



**UNIVERSIDAD DE CUENCA**

**Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación**

**Carrera de Matemáticas y Física**

**“Estrategia metodológica y recursos tecnológicos para  
la enseñanza de aplicaciones de las derivadas”**

Trabajo de titulación previo a la obtención  
del Título de Licenciado en Ciencias de  
la Educación en Matemáticas y Física.

**AUTORES**

Nathaly Azucena Coronel Quimis  
CI: 0107172900  
Correo electrónico: nathalycoronel.19@gmail.com

Jhonnatan Javier Solis Guaman  
CI: 0105222301  
Correo electrónico: jhonnatanjaviersolis27@gmail.com

**TUTOR**

Ing. Fabián Eugenio Bravo Guerrero  
CI: 0101654861

Cuenca, Ecuador  
12 de enero del 2022



## RESUMEN

El presente trabajo de titulación se refiere a la elaboración de una estrategia metodológica y recursos tecnológicos como ayuda al docente en la planificación y utilización de material didáctico para el desarrollo de los temas correspondientes en aplicaciones de las derivadas. Varias investigaciones señalan que existen falencias en los docentes a la hora de la ejecución de metodologías constructivistas en su enseñanza, pues la mayoría se limita a la realización de ejercicios de manera mecánica y el estudiante se convierte en una máquina repetitiva de algoritmos. Sin embargo, es pertinente y posible lograr que los saberes, técnicas, conocimientos e innovación de recursos sirva para crear herramientas adecuadas que logre mejorar el proceso educativo para un aprendizaje significativo. Para ello se ha realizado una investigación mediante la técnica de la entrevista a docentes del área de matemáticas de dos instituciones de bachillerato general unificado en la que se ha corroborado que los docentes aun manejan metodologías tradicionales, poco innovadoras y con recursos que no son los adecuados, lo cual dificulta el desarrollo de una clase constructivista. Cabe recalcar que las matemáticas es una de las materias que requiere varias estrategias para que se pueda lograr un aprendizaje significativo, sin embargo, se observa varias inconsistencias dentro de ella. Por lo tanto, se ha elaborado una estrategia metodológica que contiene diversos recursos didácticos como tecnológicos que sirven como apoyo pedagógico y enfocado en el paradigma constructivista para un uso adecuado de material, beneficiando directamente al docente en el avance de sus clases., pues una secuencia bien estructurada de temas a ser desarrollados con recursos contundentes y elaborados en el entorno virtual brindarán mejores resultados en el aula de clases.

**Palabras clave:** Estrategia metodológica. Recursos tecnológicos. Corriente constructivista. Guía didáctica. Material concreto.



## ABSTRACT

The present degree work refers to the elaboration of a methodological strategy and technological resources as an aid to the teacher in the planning and use of didactical material for the development of the corresponding topics in applications of derivatives. Several investigations indicate that there are shortcomings in teachers when it comes to executing constructivist methodologies in their teaching, since most are limited to performing exercises mechanically and the student becomes a repetitive algorithm machine. However, it is pertinent and possible to ensure that the learnings, techniques, knowledge and innovation of resources serve to create adequate tools that can improve the educational process for meaningful learning. For this, an investigation has been carried out through the technique of interviewing teachers in the area of mathematics of two unified general high school institutions in which it has been confirmed that teachers still use traditional methodologies, not very innovative and with resources that are not adequate, which makes difficult the development of a constructivist class. It should be noted that mathematics is one of the subjects that requires several strategies so that meaningful learning can be achieved, however, several inconsistencies are observed within it. Therefore, a methodological strategy has been developed that contains various didactic and technological resources that serve as pedagogical support and focused on the constructivist paradigm for an adequate use of material, directly benefiting the teacher in the advance of their classes since a well-structured sequence of topics to be developed with strong resources and elaborated in the virtual environment will provide better results in the classroom.

**Keywords:** Methodological strategy. Technological resources. Constructivist current. Didactic guide. Concrete material.



INDICE

|                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>INTRODUCCIÓN</b>                                                                   | 2   |
| <b>CAPÍTULO 1</b>                                                                     | 4   |
| <b>FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA</b>                                                         | 4   |
| 1.1 Educación tradicional: Una forma ambigua de enseñar.                              | 4   |
| 1.2 Reforma curricular en la Educación Ecuatoriana                                    | 6   |
| 1.3 El Constructivismo: una corriente pedagógica ideal para una educación de calidad. | 9   |
| 1.4 Estrategias didácticas y recursos tecnológicos                                    | 11  |
| 1.4.1 Estrategias didácticas en la enseñanza de las derivadas                         | 13  |
| 1.5 Recursos Tecnológicos                                                             | 14  |
| 1.6 Material Concreto en la enseñanza de las aplicaciones de las derivadas            | 16  |
| <b>CAPITULO 2</b>                                                                     | 17  |
| <b>METODOLOGÍA Y RESULTADOS</b>                                                       | 17  |
| 2.1 Metodología                                                                       | 17  |
| 2.2 Resultados                                                                        | 19  |
| 2.2.1 Análisis de las entrevistas                                                     | 20  |
| <b>CAPITULO 3</b>                                                                     | 28  |
| <b>PROPUESTA</b>                                                                      | 28  |
| 3.1 Esquema de la propuesta                                                           | 28  |
| 3.2 Temas de la estrategia metodológica                                               | 28  |
| 3.3 Estructura de las clases                                                          | 29  |
| 3.4 Propuesta de la Estrategia Metodológica                                           | 31  |
| <b>CONCLUSIONES</b>                                                                   | 180 |
| <b>RECOMENDACIONES</b>                                                                | 181 |
| <b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>                                                     | 182 |



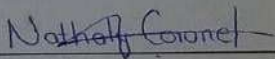


Cláusula de propiedad intelectual

---

Nathaly Azucena Coronel Quimis, autora del trabajo de titulación Estrategia metodológica y recursos tecnológicos para la enseñanza de aplicaciones de las derivadas, certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor/a.

Cuenca, 12 de enero del 2022



Nathaly Azucena Coronel Quimis

0107172900



Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio Institucional

Nathaly Azucena Coronel Quimis en calidad de autora y titular de los derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación "Estrategia metodológica y recursos tecnológicos para la enseñanza de aplicaciones de las derivadas" de conformidad con el Art. 114 del CODIGO ORGANICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozca a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la ley orgánica de Educación Superior.

Cuenca 12 de enero del 2022.

Nathaly Azucena Coronel Quimis

0107172900



Cláusula de propiedad intelectual

---

Jhonnatan Javier Solis Guaman, autor del trabajo de titulación “Estrategia metodológica y recursos tecnológicos para la enseñanza de aplicaciones de las derivadas”, certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor/a.

Cuenca, 12 de enero del 2022

Jhonnatan Javier Solis Guaman

0105222301



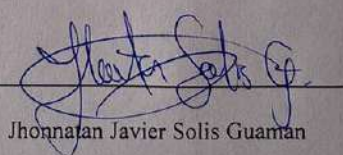


Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio Institucional

Jhonnatan Javier Solis Guaman en calidad de autor y titular de los derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación “Estrategia metodológica y recursos tecnológicos para la enseñanza de aplicaciones de las derivadas” de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozca a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la ley orgánica de Educación Superior.

Cuenca 12 de enero del 2022.

  
Jhonnatan Javier Solis Guaman

0105222301



## DEDICATORIA

A Dios pues si he llegado hasta aquí ha sido gracias a su bondad y amor, cada día me sorprenden ver los propósitos tan maravillosos que tiene para mí.

Jacqueline, llamarte madre te queda corto, amiga es insuficiente, verte es mirar el rostro de un ángel, tus lecciones me hicieron entender que la vida no funciona sin un propósito, y que Dios es la receta principal para cada triunfo. Te amo mamá.

Emily, hermana en tu corta edad me has enseñado tanto de la vida es por eso que este triunfo es tuyo pues no lo hubiese alcanzado sin ti, sin duda eres la fuerza que necesito para querer superarme cada día más. Verte triunfar es parte de mis propósitos.

Papá, sin duda me heredaste el coraje y la resistencia gracias por ser parte de mi formación y de mi vida.

Doménica, por estar conmigo sin importar el tiempo ni espacio del trayecto, por tu generosidad, por la grandeza de tu corazón, te admiro y siempre estaré orgullosa de ti. Honro como nos hemos cuidado durante tantos años, realmente eres un regalo en mi vida.

Jhonnatan, contigo aprendí que la amistad es una decisión que hace que la vida valga la pena, que sea digna, y que todos los momentos que compartimos sean valiosos. Gracias por acompañarme en todo este caminar.

Padrinos, han sido una clave fundamental en mi camino su apoyo, preocupación, constancia y ejemplo, también me han llevado hasta donde estoy. Soy muy afortunada de tenerlos en mi vida.

Familia, por confiar en mis acciones, por darme ánimos en cada paso que he dado y por el amor inmenso que me han entregado.

A quienes han sido parte de mi vida académica, docentes, amigos, compañeros, conocidos, es difícil hacer dedicatorias cuando mucha gente cabe en tu corazón, pues de todos he aprendido y me llevo lo mejor de cada uno. A todos y cada una de las personas que son parte de mi dedicatoria y de mi vida en verdad los amo.

Nathaly



## DEDICATORIA

Este trabajo de titulación se lo dedico al Divino Niño Dios y la Virgen del Cisne, gracias a la Fé depositada en ellos, siempre he cumplido mis metas.

Y especialmente a mi eterno ángel en el cielo, gracias a su apoyo incondicional, a su infinito amor y su presencia en los momentos importantes de mi corta vida, gracias a todo ello he podido culminar mi carrera, siendo este uno de los tantos logros que están por venir. Con mucho amor dedico este trabajo de titulación a Ud. Mamita Victoria en donde quiera que se encuentre.

Jhonnatan



## AGRADECIMIENTO

A Dios, porque gracias a su bondad y amor hemos adquirido la sabiduría para poder culminar nuestra etapa académica a pesar de las dificultades que se nos han presentado en el trayecto de la misma.

A nuestras familias, pues ellos nos han brindado el apoyo y la motivación necesaria para poder salir día tras día a cumplir nuestros propósitos.

A los docentes de la carrera de Matemáticas y Física, ya que debido a los conocimientos y experiencias compartidas hemos logrado alcanzar la meta que nos propusimos hace 5 años atrás, en especial al Ing. Fabián Bravo pues a través de sus tutorías, consejos, enseñanzas y su valioso tiempo hemos terminado nuestro trabajo de titulación.

Nathaly – Jhonnatan



## INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de titulación desarrolla una estrategia metodológica con recursos tecnológicos dirigida hacia el docente como apoyo para la cátedra de las aplicaciones de la derivada que forma parte del cálculo diferencial, se describe como una herramienta pedagógica esencial utilizada cuando el docente necesite brindar conceptos, explicar funciones, gráficas o idealizaciones haciendo énfasis en que contenga los puntos clave de cada desarrollo del tema y que los mismos no se deslinden de lo que se dispone a enseñar.

El propósito de la estrategia metodológica es que el docente en el desarrollo de sus clases use una pedagogía diferente a la tradicional, y promueva una enseñanza basada en el constructivismo. En la estrategia metodológica se encuentra presente el desarrollo de juegos lúdicos, animaciones, desarrollo de ejercicios, simulaciones, uso de material concreto para dinamizar y agilizar el proceso educativo.

Una de las causas más importantes para la creación de esta estrategia metodológica y recursos tecnológicos fue la poca o nula existencia de material que pueda utilizar el docente en el desarrollo de las aplicaciones de las derivadas, tomando en cuenta que estamos en un período donde la tecnología ha explotado todo de sí misma y la cual puede ser utilizada en el ámbito educativo, siempre y cuando se la maneje a conciencia generando resultados favorables para el docente y el estudiante. Es saber de todos que hay una infinidad de material conceptual en libros y en la web, pero no existe material virtual interactivo en donde se desarrolle dichos conceptos, que muchas de las veces no son comprendidas por el estudiante, lo cual genera un gran problema en su aprendizaje.

El desarrollo de la investigación en el presente trabajo tuvo la finalidad de conocer cuáles eran las metodologías principales de enseñanza que utilizan los docentes para brindar la cátedra de las derivadas, así como conocer cuáles son los recursos didácticos o tecnológicos que ellos utilizan, sintetizando en que existe poca utilización de la pedagogía constructivista., por ende, desconocimiento y poco uso de herramientas virtuales y de recursos didácticos.

Cabe destacar que el material tanto físico como virtual que usan los docentes hoy en día son muy importantes para la garantía de la enseñanza. Promover y estar actualizado





oportuna y correctamente en dicho material, asegurará una práctica docente efectiva y a la par con los estándares educativos contemporáneos, además, de los beneficios que llevan consigo adaptar una correcta estrategia metodológica en el aula de clase.

En el capítulo I se analiza la educación tradicional descrita como una forma ambigua y poco estructurada de aprender, se analiza la reforma curricular presente en las aulas ecuatorianas y cómo funcionan en las clases de matemáticas, además se examina el constructivismo como corriente pedagógica ideal para la enseñanza, así como las estrategias didácticas y los recursos tecnológicos utilizados por los docentes y como se puede agilizar y dinamizar las clases de mencionada asignatura.

En el capítulo II se desarrolla netamente la investigación sobre el manejo de la corriente pedagógica tradicional y constructivista, así como en qué medida están preparados docentes en la utilización de recursos didácticos y herramientas tecnológicas para innovar en sus clases de aplicaciones de la derivada, dicha investigación consiste en entrevistas previamente planificadas a los docentes de tercero de bachillerato del Colegio Benigno Malo y la Unidad Educativa La Inmaculada.

La propuesta que se presenta en el capítulo III está diseñada con el objetivo de utilizar el material virtual para lograr impartir los conceptos clave que se necesita para desarrollar las clases, a su vez poseen links de distintos videos, juegos en línea, juegos lúdicos, simuladores, actividades online, que permite que el estudiante agilice la captación de conceptos, teoremas y pasos utilizando la tecnología actual que se encuentre cerca de él, a su vez contiene uso de material concreto y prácticas de laboratorio matemático con el fin de abarcar la mayor cantidad de recursos bien planificados en una sola clase.

En el apartado de la investigación, se dio por medio de entrevistas virtuales, ya que como es de conocimiento general por la COVID19, el país estaba atravesando una situación riesgosa por el tema de contagios masivos. Por lo tanto, se usó los medios virtuales para ejecutar las entrevistas con los docentes de terceros de bachillerato del Colegio Benigno Malo y de la Unidad Educativa La Inmaculada que en ese momento eran encargados de brindar la cátedra de derivadas en los cursos mencionados. Al ser cuatro docentes: tres hombres y una mujer, la muestra es bastante pequeña, por lo que fue una muestra no probabilística y por ende resultó factible utilizar la técnica de entrevistas.



## CAPÍTULO 1

### FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

#### 1.1 Educación tradicional: Una forma ambigua de enseñar.

A pesar de que la sociedad actual ha estado en constante cambio el sistema educativo no ha ido a la par, es cierto que ha tenido varios cambios en diferentes niveles como la cátedra de los docentes, planificaciones, instrumentos de evaluación, pero aún existen diversos componentes que detienen este desarrollo, uno de ellos y de gran importancia es el uso arraigado de metodologías tradicionales. Según Echeverría (2018) el origen de esta escuela tradicional surge con la burguesía y la constitución de estados nacionales donde el orden y la autoridad son los pilares fundamentales de este modelo, el docente tiene un papel protagónico que es la enseñanza autoritaria pues es dueño del conocimiento y la información, es decir es el eje principal de la clase, la cual gira alrededor de su sabiduría, esto trae consigo relaciones de dominio, subordinación y competencia. En esta educación el alumno tiene un papel pasivo y receptivo de conocimientos, llegando a desarrollar la repetición y memorización de los contenidos, el alumno no tiene la capacidad de tomar sus propias decisiones pues el docente es el que lleva la batuta y el poder en su educación.

La educación tradicional se manifiesta de diferentes formas, en donde la escuela es la principal fuente de información y de transformación cultural se considera que la mejor forma de preparar al alumno es formando su inteligencia, su capacidad de resolver problemas, su atención y su esfuerzo. Alvarado (2017) sostiene que el docente utiliza el término “enseñanza” como un proceso de transmisión de conocimientos, impone contenidos, toma decisiones, crea secuencias y asigna el ritmo de aprendizaje del alumno.

Este modelo de aprendizaje tradicional frontal, basado en la copia y memorización, no le permite al alumno tomar decisiones acerca de su aprendizaje, ni el docente preocuparse por las dificultades o inquietudes que esté presente en el transcurso de la clase ya que su única preocupación es planificar su cátedra y por consiguiente los alumnos recibir el conocimiento de sus mentores como unas esponjas absorbentes. Santana Bonilla, P. J., Eirín Nemiña, R., & Marín Suelves, D. (2017). La clase es de transmisión verbal de gran información y muy poca bibliografía en la cual se utiliza el pizarrón, y como gran novedad diapositivas llenas de contenido, las cuales no establecen habilidades, o experiencias



vivenciales con muy pocas actividades prácticas es decir no utiliza recursos o herramientas didácticas, pues va por un solo camino.

Según Gutiérrez (2016) el manual escolar es el único documento de aprendizaje que se le permite consultar al alumno y todo lo que busque fuera de él lo puede llevar a la distracción y confusión. Un claro ejemplo es del "antiguo" caso de un docente de matemáticas que enseñaba a desarrollar un ejercicio de una manera, el alumno debía limitarse a desarrollar de la misma forma sin investigar en otras fuentes pues debe creer la verdad de lo investigado por el docente, por lo tanto, no fomentaba la investigación y la creatividad de los alumnos pues solo aprende por medio de los docentes y poco uso de fuentes de consulta.

Analizando en el campo de las matemáticas se sabe que la enseñanza está orientada a seguir reglas y procedimientos generados por el docente en donde no se tiene un fin específico más que servir como instrucciones para llegar a determinada respuesta. Como señalan Moreano, Asmad, Cruz y Cuglievan (2008) en un estudio realizado en la ciudad de Lima, Perú los docentes parten primero de un ejercicio modelo, el cual resuelven explicando paso a paso y desmenuzando la tarea en sus componentes para asegurar la comprensión, por consiguiente, no se genera inquietudes que activen en los estudiantes la discusión, la reflexión o el análisis de determinada situación y por ende no desarrollan su razonamiento ni sus habilidades, herramientas claves para examinar cualquier situación asociada con las matemáticas.

Cabe recalcar que enseñando de esta manera se genera ideas erradas de lo que realmente son las matemáticas, se enfatiza en que existe un solo camino para llegar a la respuesta y los otros caminos son excluidos ya sea por lo que les quita tiempo o que al aplicarlos se cometen muchos errores que los docentes no están preparados para asumirlos y explicarlos correctamente ya que, al preparar su clase seguramente no han tomado en cuenta que pueden surgir otras inquietudes.

En este tipo de enseñanza matemática tradicional no se puede dejar de lado la repetición de ejercicios, técnica utilizada erradamente por el docente ya que una vez que se ha aprendido el procedimiento correcto se necesita reforzar y la única forma es la de enviar una infinidad de ejercicios en los que pueda utilizar el procedimiento explicado en sus clases. Moreano, Asmad, Cruz y Cuglievan (2008).



Además, la preocupación de los docentes por el tiempo de resolución de ejercicios los lleva a tomar en cuenta que mientras el estudiante resuelva más rápido el ejercicio sabe más y el que resuelve en mayor tiempo sabe menos, concepción errada que está transmitiendo directamente a sus alumnos y por ende generando percepciones que no van de la mano de las matemáticas. Por lo tanto, el no conectar las matemáticas con la realidad de cada alumno, hace que este pierda el interés por aprender la asignatura, considerándola de poca utilidad para la cotidianidad y usándola solamente para cumplir un requisito curricular en su vida estudiantil. Pérez-Morales, M. I. (2014).

El rol del docente necesita ser reestructurado totalmente, enfocado a encontrar nuevas formas de enseñar, conectando los contenidos con situaciones en donde se puedan aplicar y fusionarlos correctamente para que el estudiante lo utilice y se genere un aprendizaje significativo.

Pero con los cambios que hay en la educación es necesario que el docente también vaya a la par de los mismos, generando nuevos recursos didácticos apoyándose en el avance de las tecnologías de la educación con diferentes herramientas que estén a su alcance y les permite mejorar el desarrollo de la clase mediante un modelo constructivista que está fundamentado en la propuesta del Mineduc en la actualización del 2016 del currículo ecuatoriano, el mismo implica una transformación en el uso de la metodología estratégica y técnicas con el fin de desarrollar habilidades meta cognitivas en los estudiantes, para que así puedan motivarse por aprender e investigar, dejando atrás el modelo conductista que se ha mantenido desde varios años. Valverde (2017).

## **1.2 Reforma curricular en la educación ecuatoriana**

Durante muchos años en el contexto ecuatoriano se ha ido avanzando y mejorando el sistema educativo, de modo que se ha permitido estabilizar y mejorar el mismo, uno de los casos más importantes dentro del mejoramiento de la educación ecuatoriana es el de la creación y ejecución de una nueva reforma curricular, dicha reforma se presentó en el año de 2016 con diferentes pautas, intenciones y observaciones de reformas curriculares anteriores.

La reforma curricular del 2016, en la cual el sistema educativo actual tiene sus bases, es un análisis y modificación de dos reformas antecesoras: la del año 1996 y la del año 2010, según Herrera y Cochancela (2020) señalan que las reformas curriculares en Ecuador han



sido base para el enriquecimiento de la estructura de las propuestas que generalmente responden a las necesidades del cuerpo docente de las Instituciones Educativas, dicha reforma ha sido realizada para enriquecer el acto educativo, mejorar las condiciones para la diversidad de cualquier índole de los estudiantes, adecuación de contenidos de acuerdo al enfoque constructivista y delegar responsabilidades para la construcción contextualizada de procesos de enseñanza y aprendizaje.

Dentro de la actual reforma curricular entre los fines más importantes que se plantea es que los contenidos de las distintas asignaturas creen en el estudiante un espíritu de investigación, de motivación, de creación de su propio aprendizaje en donde se logre explotar al máximo sus capacidades cognitivas y receptivas, según Herrera y Cochancela (2020) la reforma curricular actual establece contenidos más complejos los cuales necesitan componentes de tipo procedimental y actitudinal con enfoques socio-constructivistas de la enseñanza y a su vez preocupándose por la movilización de los contenidos hacia otros contextos o situaciones de la vida del alumnado.

Según Ortiz (2017), cuando describe la experiencia señala algunos aspectos importantes que han ido cambiando conforme pasa el tiempo luego de ausentarse de la docencia, por ejemplo: la forma de dar las clases, el tipo de metodología utilizada, incluso los contenidos tratados o la forma de evaluación, Ortiz (2017), señala además que “dichos cambios han mejorado notablemente, el proceso educativo ya no es el mismo de hace 15 años” (p. 157), de esta manera se evidencia que los distintos elementos presentes dentro de las reformas curriculares han ayudado a generar un cambio en la enseñanza.

En el marco de las matemáticas, la reforma curricular ecuatoriana del 2016 trabaja en torno a la perspectiva epistemológica emergente, denominada pragmático-constructivista, en donde se describe que el alumno alcanza aprendizajes significativos a partir de utilizar los conocimientos adquiridos en el aula de clase. (Ministerio de Educación, 2016a), sin embargo, en los resultados generales de evaluaciones matemáticas se evidencia que siguen siendo bajas de acuerdo a los resultados expuestos en las pruebas PISA del año 2018 obteniendo para ese año un 29% en el nivel de competencia. Dichos resultados son de tal índole ya que la mayoría de docentes se siguen centrando en brindar sus clases utilizando la pedagogía tradicional, porque se le hace más fácil o no tiene tiempo o predisposición para preparar clases



innovadoras, por último, los estudiantes no investigan e indagan y sólo memorizan los contenidos a la hora de aplicar sus lecciones (Ponce, 2000).

Por otro lado, la preocupación del gobierno local en mejorar la calidad de educación ha desarrollado textos guías tanto para el estudiante como para el docente en donde se encuentran tareas de acuerdo a la vida diaria del alumno, a su vez actividades individuales, grupales con uso de material concreto y recursos tecnológicos. Según el (Ministerio de Educación, 2016b) señala que el texto oficial que guía al docente, le apoya a desarrollar la clase de matemática de forma creativa, dándole información contextual e histórica, ampliando conceptos, desarrollando ejercicios modelo, facilitándole metodologías para la resolución de problemas., a su vez propone actividades de investigación, propone actividades grupales, nuevas formas de para evaluar aprendizajes trabajando en torno al paradigma constructivista (Ministerio de Educación, 2016a).

Analizando la realidad en las aulas ecuatorianas el currículo matemático vigente contiene demasiados temas a desarrollar, en donde el docente se ve afectado directamente por el tiempo y trabaja demasiados tópicos sin que se genere aprendizajes significativos en el alumno. Además, que los textos guías contienen actividades centradas en el paradigma constructivista en donde no son bien calculados los tiempos para desarrollarlos adecuadamente, sumado a que los docentes tienen que llenar varios formularios, reportes, informes con el fin de cumplir con sus tareas administrativas, dejando escaso tiempo para una buena planificación de sus clases posteriores. Bravo Guerrero, F. E. (2020). Situaciones que afectan directamente al aprendizaje de los estudiantes en donde tienden a aprender débilmente varios temas en poco tiempo.

Centrándose en los estudiantes del tercer año de bachillerato general unificado, las propias instituciones tienden a utilizar los últimos meses para prepararlos para los distintos exámenes finales como son los exámenes de grado y ahora en el 2021 el examen "transformar" para el ingreso a la universidad, dejan de lado temas importantes a desarrollar y por ende nuevamente los estudiantes son los afectados ya que quedan con vacíos que bien pueden servirles en su desempeño en la universidad.

Finalmente, los textos y por ende el currículo de matemáticas deben ser analizados y sintetizados de tal manera que se seleccione los temas que necesita aprender el alumno, con



tiempos ideales adaptados para cada tema, así como el manejo del entorno virtual que hoy en día es en donde mejor se desenvuelven los adolescentes, sumado a que las instituciones deben brindar capacitaciones constantes a sus docentes en temas como: planificaciones, uso de Tics, técnicas de evaluación y técnicas de motivación, de modo que los estudiantes empiecen a tener un papel activo en sus clases, se empapen de aprendizajes significativos y logren obtener un gusto por las matemáticas.

### **1.3 El Constructivismo: una corriente pedagógica ideal para una educación de calidad.**

Para que se dé una buena educación, de calidad se necesitan de componentes planificados, estructurados y adaptables que se desarrollan dentro y fuera de las aulas, permitiendo que el docente por varios caminos logre enlazar al estudiante con el conocimiento, precautelando que en su mayoría se transfieran los saberes necesarios y óptimos para la utilización de dichos aprendizajes en distintas actividades de la vida real y de esta manera se le proporcionen una significatividad de lo que aprendió al ir a la Institución Educativa.

Ortiz (2015) indica que, el conocimiento es una construcción del ser humano: cada persona percibe la realidad, la organiza, le da sentido en formas de constructos, gracias al funcionamiento del sistema nervioso central, lo que edifica un todo coherente que da sentido y unicidad a la realidad, además es importante mencionar que las realidades construidas de cada alumno son diferentes entre sí, dependiendo de las situaciones sociales, culturales, y emocionales que el alumno experimenta día tras día, además de la motivación externa o interna que posea para lograr abordar los conocimientos con eficacia.

De acuerdo a Bravo, Trelles y Barraqueta (2017), el paradigma constructivista es una actividad dinámica y participativa, donde el estudiante encuentra su propia motivación como herramienta principal para la interacción con el medio, la sociedad y la cultura, ligándolos a conocimientos previos adquiridos para luego incorporarlos cuando tengan significado y trascendencia en situaciones que lo ameriten, con esta interpretación el docente concibe una serie de vías para trasladar al estudiante desde lo que él sabe hacia lo que se pretende que él sepa, siendo una guía entre estos dos puntos y a su vez dando las herramientas necesarias, material concreto, recursos tecnológicos, recursos didácticos, entre otros.





La Teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel es una de las teorías constructivistas más importantes que existen actualmente, puesto que en dicha teoría el sujeto se relaciona con las ideas nuevas que recibe con aquellas que ya tenía previamente incorporadas en su cerebro (Ortiz, 2015), dicho proceso se lo realiza con ayuda de 3 aspectos: lógicos, cognitivos y afectivos (Lamata & Domínguez, 2003). El aspecto lógico nos indica que el material que se va a transmitir a los alumnos debe tener una coherencia interna que favorezca su aprendizaje intentando que logre establecer una relación entre lo que el alumno aprende y como dicha información le podría servir en una situación de su diario vivir, el aspecto cognitivo toma en cuenta las habilidades de razonamiento y su capacidad de análisis que le permitirá ir descartando y seleccionando la información que él pueda considerar como válida y utilizable, por último el aspecto afectivo se centra en los estados emocionales de los alumnos y docentes que den auge o trunquen el proceso educativo, ya que interviene en una medida considerable cómo es que se siente emocionalmente el alumno dentro y fuera de su aula de clases y por ende cómo modifica el estado emocional, su capacidad de receptar información y su capacidad de aprender.

Para Ausubel (1983) “El aprendizaje del alumno depende de la estructura cognitiva previa que se relaciona con la nueva información” (p.1). Papalia, Wendkos y Duskin (2007) en algunos estudios nos indican que los distintos conceptos, definiciones y elementos que se revisen en cualquier materia deben ser significativos y aportar en algo a los estudiantes, para luego de ser tratados conjuntamente con la ayuda del docente poder asimilarlos con los conceptos y elementos aprendidos anteriormente.

El paradigma constructivista en las matemáticas juega un papel muy importante en la enseñanza por parte del cuerpo docente, ya que la asignatura en su mayoría contiene competencias como el análisis, síntesis, razonamiento y observación que llevado de la mano de acciones bien planificadas, estructuradas y elaboradas en base a conocimientos propios de los alumnos en su vida diaria o experiencias que hayan tenido conectando a los temas matemáticos a desarrollar, surgirá diferentes interpretaciones de la realidad y es ahí donde el estudiante podrá reflexionar y vincular los saberes con su cotidianidad. Bolaño Muñoz, O. E. (2020)



Melquiades, A (2013), expone que para el aprendizaje de las matemáticas el alumno tendrá que desarrollar su inteligencia, esta le generará mayor desarrollo de habilidades cognitivas propias de cada persona, de manera que sepa con que conceptos o desarrollos proceder cuando se le presente determinado caso matemático.

Además, la exposición de diferentes ejercicios relacionándolas con la compra de la canasta básica, pago de servicios, ahorro o gasto de dinero, conteos de prendas de vestir, etc. combinándolos con el uso de material palpable o material didáctico en donde los alumnos estén concentrados y reflexionando sobre cómo se conectan los saberes con dichos objetos se obtendrá una mayor comprensión e incluso pondrán en práctica lo aprendido en clase en sus hogares.

Al mismo tiempo el rol del docente dentro del aula de acuerdo al constructivismo tiene que ser más activo y creativo, es decir realizar otras actividades que le permitan al estudiante desarrollos cognitivos, a su vez creando buenas planificaciones de clases con tiempos correctos, en donde se analice y seleccione los conceptos y elementos ideales para no deslindar de lo que se quiere transmitir, siempre respetando las realidades individuales de los alumnos y su ritmo de aprendizaje. Waldegg, G. (1998).

Algunos autores como (Mora, 2013; Cedeño, 2014; Erreyes, 2019; Correa, Vinueza & Lazo, 2017) señalan la efectividad del constructivismo y sus diferentes autores como corriente pedagógica principal dentro de sus investigaciones y aplicaciones, demostrando así que dicha corriente con la que se ha establecido la reforma curricular desde el año 2016 sea de gran importancia y gran validez en el contexto nacional.

#### **1.4 Estrategias didácticas y recursos tecnológicos**

Dentro de la educación contemporánea es necesario adecuar, crear y modificar las formas de dar clase por parte de los docentes para obtener mejores resultados conforme se vaya avanzando en la materia, también utilizar los recursos y corrientes pedagógicas necesarias para que el proceso educativo sea el mejor. En este marco, Vélaez de Medrano y Vaillant (2011) exponen que los docentes durante su proceso de formación permanente, deben alcanzar competencias innovadoras y significativas, además destrezas y habilidades para ser integradas a las Tecnologías de la Informática y la Educación (Tics) como estrategia didáctica, además, Martínez (2008) señala que la innovación educativa consiste en la



congregación de estrategias didácticas empleadas dentro del campo educativo con el objetivo de mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Algunas investigaciones (Campos, 2000; Feo, 2010; y Delgado & Solano, 2015) nos señalan que las estrategias didácticas son una serie de procedimientos que deben estar secuenciados por parte del docente para ser aplicados a los estudiantes, a su vez las estrategias que se elijan deben tener el propósito fundamental de facilitar la construcción, consolidación y transferencia de información, de tal manera que se coloquen las acciones pertinentes para construir y lograr las diferentes metas impuestas por cada unidad de estudio.

Cabe resaltar que las estrategias didácticas bien planteadas y estructuradas ayudan de manera directa al desarrollo de las competencias que se le están imponiendo al estudiante. El análisis de qué estrategias se las puede utilizar dependen de dos puntos clave como lo indican Díaz y Hernández (1999): el momento de la clase en que se ocuparán, ya sea durante el inicio, desarrollo o cierre, y también la forma en cómo se presentarán dichas estrategias en cada momento de la clase., es decir para cada etapa de la clase se debe planificar correctamente, calcular el tiempo necesario y a su vez conveniente para desarrollar las actividades constructivas.

