgomery, D. C., & Runger, G. (1996). Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería. McGraw-Hill.
- Nagarajan, P. (2019). Matrix methods of structural analysis. CRC Press.
- Newmark, N. M. (1959). A Method of Computation for Structural Dynamics. Journal of the Engineering Mechanics Division, 85(3), 67–94. <https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0000098>
- Peralta Alvarez, M. (2012). ANÁLISIS ESTÁTICO NO LINEAL Y ANÁLISIS DINÁMICO NO LINEAL DEL HOSPITAL DE VIELHA.
- Pytel, A., & Singer, F. L. (1987). Strength of materials (4th ed). Harper & Row.
- Sathyamoorthy, M. (1998). Nonlinear analysis of structures. CRC Press.
- Wilson, E. L., & Computers and Structures, I. (2000). Three dimensional static and dynamic analysis of structures: A physical approach with emphasis on earthquake engineering. Computers and Structures.

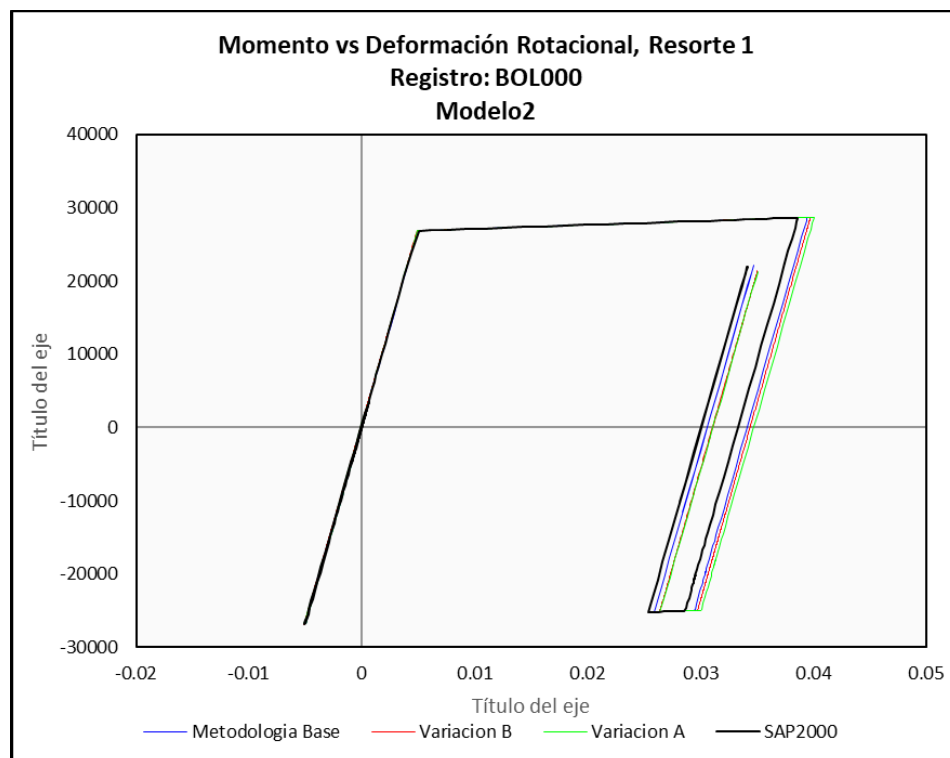
7. ANEXOS



Anexo 1



Anexo 2



Anexo 3