En los momentos que existen en el desarrollo de la clase como son inicio, desarrollo y cierre, es posible identificar los tipos de estrategias que se pueden utilizar dentro de cada etapa., Díaz y Hernández (1999) señalan 3 tipos de estrategias en una secuencia de enseñanza las cuales son: **estrategias pre instruccionales** aquellas que “preparan y alertan en relación a qué y cómo aprender, incidiendo en la activación o generación de conocimientos previos” (p. 8) estrategias que nos ayudarán a activar la atención y por ende la susceptibilidad del alumnado para asimilar los conceptos nuevos. En cuanto a las **co instruccionales**, éstas “apoyan los contenidos curriculares durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, fomentando la mejora de la atención y detección de la información principal” (p. 8), con esta estrategia el alumno organiza la información, la relaciona, la analiza y la sintetiza. En lo que respecta a las **pos instruccionales**, “se presentan al término del episodio de enseñanza, permitiendo una integradora e incluso crítica del contenido” (p. 9) esta estrategia sirve para determinar cuáles son los puntos fuertes y rescatables de la clase, así como preguntas y una revisión de la clase en general.



### 1.4.1 Estrategias didácticas en la enseñanza de las derivadas

La estrategia didáctica planteada en la propuesta está basada en los aspectos propios de diseño instruccional (Dick, Carey & Carey, 2005; Gagné, Briggs & Wagner, 1992). Estos se relacionan con: 1) los estudiantes con sus características y conocimientos previos; 2) los objetivos de aprendizaje; 3) los contenidos con estructuración y secuencias adecuadas para el logro de los aprendizajes; 4) la metodología enfocada en la estrategia didáctica, por medio de métodos, técnicas, procedimientos y evaluación igualmente, debe enfocarse en el análisis de tareas vinculadas con las experiencias de aprendizaje; 5) los recursos didácticos y tecnológicos y 6) el tiempo y lugar de la actividad didáctica, ya que se relacionan con el contexto en que se está produciendo el aprendizaje.

Autores como Díaz, Cruz, Velázquez y Molina (2019) señalan textualmente que “la enseñanza de la derivada resulta bastante problemática” (p. 10) exponen que, aunque se enseñe en las aulas a realizar algunos tipos de derivadas la conexión que existe entre la realidad del alumno con el uso que se podría dar de esta parte de la matemática todavía no se encuentra bien compactada en su totalidad y los estudiantes pudiesen caer en una educación que le genere más preguntas que respuestas derivando en concepciones erradas de lo que se quiere enseñar. No obstante, Prada y Hernández (2014) aducen también que las nociones o “las concepciones pueden ser un obstáculo en el proceso de enseñanza” (p.51).

En la enseñanza de las derivadas y las aplicaciones de la mismas según Aldana, et al (2016) se requiere “centrar la labor educativa en el aprendizaje del novato, mediado por el docente, en el marco de un modelo educativo innovador basado en los estilos de aprendizaje, la tutoría, la resolución de problemas, la comprensión del lenguaje, la comunicación y el desarrollo de competencias tanto de alumnos como de docentes” (p.20). Por ello es importante plantear estrategias didácticas que satisfagan los objetivos de enseñanza que se dan dentro del aula, de manera que los estudiantes identifiquen y analicen modelos matemáticos, técnicos, económicos productivos vinculados a sus próximos perfiles laborales y puedan resolverlos correctamente apoyado en los recursos tecnológicos existentes y de los asistentes matemáticos, a manera que con dichas estrategias se produzcan aprendizajes sólidos en base de actividades interactivas, creativas que despierten el interés y el gusto por la asignatura. Díaz, Y., Cruz, M., Velázquez, Y., & Molina, S. A. (2019).



Además, se debe trabajar en estrategias didácticas que integren distintas tecnologías, como el uso del software educativo, y desarrollar actividades de éxito Pineda, W. B., Suárez, C. A. H., & Avendaño, W. R. (2020)., esto con el fin de utilizar el medio virtual y tecnológico en el que se desarrolla la mayoría de tareas del diario vivir y encaminarlas a la enseñanza de la matemática y en este caso de las derivadas, precautelando y enfatizando el uso correcto de las herramientas y entornos virtuales para una educación contemporánea y de calidad.

### **1.5 Recursos Tecnológicos**

Los sistemas educativos se enfrentan a un gran desafío que es utilizar nuevas tecnologías de la información y la comunicación, para así motivar a los alumnos con herramientas y conocimientos necesarios en su proceso de aprendizaje. Según Zambrano (2017), los docentes y la enseñanza describen un impacto profundo en los recursos tecnológicos en los diferentes métodos convencionales de enseñanza y aprendizaje y en su forma de acceder al conocimiento y la información. Las instituciones de educación experimentan un cambio de cierta importancia en el conjunto del sistema educativo de la sociedad actual como son los desplazamientos de los procesos de formación de entornos convencionales a otros ámbitos.

Serrano (2017) afirma que los recursos tecnológicos están transformando la educación notoriamente, pues se ha cambiado la forma de enseñar, como también la forma de aprender el rol del docente y el alumno. El incorporar herramientas tecnológicas dentro de la educación tiene como función ser un medio de comunicación, intercambio de conocimiento y experiencias, instrumentos para procesar información, fuente de recursos, método lúdico y desarrollo cognitivo, lo cual lleva a una nueva forma de planificación por parte del docente pues en este proceso y con los cambios realizados en el sistema de educación el docente ya no es un gestor de conocimientos, sino que es un guía que permite orientar al alumno frente su aprendizaje.

Palmero, (2016) plantea que el uso de los recursos tecnológicos dentro del aula tiene varias ventajas algunas de ellas son:

1. Aumento del interés en el alumno por el aprendizaje, pues contribuye a su motivación y creatividad.



2. Impulso del aprendizaje autónomo, pues el alumno tiene la capacidad de elegir y se otorga una autonomía en el proceso de aprendizaje
3. Acceso no lineal a la información el protagonismo del alumno en cuanto a la adquisición de varios conocimientos adquiridos.

Además, los recursos tecnológicos ayudan a: análisis de material, disminución de tiempo a la hora de planificar, difusión rápida de información, la mayoría de contenido es gratuito y accesible, también dispone de aulas, bibliotecas, laboratorio, simuladores, entornos virtuales en general., en fin, gran cantidad de material que el docente puede utilizar para brindar su catedra y por ende el estudiante sentirse motivado y hasta un tanto curios por cómo puede utilizar la tecnología existente a su favor para mejorar su aprendizaje.

En el caso de los docentes en formación de matemáticas, se necesitan innovaciones que faciliten su aprendizaje. De esta manera el uso de los recursos tecnológicos es una alternativa para fusionar el aprendizaje significativo de las matemáticas con el diario vivir del alumno. Por ello es necesario crear recursos tecnológicos que ayuden a los docentes a clarificar conceptos matemáticos abstractos, en este caso las derivadas, sus aplicaciones e interpretaciones. Pineda, W. B., Suárez, C. A. H., & Avendaño, W. R. (2020).

En el marco de la matemática existe material potente y gratuito que permite que el docente logre aligerar su ejercicio de enseñar y por ende el estudiante asimila los conceptos de derivadas, gráficas y ejercicios de una manera eficiente Pinto, Gómez-Camarero & Fernández-Ramos (2012). Por ejemplo, existen software interactivos y gratuitos como es el caso de **Geogebra** que permite reunir geometría, álgebra, estadística y cálculo en registros gráficos, de análisis y de organización en hojas de cálculo, permitiendo dinamizar el estudio, **Graphmatica 2.4** se usa para resolver ecuaciones matemáticas con precisión, e incorpora cálculos y funciones numéricas, **Algebrus 3.2** un programa para aumentar tus conocimientos en matemáticas y estadística, **Symbolab** proporciona soluciones automatizadas paso a paso para los temas algebraicos, trigonométricos y de cálculo que abarcan desde la escuela intermedia hasta la universidad, **Modellus** permite el análisis de datos experimentales usando imágenes, animaciones, gráficos y tablas. Es muy útil para problemas de física y matemática, incluyendo mecánica, química, estadística, álgebra y geometría, por último, **Maple** es un



programa orientado a la resolución de problemas matemáticos, capaz de realizar cálculos simbólicos, algebraicos y de álgebra computacional.

Dávila Araiza (2010), quien realiza una propuesta metodológica para la enseñanza y el aprendizaje de problemas de optimización en un curso de Ingeniería expone las ventajas de trabajar con Geogebra, siendo un software de fácil manipulación en el cual no se necesita que el docente o usuario tenga conocimiento de programación para hacer animaciones o simulaciones de calidad, así como su utilización, los comandos, el ingreso de funciones o fórmulas no presentan mayor dificultad. El docente puede crear una simulación e ir manipulando los distintos deslizadores y en conjunto con sus alumnos analizar la manera en que la derivada se aplica a distintas situaciones de la vida cotidiana.

Finalmente la innovación curricular como la innovación tecnológica son procesos claves para desarrollar una buena calidad de educación, el docente debe poseer competencias TIC (Gamboa, Hernández & Prada, 2018; Hernández, Arévalo & Gamboa, 2016; Hernández, Gamboa & Ayala, 2016; Hernández, Prada & Ramírez, 2018), para construir ambientes innovadores mediante la selección de estrategias y TIC adecuadas para que sus estudiantes logren sus objetivos de aprendizaje (Martín, Hernández & Mendoza, 2017), especialmente en matemáticas (Arévalo, García & Hernández, 2019).

### **1.6 Material Concreto en la enseñanza de las aplicaciones de las derivadas**

El material concreto son instrumentos que el docente usa en las aulas de clase, para que los estudiantes obtengan un aprendizaje práctico-significativo pues son un gran medio lúdico y dinamizador que estimula el desarrollo de la memoria, la motricidad, la parte cognitiva, física entre otros. (Orozco, 2017). Dentro de las aplicaciones y ejercicios de optimización de las derivadas podemos implementar varios tipos de cajas cuadradas o rectangulares en las cuales se obtienen los volúmenes a través de diferentes tipos de cortes y de esta manera podemos comparar con ejemplos de la vida real.





## CAPITULO 2

### METODOLOGIA Y RESULTADOS

#### 2.1 Metodología

Varias asignaturas del entorno educativo disponen de una amplia gama de recursos y técnicas que permiten que los estudiantes de hoy en día logren aprender sus conceptos, definiciones y procedimientos en un tiempo relativamente corto, incluso son repetitivas para algunos temas y generalizables para otros tantos., sin embargo, para la enseñanza de las matemáticas no lo es tan sencillo ya que al ser una asignatura que estudia los números y sus relaciones entre ellos tienen un sinfín de teoremas, propiedades, reglas, corolarios, etc., a su vez que por iniciativa de la sociedad que rodea al alumno ha creado en él un temor por la asignatura dando como resultado una mala predisposición y por ende un mal desenvolvimiento en el desarrollo de los temas subyacentes de la misma.

Al ser un trabajo seleccionado y adaptado al mundo moderno para los alumnos de tercero de bachillerato general unificado, se busca la utilización de una metodología planificada, estructurada, modernizada y que este a la par con la tecnología para lograr un correcto aprendizaje y que este sea significativo, además, una amenidad con las diferentes aplicaciones de las derivadas y un correcto manejo de los temas gracias a los múltiples métodos de enseñanza y recursos virtuales ahora presentes en este gran mundo llamado internet, precautelando que sean ajustados a los temas y actividades a desarrollar.

#### Enfoque

Para la recopilación de la información se usó un enfoque cualitativo, ya que se necesita analizar cuáles son las opiniones de distintos docentes sobre el manejo de las clases de derivadas, cuáles son las técnicas y recursos de aprendizaje que ellos utilizan para dinamizar sus clases y cuáles son las falencias o debilidades que han tenido a la hora de desarrollar su cátedra, de esta manera podemos utilizar las aportaciones para mejorar la enseñanza del tema.



## **Técnica**

Se utilizó la técnica de entrevistas ya que permitió que el docente argumente su opinión y la defienda frente a una serie de preguntas, incluso manifieste su testimonio de experiencias que ha tenido con los estudiantes y cuál ha sido su proceder frente a las mismas.

El instrumento que se usó para la efectividad de la entrevista fue una guía de preguntas ya que son formas de interrogación reflexiva cuidadosamente seleccionadas de acuerdo a el problema y objetivos, las mismas fueron distribuidas de acuerdo a los ejes fundamentales que se plantearon con anterioridad para obtener respuestas contundentes sin que se deslinden de lo que se quiere averiguar.

Las entrevistas que se realizaron fueron dirigidas hacia 4 docentes de los terceros de bachillerato general unificado de la ciudad de Cuenca, de dos instituciones públicas diferentes, se eligió a los docentes de forma aleatoria y sin afines gracias a la asignación de estudiantes a las prácticas pre profesionales que se había desarrollado en las instituciones mencionadas, por último se dialogó previamente con ellos de forma virtual para el consentimiento de grabación y utilización de información de las entrevistas.

El lapso de duración de las intervenciones fueron de ente 20 a 30 minutos, Cabe recalcar que por su horario de trabajo de cada docente las entrevistas fueron realizadas en diferentes días y en diferentes horarios mediante la plataforma zoom. Luego de terminar con los 4 entrevistados cada material quedó grabado tanto en videoclip como en audio en nuestra computadora, en donde utilizamos solamente el audio y una herramienta del teléfono móvil para convertir el audio de cada entrevista en texto utilizando seudónimos para dirigirnos a los entrevistados y así poder analizar la información y obtener las ideas más contundentes sobre nuestro problema planteado.

La información obtenida se colocó en un recuadro estructurado para su correcta interpretación, el mismo fue elaborado de acuerdo a los temas y subtemas planteados a la par con la guía de preguntas, esto facilitó su análisis y distribución de información, de tal manera que las respuestas de los entrevistados se podían ir mejorando y acentuando con las que concordaban entre sí, fortaleciéndose y fusionándose para tener un resultado más concreto y cierto.



## 2.2 Resultados

Durante la transcripción y análisis de la información proporcionada se presentaron factores que mediante varias lecturas y reflexiones condujeron a señalar algunos elementos que son parte del problema planteado, además se generó algunas respuestas y aclaraciones de parte de los entrevistados a subtemas que parten del problema general y de esta manera genera una idea más clara de que es lo que está fallando en la educación actual. Por otra parte, se encontraron algunas herramientas virtuales que ayudan a los docentes a desarrollar sus clases con eficiencia y eficacia, ya que al estar en un tiempo de pandemia se hace difícil la correcta transmisión de conocimientos, teniendo en cuenta que a docentes que no tenían experticia en el tema virtual hicieron lo posible por aprender y generar nuevas herramientas de aprendizaje para una buena calidad de educación.

Durante el análisis de las entrevistas se pueden diferenciar algunos aspectos importantes que lo hemos destacado y organizado en el siguiente cuadro.

**Tabla 1**

*Cómo caracterizan los docentes la metodología y recursos para la enseñanza de las aplicaciones de las derivadas.*

| <b>Tema</b>  | <b>Subtema</b>                | <b>Características encontradas</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|--------------|-------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Metodologías | Metodologías Tradicionales    | <ul style="list-style-type: none"><li>• El método tradicional se sigue usando en las aulas de los establecimientos educativos con muy pocos resultados favorables.</li></ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|              | Metodologías Constructivistas | <ul style="list-style-type: none"><li>• Las metodologías constructivistas son usadas para agilizar el transporte de información y optimización de tiempo, pero no son efectivas en su totalidad.</li><li>• Es difícil que se lleve un 100% de metodologías constructivistas ya que no todos los docentes están dispuestos a cambiar su estructura de clase</li><li>• El constructivismo es una estructura que se utiliza en gran parte en las clases en línea debido</li></ul> |

---

|                     |                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|---------------------|-----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                     |                                                           | a la proactividad y autoaprendizaje de los estudiantes.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| Recursos didácticos | Material concreto                                         | <ul style="list-style-type: none"><li>• Técnicas usadas dentro del paradigma constructivista son necesarias para agilizar el proceso educativo.</li><li>• Fácil aplicación de los recursos didácticos siempre y cuando sean bien elaborados y planificados.</li></ul>                                                                                                                                                                              |
|                     | Tics (tecnologías de la información y de la comunicación) | <ul style="list-style-type: none"><li>• Una preparación moderada por parte de los docentes para desarrollar clases en el entorno virtual.</li><li>• Geogebra y pizarra digital como recursos tecnológicos principales usado en clases de matemáticas.</li><li>• Clases online con mejores fortalezas en la educación actual.</li><li>• Establecimientos educativos con instalaciones deficientes para un aprendizaje virtual de calidad.</li></ul> |

---

### 2.2.1 Análisis de las entrevistas

En la educación actual podemos encontrar que los docentes continúan utilizando metodologías tradicionales para desarrollar sus clases, por ejemplo la composición del aula en la cual el docente siempre está al frente y los alumnos ubicados entre filas y columnas continua asemejándose a un centro formativo más que educativo, a su vez el docente no desarrolla su clase en otros espacios del establecimiento educativo, sino solamente existe el aula conformada por 4 paredes, además la herramienta física más utilizada es el pizarrón, el cual a pesar de ser parte de lo tradicional es necesario en el área de matemáticas pues es ahí donde se demuestra el desarrollo de los diferentes ejercicios que pueden generar un aprendizaje significativo, pero depende en gran medida de cómo se lo utiliza.



*[...]. Bueno yo no le quito del tradicionalismo el de interactuar con el estudiante a través del diálogo de preguntas y respuestas también es un método tradicional que siempre se está aplicando partir de lo inductivo a lo deductivo y viceversa, también el pizarrón que es necesario dentro de la clase estos métodos no se dejan de utilizar obviamente son parte de la comunicación el quehacer educativo así que es **imposible** de dejarlos atrás [...]. (entrevistado 3)*

Al usar metodologías tradicionales los estudiantes pueden arrojar diferentes resultados pues todos aprendemos de diferentes maneras, algunos visualizando, otros escuchando o manipulando. Pero la mayoría de docentes afirma que no siempre deja buenos resultados lo tradicional pues los estudiantes no analizan, tampoco se motivan a investigar solo esperan la clase magistral del docente. Es por ello que debido a la emergencia sanitaria (Covid-19) se ha llevado las clases en línea lo cual genera que el estudiante sea más proactivo en su aprendizaje, pues los métodos que ahora trabajan los docentes son diferentes y ahí es importante la responsabilidad del estudiante ya que sus resultados no es solo la falta del profesionalismo del docente.

*[...]. Los resultados son muy bajos ya que los estudiantes solo se memorizan pues no piensas y no analizan. Debido a la pandemia para mi es mucho más fácil dar clases virtuales pues los estudiantes como están en clases presenciales solo piensan que el docente debe darles la clase, romper ese paradigma es muy complicado. [...]. (entrevistado 1)*

Planificar una clase constructivista conlleva mayor esfuerzo y tiempo en comparación con una clase tradicional, pues los docentes comentan que para llevar a cabo esta clase y generar toda la estrategia metodológica que abarque y logre alcanzar las destrezas es necesario investigar, analizar, comprender y ponerse en el lugar de los estudiantes para entender cómo llegar a ellos con nuevos recursos o metodologías que generen un aprendizaje significativo en ellos.

*[...] Bueno pues de mi forma de vista personal y en los años de trayectoria que tenido una clase tradicional es mucho más fácil darla que una clase constructivista, ya que en la clase constructivista hay que buscar planificar,*



*crear, modificar, bastante material que nos permita llegar al estudiante, es decir crear juegos interactivos usar estrategias metodológicas indicadas utilizar distintos software interactivos que el estudiante fuera de su aula de clase también pueda seguir aprendiendo en el entorno virtual. [...]* (entrevistado 4)

Lo más interesante del aprendizaje constructivista es la estructura que tiene y la interrelación entre lo teórico y lo práctico pues es enseñar a los estudiantes a partir del conocimiento que han adquirido con el tiempo este trabajo se lo puede manejar de mejor manera en equipo, comentan que lo difícil que pueda existir es el cambio repentino de metodologías, es decir que no lo mismo enseñar a un alumno que venga con estructuras constructivistas que otro con tradicionales, pues se llevará más tiempo.

*[...] La interrelación que se puede generar entre lo teórico y lo práctico entre el hacer o el aprender haciendo, construir a partir de lo que ellos conocen. Muy difícil porque una persona no puede hacer lo que 6 o 8 años atrás no lo han hecho, la estructura es complicada, cuando uno se tiene una percepción o una idea de lo que es el constructivismo. [...]* (entrevistado 1)

La actualización curricular del 2016 señala que la educación ecuatoriana se basa en el constructivismo, pero si vamos a la realidad esta metodología no llega a cumplirse en su totalidad esto se debe a varios factores, uno de ellos y muy importante es la desigualdad de conocimientos que existe sobre la metodología constructivista entre docentes con varios años de experiencia y otros que recién ingresan al magisterio.

*[...] Si el esquema es constructivista es analítico, hace que el estudiante razone, pero la falla es de los docentes porque no se da la importancia a, pues si me dice analizar entonces se debe esquematizar la clase en un análisis y no solo dictar, copiar y responder una pregunta llana, existe gente que tiene muchos años en el magisterio y ellos no conocen esta preparación, como por ejemplo existen estudiantes que vienen de la escuela tradicional y se topan con un docente que tiene ideas de un aprendizaje significativo es decir constructivista. [...]* (entrevistado 3)



En el constructivismo podemos encontrar varias desventajas, como más importantes se comentaba el hecho de que existan varios tipos de docentes con diferentes metodologías e ideas dentro de una institución y no se pueda trabajar conjuntamente. También un mal enfoque del mismo donde se piensa que el estudiante o el docente es el único que trabaja dentro del aula, ya que se debe llegar a un equilibrio entre los mismos.

*[...] los docentes donde trabajo, son personas que llevan varios años dentro del magisterio y no querían trabajar conjuntamente estas ideas constructivistas. [...] Otra desventaja del constructivismo es el mal enfoque del esquema, porque a veces los docentes piensan que hay que dejarle al alumno para que el haga el trabajo solo, pero eso no es cierto. Para ella los extremos son malos, el uno es que el docente le haga todo y el otro es que como es constructivismo el alumno se mate haciendo todo. Más bien es el desconocimiento del docente en la aplicación. [...] Presión de tiempos porque el ministerio nos dice que tenemos 28 destrezas que trabajar en primero de bachillerato y esas destrezas no se llegan a realizar pues existen varios contratiempos dentro de la institución que es el tiempo, los programas. Falta de costumbres, pues si yo no estoy acostumbrado a la metodología constructivista cuando me toca vivir o resolver aquellas me cuesta. Si es que se encuentra con una institución que desde inicial se trabaja el constructivismo y llegan a primero de bachillerato, no se les va a hacer difícil trabajar con estas metodologías. [...] (entrevistado 1)*

Para que el paradigma constructivista sea efectivo en el proceso educativo es necesario un sinnúmero de técnicas que van a la par con el enfoque, además leer, investigar e intercambiar conocimiento con colegas ayudan a mejorar la manera de brindar clases.

*[...]eh salido con los estudiantes, eh cambiado de ambiente para poder brindar mis clases., eh usado diferentes formas cualitativas de evaluar., realizo esquemas de retos generados en trabajo colaborativo, a parte que tengan que resolver los ejercicios, lo hacen con sopas de letras con preguntas, crucigramas, por lo tanto, esquemas bien planificados con varios recursos mejora el paradigma[...]. (entrevistado 2)*





En las clases presenciales que se llevaban a cabo antes de marzo del año 2020 se desarrollaba más técnicas enfocadas en el constructivismo

*[...]. cuando teníamos que irnos presencialmente yo utilizaba algunas técnicas como lluvia de ideas, conversatorios, pregunta y respuesta, actividades lúdicas, análisis de la realidad, entre otros[...]. (entrevistado 4)*

Los recursos didácticos deben ser estructurados y adaptados a la situación de cada grupo de estudiantes para observar su efectividad.

*como cualquier cosa nueva, mire con usted va a dar una clase de derivadas que por ejemplo le toman tiempo así sea graduado de ingeniero, de doctor lo que sea le toma tiempo no es el hecho de saber sino el hecho de saber llegar e investigar. [...]. cuando toca aprender uno de estos nuevos métodos hay que ir buscando en el internet, en libros y sobre todo ir actualizando los saberes para adaptarlos a los estudiantes[...]. (entrevistado 1)*

Los docentes generan un ambiente de autoaprendizaje en sus hogares debido a la pandemia que se suscita a nivel mundial actualmente, además de acuerdo a su preparación académica están a la par con los recursos tecnológicos.

*[...]. me ha costado un día entero en manejarlo bien, pero en cuanto usted sepa manejarlo bien ya no es difícil compartir con el estudiante lo que usted aprendió entonces aprendemos los dos. Yo claro que gasto más tiempo, pero mi experiencia le sirve al estudiante, por lo tanto, los dos hemos ganado yo avanzo en el contenido y el aprende más rápido [...]. (entrevistado 3)*

*[...]. pues la universidad en la que cursé mi maestría tiene un enfoque constructivista llevado al par con los recursos tecnológicos, tenía la parte teórica pero tampoco faltaba la tecnología en mi aprendizaje[...]., es decir las cosas que ella hace en clase son las diferentes metodologías que los docentes le enseñaban a ella. [...]. (entrevistado 2)*

Geogebra es actualmente uno de los softwares gratuitos utilizados para el aprendizaje de varios temas en la matemática desde grados inferiores hasta el BGU incluso dirigido hacia estudiantes universitarios, además de su fácil adquisición, manejo e interactividad.



*[...]. además, me parece interesante en dos aspectos: uno le permite a usted como un texto encontrarse con las respuestas, segundo permita la actividad con las matemáticas un contacto más directo con las gráficas de resolución de ejercicios y el estudiante va a verificando conjuntamente con la aplicación[...]. (entrevistado 1)*

*[...]. otra cosa que usted puede ver es que no tiene que pagar entonces el Geogebra es gratuito y tan gratuito que puede adquirir el mismo estudiante qué es la contraparte ahora yo pudiese comprar el programa para mí y el estudiante no lo va a poder tener, entonces me voy a por su gratuidad y su accesibilidad[...]. (entrevistado 3)*

La utilización de recursos tecnológicos mejora la eficiencia de las clases utilizando menos recursos físicos, aclarando que el caso específico es de la pandemia actual.

*[...].de mi experiencia le comparto le voy siendo superior a la clase virtual bien llevada casi con recursos tecnológicos diversos que yo en la forma presencial tenía que ingeniar por ejemplo para hacer la derivada tenía que estar haciendo una gráfica en la pizarra ya se me fue 40 minutos en cambio que usted planifica bien y ya está todo hecho, esa es la ventaja. [...]. (entrevistado 3)*

Se habla desde hace muchos años atrás de una educación de calidad que vaya de la mano con la tecnología, pero no se ha podido establecer por algunos factores ajenos a los métodos constructivistas y tecnológicos.

*[...]. En nuestro país este sistema es un desastre mejor estamos en la casa porque yo he comprado mi cámara de la computadora he puesto un buen internet, aunque la desventaja estén el muchacho por qué ellos no la pueden obtener, pero para mí es más operable ya que se lo dice al papá es la manera de qué su hijo aprender él lo consigue[...]. (entrevistado 1)*

En definitiva, la metodología constructivista y el uso de recursos didácticos, deben ir a la par para lograr un aprendizaje significativo dentro del aula pues todas estas conllevan tiempo, dedicación, investigación, invención, análisis, etc. Pues tanto el docente como el



estudiante deben mantener un equilibrio dentro del aula, se habla de que en el constructivismo el estudiante debe ser un actor activo de su propio aprendizaje, pero no podemos pasar por alto el trabajo del docente pues para lograr este aprendizaje debe actuar como un mediador entre el conocimiento y aprendizaje del estudiante, haciendo de las clases una interrelación entre lo teórico y lo práctico.

Es por eso que los recursos didácticos juegan un papel muy importante dentro del aula, pues los mismos motivan a que el estudiante genere un autoaprendizaje dentro y fuera de la institución, a su vez las estrategias que se elijan deben tener el propósito fundamental de facilitar la construcción, consolidación y transferencia de información, de tal manera que se coloquen las acciones pertinentes para construir y lograr las diferentes metas impuestas por cada unidad de estudio.

El sistema educativo genera nuevos desafíos para utilizar herramientas tecnológicas las mismas han cambiado desde la forma de enseñar, como también la forma de aprender, son un medio de comunicación, intercambio de conocimiento y experiencias, instrumentos para procesar información, los mismos que la mayoría de docentes maneja dentro de su clase en estas instancias virtuales debido a la emergencia sanitaria que está pasando el mundo, además, afirman que gracias a ello tanto estudiantes como docentes se han acostumbrado a esta metodología que les permite trabajar a la par pues los resultados que obtienen los estudiantes no son solo por falta de profesionalismo de los docentes sino de su propia responsabilidad. Esto podría ser una ventaja al momento de regresar al aula pues los estudiantes manejarán la metodología constructivista con mayor facilidad debido al uso diario de herramientas tecnológicas dentro del aula virtual.

El presente estudio pretende comprender la poca utilidad que los docentes brindan a los recursos didácticos y herramientas tecnológicas en el aula debido a la aplicación de metodologías tradiciones aún existentes. La información analizada en esta investigación ha corroborado que los docentes todavía manejan metodologías tradicionales, lo cual dificulta el desarrollo de una clase constructivista. Cabe recalcar que las matemáticas es una de las materias que requiere varias estrategias para que se pueda lograr un aprendizaje significativo, sin embargo, se analiza varias inconsistencias dentro de ella una importante es que los docentes se centran más en desarrollar los contenidos que en lograr aprendizajes



significativos pues expresan preocupación por no haber avanzado en su totalidad los contenidos. Otra inconsistencia es la falta de conocimiento que tienen los docentes sobre metodologías constructivistas en la educación, en especial aquellos docentes que llevan varios años de experiencia pues ellos llevan un aprendizaje más conductista que constructivista.



## CAPITULO 3

### PROPUESTA

#### 3.1 Esquema de la propuesta

En este capítulo se presenta la elaboración de la estrategia metodológica denominada “aplicaciones de la derivada” dirigida a los terceros de Bachillerato General Unificado. Esta estrategia contiene diferentes recursos didácticos y tecnológicos para la enseñanza de las aplicaciones de la derivada con bases en el paradigma constructivista.

La propuesta planteada consta de 6 clases divididas en los temas siguientes: Función creciente y decreciente, prueba de la primera derivada, prueba de la segunda derivada, concavidad y puntos de inflexión, optimización y uso del material concreto, las cuales están desarrolladas en tres momentos (anticipación, construcción y consolidación). De la misma manera se dispone de varios recursos como son juegos lúdicos, actividades en línea como crucigramas, unir con líneas, uso de simuladores y animaciones en el entorno virtual, ejemplos explicados, contextualizados y resueltos de acuerdo al diario vivir del alumno usando la tecnología. Todo este material ha sido planificado de tal manera que el docente pueda utilizar la mayoría de estos recursos en la construcción del conocimiento y así crear aprendizajes significativos.

#### 3.2 Temas de la estrategia metodológica

La guía didáctica cuenta con seis clases desarrolladas sobre el tema de las aplicaciones de las derivadas, las cuales se han dividido de la siguiente manera:

1. Función creciente y decreciente
2. Prueba de la primera derivada
3. Prueba de la segunda derivada
4. Concavidad y puntos de inflexión
5. Optimización
6. Material Concreto



Según lo estipula el currículo en su reforma 2016 para los docentes, se aplicará la estrategia metodológica como apoyo al docente de tercero de bachillerato en las clases sobre aplicaciones de las derivadas.

### 3.3 Estructura de las clases

#### Estrategia metodológica para la enseñanza de aplicaciones de las derivadas

| Clases                                    | Anticipación                                                                                                                                                         | Construcción                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Consolidación                                                                                                                                                            |
|-------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1. Función creciente y decreciente</b> | <ul style="list-style-type: none"><li>• Análisis de graficas sobre función creciente decreciente relacionadas con la vida diaria.</li></ul>                          | <ul style="list-style-type: none"><li>• Definición de derivada</li><li>• Definición sobre máximos y mínimos, explicación máximos y mínimos relativos y absolutos.</li><li>• Pasos y teoremas para resolución de ejercicios</li><li>• Ejercicios de resolución.</li><li>• Simuladores, calculadoras y trabajos en clase</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>• Análisis de las graficas</li><li>• Tareas en casa sobre análisis de gráficas y juegos interactivos para el estudiante.</li></ul> |
| <b>2. Prueba de la primera derivada</b>   | <ul style="list-style-type: none"><li>• Resolver preguntas, lluvia de ideas y ejercicio de análisis.</li><li>• Simulación en GeoGebra, responder preguntas</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>• Concepto de la primera derivada.</li><li>• Teoremas sobre la resolución de ejercicios</li><li>• Pasos para resolver ejercicios</li></ul>                                                                                                                                                 | <ul style="list-style-type: none"><li>• Sopa de letras</li><li>• Unir con líneas</li><li>• Tarea en casa, con ejercicios contextualizados.</li></ul>                     |



|                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                              |
|--------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                   | <ul style="list-style-type: none"><li>• Ejercicios de demostración</li><li>• Aplicaciones</li><li>• Ejercicio contextualizado</li></ul>                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                              |
| <b>3. Prueba de la segunda derivada</b>    | <ul style="list-style-type: none"><li>• Responder preguntas con el docente</li><li>• Revisar investigación y conversar</li><li>• Relacionar graficas de Cuenca con la clase</li><li>• Observar simulación en GeoGebra interpretar y responder preguntas</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>• Definición de la segunda derivada</li><li>• Teorema y pasos a seguir para la resolución de ejercicios</li><li>• Aplicaciones en la vida cotidiana</li><li>• Ejercicio contextualizado</li><li>• Curiosidades</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>• Análisis e interpretación de graficas</li><li>• Tarea en casa problemas contextualizados</li><li>• Evaluación de conocimientos en Kahoot.</li><li>• Resolver el crucigrama</li></ul> |
| <b>4. Concavidad y puntos de inflexión</b> | <ul style="list-style-type: none"><li>• Realizar figuras de origami</li><li>• Realizar crucigrama</li><li>• Simulador, responder preguntas</li></ul>                                                                                                              | <ul style="list-style-type: none"><li>• Conceptos de concavidad y conexidad</li><li>• Teoremas sobre concavidad</li><li>• Curiosidades</li><li>• Actividades en clase</li><li>• Ejercicios</li><li>• Recursos tecnológicos</li></ul>                           | <ul style="list-style-type: none"><li>• Preguntas</li><li>• Tareas para la casa</li></ul>                                                                                                                                    |
| <b>5. Optimización</b>                     | <ul style="list-style-type: none"><li>• Relacionar la materia con situaciones que vive el mundo en tiempos actuales</li><li>• Revisar videos</li></ul>                                                                                                            | <ul style="list-style-type: none"><li>• Unir mediante líneas conceptos sobre optimización.</li></ul>                                                                                                                                                           | <ul style="list-style-type: none"><li>• Realizar un cuestionario de preguntas sobre la clase observada</li></ul>                                                                                                             |



|                             |                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                   |
|-----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                             |                                                                                                             | <ul style="list-style-type: none"><li>• Ejercicio contextualizado sobre áreas de Cuenca.</li><li>• Realizar un simulador de GeoGebra en grupos de 3 personas.</li><li>• Ejercicio de aplicación</li><li>• Actividades en clase.</li></ul>                                                                                                      | <ul style="list-style-type: none"><li>• Tarea en casa: trabajo de fin de unidad.</li></ul>                                                                        |
| <b>6. Material Concreto</b> | <ul style="list-style-type: none"><li>• Recomendaciones sobre cómo utilizar el material concreto.</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>• Desarrollo del ejercicio sobre la lámina de cartón.</li><li>• Uso del material concreto con los estudiantes</li><li>• Simulador en GeoGebra sobre el material concreto.</li><li>• Laboratorio matemático sobre un ejercicio de optimización.</li><li>• Simulador del laboratorio en GeoGebra</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>• Realizar los simuladores en la clase</li><li>• Resolución de preguntas en la clase.</li><li>• Tareas para casa.</li></ul> |

### 3.4 Propuesta de la Estrategia Metodológica



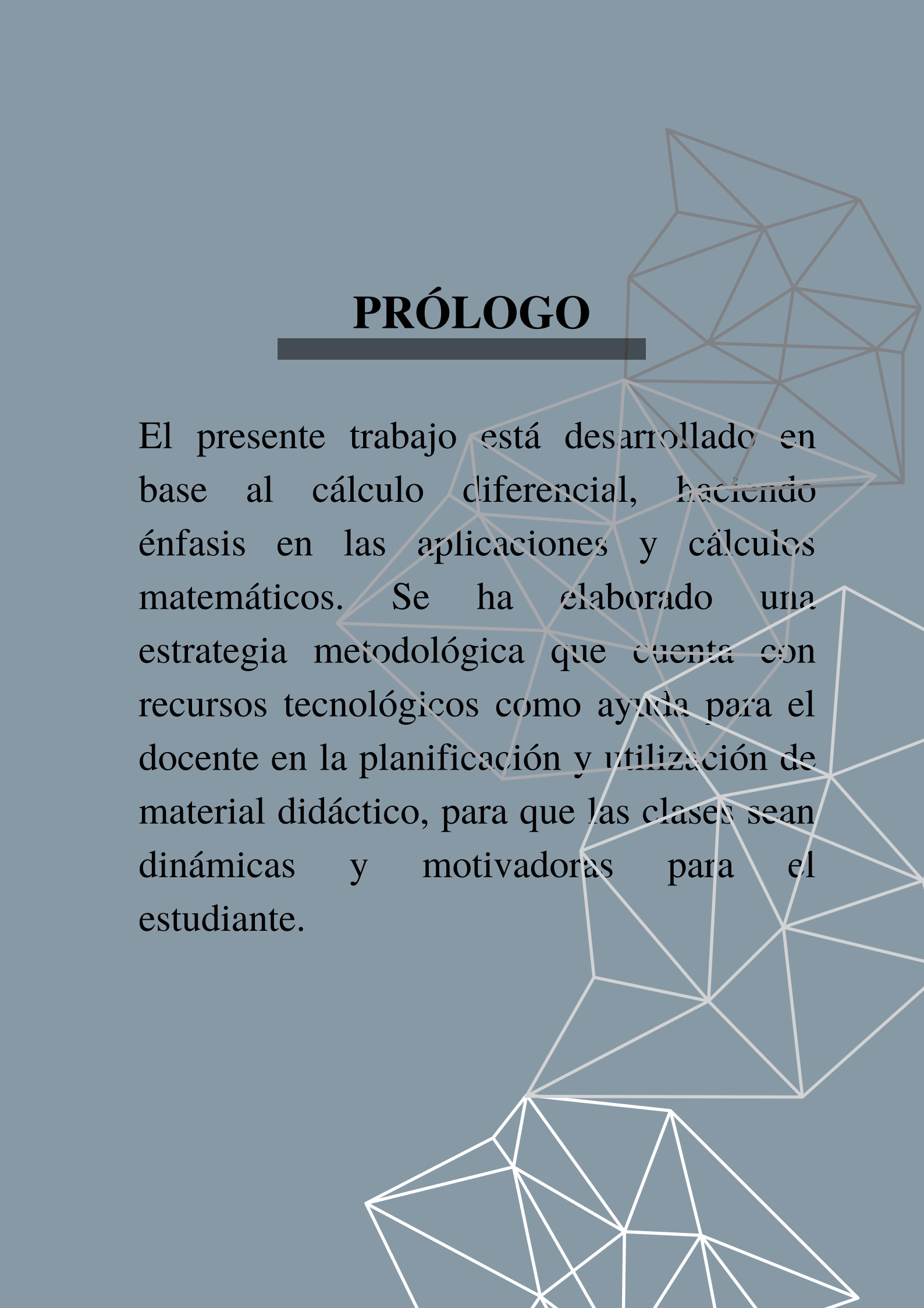
# **CÁLCULO DIFERENCIAL APLICACIONES**

## **ESTRATEGIA METODOLÓGICA**

Autores: Nathaly Azucena Coronel Quimis / Jhonnatan Javier Solis Guaman  
Docente tutor: Ing. Fabián Eugenio Bravo Guerrero

**3° de  
bachillerato**

# PRÓLOGO



El presente trabajo está desarrollado en base al cálculo diferencial, haciendo énfasis en las aplicaciones y cálculos matemáticos. Se ha elaborado una estrategia metodológica que cuenta con recursos tecnológicos como ayuda para el docente en la planificación y utilización de material didáctico, para que las clases sean dinámicas y motivadoras para el estudiante.

# APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

Estrategia metodológica para el docente  
Tercero de bachillerato



**Universidad de Cuenca**

Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación  
en la especialización de Matemáticas y Física.

## **AUTORES**

Nathaly Azucena Coronel Quimis

Jhonnatan Javier Solis Guaman

## **DIRECTOR**

Ing. Fabián Bravo

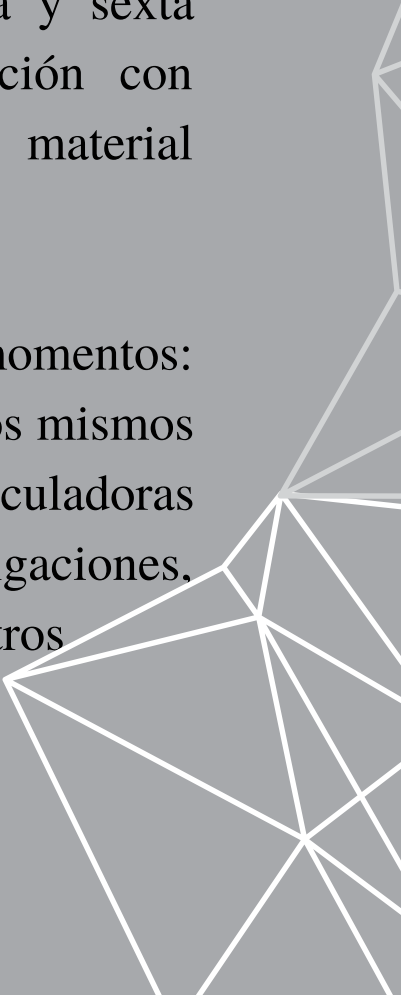
# PRESENTACION

---

En base a la propuesta pedagógica basada en una educación constructivista que otorga el ministerio de educación se ha desarrollado una estrategia metodológica para la enseñanza de aplicaciones de las derivadas para estudiantes de tercero de bachillerato.

La estrategia metodológica cuenta con el desarrollo de seis clases, la primera se refiere a funciones crecientes y decrecientes, la segunda y tercera clase se desarrolla la primera y segunda derivada, la cuarta clase se refiere a concavidad; finalmente, la quinta y sexta clase se realizan problemas de optimización con diferentes recursos didácticos como lo es material concreto.

La estructura de las clases contiene tres momentos: anticipación, construcción y consolidación los mismos que están desarrollados mediante calculadoras online, graficadoras, simulaciones, investigaciones, software matemático, juegos lúdicos, entre otros



# ÍNDICE

37

## Clase #1

Función creciente y  
decreciente

## Clase #2

Prueba de la primera  
derivada

64

86

## Clase #3

Prueba de la segunda  
derivada

## Clase #4

Concavidad y puntos de  
inflexión

113

134

## Clase #5

Optimización

## Clase #6

Material concreto

154

A photograph of a roller coaster track with a large loop and a drop, set against a clear blue sky. The track is dark blue and the support structure is made of metal lattice. The roller coaster is situated near a body of water in the foreground.

# **FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES**

**Aplicaciones de las Derivadas**

**PRIMERA CLASE**



## Destreza:

El docente estará en la capacidad de ejemplificar y desarrollar funciones crecientes y decrecientes, relacionándolas con el entorno del estudiante.

### ANTICIPACIÓN



*Tiempo estimado 10 minutos*

### Estrategia utilizada

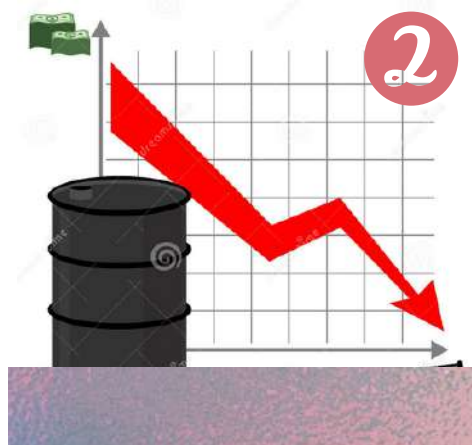


### Análisis del entorno

Se proyecta a los estudiantes una serie de imágenes en donde se puede hallar funciones crecientes y decrecientes incluso funciones constantes, a la par con el docente se va clasificando cada una de ellas y explicando a breves rasgos cuales son sus características.

### ACTIVIDAD 1

✓ Coloque según corresponda: Función Creciente, Función Decreciente o Función constante.



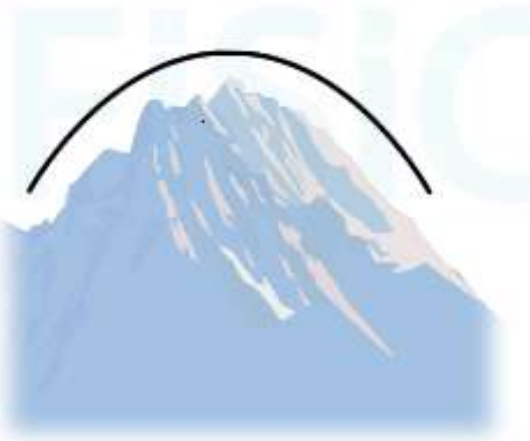
## Analicemos las gráficas

$f(x)$

### Función creciente y decreciente

1. En las siguientes gráficas: analizar los trayectos que tiene cada una, diferenciar cual de ellas inicia un con un tramo creciente y cual con un tramo decreciente.
2. Dividir las por tramos con una recta tangente en las gráficas.

1



Este nevado, inicia con un tramo creciente y termina con otro decreciente

3



La siguiente cumbre inicia con un tramo decreciente y finaliza con uno decreciente



# MÁXIMOS Y MÍNIMOS

## CONSTRUCCIÓN

Tiempo estimado 25 minutos

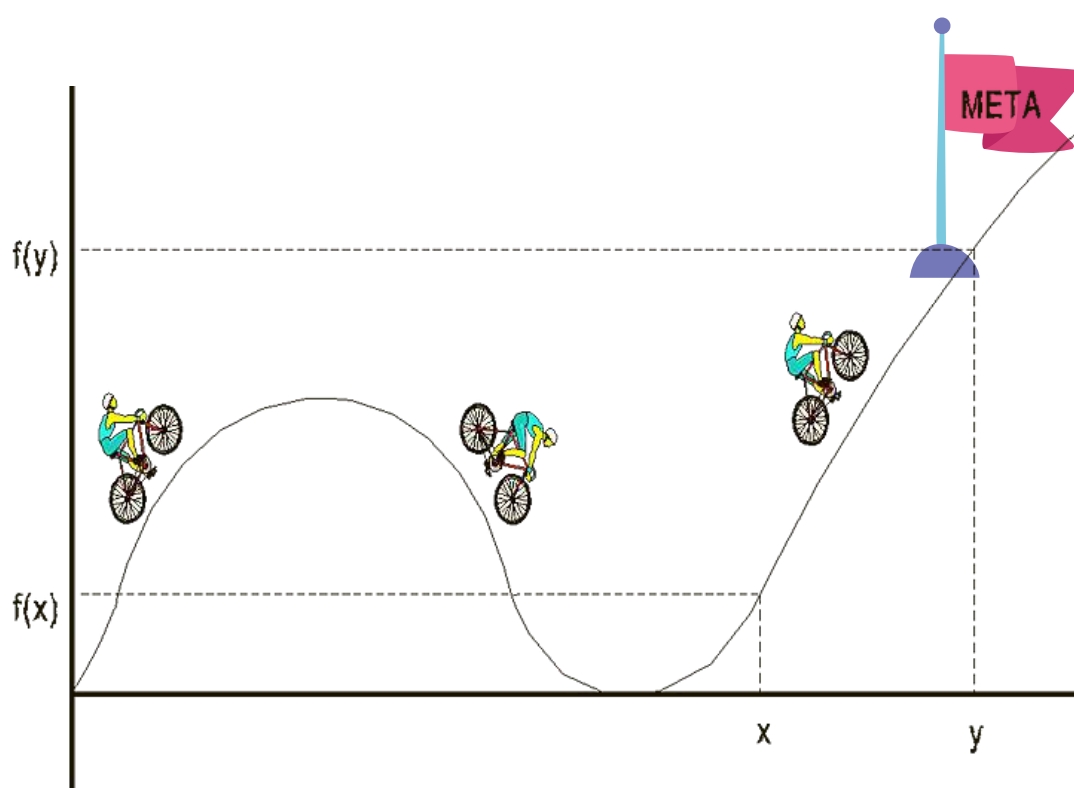


$$\frac{d \text{MILK}}{dx} = \text{CHEESE}$$
$$\int \text{MILK} dx = \text{COW}$$

Las reglas de las derivadas nos ayudan a disminuir el tiempo de la resolución de los ejercicios planteados, así que debemos recordar y reforzar las mismas para determinar en qué situaciones podemos aplicarlas.

## DESARROLLO

Es muy útil saber donde crece y decrece la gráfica de determinada función idealizada. Como podemos ver en la siguiente gráfica la misma crece, decrece y crece de nuevo a medida que avanzamos de izquierda a derecha hasta llegar a la meta.



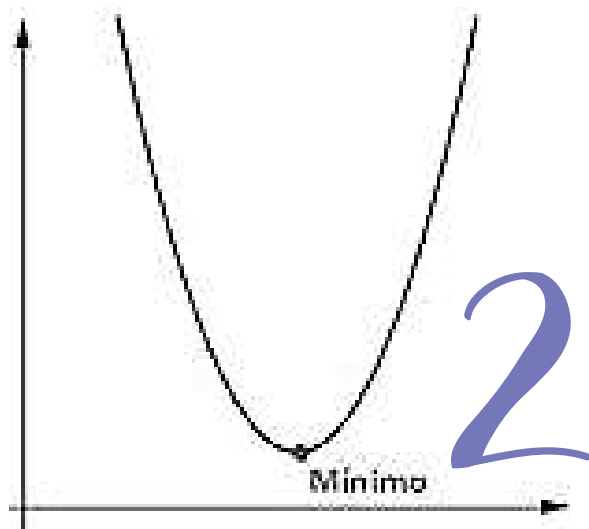
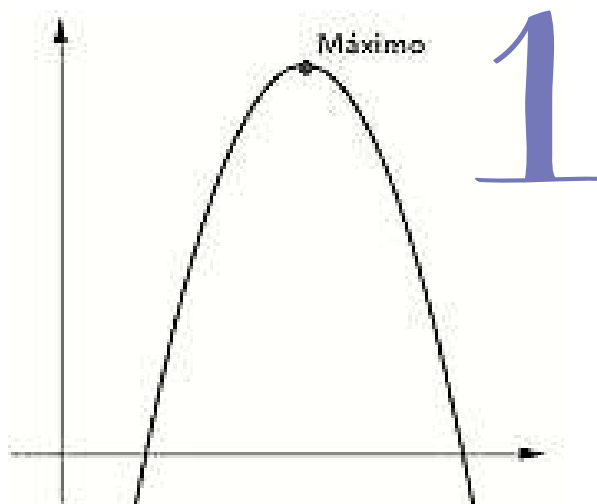
# MÁXIMOS Y MÍNIMOS



## IMPORTANTE 👁️👁️

Los máximos y mínimos de una función son los valores más grandes o más pequeños de ésta, ya sea en una región (extremos relativos) o en todo el dominio (extremos absolutos)

Si una función continua es ascendente en un intervalo y a partir de un punto cualquiera empieza a decrecer, a ese punto se le conoce como punto crítico máximo relativo.



Si una función continua es decreciente en cierto intervalo hasta un punto en el cual empieza a ascender, a este punto lo llamamos punto crítico mínimo relativo.

📎 En el siguiente Link encontraremos una mayor explicación sobre definiciones de máximos y mínimos.



Aprendamos

<https://n9.cl/bekqb>

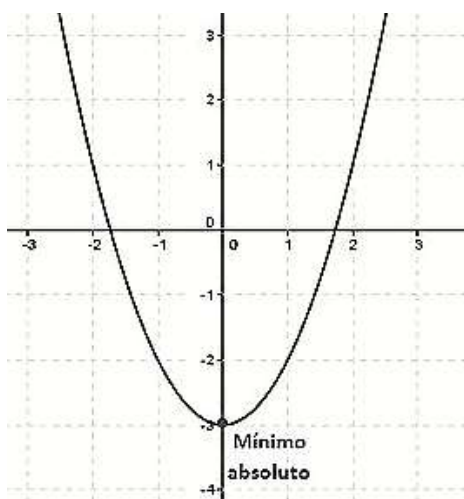
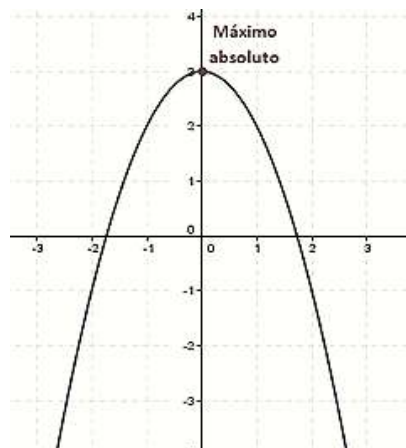




## DEFINICIONES

### MÁXIMOS ABSOLUTOS

El máximo absoluto de la función  $f$  es el valor más grande en todo el dominio.

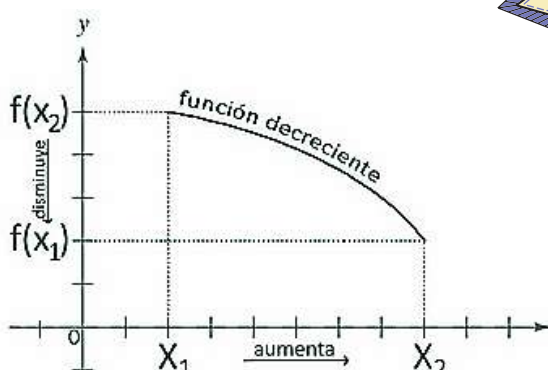
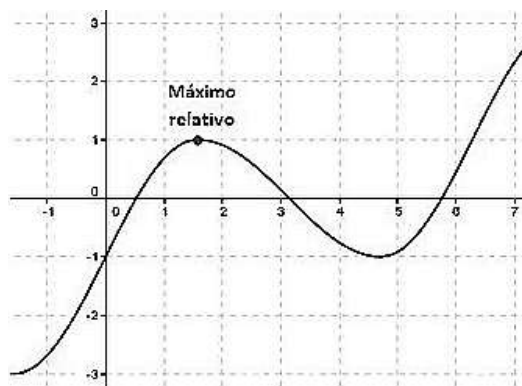


### MÍNIMOS ABSOLUTOS

El mínimo absoluto de la función  $f$  es el valor más pequeño en todo el dominio.

### MÁXIMOS RELATIVOS

La función  $f$  tiene en  $M$  un máximo relativo si  $f(M)$  es mayor que sus valores próximos a izquierda y derecha.



### MÍNIMOS RELATIVOS

La función  $f$  tiene en  $m$  un mínimo relativo si  $f(m)$  es menor que sus valores próximos a izquierda y derecha

## REVISEMOS LO APRENDIDO



### Pasos para la práctica

- 1 **Derivar** la función, obteniendo  $f'(x)$ .
- 2 Hallar las **raíces** de la derivada, es decir, los valores de  $x$  tales que la derivada sea 0

$$f'(x)=0$$

- 3 Supongamos que las raíces de  $f'$  son  $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ .
- 4 Se calcula la imagen de los extremos del intervalo ( $f(a)$  y  $f(b)$ ).

Finalmente aplicamos los teoremas.

### TEOREMAS

Sea  $f$  una función continua en el intervalo cerrado  $[a,b]$  y derivable en el intervalo abierto  $(a,b)$ . Entonces:

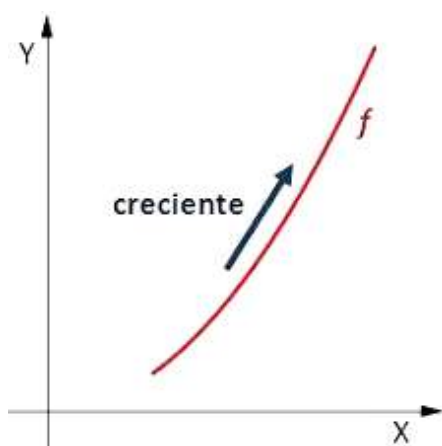
Si  $f'(x) > 0 \quad \forall x \text{ en } (a,b)$ , entonces  $f$  es creciente en  $[a,b]$

Si  $f'(x) < 0 \quad \forall x \text{ en } (a,b)$ , entonces  $f$  es decreciente en  $[a,b]$

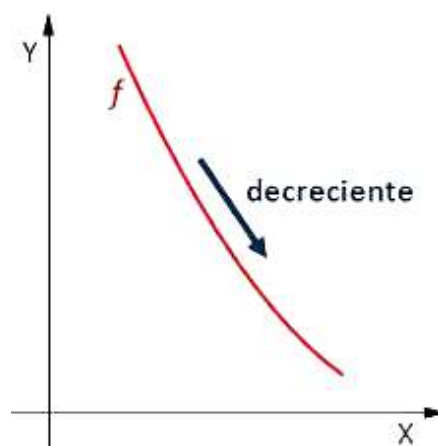
Si  $f'(x) = 0 \quad \forall x \text{ en } (a,b)$ , entonces  $f$  es constante en  $[a,b]$



1



2

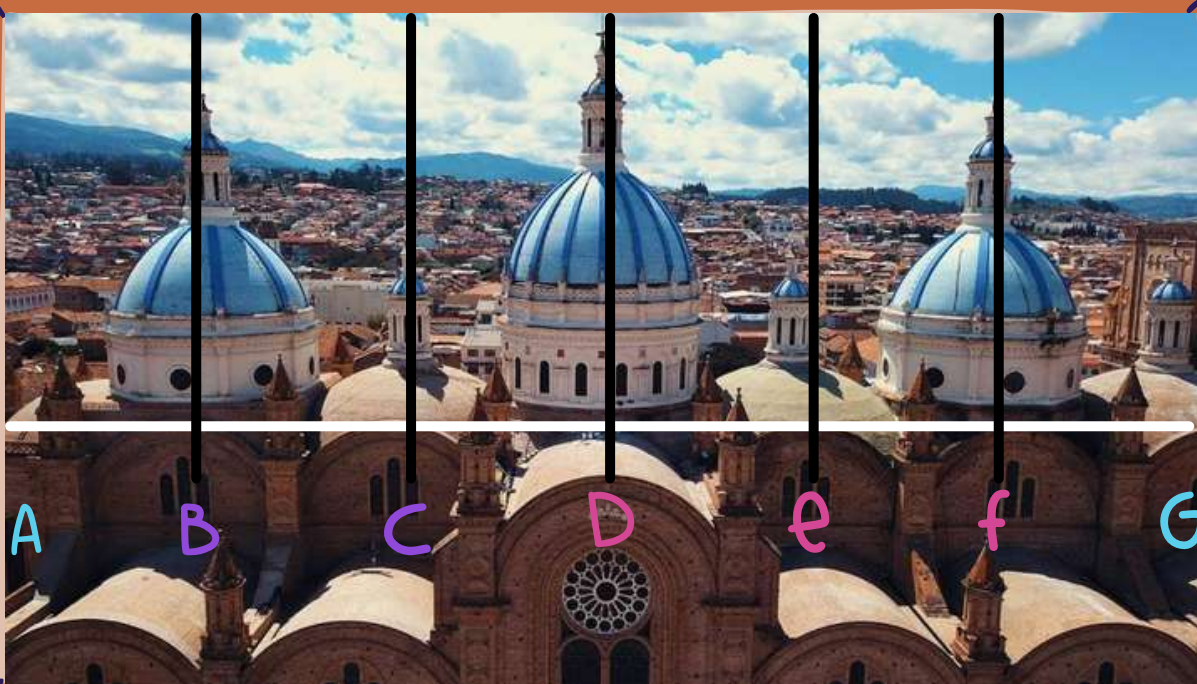




## TRABAJO EN CLASE



- 1 Observamos la siguiente imagen y analizamos sus intervalos crecientes y decreciente junto con el docente. (la hoja de trabajo se encuentra en los recortables)



## 2 Respondemos lo siguiente

➡ ¿De B a C existe un tramo creciente o decreciente?

**Existe un tramo decreciente**

➡ ¿En que intervalos crece la función?

**Desde (a-b), (c-d), (e-f)**

➡ ¿En que intervalos decrece la función?

**Desde (b-c), (d-e), (f-g)**



## TEOREMAS



Sea  $f$  una función continua en un intervalo cerrado  $(a,b)$  y derivable en el intervalo abierto  $]a,b[$ .

1 Si  $f'(x) > 0$  para toda  $x$  en  $]a,b[$ , entonces la función  $f$  es creciente en  $(a,b)$ .

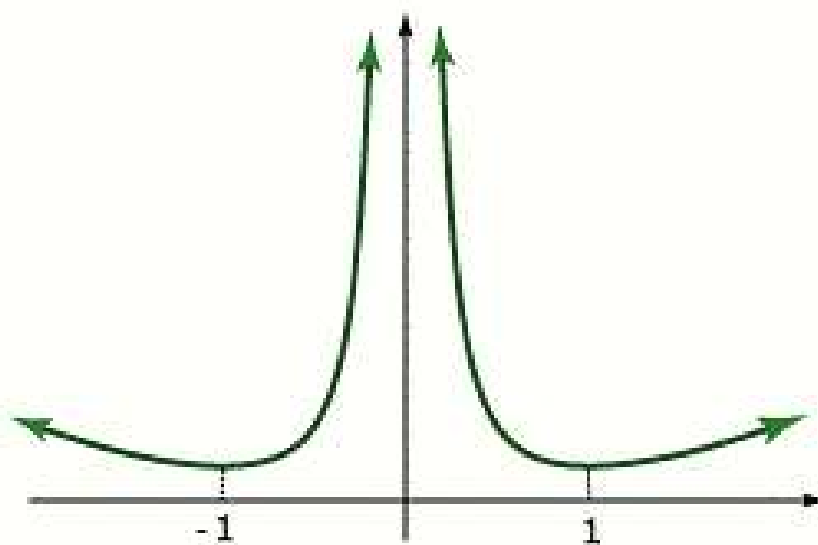
2 Si  $f'(x) < 0$  para toda  $x$  en  $]a,b[$ , entonces la función  $f$  es decreciente en  $(a,b)$ .

### A PRACTICAR



- Determine en cuáles intervalos crece o decrece la función con ecuación

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} \text{ con } x \neq 0.$$



1 Derivada de  $f(x)$  es:

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3}$$



2 Que puede escribirse como:

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^3}$$

3 Como  $2(x^2-1)$  es positivo para toda  $x$  en  $\mathbb{R}$  entonces se tiene:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x^3} > 0 \quad \leftarrow$$

$$\rightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x^3} < 0$$

► Para resolver estas desigualdades recurrimos a la siguiente tabla:

|         | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x-1$   | -         | -    | -   | +   |           |
| $x+1$   | -         | +    | +   | +   |           |
| $x^3$   | -         | -    | +   | +   |           |
| $f'(x)$ | -         | +    | -   | +   |           |

◄ Conclusión



> A partir de las respuestas obtenidas en el cuadro anterior tenemos las siguientes conclusiones.

Además:  $f'(x) < 0$  si  $x \in ]-\infty, -1[ \cup ]0, 1[$  de donde la función  $f$  decrece en el intervalo  $] -\infty, -1[ \cup ]0, 1[$ .

Luego:  $f'(x) > 0$  si  $x \in ]-1, 0[ \cup ]1, +\infty[$  por lo que la función  $f$  crece en el intervalo  $] -1, 0[ \cup ]1, +\infty[$ .



### Calculadora de las derivadas

Para facilitar el cálculo de las derivadas se encuentran presentes algunas calculadoras online que nos permite verificar si hemos aplicado bien los conceptos matemáticos aprendidos.

**Entre una de ellas podemos nombrar la siguiente:**



La Calculadora de Derivadas te permite calcular en línea derivadas de funciones. Nuestra calculadora te permite verificar tus soluciones a ejercicios de cálculo. Te ayuda a practicar mostrándote el procedimiento completo (diferenciación paso a paso) también se presenta la gráfica de la función.

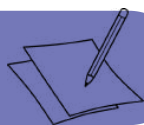
Link

<https://n9.cl/owi94>





## A PRACTICAR



### ENUNCIADO

Encontrar los extremos relativos de:

$$f(x) = x^3 - 4x$$

El docente  
siempre buscará  
la manera de  
interactuar con  
sus estudiantes.

### FUNCIÓN

$$f(x)' = 3x^2 - 4 \rightarrow \text{PRIMERA DERIVADA}$$

$$f(x)'' = 6x \rightarrow \text{SEGUNDA DERIVADA}$$



Buscamos los puntos críticos

$$3x^2 - 4 = 0$$



$$x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$x^2 = \frac{4}{3}$$



$$x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}}$$



Sustituimos los puntos críticos en la segunda derivada

$$f''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 4\sqrt{3} > 0 \rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$f''\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -4\sqrt{3} < 0 \rightarrow x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

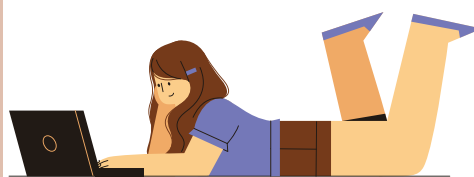


Pedir a los estudiantes, que realicen la gráfica de la función, mediante la calculadora de derivadas para la siguiente clase.

<https://n9.cl/owi94>



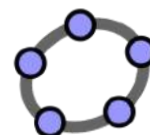
## NOTA PARA EL DOCENTE TECNOLOGÍA



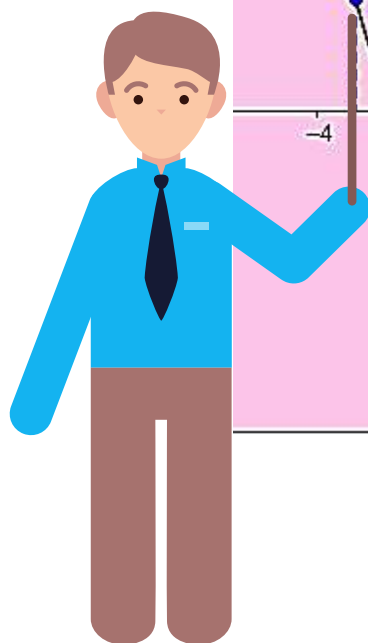
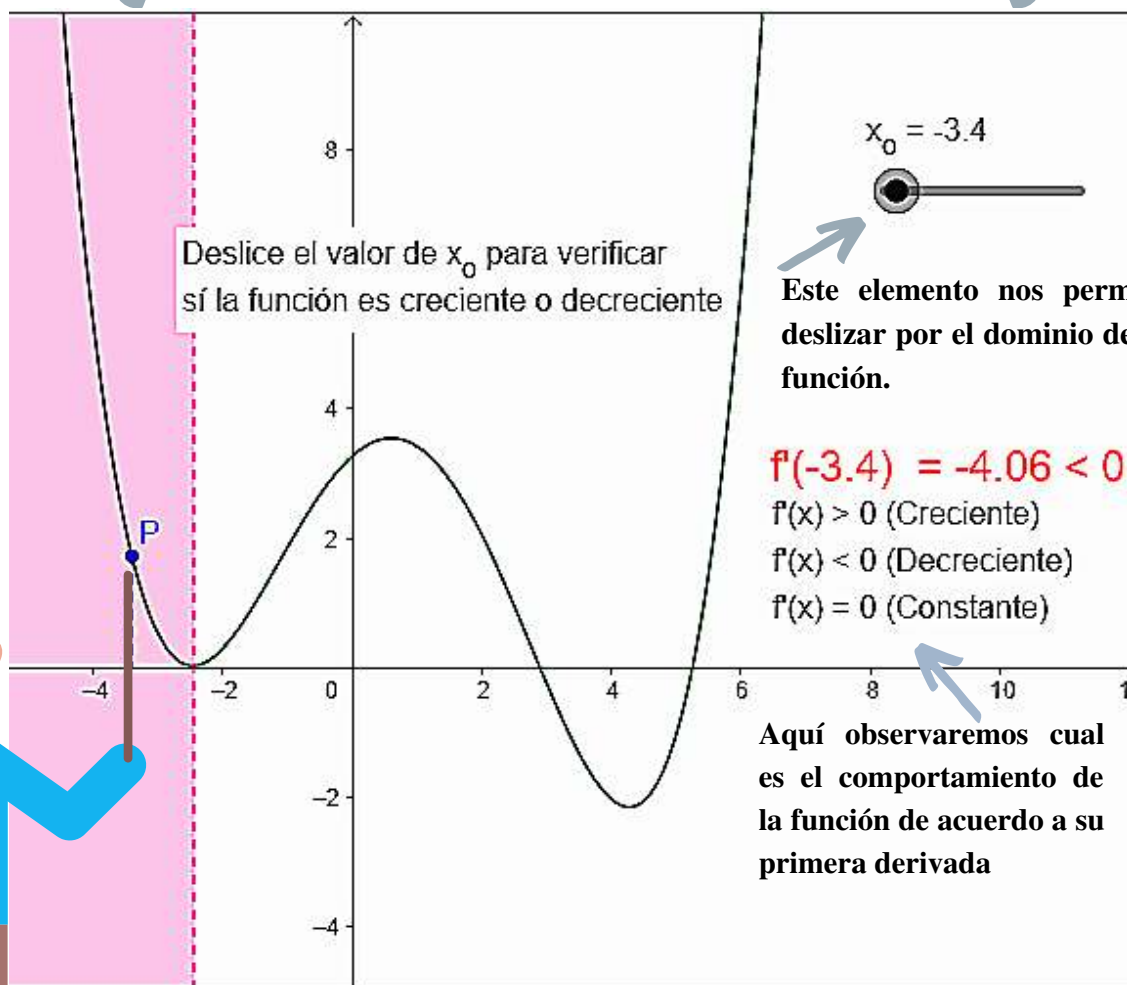
Cuando tengamos claro y explicado los temas conceptuales anteriores es hora de ingresar en el siguiente link y realizar las siguientes actividades conjuntamente con sus estudiantes:



<https://www.geogebra.org/m/vhyycpya>



### Elementos clave del simulador





## ACTIVIDADES

1 Localice en donde se encuentran los puntos críticos de la función con ayuda del deslizador y colóquelos a continuación.



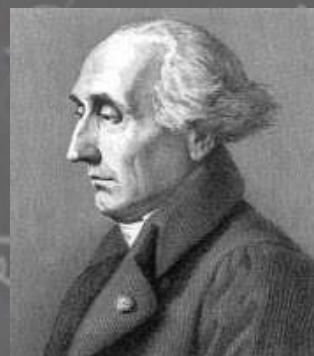
2 De acuerdo a los puntos del dominio colocados en la tabla, escriba si la función es creciente o decreciente:

| Valor en X: | Función es: |
|-------------|-------------|
| $x = -4$    |             |
| $x = -1$    |             |
| $x = 2$     |             |
| $x = 6$     |             |

### HISTORIA

Joseph Louis Lagrange, fue un matemático, físico y astrónomo italiano que después vivió en Prusia y Francia.

Lagrange elabora la teoría de las variaciones y efectúa interesantes hallazgos en las integrales elípticas y en los métodos de interpolación. Por otra parte, también contribuye al desarrollo de la mecánica y las funciones analíticas.



LAGRANGE

## CONSOLIDACIÓN



Tiempo estimado 5 min

Es momento de evaluar el conocimiento adquirido para ello vamos a trabajar en parejas quienes resolverán las siguientes funciones.

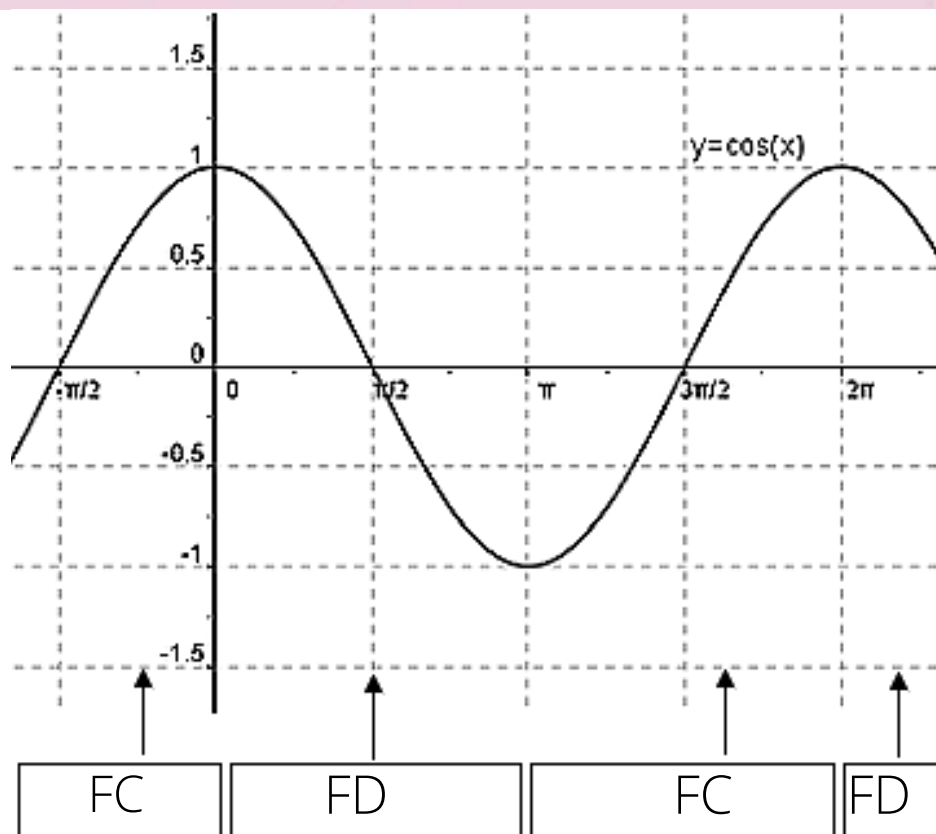
Se entregará una **hoja de trabajo** por pareja, el tiempo estimado es 10 min.

Observa cada una de las funciones que se muestran a continuación y escribe al pie de ellas dentro de cada cuadro la letra que corresponda a las características que presentan como lo es:

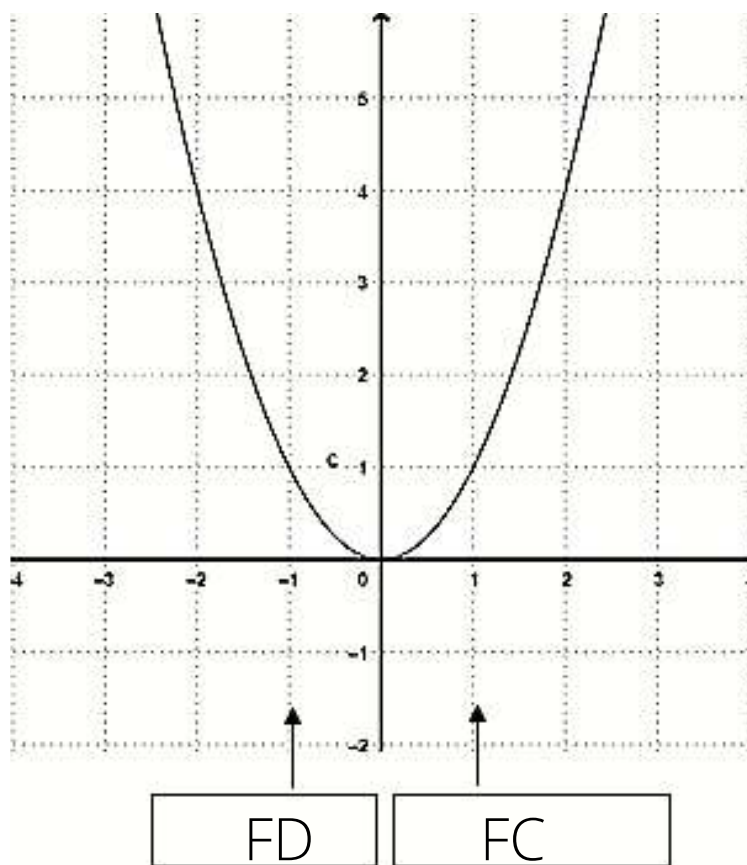
- *Función creciente FC*
- *Función decreciente FD*
- *Función creciente-decreciente CD*



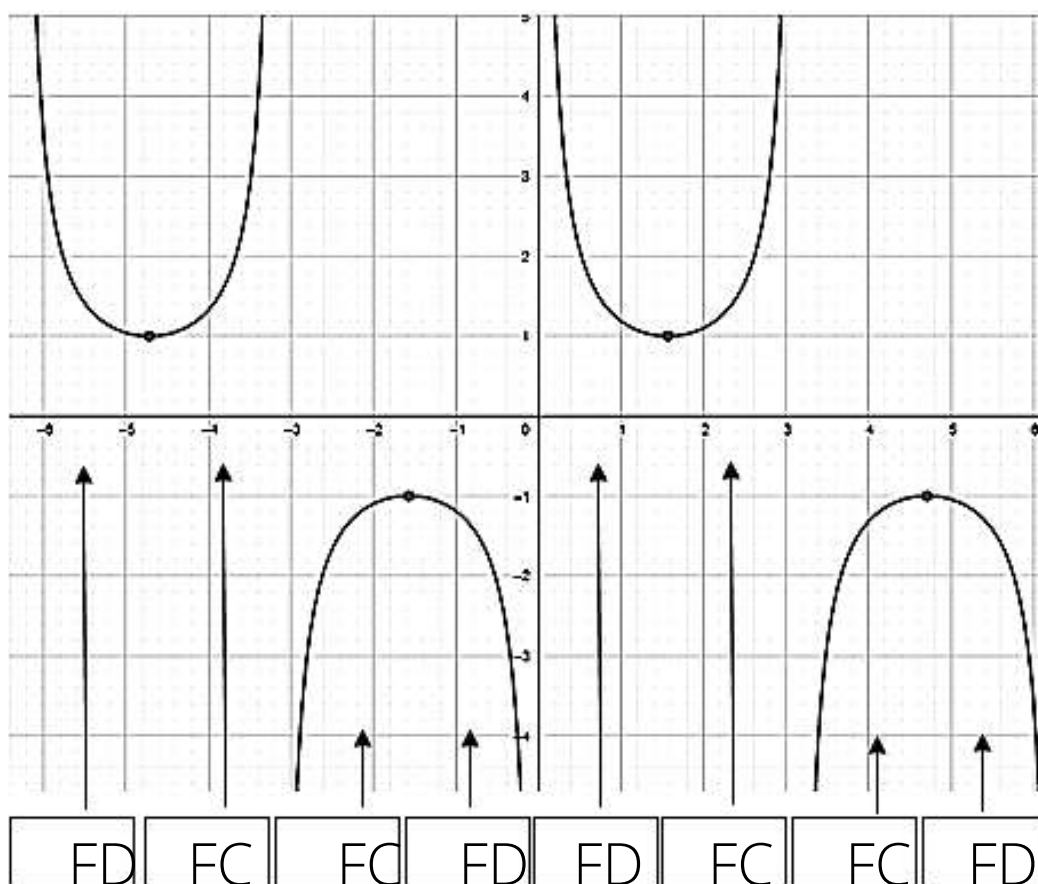
1



2



3



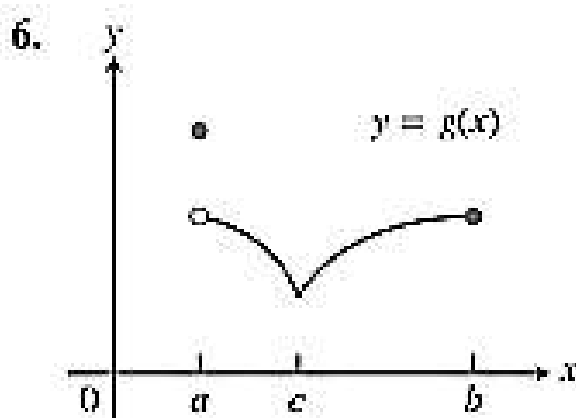
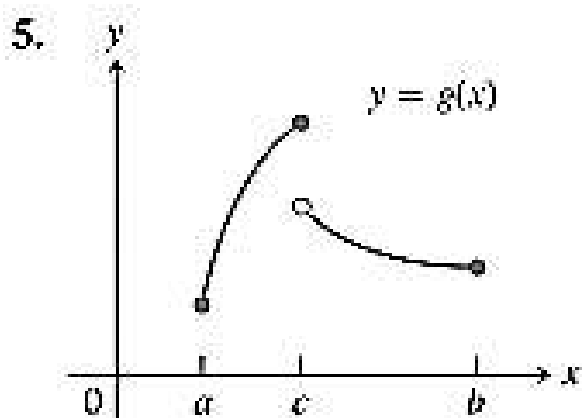
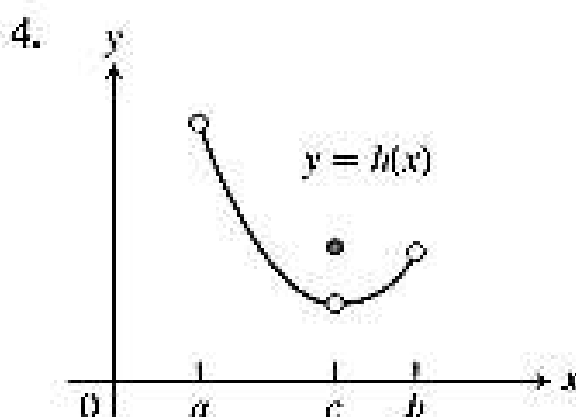
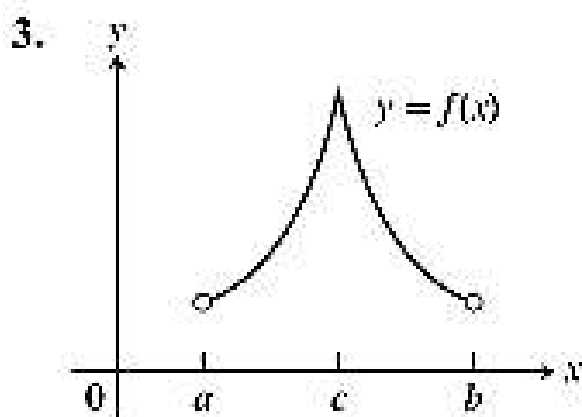
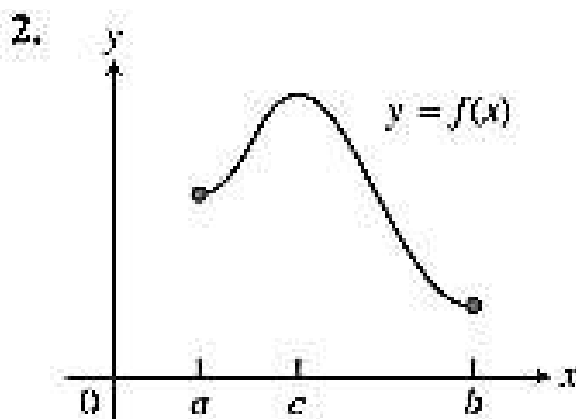
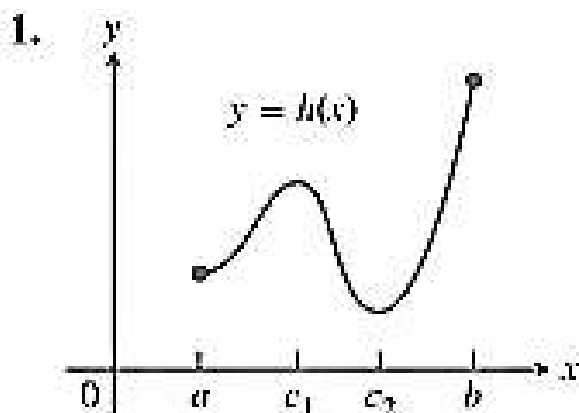
## TAREAS EN CASA



Nombre: \_\_\_\_\_

**1**

En los ejercicios del 1 al 6 determinar viendo la gráfica cuando la función definida en  $[a, b]$  tiene máximos, o mínimos y en que lugar se encuentran.



**2** ¿Para qué valor de  $x$  tiene  $h$  un máximo relativo?

$$h(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$$

**Escoge una respuesta**

☐ -4

☐ 0

☐ -1

☐ 2

**3** ¿Para qué valor de  $x$  tiene  $g$  un mínimo relativo?

$$g(x) = x^6 - 3x^5$$

**Escoge una respuesta**

☐ 5/2

☐ -2/5

☐ 3

☐ 0

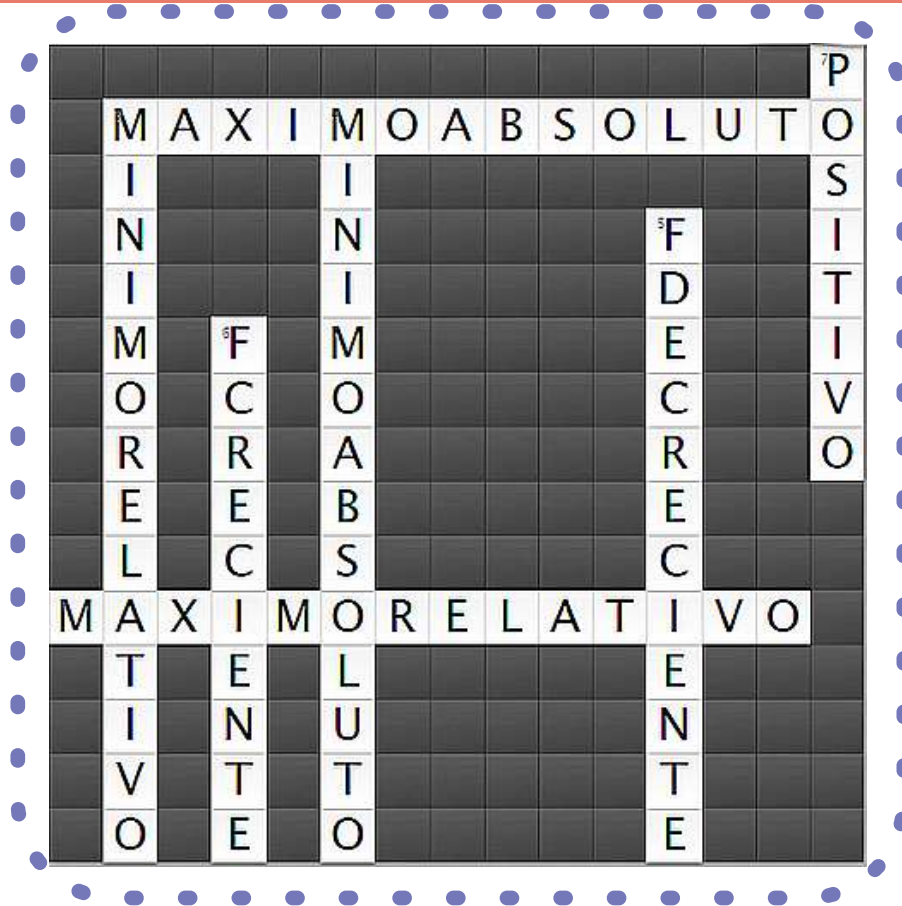
**4** Resolver el siguientes crucigrama, mismo que se lo encuentra en el siguiente link, ingresar para obtener los ítems y responder:

<https://cutt.ly/FR5Df0R>

educaplay

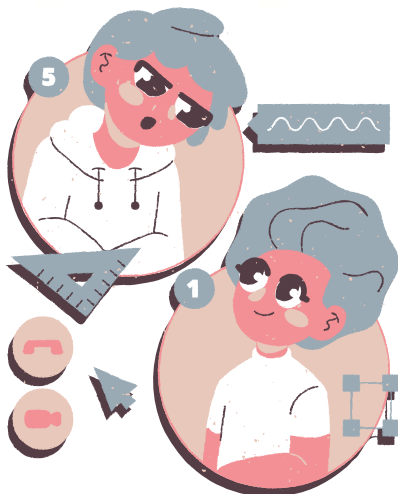


## Crucigrama Resuelto



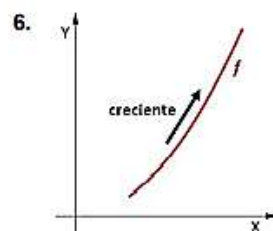
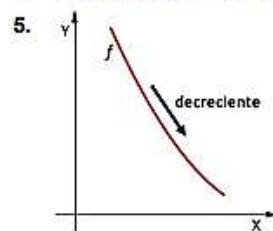
### HORIZONTALES

1. Es un \_\_\_\_\_ si una función continua es ascendente en un intervalo y a partir de un punto cualquiera empieza a decrecer
3. Es el valor mas grande en todo el dominio.



### VERTICALES

2. Es un \_\_\_\_\_ si una función continua es decreciente en cierto intervalo hasta un punto en el cual empieza a ascender
4. Es el valor mas pequeño de todo el dominio



7. Cuando la derivada es de signo \_\_\_\_\_ la función es creciente



RECORTABLES Y  
SOLUCIONES





Nombre: \_\_\_\_\_

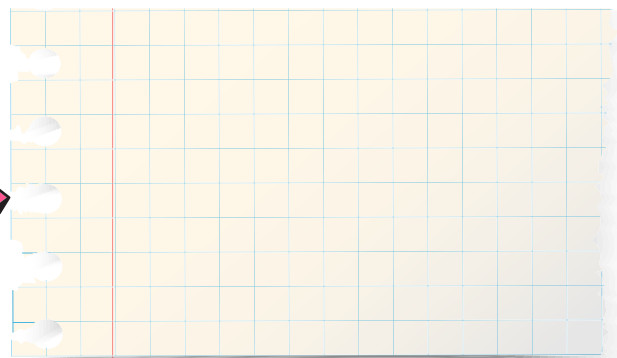
**Analicemos las graficas**

$f(x)$

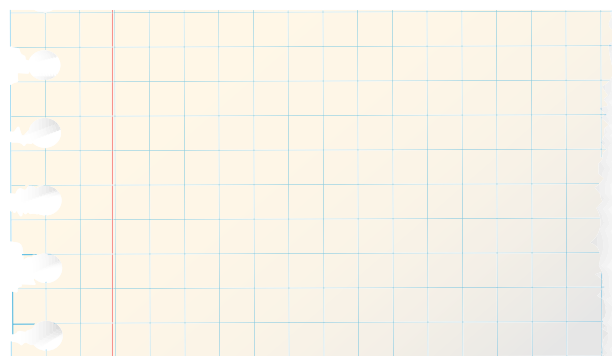
### Función creciente y decreciente

1. En las siguientes gráficas analizar los trayectos que tiene cada una y diferenciar cual de ellas inicia un con un tramo creciente y cual con un tramo decreciente.
2. Dividir las por tramos con una recta tangente en las gráficas.

1



3





## TRABAJO EN CLASE



- 1 Observamos la siguiente imagen y analizamos sus intervalos crecientes y decreciente junto con el docente. (la hoja de trabajo se encuentra en los recortables)



- 2 Respondemos lo siguiente

➡ ¿De B a C existe un tramo creciente o decreciente?

➡ ¿En que intervalos crece la función?

➡ ¿En que intervalos decrece la función?



Nombre: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_



## TRABAJO EN PAREJAS



Tiempo estimado 15 min

Integrantes: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

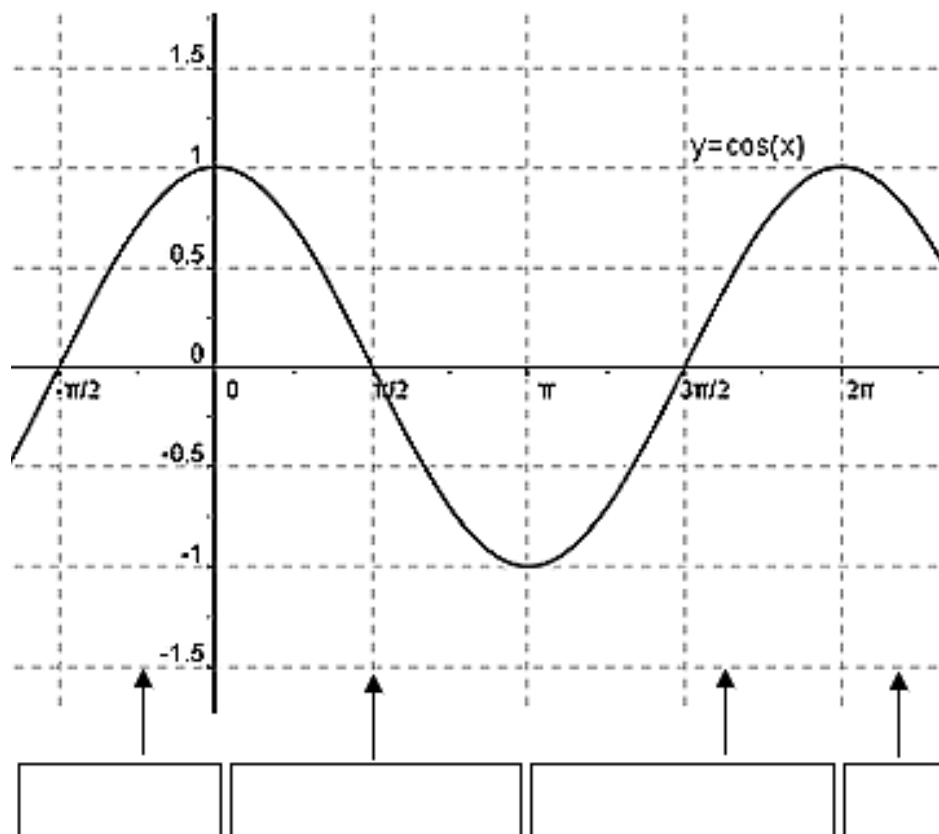
Docente: \_\_\_\_\_

Observa cada una de las funciones que se muestran a continuación y escribe al pie de ellas dentro de cada cuadro la letra que corresponda a las características que presentan como lo es:

- *Función creciente* CR
- *Función decreciente* DR
- *Función creciente-decreciente* CD



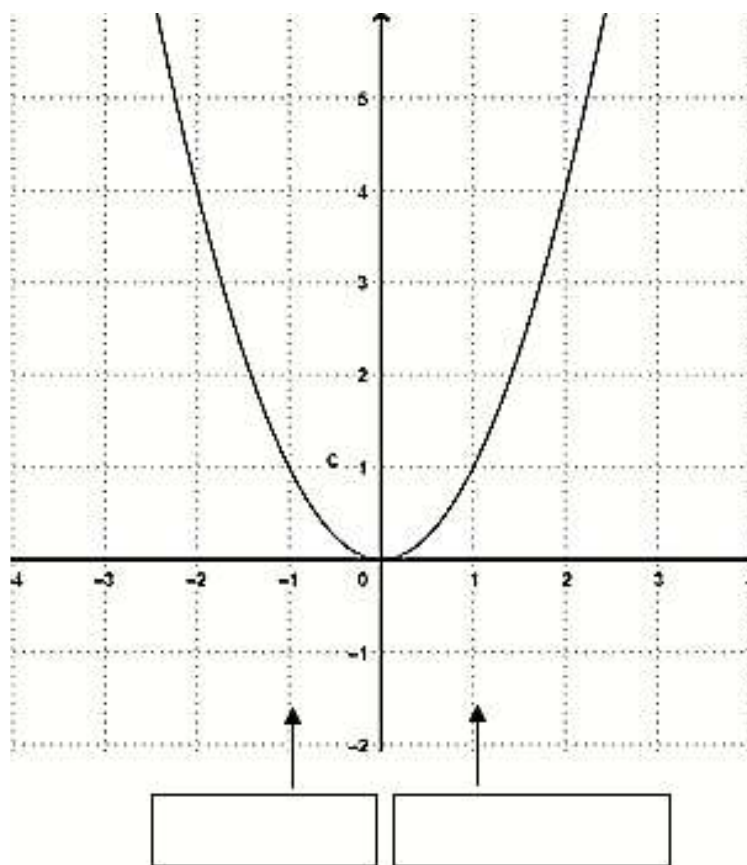
1



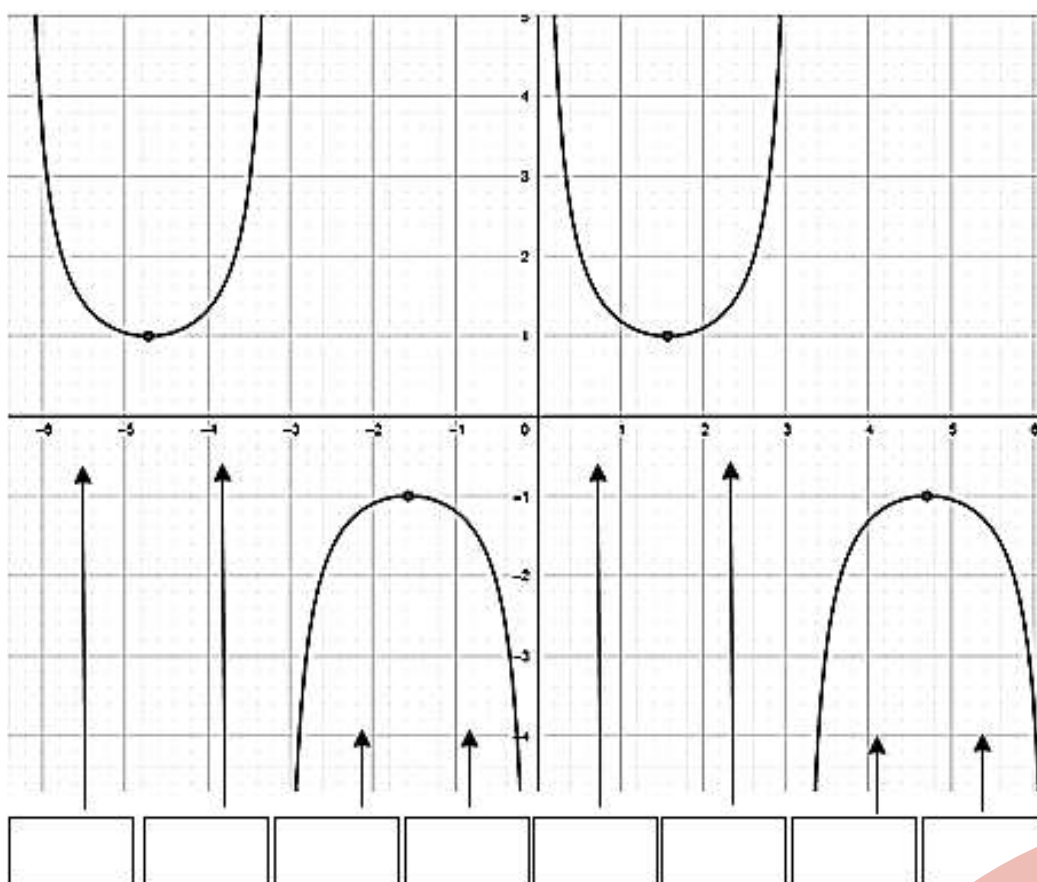




2



3





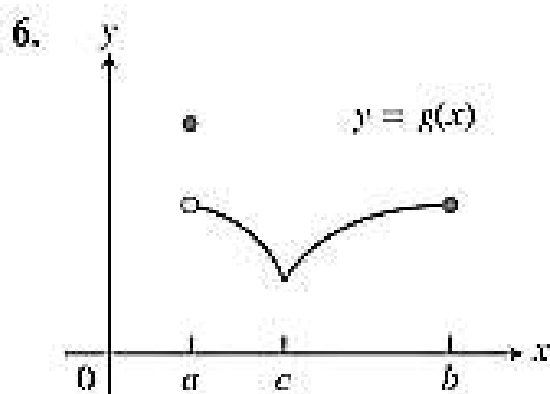
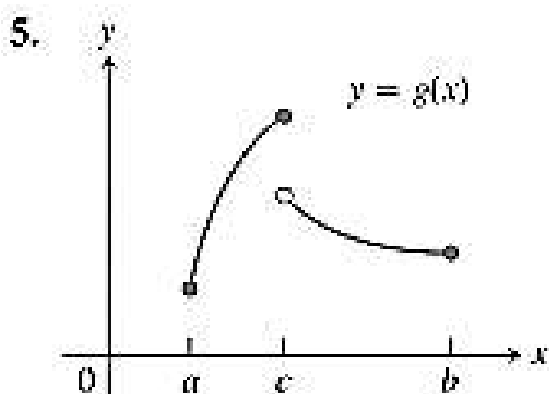
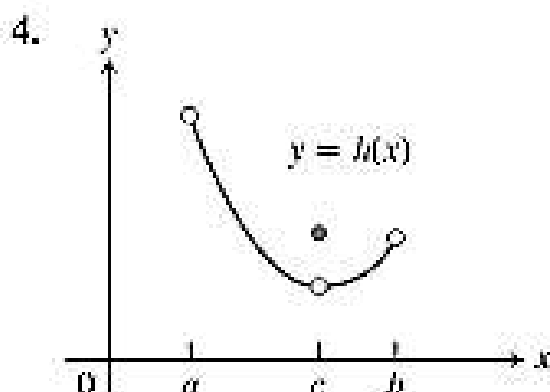
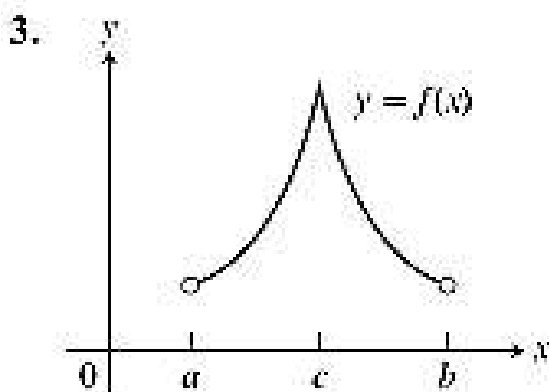
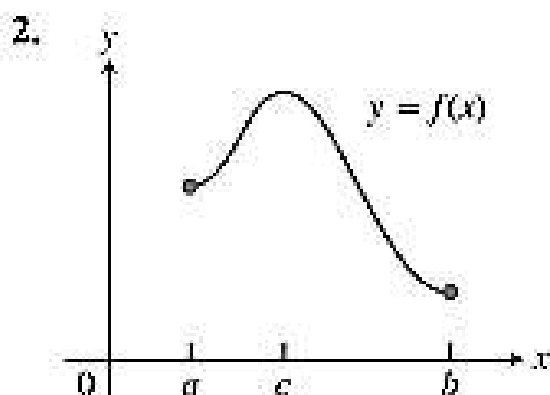
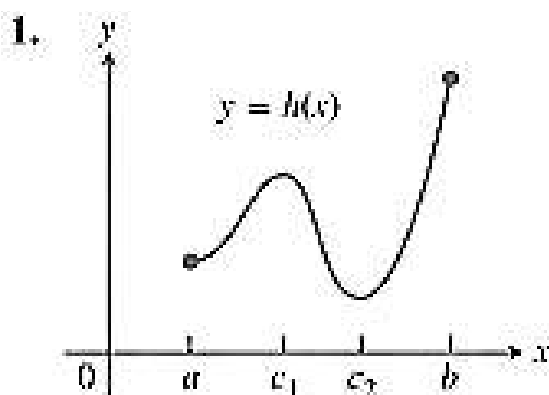
## TAREAS EN CASA



Nombre: \_\_\_\_\_

**1**

En los ejercicios del 1 al 6 determinar viendo la gráfica cuando la función definida en  $[a, b]$  tiene máximos, o mínimos y en donde.







**2** ¿Para cual valor de x tiene h un máximo relativo?

$$h(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$$

**Escoge una respuesta**

☐ -4

☐ 0

☐ -1

☐ 2

**3** ¿Para que valor de x tiene g un mínimo relativo?

$$g(x) = x^6 - 3x^5$$

**Escoge una respuesta**

☐ 5/2

☐ -2/5

☐ 3

☐ 0

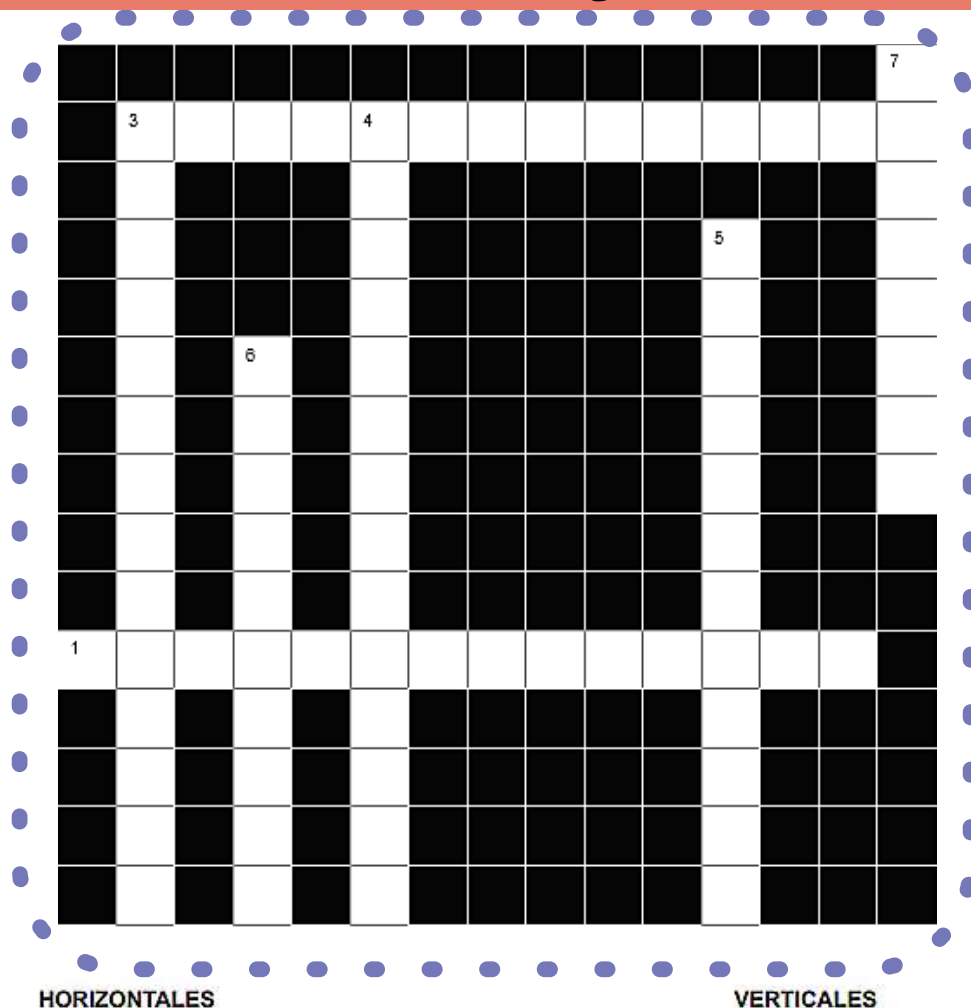
**4** Resolver el crucigrama, el mismo que se lo encuentra en el siguiente link ingresar para obtener los ítems y responder:

[https://es.educaplay.com/recursos-educativos/9878620-f\\_creciente\\_decreciente.html](https://es.educaplay.com/recursos-educativos/9878620-f_creciente_decreciente.html)

**educaplay**



## Modelo de crucigrama



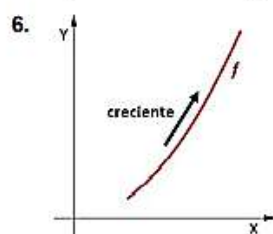
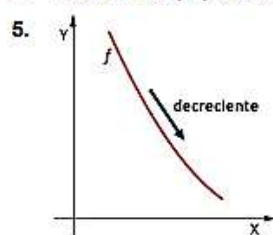
HORIZONTALES

VERTICALES

1. Es un \_\_\_\_\_ si una función continua es ascendente en un intervalo y a partir de un punto cualquiera empieza a decrecer
3. Es el valor mas grande en todo el dominio.



2. Es un \_\_\_\_\_ si una función continua es decreciente en cierto intervalo hasta un punto en el cual empieza a ascender
4. Es el valor mas pequeño de todo el dominio



7. Cuando la derivada es de signo \_\_\_\_\_ la función es creciente

# PRUEBA DE LA PRIMERA DERIVADA

Aplicaciones de las  
Derivadas

SEGUNDA CLASE



## Destrezas:

El docente tendrá la capacidad de interpretar y desarrollar con el estudiante ejercicios de la materia relacionados con la vida cotidiana.

### ANTICIPACIÓN



*Tiempo estimado 15 minutos*

### ESTRATEGIA USADA



*Lluvia de ideas*

Para empezar la clase, repartiremos las siguientes preguntas a los estudiantes y que lo resuelvan en 5 min. (la hoja la encontramos en la parte posterior RECORTABLES)

## RESOLVER PREGUNTAS



- **Qué representa la derivada de una función?**

Representa el valor de la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función en dicho punto

- **Se puede tener mas de dos derivadas de un solo punto ?**

No, ya que se puede realizar solo en un punto tangente a la curva de una función cualquiera.

- **Ejemplifique un uso de las derivadas en su diario vivir:**

- Reducir costos al fabricar un producto
- La derivada nos puede ayudar a calcular el ritmo de cambio del precio de una pizza con respecto a su tamaño
- La derivada nos ayudan a hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de los valores de interés

## LLUVIA DE IDEAS

- 1 Realizar una lluvia de ideas, acerca de las siguientes preguntas para saber el conocimiento que tiene el estudiante. Colocar tus respuestas en las nubes



### PREGUNTAS:

- **¿Cuál es la derivada de una constante?**  
La derivada es 0
- **¿Cuál es la derivada de  $x$ ?**  
La derivada es 1
- **¿Cuál es la derivada de  $2x$ ?**  
La derivada es 2
- **¿Cuál es la derivada de  $x^2$ ?**  
La derivada es  $2x$
- **¿Cuál es la derivada de  $68x^2+24x$ ?**  
La derivada es  $136x+24$



## PARTICIPACIÓN EN CLASE



Realizar este ejercicio con el estudiante para recordar conocimientos adquiridos



Hallar los puntos críticos de la siguiente función en el menor tiempo posible.  $f(x) = 3x^3 - x$

1 Derivamos

$$f'(x) = 9x^2 - 1$$

2 Calculamos los puntos críticos

$$f'(x) = 0$$

$$9x^2 - 1 = 0$$

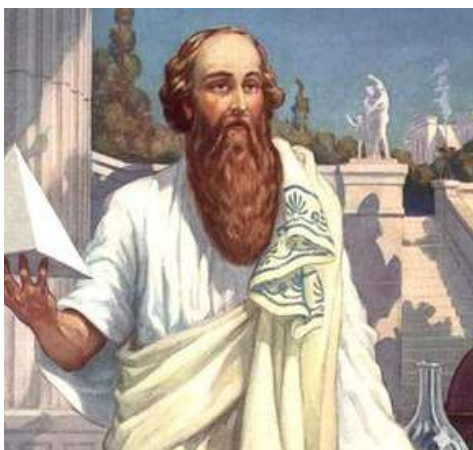
$$x = \pm \frac{1}{3}$$

3 Hay dos puntos críticos

$$x = 1/3 \text{ y } x = -1/3.$$



### Un poco de historia



Los problemas típicos que dieron origen al cálculo infinitesimal, comenzaron a plantearse en la época clásica de la antigua Grecia, pero no se encontraron métodos sistemáticos de resolución hasta veinte siglos después.

### Sugerencia para el docente :

Se puede indicar el ejercicio de puntos críticos desarrollando la tabla enseñada en la primera clase para observar si son máximos o mínimos.



El punto crítico que acabamos de hallar, lo podemos clasificar en la siguiente tabla.



| Signo de $f'(x)$ en $a, x_1$ | Signo de $f'(x)$ en $(x_1, b)$ | Decision                                  |
|------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------------|
| +                            | -                              | $f(x_1)$ es un máximo                     |
| -                            | +                              | $f(x_1)$ es un mínimo                     |
| +                            | +                              | $f(x_1)$ es un posible punto de inflexión |
| -                            | -                              | $f(x_1)$ es un posible punto de inflexión |



## ANÁLISIS DE PUNTOS CRÍTICOS



Retomando el resultado del ejercicio de la pág. 4 analizaremos los máximos y mínimos mediante la tabla anterior.

Evaluamos la función en cada intervalo y completamos la tabla con los signos correspondientes.



**Puntos críticos**  
 $x = 1/3$  y  $x = -1/3$ .

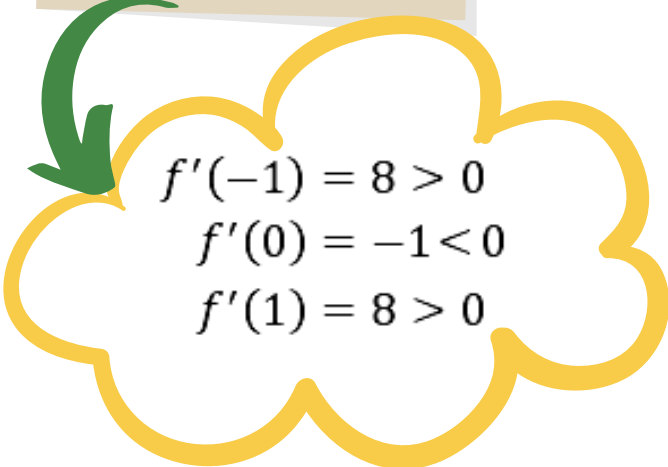
**Intervalos**

$(-\infty, -1/3)$ ,

$(-1/3, 1/3)$

$(1/3, +\infty)$





$$f'(-1) = 8 > 0$$

$$f'(0) = -1 < 0$$

$$f'(1) = 8 > 0$$



Tutorial de máximos y mínimos de la función

<https://n9.cl/ai4io>





## ANALISIS

| Signo de $f'(x)$ en $(a_1, x_1)$ | Signo de $f'(x)$ en $(x_1, b_1)$ | Intervalos        |
|----------------------------------|----------------------------------|-------------------|
| -                                | +                                | $(-\infty, -1/3)$ |
| +                                | -                                | $(-1/3, 1/3)$     |
| +                                | +                                | $(1/3, +\infty)$  |

Tenemos que

- La función es creciente en  $(-\infty, -1/3)$
- La función es decreciente en  $(-1/3, 1/3)$
- La función es creciente en  $(1/3, +\infty)$

Máximo:

Mínimo:

$$x = -1/3$$

$$x = 1/3$$



Teniendo en cuenta que los límites son infinitos los extremos son absolutos.



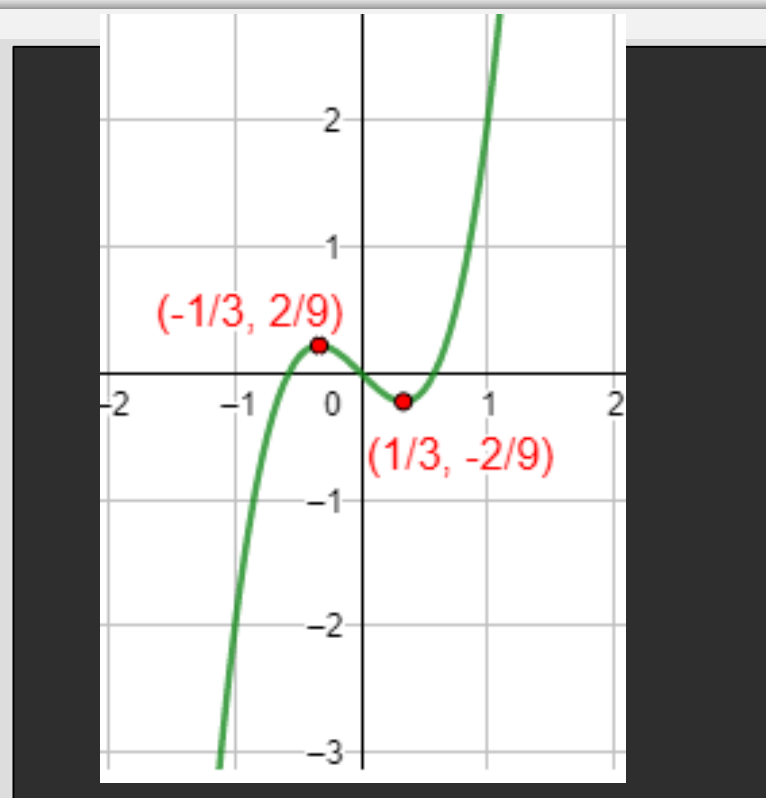
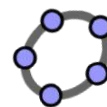
GeoGebra es un software de matemáticas para todo nivel educativo. Reúne dinámicamente geometría, álgebra, estadística y cálculo en registros gráficos, de análisis y de organización en hojas de cálculo.

## MANOS A LA OBRA



Realizar la gráfica de la función, en GeoGebra y señalar los puntos críticos, máximos y mínimos directamente en la gráfica. Realizar una captura, y pegar en la parte posterior.

**Link de GeoGebra:**  
<https://cutt.ly/7RXAGCr>



**Responder las siguientes preguntas:**

1

¿Cuáles son los intervalos que crece la función?

---

2

¿Cuáles son los intervalos que decrece la función?

---

3

Analice los cortes que realiza la función en el eje x y el Y, escríbalos.

---

## PRUEBA DE LA PRIMERA DERIVADA

### CONSTRUCCIÓN

*Tiempo estimado 35 minutos*



La prueba de la primera derivada establece como determinar los valores máximos y mínimos o valores extremos en una función.



### TEOREMAS

- 1** Si  $f'(x)$  cambia de negativa a positiva en  $c$ , entonces  $f$  tiene un mínimo relativo en  $(c, f(c))$
- 2** Si  $f'(x)$  cambia de positiva a negativa en  $c$ , entonces  $f$  tiene un máximo relativo en  $(c, f(c))$
- 3** Si  $f'(x)$  es positiva en ambos lados de  $c$  o negativa en ambos lados de  $c$ , entonces  $f(c)$  no es ni un mínimo ni un máximo relativo



### SUGERENCIAS AL PROFESOR

Comentar con los estudiantes que es posible convertir los teoremas anteriores en una serie de pasos a seguir, de manera que podamos establecer el siguiente procedimiento para encontrar valores extremos de una función.

## PASOS A SEGUIR

### PROCEDIMIENTO

- 1 Obtener la primera derivada de la función
- 2 Igualar a cero la primera derivada  $f'(x) = 0$ , para investigar dónde  $f(x)$  es constante.
- 3 Resolver la ecuación resultante, para encontrar los puntos críticos de  $f(x)$ :  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , donde podría tener un máximo, un mínimo o un punto de inflexión.
- 4 Dividir el eje X en intervalos, para analizar el carácter creciente, decreciente o constante de una función.
- 5 Dar valores a x en cada uno de los intervalos.
- 6 Evaluar la primera derivada en cada uno de esos valores.
- 7 Observar los cambios de signo que sufre  $f'(x)$  de un intervalo al siguiente y tomar una decisión con base en el criterio anterior.
- 8 Calcular el valor extremo o punto de inflexión, evaluando  $f(x)$  en cada punto crítico.



Para aprender en casa.

<https://n9.cl/kfu0e>





## EJERCICIO DE REPASO

Encuentre dos números tales que la suma de uno de ellos con el cubo del otro sea 108 y que su producto sea lo más grande posible.

**Solución:**



- 1 Sean los números  $x$  e  $y$ . El hecho de que la suma de uno de ellos con el cubo del otro es 108 se representa del siguiente modo:

$$y + x^3 = 108$$

de donde podemos obtener  $y$  en función de  $x$ :

$$y = 108 - x^3$$

La función producto es:

$$\begin{aligned} P(x) &= x \cdot y \\ &= x(-x^3 + 108x) \\ &= -4x^3 + 108x \end{aligned}$$

- 2 Derivando la función:  $P'(x) = 108 - x^3$   
Igualamos a 0 la derivada y resolvemos la ecuación:



$$\begin{aligned} P'(x) &= 0 \\ -4x^3 + 108 &= 0 \\ x &= \sqrt[3]{\frac{108}{4}} \\ &= \sqrt[3]{27} = 3 \end{aligned}$$



**Nota:** hemos escrito  $y+x^3$  en lugar de  $x+y^3$  para que al aislar  $y$  en función de  $x$  no tengamos que escribir la raíz cúbica (así los cálculos serán más simples).

En el siguiente link encontrarás un ejercicio parecido al que se presenta para poder guiarse:

<https://n9.cl/buvml>

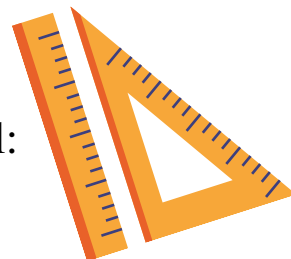
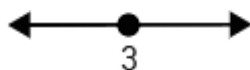


## EJERCICIO DE REPASO



**Continuación:**

3 Representamos el punto crítico en la recta real:



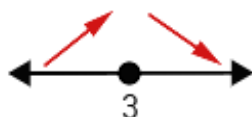
Estudiamos el signo de la derivada en ambos intervalos.  
Utilizaremos los puntos  $x=0$  y  $x=4$

$$P'(x) = -4x^3 + 108$$

$$P'(0) = 108 > 0$$

$$P'(4) = -148 < 0$$

4 La gráfica es la siguiente:



### MONOTONÍA DE UNA FUNCIÓN

Estudia donde crece y donde decrece nuestra función:

$f'(a) > 0$  crece

$f'(a) < 0$  decrece

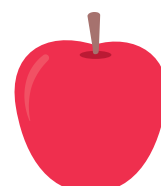
Por tanto, la función P:

- Es creciente en el intervalo  $]-\infty, 3[$
- Es decreciente en el intervalo  $]3, +\infty[$

5 De la monotonía se deduce que en  $x=3$  hay un máximo.  
Se calcula y:

$$\begin{aligned} y &= 108 - x^3 \\ &= 108 - 3^3 = 81 \end{aligned}$$

Por tanto, los números son  $x=3$  e  $y=81$ .,  
y su producto es  $x*y=243$

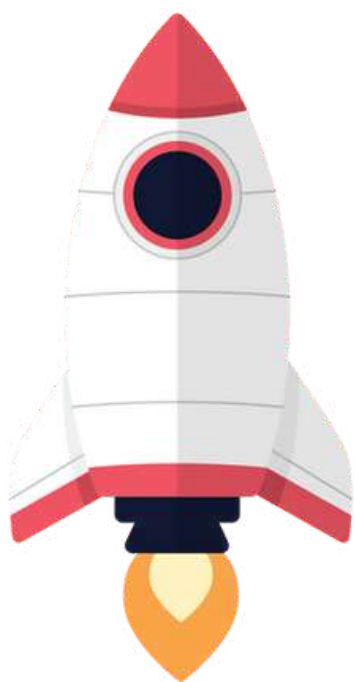
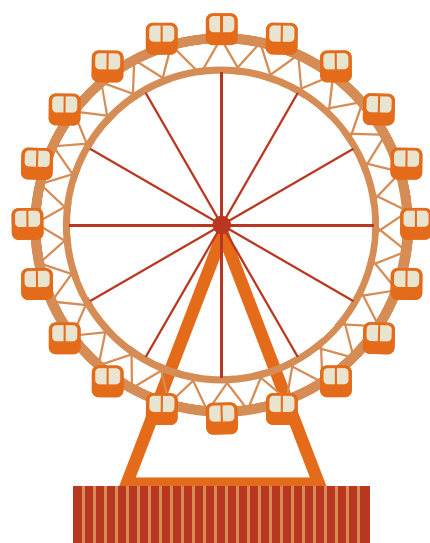


## APLICACIONES DE DERIVADAS

Como la derivada expresa el cambio instantáneo que experimenta una variable con respecto a otra variable, en la física las derivadas son muy útiles en el momento en que se las emplea para definir la velocidad promedio de cualquier cuerpo en cualquier en relación al tiempo.

### Ejemplo:

- En una rueda moscovita que da una vuelta cada dos minutos, se desea saber la velocidad con que se eleva un pasajero en el instante en que se encuentra a 54 pies por encima del suelo. ●



- Se podría ejemplificar también en los cohetes que muy a menudo sin lanzados desde la NASA, cuando se lanza un cohete los científicos encargados de esta operación se requiere saber cual es la velocidad instantánea del cohete y cual es su velocidad después de 40 segundos para estos dos ejemplos es necesaria la utilización de las derivadas. ●



## A PRACTICAR



Un observador se encuentra a 2000m de despegue del avión en el aeropuerto Mariscal Lamar de Cuenca. Cuando éste despegue inclinámente mide la variación del ángulo  $\varphi(t)$  que forma la línea visual que le une con el avión y la del suelo horizontal en función del tiempo transcurrido.

Sabiendo que  $\varphi'(t) = \frac{1}{20}$ , se pide:

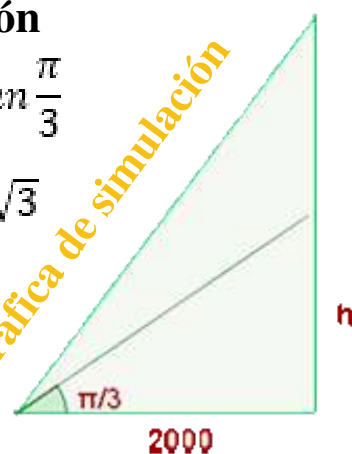
- 1 ¿Cuál es la altura del avión cuando  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ?



### Interpretación

$$h = 2000 \times \tan \frac{\pi}{3}$$

$$h = 2000 \times \sqrt{3}$$



- 2 ¿Cuál es la velocidad del avión cuando  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ?

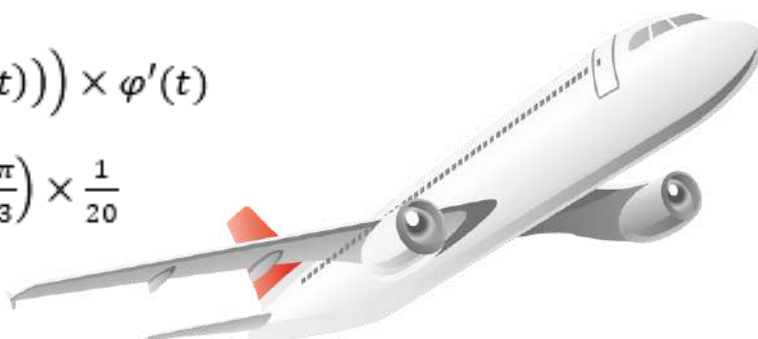
Derivamos  $h(t)$  para calcular la velocidad

$$v(\varphi) = h'(t)$$

$$= 2000 \left( 1 + \tan^2(\varphi(t)) \right) \times \varphi'(t)$$

$$v(t) = 2000 \left( 1 + \tan^2 \frac{\pi}{3} \right) \times \frac{1}{20}$$

$$v(t) = 400 \frac{m}{s}$$



# EVALUACIÓN



## Consolidación

tiempo estimado 15 min

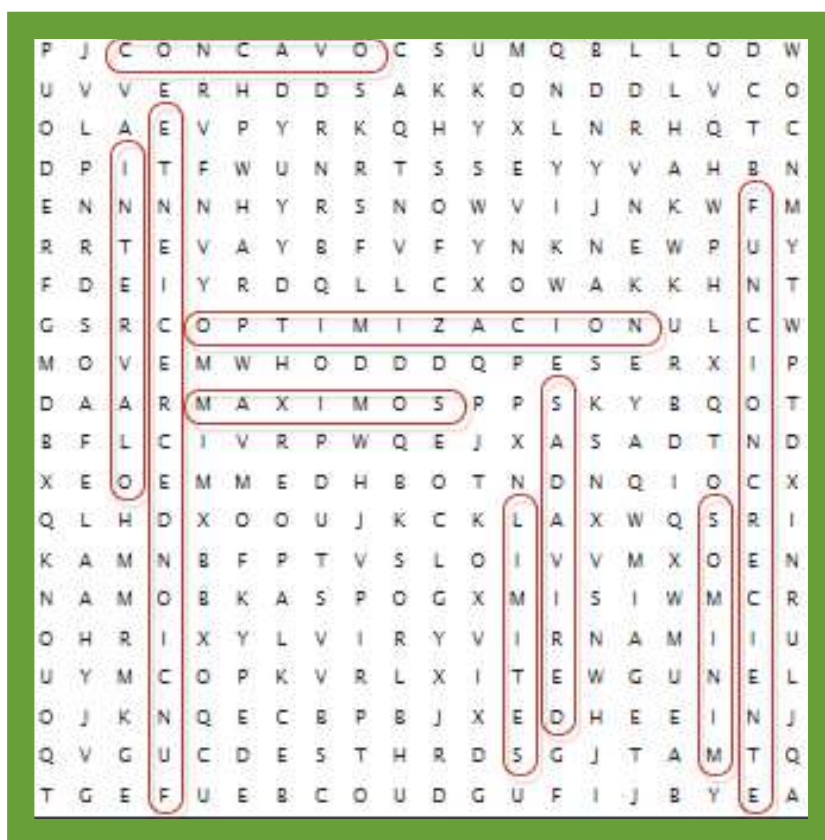


Es momento de evaluar el conocimiento adquirido, para ello vamos a trabajar en parejas las cuales resolverán juegos como crucigramas, preguntas y se enviarán ejercicios para resolver en casa, conjuntamente con sus gráficas realizadas en Geogebra.

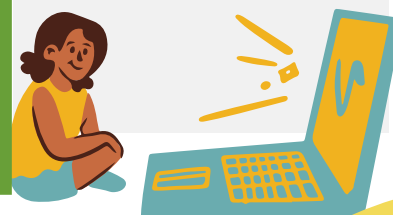
**1** En el siguiente link encontraras una sopa de letras la cual esta diseñada para encontrar palabras relacionadas con la clase presentada, realizar en el menos tiempo posible, el docente realizara recompensas.

<https://cutt.ly/NRXSG78>

educaplay



FUNCION DECRECIENTE  
FUNCION CRECIENTE  
OPTIMIZACION  
DERIVADAS  
INTERVALO  
MAXIMOS  
MINIMOS  
LIMITE  
CONCAVO  
CONVEXO



2

Pintar los recuadros del mismo color según la respuesta correcta con respecto al criterio de la primera derivada.

### FUNCIÓN

$$f(x) = 4 + 15x + 6x^2 - x^3$$

$$f(x) = 3x^4 - 20x^3 - 6x^2 + 60x - 8$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-2}$$

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

$$f(x) = e^{-(x-1)^2}$$

$$f(x) = x \ln(x)$$

### RESPUESTA

$$f'(x) = -\frac{x^2 + 2x + 3}{((x+2)(x-1))^2}$$

$$f'(x) = \ln x + 1$$

$$f'(x) = 12x^3 - 60x^2 - 12x + 60$$

$$f'(x) = 15 + 12x - 3x^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$f'(x) = -2(x-1)e^{-(x-1)^2}$$



### RECURSO TECNOLÓGICO



Los estudiantes pueden revisar sus respuestas en el siguiente link



**Calculadora de derivadas**

**LINK**

<https://cutt.ly/sRXSjxR>

## TAREA EN CASA



1

**Resuelva los siguientes ejercicios:**

- Halle los extremos
- Cuándo la función crece y decrece
- Finalmente grafique en Geogebra

$$f(x) = \frac{x-2}{x+2}$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

2

**Problema de razonamiento:**

Carlos se moviliza en la autopista y obtiene que la relación entre la distancia recorrida en metros por un móvil y el tiempo en segundos es  $e(t) = 6t^2$ .

Calcular:

1

La velocidad media entre  $t=1$  y  $t=4$

2

La velocidad instantánea en  $t=1$



## RECURSOS



Calculadora de Derivadas •  
¡Con pasos!  
[calculadora-de-derivadas.com](http://calculadora-de-derivadas.com)





RECORTABLES Y  
SOLUCIONES





## LLUVIA DE IDEAS

- 1 Realizar una lluvia de ideas, acerca de las siguientes preguntas para saber el conocimiento que tiene el docente.



### PREGUNTAS:

- ¿Cuál es la derivada de una constante?
- ¿Cuál es la derivada de  $x$ ?
- ¿Cuál es la derivada de  $2x$ ?
- ¿Cuál es la derivada de  $x^2$ ?
- ¿Cuál es la derivada de  $68x^2+24x$ ?

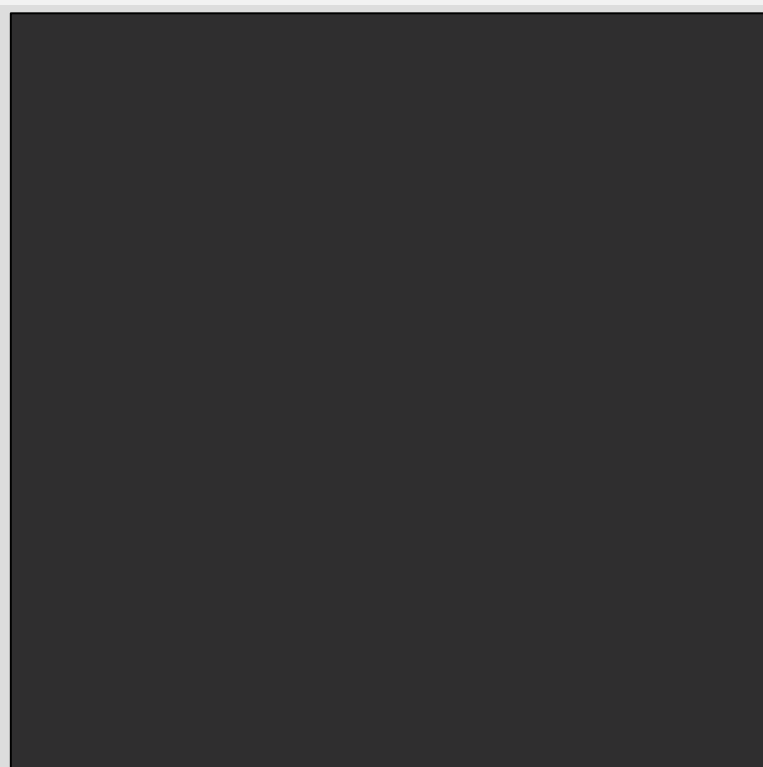
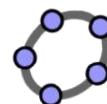


## MANOS A LA OBRA



Realizar la gráfica de la función, en GeoGebra y señalar los puntos críticos, máximos y mínimos directamente en la gráfica. Realizar una captura, y pegar en la parte posterior.

Link de GeoGebra:  
<https://cutt.ly/7RXAGCr>



**Responder las siguientes preguntas:**

1 ¿Cuáles son los intervalos que crece la función?

2 ¿Cuáles son los intervalos que decrece la función?

3 Analice los cortes que realiza la función en el eje  $x$  y el  $Y$ , escríbalos.





## EVALUACIÓN



Consolidación

tiempo estimado 15 min



Es momento de evaluar el conocimiento adquirido, para ello vamos a trabajar en parejas las cuales resolverán juegos como crucigramas, preguntas y se enviarán ejercicios para resolver en casa, conjuntamente con sus gráficas realizadas en Geogebra.

**1** En el siguiente link encontraras una sopa de letras la cual esta diseñada para encontrar palabras relacionadas con la clase presentada, realizar en el menos tiempo posible, el docente realizara recompensas.

<https://cutt.ly/NRXSG78>

educaplay

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | N | C | O | N | C | A | V | O | A | R | J | Q | G | G | A | G | S | B | Q |
| L | X | A | C | C | L | U | Y | E | V | Y | M | O | O | M | X | D | D | S | O |
| H | L | S | E | K | K | O | J | O | M | D | U | X | W | D | I | S | V | U | P |
| U | U | I | T | O | D | O | B | Q | F | U | Q | E | R | L | G | A | R | G | Q |
| W | T | N | N | C | D | G | S | E | R | U | U | V | V | H | E | L | C | F | H |
| G | R | T | E | M | L | Y | J | D | D | C | L | N | Y | T | C | U | B | U | U |
| P | V | E | I | X | J | Q | N | N | A | S | D | O | I | H | N | V | W | N | O |
| Q | R | R | C | O | P | T | I | M | I | Z | A | C | I | O | N | W | H | C | I |
| S | E | V | E | X | T | C | U | Q | L | X | N | S | U | X | Q | C | K | I | D |
| A | A | A | R | M | A | X | I | M | O | S | F | T | S | P | F | K | J | O | T |
| R | O | L | C | H | S | M | E | T | W | W | B | E | A | I | W | T | A | N | W |
| K | L | O | E | G | I | X | C | C | F | E | R | C | D | Q | X | H | C | C | X |
| R | R | V | D | S | N | K | Q | A | L | S | K | L | A | D | H | F | S | R | Y |
| B | K | V | N | E | R | M | A | N | O | A | P | I | V | E | I | P | O | E | N |
| X | B | Y | O | T | F | M | N | B | N | Q | N | M | I | G | W | B | M | C | N |
| T | V | F | I | E | T | D | K | E | N | Q | I | I | R | I | F | M | I | I | H |
| X | P | X | C | E | G | O | T | T | S | L | L | T | E | Q | B | L | N | E | J |
| S | Y | D | N | Y | B | M | V | M | S | T | G | E | D | D | K | M | I | N | R |
| E | R | M | U | F | E | Q | Q | K | P | G | L | S | E | V | D | A | M | T | K |
| K | B | H | F | G | V | E | F | V | U | D | U | Q | K | V | B | P | V | E | F |

FUNCIONDECRECIENTE  
FUNCIONCRECIENTE  
OPTIMIZACION  
DERIVADAS  
INTERVALO  
MAXIMOS  
MINIMOS  
LIMITES  
CONCAVO  
CONVEXO





2

Pintar los recuadros del mismo color según la respuesta correcta con respecto al criterio de la primera derivada.

**FUNCIÓN**

$$f(x) = 4 + 15x + 6x^2 - x^3$$

$$f(x) = 3x^4 - 20x^3 - 6x^2 + 60x - 8$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-2}$$

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

$$f(x) = e^{-(x-1)^2}$$

$$f(x) = x \ln(x)$$

**RESPUESTA**

$$f'(x) = -\frac{x^2 + 2x + 3}{((x+2)(x-1))^2}$$

$$f'(x) = \ln x + 1$$

$$f'(x) = 12x^3 - 60x^2 - 12x + 60$$

$$f'(x) = 15 + 12x - 3x^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$f'(x) = -2(x-1)e^{-(x-1)^2}$$

**RECURSO TECNOLÓGICO**

Calculadora de derivadas

LINK

<https://cutt.ly/sRXSjxR>



## TAREA EN CASA



### 1 Resuelva los siguientes ejercicios:

- Halle los extremos
- Cuándo la función crece y decrece
- Finalmente grafique en Geogebra

$$f(x) = \frac{x-2}{x+2} \quad f(x) = x + \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

### 2 Problema de razonamiento:

Carlos se moviliza en la autopista y obtiene que la relación entre la distancia recorrida en metros por un móvil y el tiempo en segundos es  $e(t) = 6t^2$ .

Calcular:

- 1 La velocidad media entre  $t=1$  y  $t=4$
- 2 La velocidad instantánea en  $t=1$

## RECURSOS



A large Ferris wheel stands on a sandy beach at sunset. The sky is filled with soft, colorful clouds in shades of pink, orange, and yellow. The Ferris wheel's structure is silhouetted against the bright sky, and its reflection is visible in the calm water in the foreground.

# **PRUEBA DE LA SEGUNDA DERIVADA**

**APLICACIONES DE LAS  
DERIVADAS  
TERCERA CLASE**

## Destrezas:

-El docente estará en la capacidad de demostrar, y desarrollar varios ejemplos de la vida diaria de los alumnos relacionándolos con la segunda derivada.

### ANTICIPACION



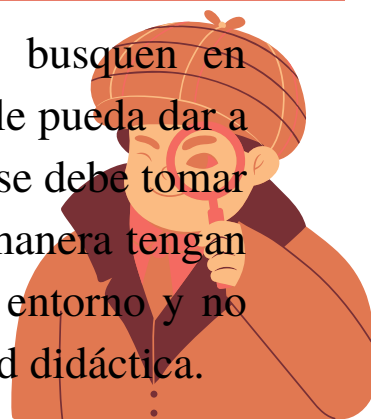
*Tiempo estimado 15 minutos*

### ESTRATEGIA USADA



### Investigación

Se envía previamente a los estudiantes a que busquen en distintos lugares de consulta, aplicaciones que se le pueda dar a la segunda derivada en la vida real, que es lo que se debe tomar en cuenta y sus características, para que de esta manera tengan noción de que el tema es de utilidad en nuestro entorno y no simplemente actué como un tema más de la unidad didáctica.



### RESUELVA EN CLASE JUNTO CON EL DOCENTE



- ¿Existe alguna relación de la segunda derivada con máximos y mínimos ?

---

---

- ¿Qué características tiene la segunda derivada?

---

---

- ¿En donde se visualiza la aplicación de la segunda derivada?

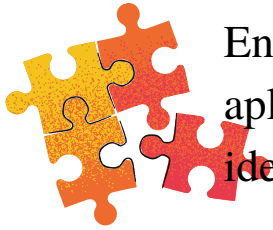
---

---

---



## Investigación



En base a la investigación previa de los estudiantes sobre aplicaciones de la segunda derivada, hacer una lluvia de ideas relacionando la materia con la vida cotidiana.



Según la imagen una persona al ingresar al agua cambiara su temperatura según el tiempo que permanezca y ahí obtendremos una función decreciente al haber perdida de calor del cuerpo.

### Cambio de temperatura corporal

Al estudiar la velocidad de crecimiento bacteria la derivada no solo mide velocidades sino también aceleraciones.



### Crecimiento bacterial

Se utiliza para tener mayor visibilidad sobre la forma en que las ondas de la presión arterial se comportan.



### Presión arterial





Según lo aprendido observaremos las siguientes imágenes y junto a los estudiantes relacionaremos con los conceptos de máximos y mínimos de una función, escribiremos en la parte posterior los nombres correspondientes.



Máximos absolutos



Máximos absolutos



Mínimo absoluto



Mínimo absoluto



En el siguiente link encontraremos, mayor explicación de las funciones de máximos y mínimos.



<https://n9.cl/mx8tw>

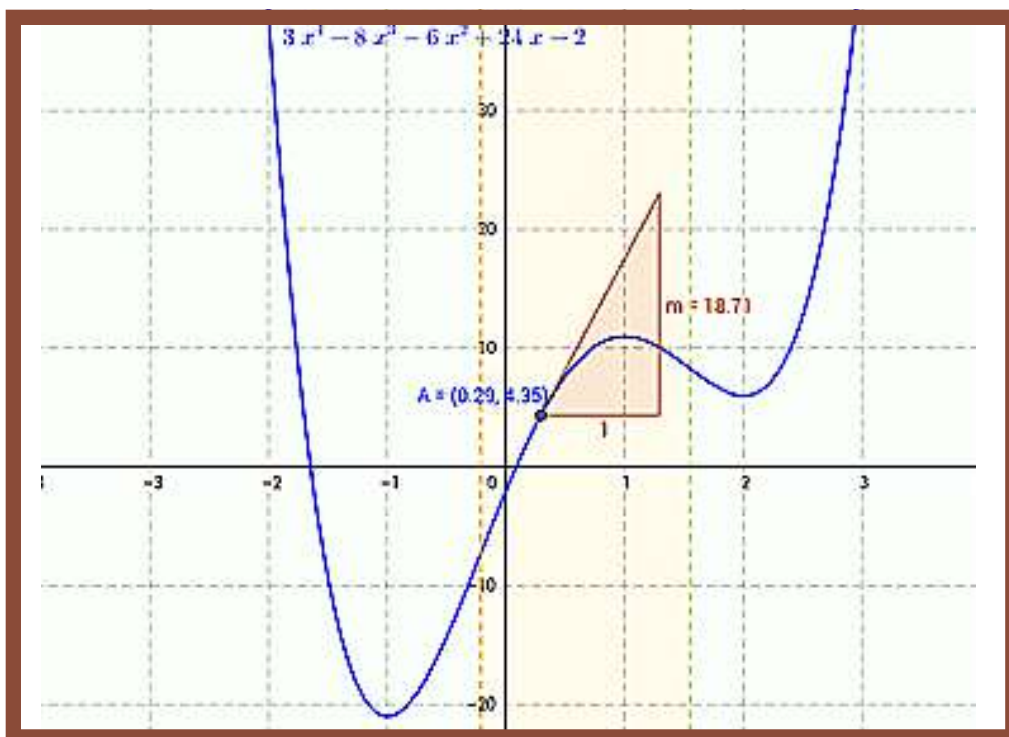




## DESARROLLO DE CONCEPTOS



Este trabajo se realizara juntamente con el docente, mediante la imngane responder las preguntas:



**1** ¿En que punto existe un máximo relativo?

---

**2** ¿En que punto existe un mínimo relativo?

---

**3** ¿Cuáles son los puntos criticos de la funcion?

---

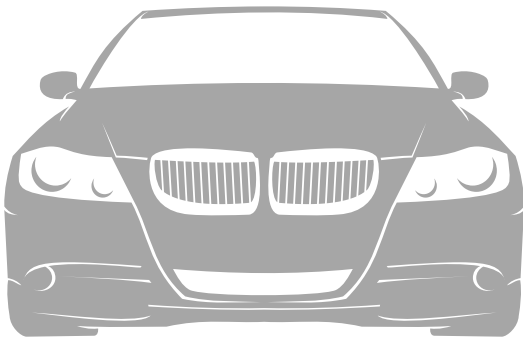
## IMPORTANTE



La segunda derivada tiene interpretaciones tanto matemáticas como gráficas en este apartado visualizaremos algunos puntos importantes de ambas para su estudio y comprensión.

### Interpretación matemática

En el cálculo, la segunda derivada, o la derivada de segundo orden, de una función  $f$  es la derivada de la derivada de  $f$ ,  $(f'')$ , o a su vez hablando en términos generales la segunda derivada mide cómo está cambiando la tasa de cambio de una cantidad.



Posición

$$r(t)$$

Velocidad

$$v(t) = \frac{dr}{dt}$$

Aceleración

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$$

### EJEMPLO

La segunda derivada de la posición de un vehículo con respecto al tiempo es la aceleración instantánea del vehículo, o la velocidad a la que cambia la velocidad del vehículo con respecto al tiempo.

## TOMEMOS EN CUENTA



### Nota para el docente:

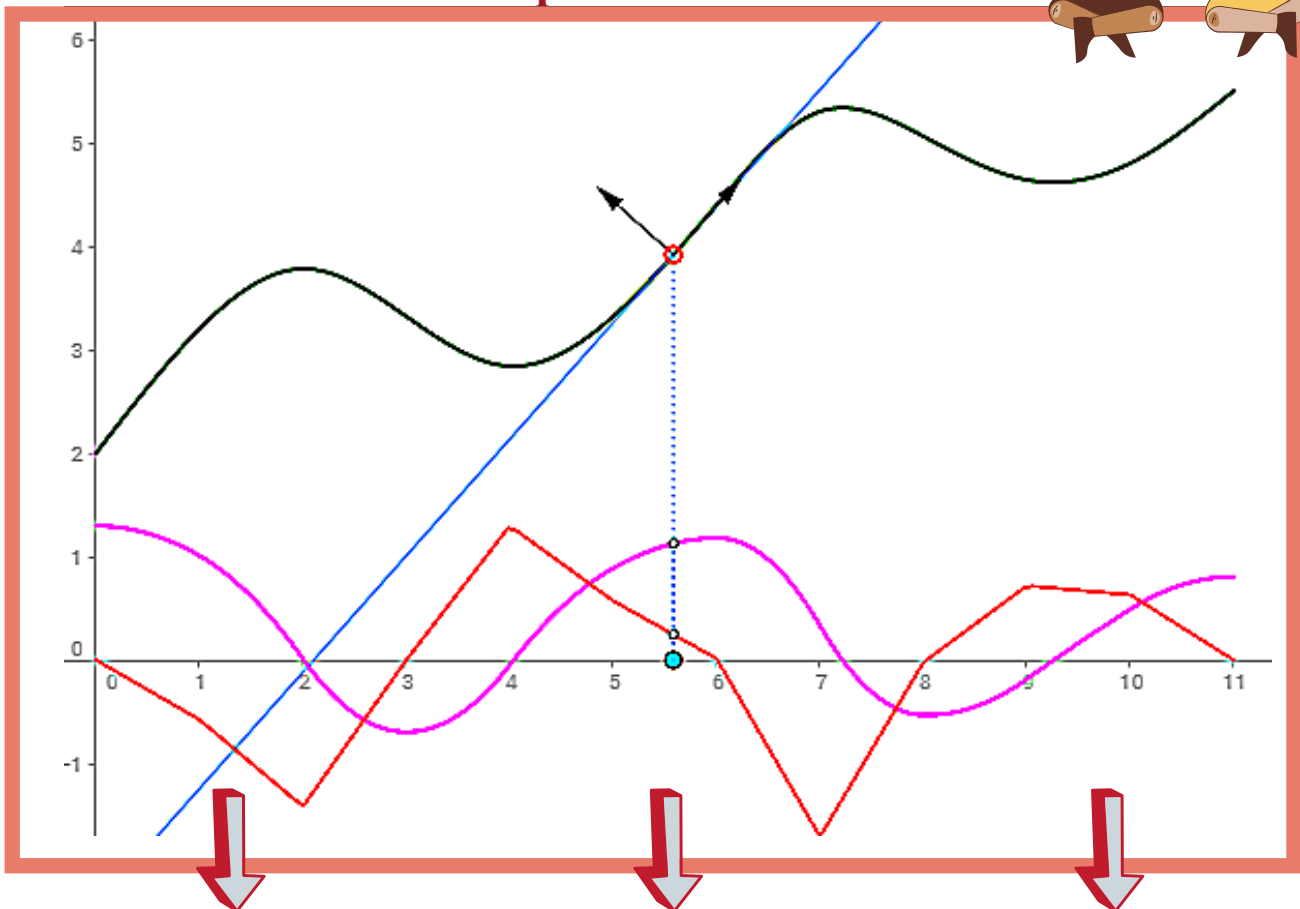
Para poder explicar todos estos apartados, ingresaremos al siguiente link en el cual encontraremos graficas de funciones.

Link

<https://n9.cl/3t2d6>



### Interpretación Gráfica



Funcion principal

Primera Derivada

Segunda Derivada

De acuerdo al gráfico presente la pendiente (derivada) en cada punto de una función genera una nueva función (función derivada) que representa el crecimiento, constancia o decrecimiento de la función primitiva.

## PRUEBA DE LA SEGUNDA DERIVADA

### CONSTRUCCION

Tiempo estimado 35 minutos



La aplicación directa del criterio de la segunda derivada es determinar si los puntos críticos de una función (puntos que anulan la primera derivada) son máximos o mínimos.

### HIPOTESIS.

Si  $f(x)$  es una función que tiene primera y segunda derivada en un intervalo  $(a,b)$  y tiene un punto crítico en  $x = x_1$ , entonces:

### TEOREMAS

- 1 Si  $f''(x) < 0$ , entonces  $f$  tiene un máximo relativo en  $(x, f(x))$ .
- 2 Si  $f''(x) > 0$ , entonces  $f$  tiene un mínimo relativo en  $(x, f(x))$ .
- 3 Si  $f''(x) = 0$ , entonces el criterio falla. Esto es,  $f$  quizás tenga un máximo relativo en  $x$ , un mínimo relativo en  $(x, f(x))$  o ninguno de los dos.

Para entender mejor los teoremas podemos revisar el siguiente video el mismo que expresa paso a paso el desarrollo de un ejercicio.

LINK



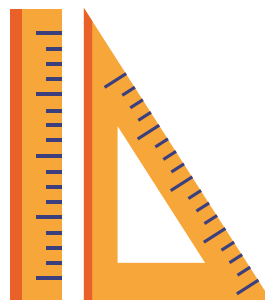
<https://n9.cl/awztr>



## APLICACIONES DE LA SEGUNDA DERIVADA

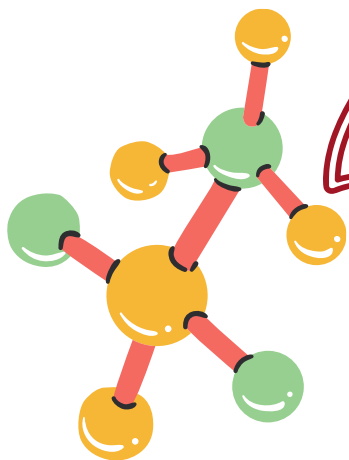
### GEOMETRIA

La derivada de la superficie o área es la longitud. La derivada del volumen es la superficie.



### QUIMICA

Cuando se produce una reacción química, las concentraciones de los reactivos y productos van cambiando con el tiempo hasta que se produce el equilibrio químico, en el cual las concentraciones de todas las sustancias permanecen constantes. La velocidad de reacción química es la derivada de la concentración de un reactivo o producto en función del tiempo.



### INGENIERIA

Los ingenieros químicos o ingenieros en procesos utilizan la derivada para representar fenómenos que ocurren en un proceso mediante el uso de ecuaciones diferenciales.





## PASOS A SEGUIR



1

Obtener la primera derivada de la función

2

Igualar a cero la primera derivada,  $f'(x) = 0$ , para investigar el carácter creciente, decreciente o constante de  $f(x)$ .

3

Resolver la ecuación obtenida, para encontrar los puntos críticos  $x_i$ , donde  $f(x)$  podría tener un máximo, un mínimo o un punto de inflexión.

4

Obtener la segunda derivada para investigar el tipo de concavidad que tiene  $f(x)$  en cada punto crítico.

5

Sustituir uno a uno los puntos críticos en  $f''(x)$  y aplicar el criterio de la segunda derivada.

6

Calcular las coordenadas del valor extremo (máximo o mínimo) o punto de inflexión, sustituyendo cada  $x_i$  en  $f(x)$ :  $(x_i, f(x_i))$

La derivada de una función es una medida de la rapidez con la que cambia el valor de dicha función según cambie el valor de su variable independiente. En los tres casos descendemos, pero no al mismo ritmo. En el primer caso, descendemos despacio; en el segundo, el descenso es más rápido pero en el tercero, ¡es una locura!



1



2



3





## A PRACTICAR



Una huerta en San Joaquín tiene actualmente 24 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que, por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima? ¿Cuál será esa producción?



### Desarrollo



Llamamos  $x$  al número de árboles que se plantan

**Tenemos que el número de frutos sería:**

➡  $f(x) = (24 + x)(600 - 15x)$

**Desarrollando términos:**

$$f(x) = -15x^2 + 240x + 14\,400$$

**1**

Derivamos la función  
 $f'(x) = -30x + 240$

**2**

Igualamos  $f(x)$  a 0 para obtener  
sus puntos críticos:

$$f'x = 0 \rightarrow -30x + 240 = 0$$

**3**

Despejando  $x$  tenemos:

$$x = 240/30 = 8 \rightarrow x = 8$$



## Continuación



4

Ahora determinaremos si es un máximo utilizando la prueba de la SEGUNDA DERIVADA:

$$f''(x) = -30$$

5

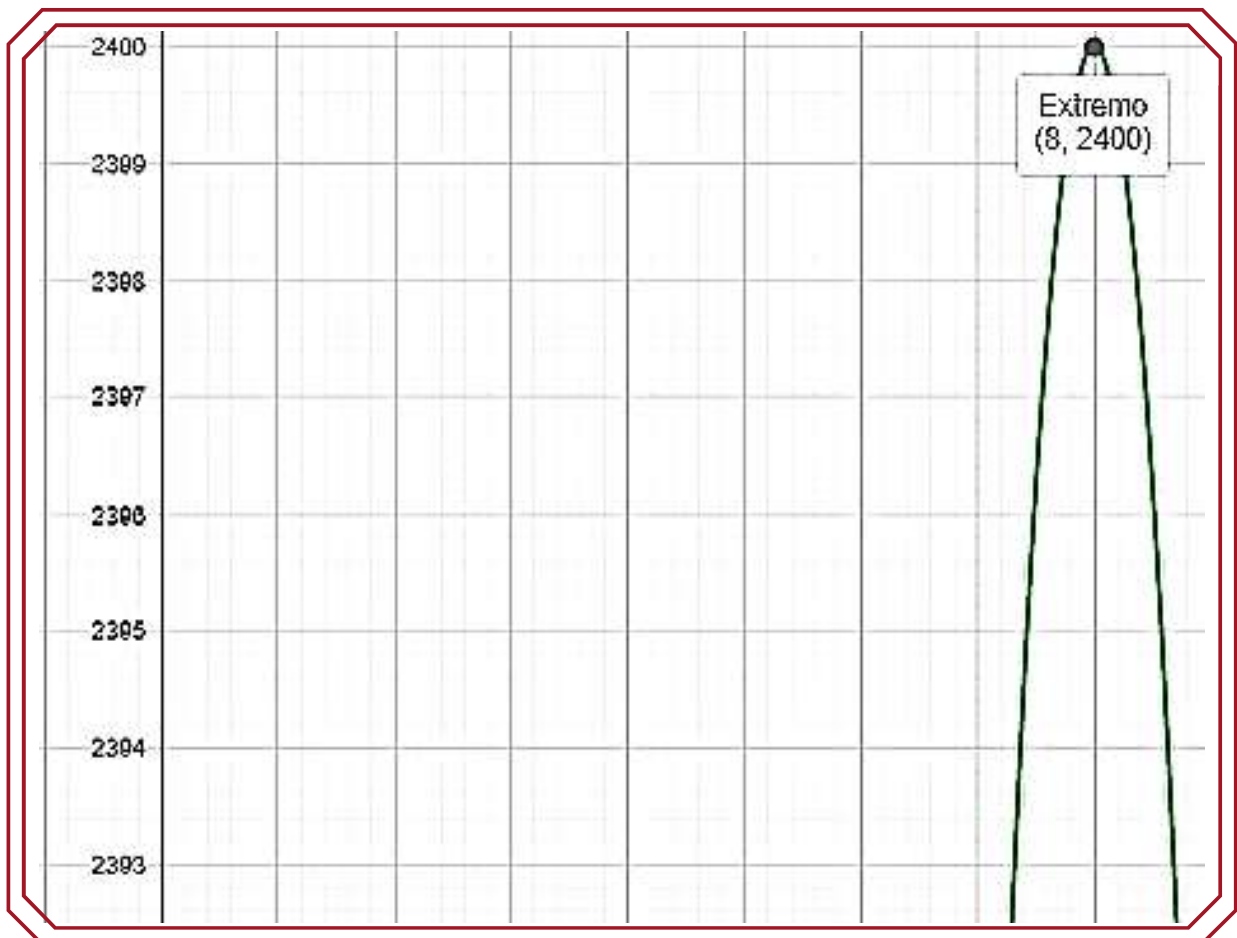
Evalúamos el valor de  $x=8$  en  $f'(x)$ :

$$f''(8) = -30 \text{ entonces } -30 < 0$$

6

Entonces en  $x = 8$  hay un máximo

(Como  $f(x)$  corresponde a una parábola invertida, en  $x = 8$  está el máximo absoluto).



## RESPUESTA

Por tanto, se deben plantar 8 árboles. Así, habrá un total de 24 árboles, que producirán 15.360 frutos.



## ¿Sabías que ?

Cuando una persona ha soportado una fuerte lluvia, obviamente esta totalmente empapada por ende su temperatura ha disminuido, en función a la cantidad del tiempo que dicho individuo se mantuvo mojado, o mas de un resfriado como consecuencias de la lluvia, esta persona también podría darle una hipotermia, para no llegar a esos niveles es necesario conocer la rapidez de disminución de la temperatura del cuerpo y con ella sabríamos el tiempo que nos queda para que la persona no sufra de una hipotermia, y esa información nos dará justamente la derivada.



## BIBLIOGRAFIA



Augustin Louis Cauchy



Fue pionero en el análisis matemático y la teoría de grupos de permutaciones, contribuyendo de manera medular a su desarrollo. También investigó la convergencia y la divergencia de las series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física matemática.

## EVALUACION

Consolidación

tiempo estimado 15 min

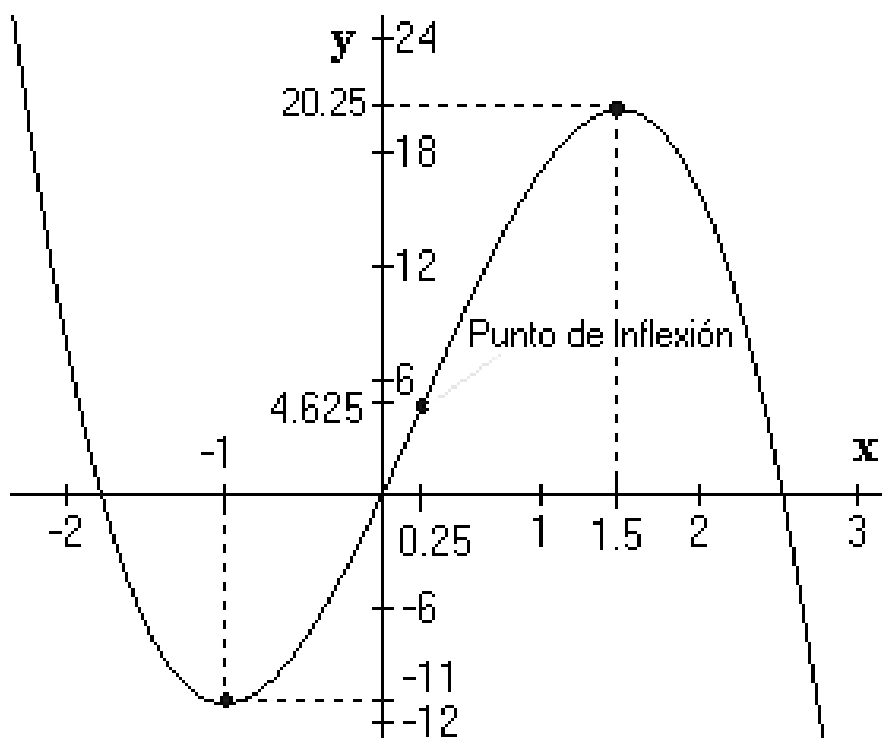


Es momento de evaluar el conocimiento adquirido para ello realizaremos una lección que durara 10 min con los siguientes ejercicios

Colorear la función correcta y hallar la segunda derivada.

Este trabajo se podrá realizar en parejas,

1



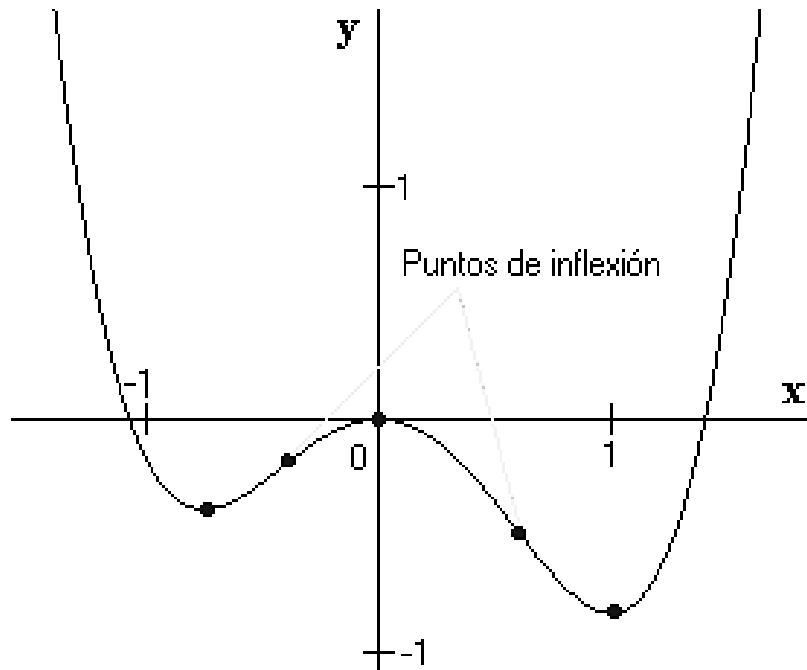
$$f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 18x$$

$$f(x) = -3x^3 + 4x^2 + 18x$$

$$f(x) = -18x^3 + 4x^2 + 3x$$

Segunda derivada: \_\_\_\_\_

2



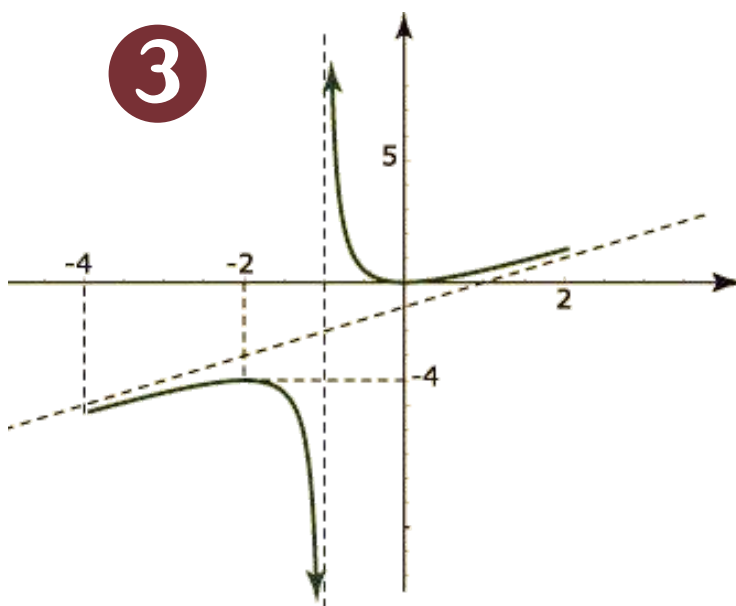
$$f(x) = \frac{1}{3}x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

$$f(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

$$f(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^2$$

Segunda derivada: \_\_\_\_\_

3



$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{3x-1}$$

$$f(x) = \frac{4x^2}{x+3x}$$

Segunda derivada: \_\_\_\_\_

## Evaluación de conocimientos

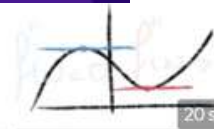
- 1 Se realizara una evaluación de conocimientos, mediante Kahoot una aplicación que despierta el interés de los estudiantes. Esta evaluación se realizara en la sala de computo o se enviara a resolver a los estudiantes en casa.



1

1 - Quiz

La segunda derivada mide.....



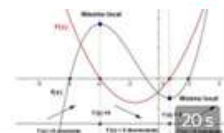
- ☐ la distancia de un punto a otro
- ☒ como varia la tasa de cambio de una cantidad
- ☐ cambia la velocidad de los animales

☐ La estatura de las personas

2

2 - Verdadero o falso

La aplicación de la segunda derivada es determinar si los puntos críticos de ...



- ☒ True
- ☐ False

3

3 - Quiz

Aplicaciones de la segunda derivada



- ☒ geometria
- ☒ quimica
- ☒ ingenieria
- ☐ cocina



4

4 - Verdadero o falso

El cuarto paso para la resolución del criterio de la segunda derivada es realiz...



True



False



5

5 - Quiz

¿Quién fue Agustín Louis Cauchy?



JUGADOR DE FUTBOL



GASTRONOMO



PSICOLOGO



PIONERO EN ANALISIS MATEMATICO



## RECURSOS

Link de la aplicación

<https://kahoot.it/>



Código de la evaluación

4505571



## NOTA

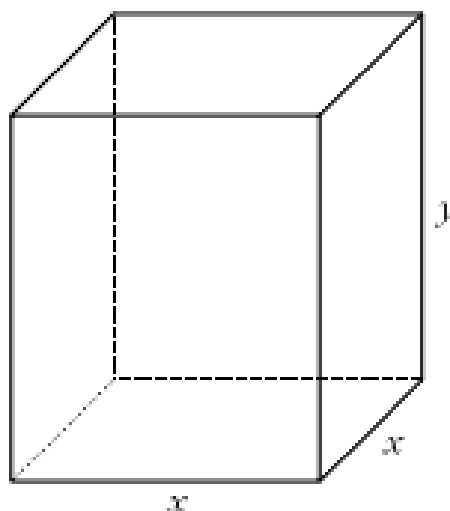
Esta evaluación tendrá como tiempo limite de 1 minuto, las preguntas son relacionadas a lo visto en clases.



## Tarea en casa

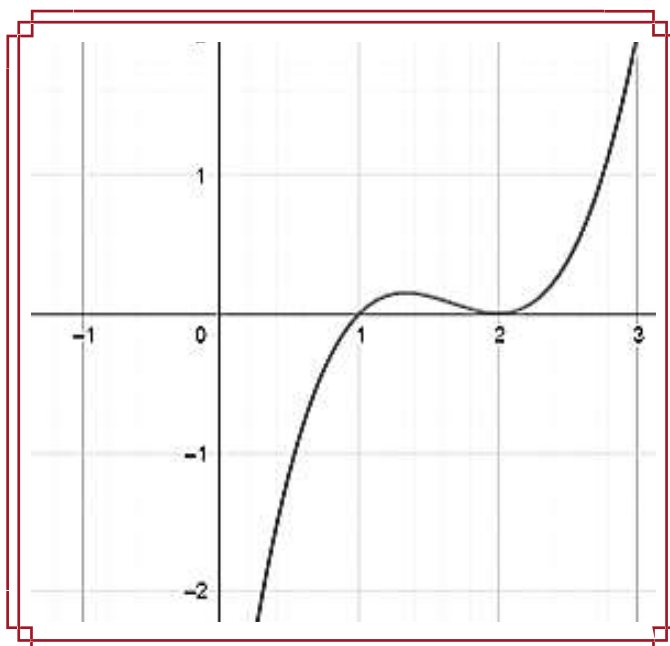
**Realizar los siguientes ejercicios en casa y presentarlos la siguiente clase.**

- 1** Un depósito abierto de latón con base cuadrada y capacidad para 4 000 litros, ¿qué dimensiones debe tener para que su fabricación sea lo más económica posible?



- 2** Halle los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función:
- $$f(x) = (x - 2)^2(x - 1)$$

**En dónde es creciente, decreciente, cóncava y convexa.**

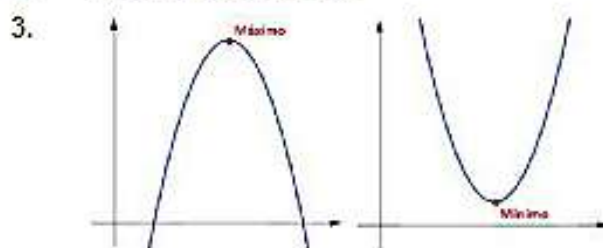




## Crucigrama segunda derivada



2. es la derivada de la derivada



5. punto en el dominio de la función donde la función no es diferenciable o la derivada es igual a cero

6. es un conjunto de números reales que se encuentra comprendido entre dos extremos, a y b.

1.





RECORTABLES Y  
SOLUCIONES





## Investigación



En base a la investigación previa de los estudiantes sobre aplicaciones de la segunda derivada, hacer una lluvia de ideas relacionando la materia con la vida cotidiana.



---

---

---

---

---

### Cambio de temperatura corporal

---

---

---

---

---



### Crecimiento bacterial

---

---

---

---

---



### Presión arterial



## Desarrollo de conceptos

## CONCAVIDAD



Según lo aprendido observaremos las siguientes imágenes y recordaremos a los estudiantes conceptos básicos concavidad, escribiremos en la parte posterior los nombres correspondientes.

**Cúpulas de la catedral**



**Puente roto**



**Columpio de Turi**



**Parque nacional Cajas**



En el siguiente link encontraremos, mayor explicación de las funciones cóncavas y convexas.

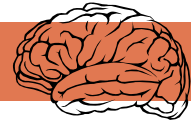


<https://n9.cl/v4kdh>

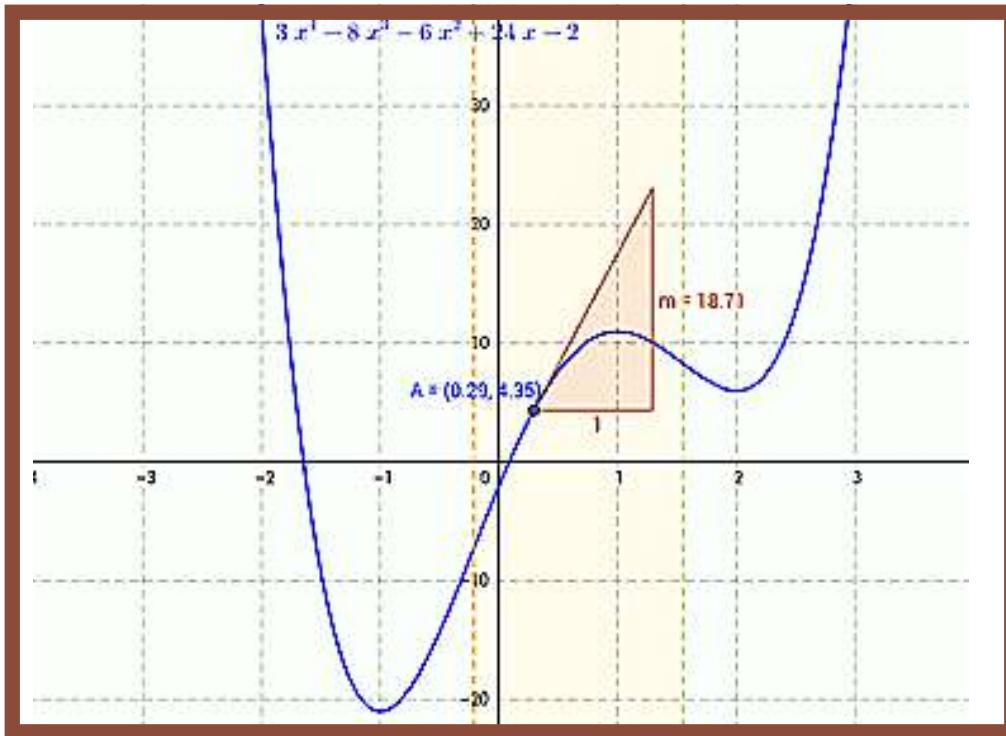




## DESARROLLO DE CONCEPTOS



En base a la grafica, responder las siguientes preguntas:



**1** ¿Qué entiende por convexidad?

---

---

**2** ¿Cuándo una función es cóncava hacia arriba?

---

---

**3** ¿Cuándo una función es cóncava hacia abajo?

---

---

## EVALUACION

Consolidación

tiempo estimado 15 min

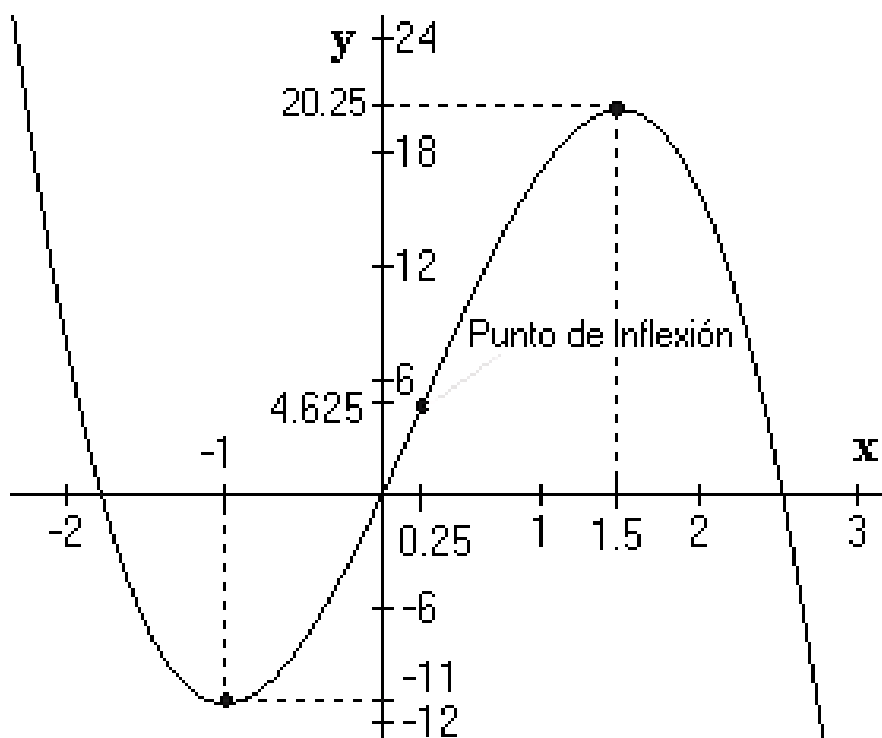


Es momento de evaluar el conocimiento adquirido para ello realizaremos una lección que durara 10 min con los siguientes ejercicios

Colorear la función correcta y hallar la segunda derivada.

Este trabajo se podrá realizar en parejas,

1



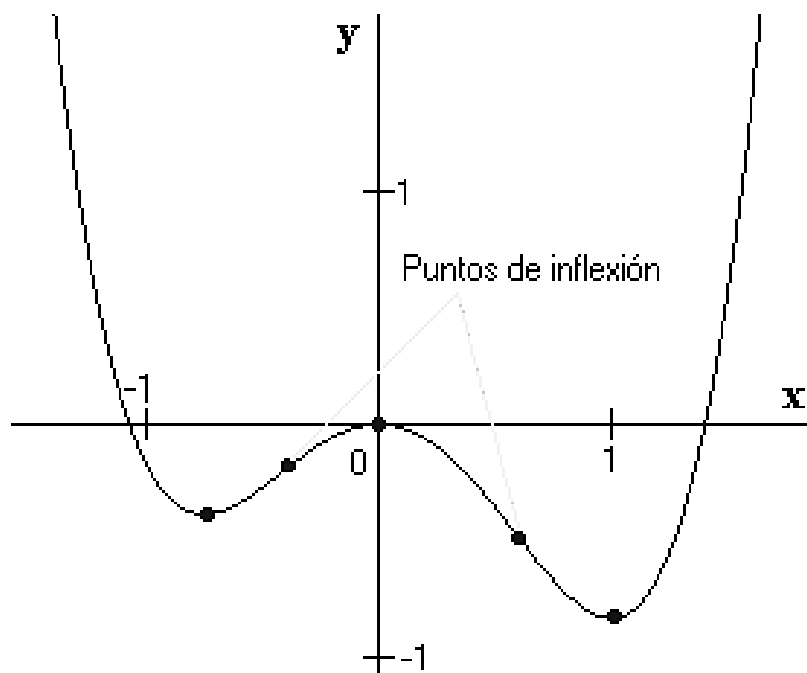
$$f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 18x$$

$$f(x) = -3x^3 + 4x^2 + 18x$$

$$f(x) = -18x^3 + 4x^2 + 3x$$

Segunda derivada: \_\_\_\_\_

2



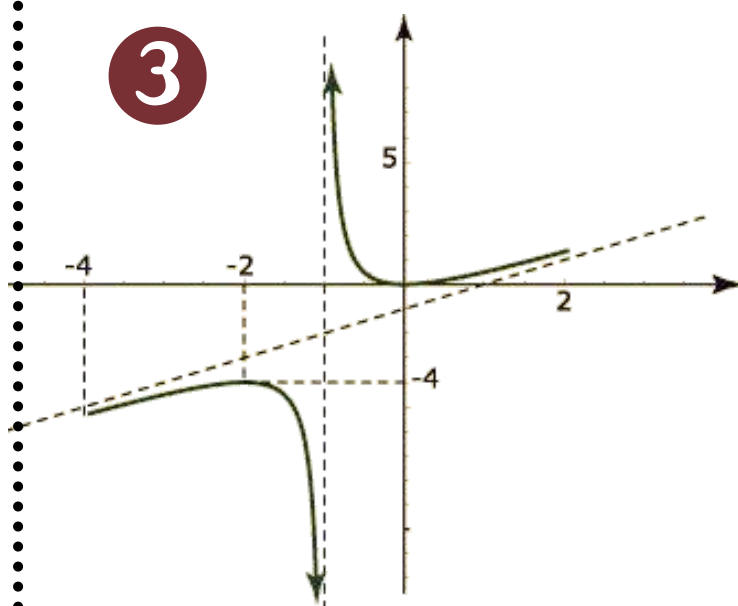
$$f(x) = \frac{1}{3}x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

$$f(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

$$f(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^2$$

Segunda derivada: \_\_\_\_\_

3



$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{3x-1}$$

$$f(x) = \frac{4x^2}{x+3x}$$

Segunda derivada: \_\_\_\_\_

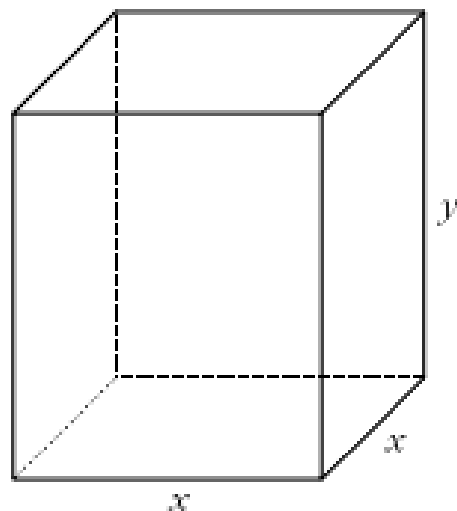




## Tarea en casa

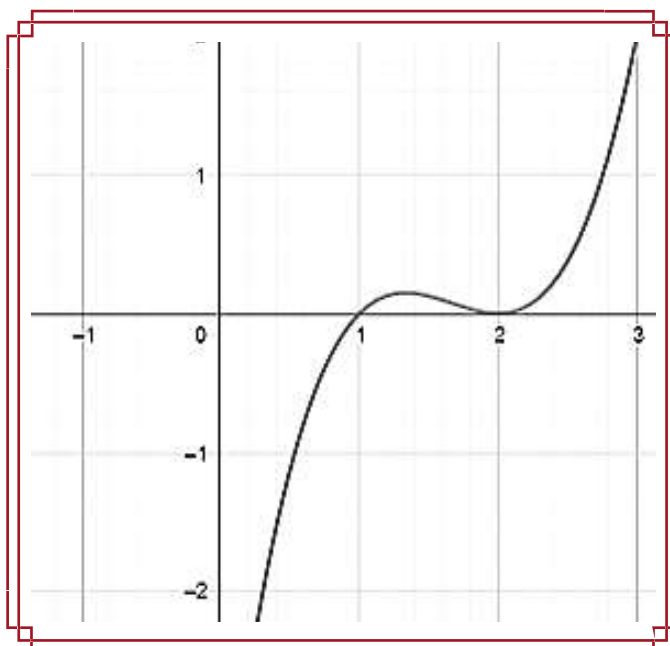
Realizar los siguientes ejercicios en casa y presentarlos la siguiente clase.

- 1 Un depósito abierto de latón con base cuadrada y capacidad para 4 000 litros, ¿qué dimensiones debe tener para que su fabricación sea lo más económica posible?



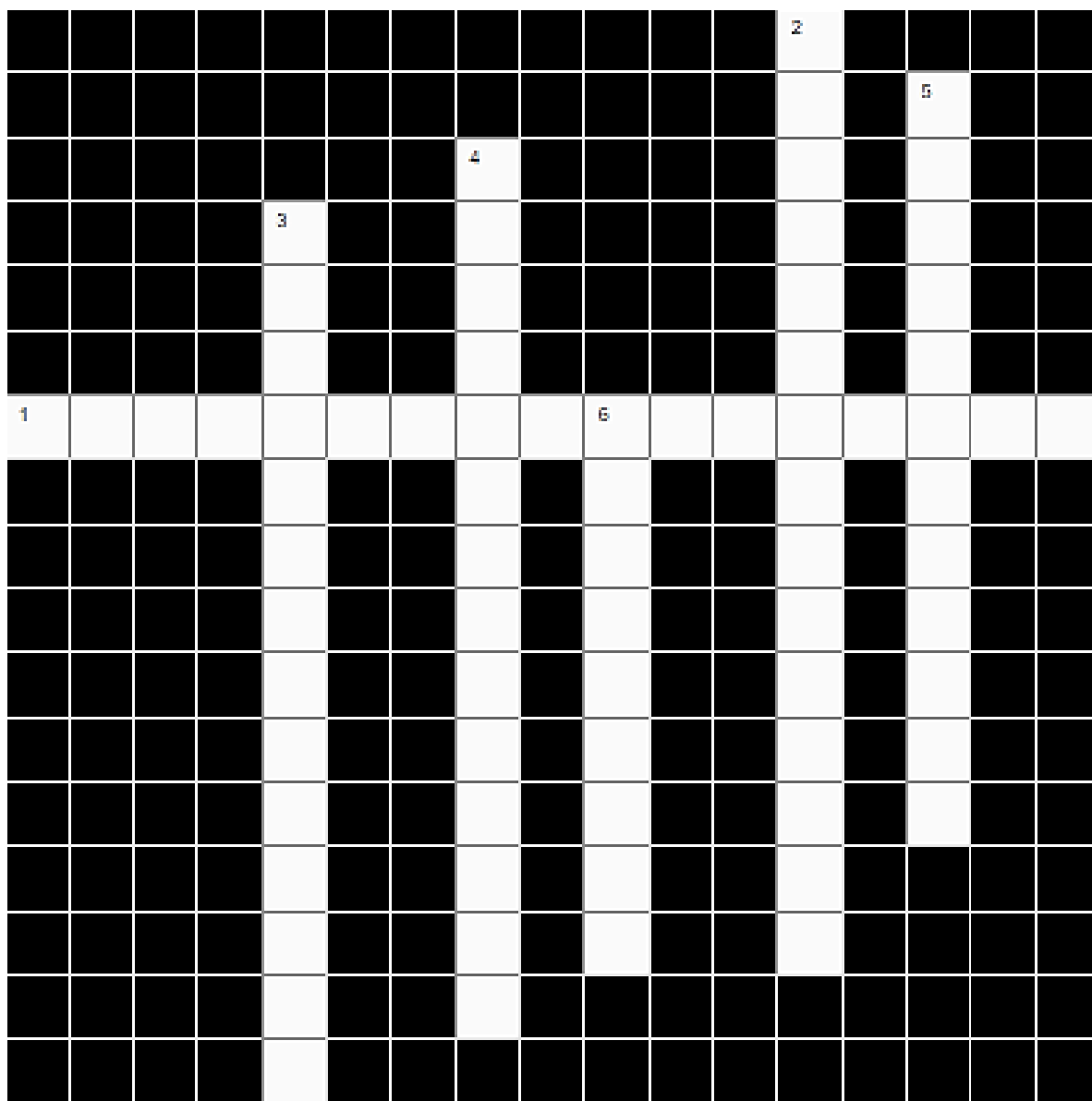
- 2 Halle los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función:
- $$f(x) = (x - 2)^2(x - 1)$$

En dónde es creciente, decreciente, cóncava y convexa.



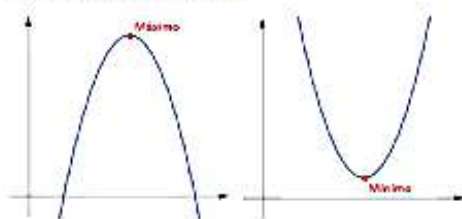


## Crucigrama segunda derivada

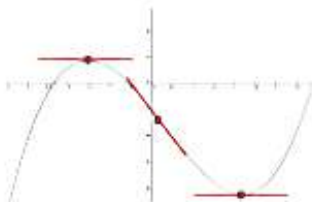


2. es la derivada de la derivada

3.



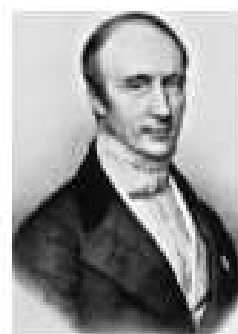
4.



5. punto en el dominio de la función donde la función no es diferenciable o la derivada es igual a cero

6. es un conjunto de números reales que se encuentra comprendido entre dos extremos, a y b.

1.



# CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXION

APLICACIONES DE LAS  
DERIVADAS

CUARTA CLASE

### Destreza:

El docente tendrá la capacidad de identificar los pasos guía y lineamientos importantes para encontrar los puntos de inflexión y el tipo de concavidad de funciones en general.

#### ANTICIPACIÓN



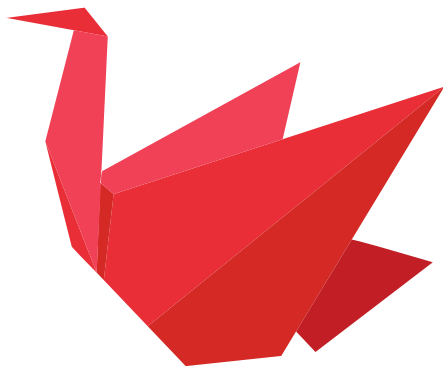
*Tiempo estimado 10 minutos*

#### ESTRATEGIA USADA



**Juegos educativos**

- Para empezar la clase el docente puede realizar un crucigrama conjuntamente con los estudiantes de los temas que se han abordado en clases anteriores.
- Dicho crucigrama debe ser realizado en grupos de tres personas en un tiempo determinado de 10 minutos, luego de ese tiempo un estudiante de cada grupo expone sus resultados.
- El grupo que tenga mas aciertos gana una figura de origami realizada por el docente.



Las figuras de origami pueden formar parte de los puntos para las tareas en grupos que se presente por parte del profesor.

Además el docente puede usar la figura del siguiente link para realizarla:

<https://n9.cl/htw7m>



## CRUCIGRAMA (ACTIVIDAD 1)

GAME

La finalidad de este crucigrama es ayudar a recordar a los estudiantes conceptos y reglas de clases anteriores a la actual, ya que es de vital importancia para avanzar en los contenidos, además brinda al docente una imagen clara de la situación de los estudiantes y donde puede reforzar su cátedra.



Use el siguiente Link que le llevará a un crucigrama online y pida a los alumnos que lo resuelvan en un máximo de 10 minutos.



<https://cutt.ly/qm0WFTz>



El docente puede llevar a los estudiantes al laboratorio de computación PREVIAMENTE.



Trabajar desde la aula si los alumnos disponen de aparatos móviles.



En el caso de que algún estudiante no pueda acceder a un dispositivo electrónico o internet, puede realizarlo en una hoja de trabajo.

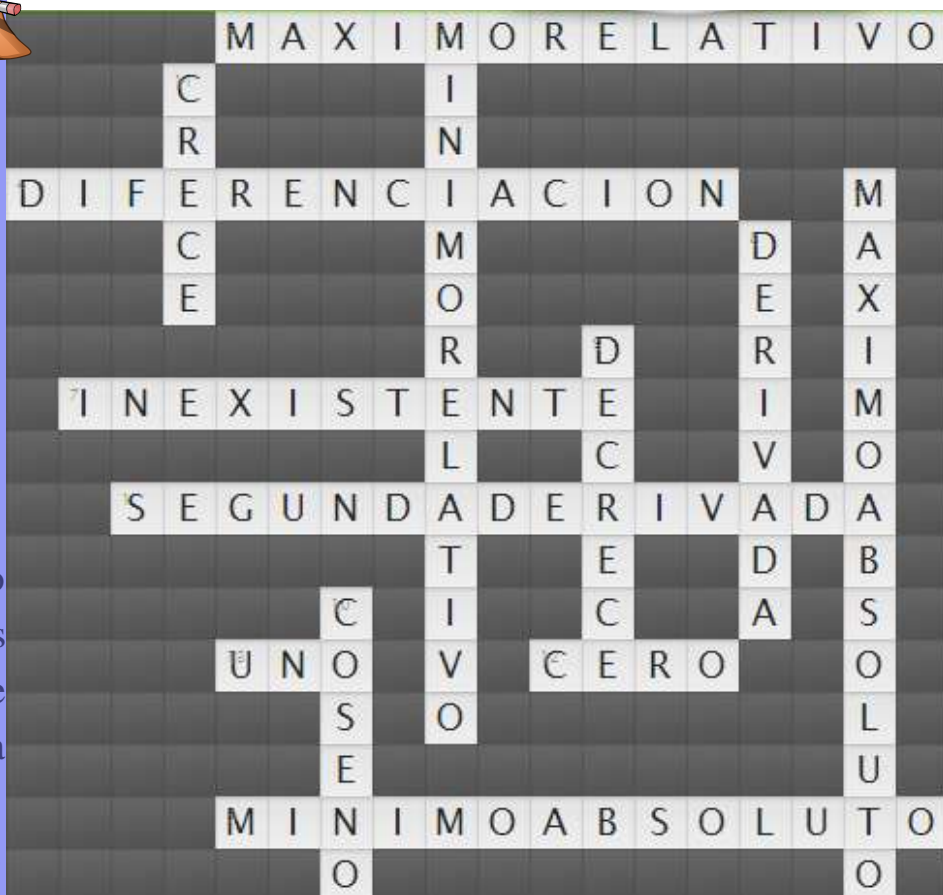


☐

Resuelva el siguiente crucigrama en torno a los conocimientos adquiridos de tema anteriores.

La hoja de trabajo para los estudiantes se encuentra en la sección

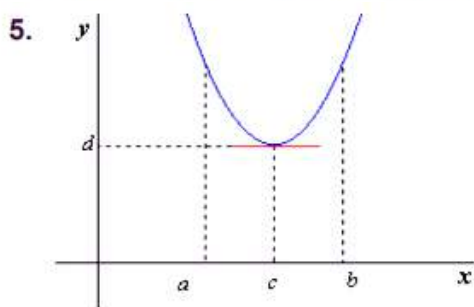
## RECORTABLES



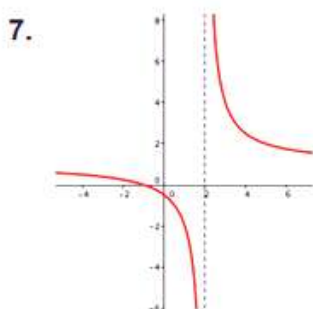
## Horizontales

## Verticales

1. Sirve para saber si es un máximo o un mínimo
4. A la derivada se la conoce también como

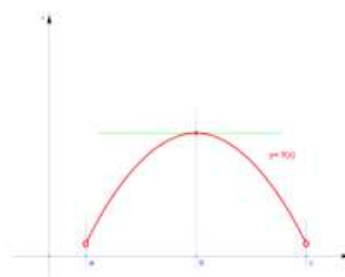


- 6.** Cuando hay dos o mas máximos existe un



12. Derivada de una función constante
13. Derivada de  $f=x$

2.



3. Cuando hay dos o mas mínimos existe un
8. Representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto.
9. Si la primera derivada es negativa la función
10. Derivada de la función seno
11. Si la primera derivada es positiva la función

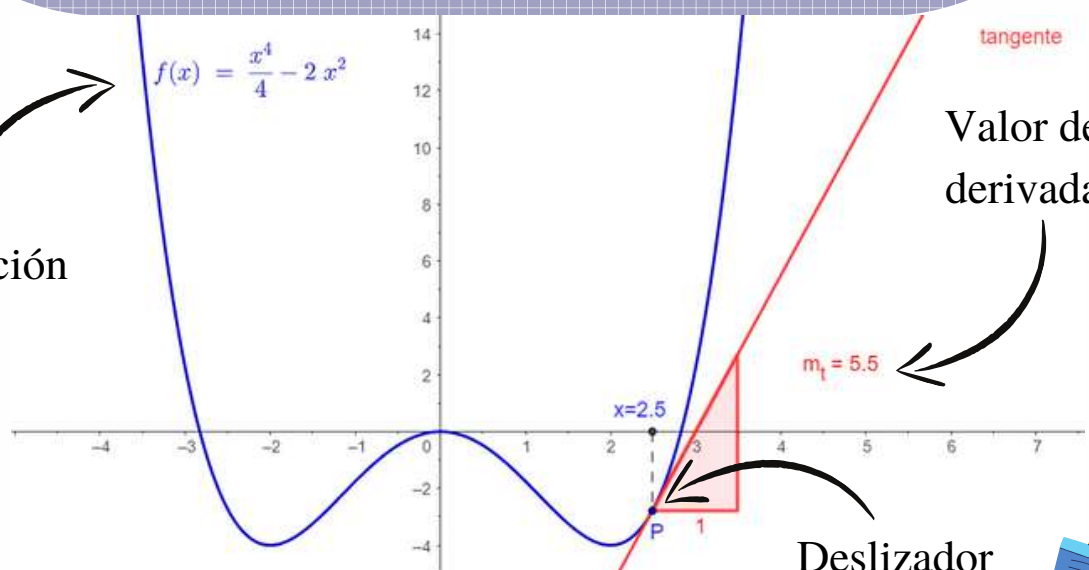


Utilizaremos un software en línea en donde podremos interactuar con la función y sus derivadas para observar donde es que cambia de sentido sus gráficas.



<https://tinyurl.com/y85n6725>

Función



Valor de derivada

Deslizador

**Manipule el simulador y responda las preguntas:**

- En qué puntos aproximadamente Ud. cree que cambia de sentido la gráfica de la función.

Explicamos al estudiante que se trata de punto donde va variando la configuración de la gráfica, por ello varía en  $x=-1,5$  y en  $x=1,25$ , aproximadamente.

- ¿Cuál será la derivada en el punto (0,0)?

Como la derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva, en el punto (0,0), será 0.

- ¿Cuál será la derivada en los puntos máximo y mínimos?

Al ser máximo o mínimos son puntos donde la derivada pasa de valor positivo a negativo o viceversa, por lo tanto también su derivada será 0.



## CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

### CONSTRUCCIÓN

Tiempo estimado 25 minutos



El concepto de concavidad es útil para describir la gráfica de una función derivable. Para determinar los intervalos de convexidad y concavidad de una función y sus puntos de inflexión hay que determinar el signo de la segunda derivada en los distintos intervalos.

### CONCEPTOS CLAVE



**Los conceptos con convexidad y concavidad son relativos.**

Adoptaremos el siguiente criterio:

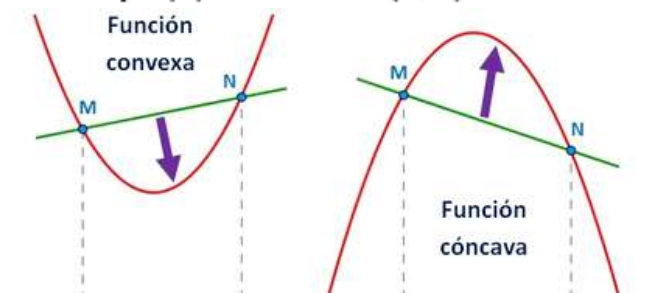
- La función es convexa en un intervalo si la gráfica de la función queda encima dos puntos cualquiera de la función.
- La función es cóncava cuando la gráfica queda por debajo.

### TEOREMAS

Puntos de inflexión son aquellos en los que la función cambia de convexa a cóncava o de cóncava a convexa.

1 Una función derivable es convexa en un intervalo  $(a, b)$ , si  $f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$

2 Una función derivable es cóncava en un intervalo  $(a, b)$ , si  $f''(x) < 0, \forall x \in (a, b)$



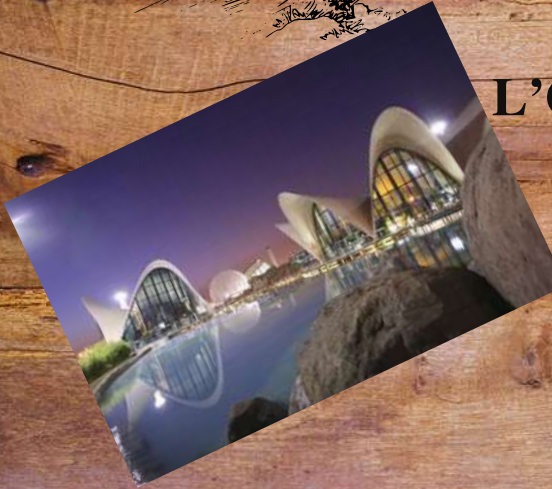




## CURIOSIDADES



### L'OCEANOGRÁFIC

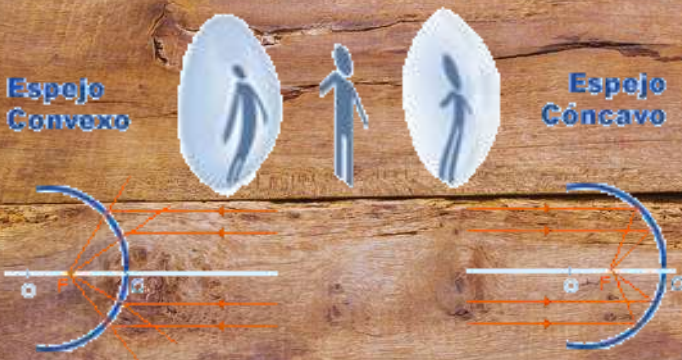


Se trata del oceanográfico más grande de Europa con 110.000 metros cuadrados y 42 millones de litros de agua, en donde se puede divisar un modelo que se asemeja a funciones cóncavas y convexas.

### ESPEJOS

La concavidad está presente en los espejos ya que debido a la naturaleza de los mismos pueden generar:

Imágenes grandes: CONVEXO



Imágenes pequeñas: CONCAVO

### LENTES

Las lentes cóncavas se utilizan en las gafas para míopes, las mirillas de las puertas, algunos telescopios entre otros, mientras que las convexas se usan en cámaras, proyectores, telescopios simples, lupas...



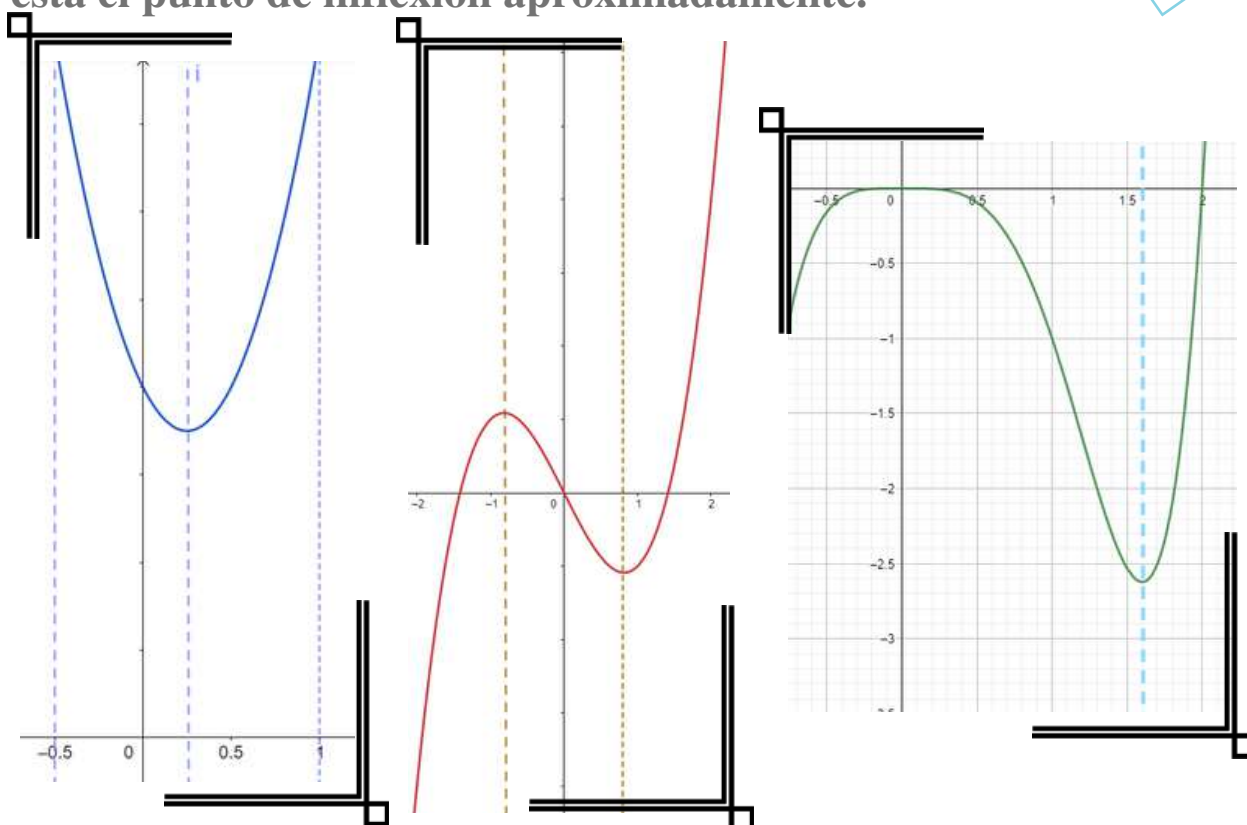


### QUÉ TAN RÁPIDO ERES? (ACTIVIDAD 3)

El docente puede proyectar algunas imágenes utilizando el software Geogebra y consolidar el concepto, además logra que los estudiantes activen sus sentidos y mejora su rapidez de respuesta.



Señale el dominio en donde las funciones son cóncavas o convexas, además coloque en que punto está el punto de inflexión aproximadamente.



**Cóncava**

-----

**Convexa**

$(-0.5, 1)$

**Puntos de inflexión**

No existe

**Cóncava**

$(-\infty, 0)$

**Convexa**

$(0, +\infty)$

**Puntos de inflexión**

$(0, 0)$

**Cóncava**

$(-\infty, 1)$

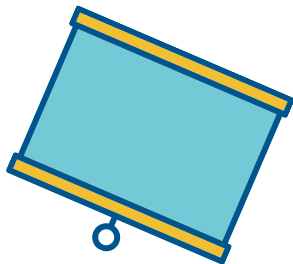
**Convexa**

$(1, +\infty)$

**Puntos de inflexión**

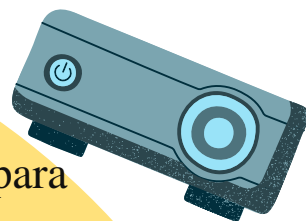
$(1, -1)$

La hoja de trabajo se encuentra en el apartado **RECORTABLES**



## PUNTO DE INFLEXION (ACTIVIDAD 2)

*En esta actividad el docente puede proyectar la actividad y resolverla.*



El docente puede hacer uso de este mini juego para ir armando el concepto de punto de inflexión con ayuda de sus estudiantes.

### INSTRUCCIONES:

Una mediante una línea y escriba en los espacios en blanco el significado que Ud. crea conveniente.

de cóncava a  
convexa o  
viceversa.

cambia de  
concavidad

es punto

de una  
función, en  
donde

**RESPUESTA:**

La respuesta correcta la encuentra **después** del apartado **RECORTABLES**.

## Matemáticamente expresando

La segunda derivada de la función  $f$  en el punto de inflexión es cero.

Explicado ambos conceptos el docente procederá a brindar ciertas pautas para encontrar la concavidad y puntos de inflexión de una función.



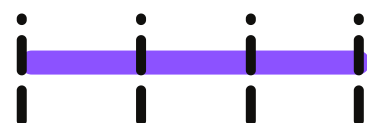
Se halla la primera y segunda derivada de la función dada.

$$f' \quad \textcircled{Y} \quad f''$$

El resultado de la segunda derivada se iguala a cero y se resuelve la ecuación resultante, encontrando el valor de "x".

$$f'' = \textcircled{0}$$

Con el o los valores encontrados realizamos un análisis dividiendo el dominio en intervalos para visualizar su **concavidad**.

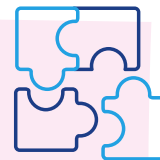


Utilizar una tabla similar a la que se coloca a continuación para facilitar el análisis de la función.



| Intervalos        | (a,b) | (b,c) | (d,e) |
|-------------------|-------|-------|-------|
| Valor de x        |       |       |       |
| Valor de $f''(x)$ |       |       |       |
| Signo de $f''(x)$ |       |       |       |
| Curvatura         |       |       |       |

## CÓMO RELLENAR LA TABLA



**Intervalos:** Escogemos intervalos válidos entre el o los puntos de inflexión.

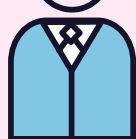
**Valor de x:** Seleccionamos un valor de los intervalos colocados.



**Valor de  $f''(x)$ :** reemplazamos el valor seleccionado en la segunda derivada.



**Signo de  $f''(x)$ :** observamos el signo y analizamos, si  $f''(x) < 0$  es **cóncava** o  $f''(x) > 0$  es **convexa**.



**Curvatura:** colocamos su interpretación gráfica.



**No olvidar realizar el bosquejo del comportamiento de la función.**



### A PRACTICAR



**ENUNCIADO:** Determine la concavidad y los puntos de inflexión si es que los hay a partir de la siguiente información.

El docente siempre buscará la manera de interactuar con sus estudiantes.

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 + x - 1$$

$$f'(x) = -3x^2 + 12x + 1$$

$$f''(x) = -6x + 12$$



**FUNCIÓN**  
**PRIMERA DERIVADA**  
**SEGUNDA DERIVADA**

1 Se procede a igualar la segunda derivada a cero:

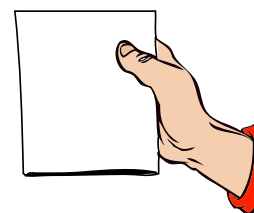
$$f''(x) = -6x + 12 = 0$$

2 Se resuelve la ecuación

$$-6x + 12 = 0$$

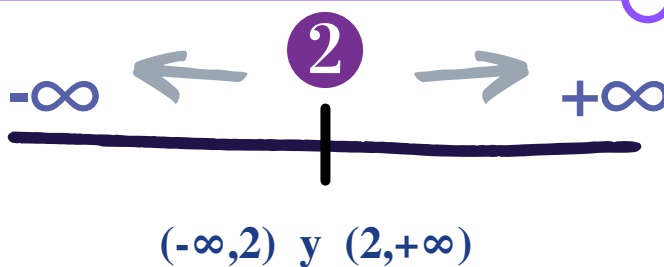
$$-6x = -12$$

$$x = \frac{-12}{-6} \Rightarrow x = 2$$



**Podemos realizar un bosquejo de la gráfica conforme resolvemos la función.**

- 3 Seleccionamos intervalos en torno al valor encontrado



- 4 Utilizamos la tabla antes señalada.

| Intervalos        | $(-\infty, 2)$             | $(2, +\infty)$            |
|-------------------|----------------------------|---------------------------|
| Valor de $x$      | -1                         | +1                        |
| Valor de $f''(x)$ | $-6 \cdot (-1) + 12 = +18$ | $-6 \cdot (+1) + 12 = -6$ |
| Signo de $f''(x)$ | +                          | -                         |
| Curvatura         | Convexa $\cup$             | Cóncava $\cap$            |



- 6 Finalmente graficamos la función analizada

- 5 Hallamos la coordenada "y" del punto de inflexión.

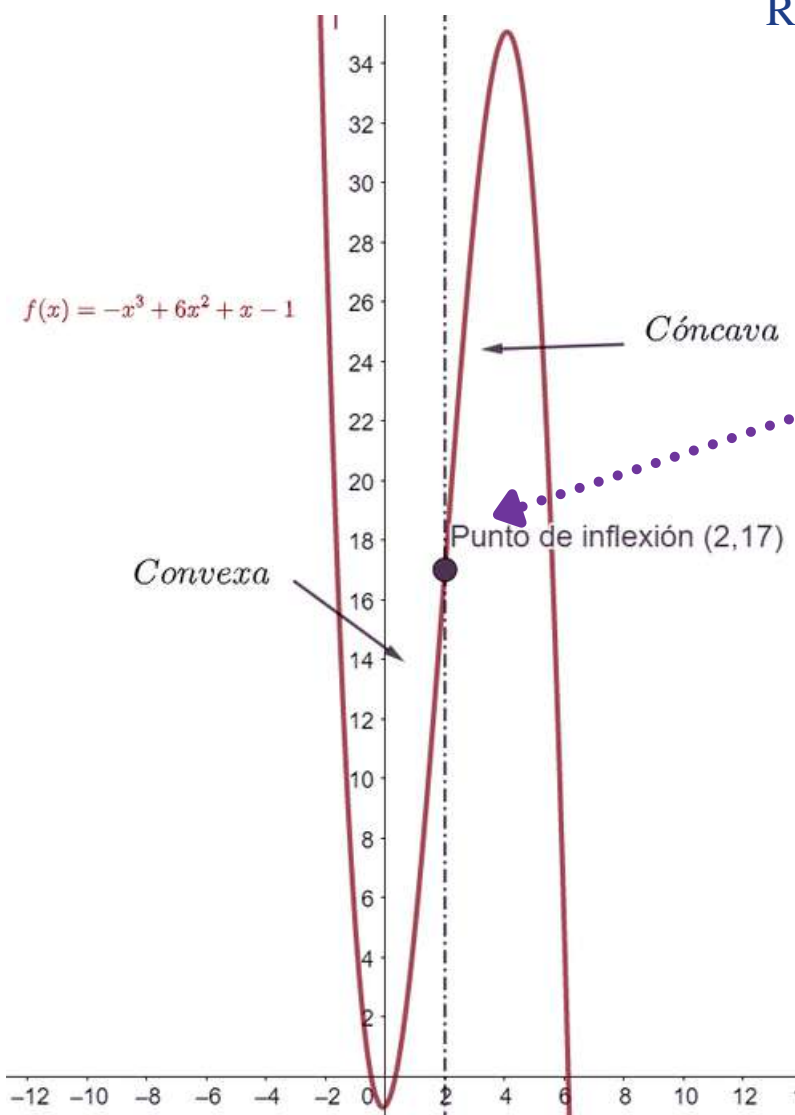
Reemplazando el valor de "x" en la función principal:

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 + x - 1$$

$$(2) = -(2)^3 + 6(2)^2 + (2) - 1$$

$$f(2) = 17$$

$$P(2, 17)$$



El docente puede hacer uso de Geogebra para proyectar otras funciones e ir las explicando a sus estudiantes.





## Recursos Tecnológicos

Para facilitar el cálculo de las derivadas se encuentran presentes algunas calculadoras online que nos permite verificar si hemos aplicado bien los conceptos matemáticos aprendidos, de esta manera podemos avanzar correctamente en el análisis de las funciones y podremos optimizar tiempos.

Algunas de dichas calculadoras son:

### LINKS



Symbolab

<https://es.symbolab.com/>



Wolfram Alpha

<https://www.wolframalpha.com/>



Maple

<https://www.maplesoft.com/products/Maple/students/>



SnapXam

<https://es.snapxam.com/>

Cabe mencionar que las páginas y software colocados anteriormente son totalmente gratuitos, así como de fácil programación para cualquier tipo de computadora





Es momento de evaluar el conocimiento adquirido, para ello vamos a trabajar individualmente para resolver preguntas en **clase** y ejercicios para práctica en el **hogar**, además se trabajará en el entorno virtual específicamente con Geogebra en el análisis de las gráficas.



### PREGUNTAS EN CLASE (ACTIVIDAD 4)

La hoja para el estudiante esta en el apartado **RECORTABLES**

**Cuál es la diferencia entre cóncavo y convexo?**

**1** La principal diferencia es que determinada función es cóncava si tiene la curvatura hacia adentro, mientras que es convexa si tiene la curvatura hacia afuera.

**2** **Qué es un punto de inflexión y cómo lo podemos obtener?**

Un punto de inflexión es el punto donde cambia de concavidad determinada función, es decir pasa cóncava a convexa o viceversa.

**3** **Complete el párrafo**

En una función la primera derivada nos sirve para hallar los **puntos críticos (máximos y mínimos)** mientras que la segunda derivada nos indica el punto de **inflexión**.

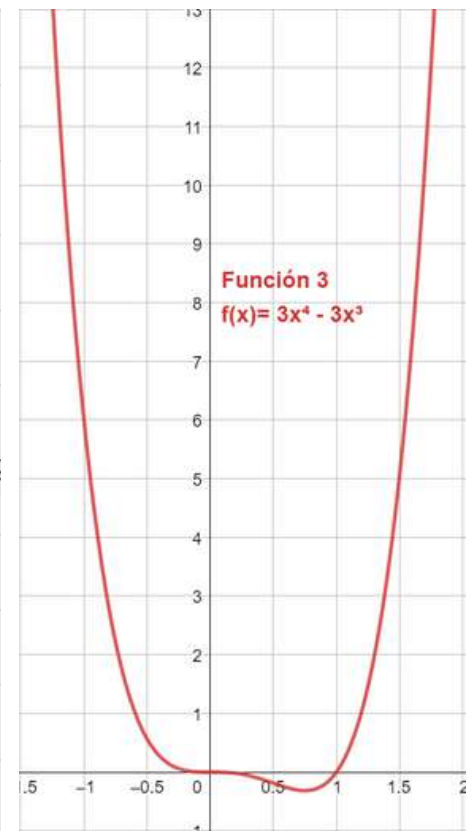
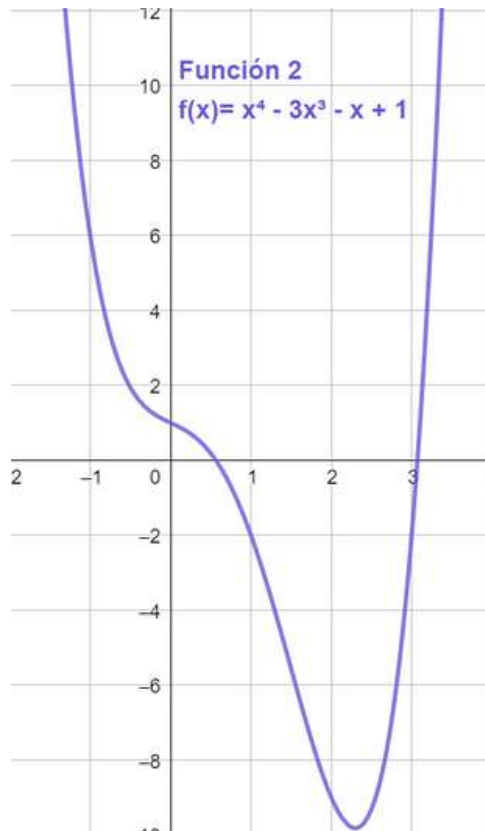
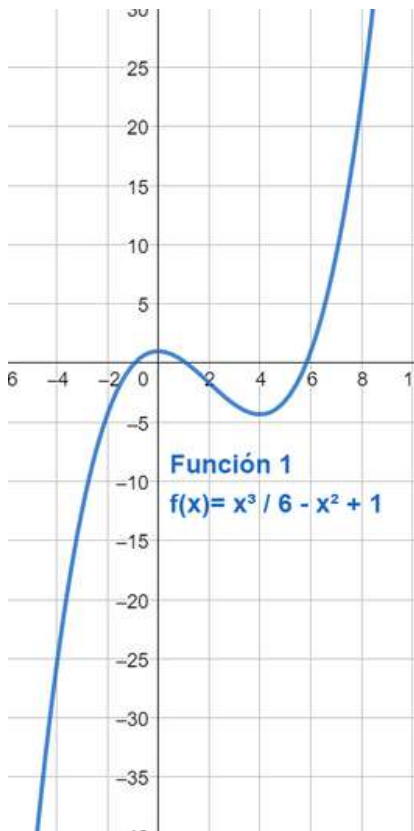
**4** **Los puntos de inflexión tienen pendiente cero o diferente de cero, justifique su respuesta:**

Al ser puntos donde cambia de concavidad la gráfica no puede ser cero, ya que se da sólo en puntos críticos su pendiente o derivada es cero, por lo tanto su pendiente es diferente de cero.

## PRACTIQUE EN CASA (ACTIVIDAD 5)

Esta actividad es para que los estudiantes practiquen en casa, por lo tanto se encuentra en el apartado de RECORTABLES.

Complete la tabla según corresponda:



De acuerdo a las gráficas colocadas anteriormente, llene la tabla y coloque el dominio correspondiente.

**Tabla de respuestas**

| Función  | Cóncava        | Convexa                           | Punto de inflexión         |
|----------|----------------|-----------------------------------|----------------------------|
| <b>1</b> | $(-\infty, 2]$ | $(2, +\infty)$                    | $(2, -5/3)$                |
| <b>2</b> | $(0, 3/2]$     | $(-\infty, 0]$ y $(3/2, +\infty)$ | $(0, 1)$ y $(3/2, -89/16)$ |
| <b>3</b> | $[0, 1/2]$     | $(-\infty, 0]$ y $(1/2, +\infty)$ | $(0, 0)$ y $(1/2, -3/16)$  |



En este ejercicio es necesario que el estudiante desarrolle todos los elementos del análisis que se han estudiado previamente, con los pasos sugeridos y realizar las gráficas completas en geogebra o en el graficador que desee.



# RECORTABLES Y SOLUCIONES

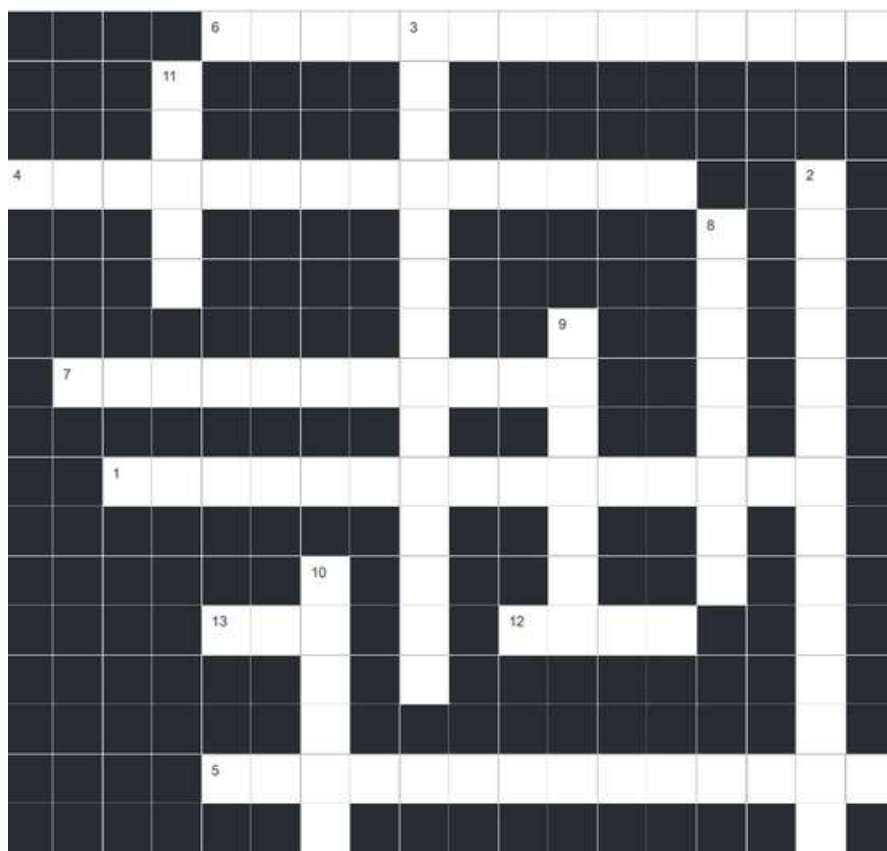




## CRUCIGRAMA (ACTIVIDAD 1)

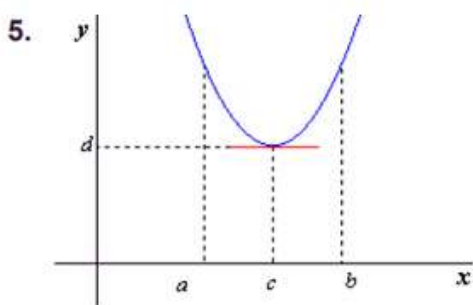
Nombre: \_\_\_\_\_

Resuelva el siguiente crucigrama en torno a los conocimientos adquiridos de tema anteriores.

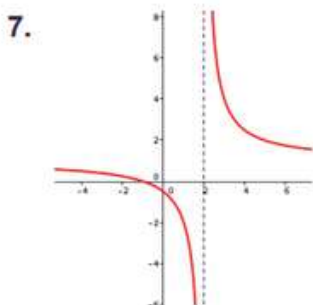


### Horizontales

1. Sirve para saber si es un máximo o un mínimo
4. A la derivada se la conoce también como

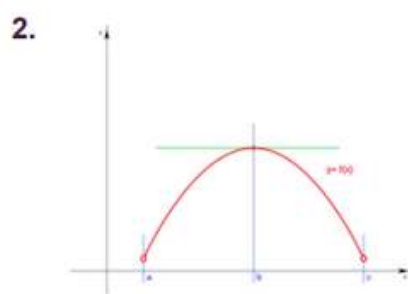


6. Cuando hay dos o mas máximos existe un



12. Derivada de una función constante
13. Derivada de  $f=x$

### Verticales



3. Cuando hay dos o mas mínimos existe un
8. Representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto.
9. Si la primera derivada es negativa la función
10. Derivada de la función seno
11. Si la primera derivada es positiva la función

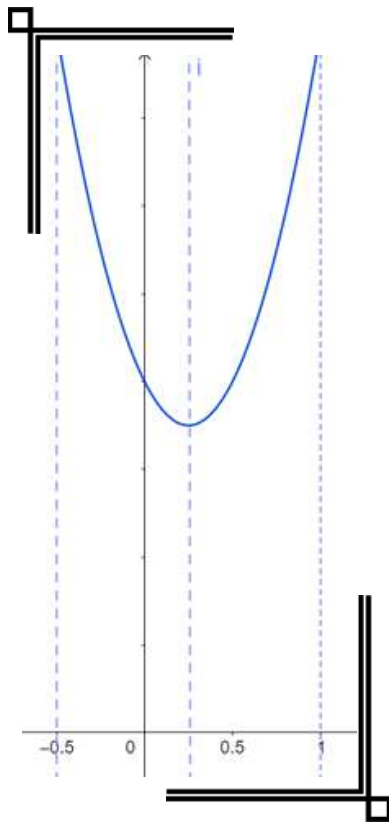


### QUÉ TAN RÁPIDO ERES? (ACTIVIDAD 3)

Señale el dominio en donde las funciones son cóncavas o convexas, además coloque en que punto está el o los puntos de inflexión aproximadamente.



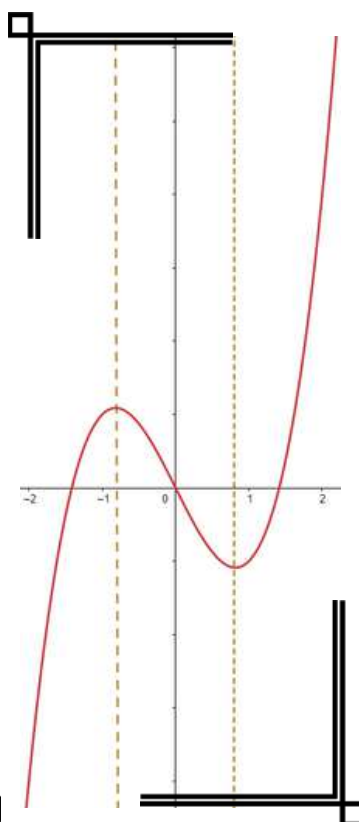
Nombre: \_\_\_\_\_



Cóncava

Convexa

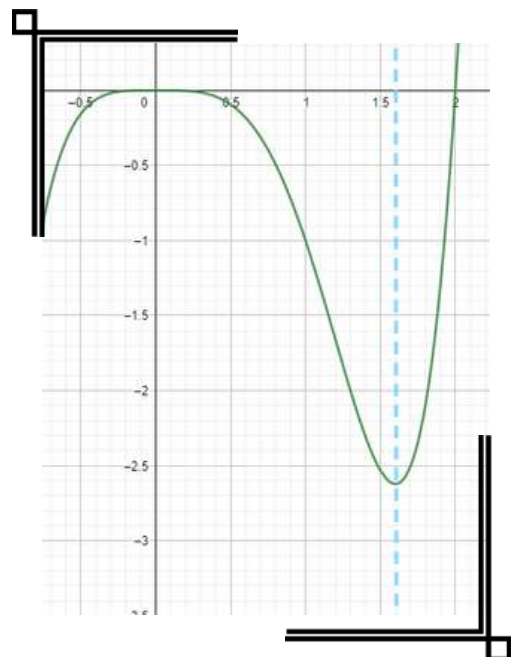
Puntos de inflexión



Cóncava

Convexa

Puntos de inflexión



Cóncava

Convexa

Puntos de inflexión



## PREGUNTAS (ACTIVIDAD 4)

Nombres: \_\_\_\_\_

Responda las siguientes preguntas en base a lo estudiado anteriormente.

1

¿Cuál es la diferencia entre cóncavo y convexo?

---

---

---

2

¿Qué es un punto de inflexión y cómo lo podemos obtener?

---

---

---

3

En una función la primera derivada nos sirve para hallar \_\_\_\_\_ mientras que la segunda derivada nos indica \_\_\_\_\_.

4

Los puntos de inflexión tienen pendiente cero o diferente de cero, justifique su respuesta:

---

---

---

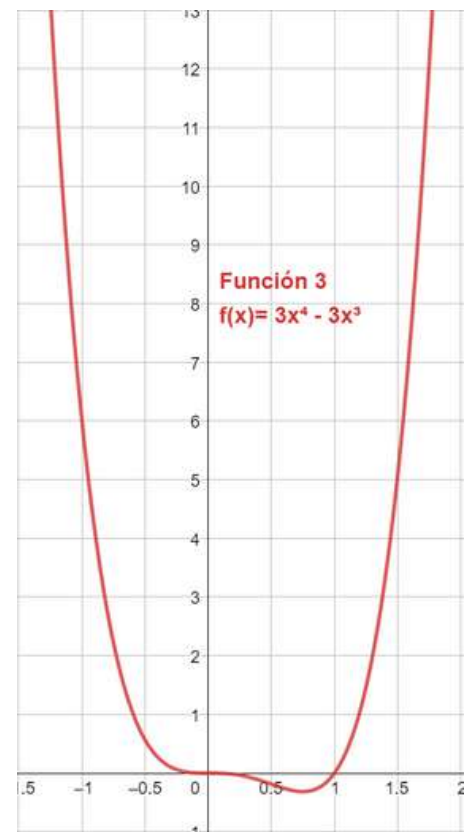
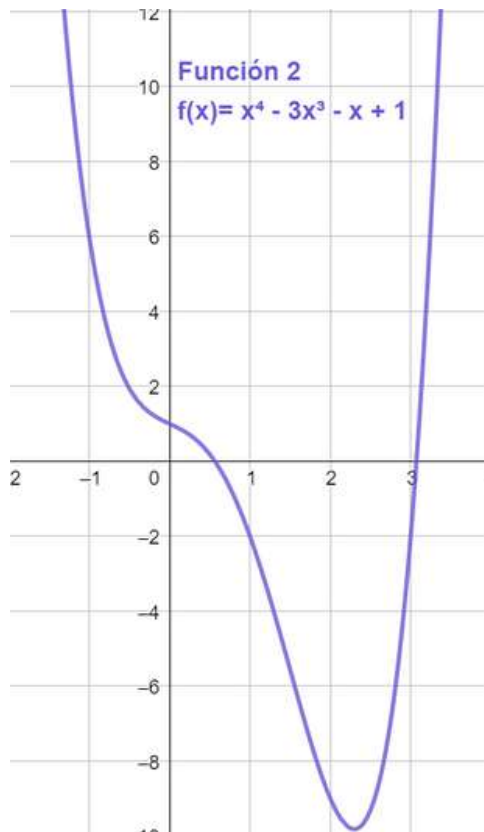
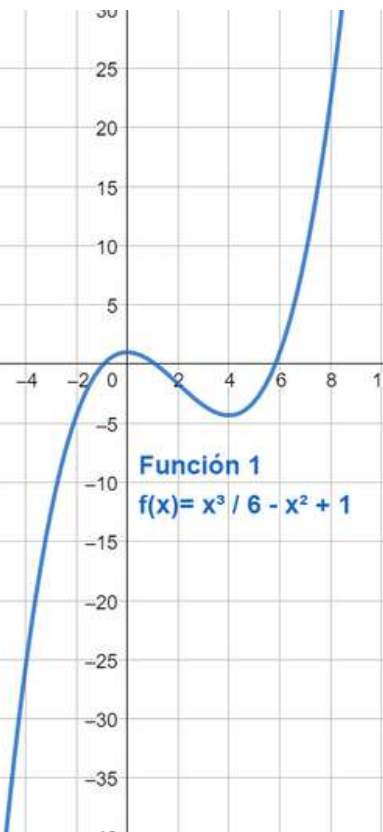




## PRACTIQUE EN CASA (ACTIVIDAD 5)

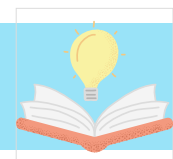
Nombre: \_\_\_\_\_

Complete la tabla según corresponda:



De acuerdo a las gráficas colocadas anteriormente, llene la tabla y coloque el dominio correspondiente.

| Tabla de respuestas |                      |                     |                    |
|---------------------|----------------------|---------------------|--------------------|
| Función             | Cóncava hacia arriba | Cóncava hacia abajo | Punto de inflexión |
| 1                   |                      |                     |                    |
| 2                   |                      |                     |                    |
| 3                   |                      |                     |                    |



Adjunte las hojas de resolución, luego de rellenar la tabla colocada.



## SOLUCIONES A ACTIVIDADES

- **RESPUESTA ACTIVIDAD 2:** Un punto de inflexión, es un punto de una función en donde cambia de concavidad, de cóncava a convexa o viceversa.

The background features a red arrow pointing diagonally upwards from the bottom left towards the top right. Below the arrow, there are several blue-outlined rectangular bars of increasing height from left to right. Each bar is filled with diagonal hatching lines. The overall image has a soft, blurred effect.

# OPTIMIZACIÓN

APLICACIONES DE LAS  
DERIVADAS

SEXTA CLASE

### Destreza:

El docente se encuentra en la capacidad de demostrar matemáticamente situaciones de la vida cotidiana en donde se está aplicando la optimización perteneciente a las derivadas.

### ANTICIPACIÓN



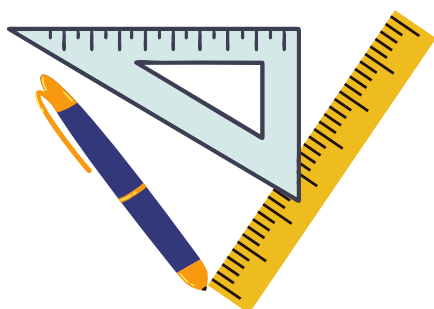
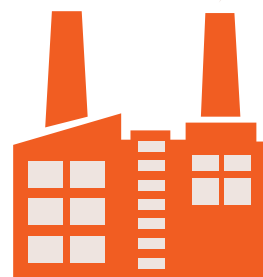
*Tiempo estimado 5 minutos*



### SABIAS QUÉ?

Una lata de refresco contiene diferentes formas y medidas de acuerdo a los diferentes productos que vayan a ser introducidos en ella.

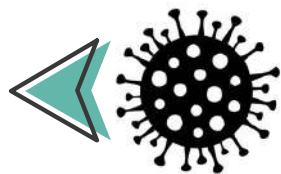
Por otro lado los trabajadores de las mega fábricas tienen la labor de dar altas ganancias y pocas pérdidas en el uso de recursos.



Es por ello que antes de elaborar una lata de aluminio se ha **optimizado** sus medidas de tal manera que se genere una lata de buen tamaño y forma.

Y lo mas importante utilizando los recursos **ideales** para que no exista pérdida de capital y el producto llegue con la misma calidad que salió de fábrica.



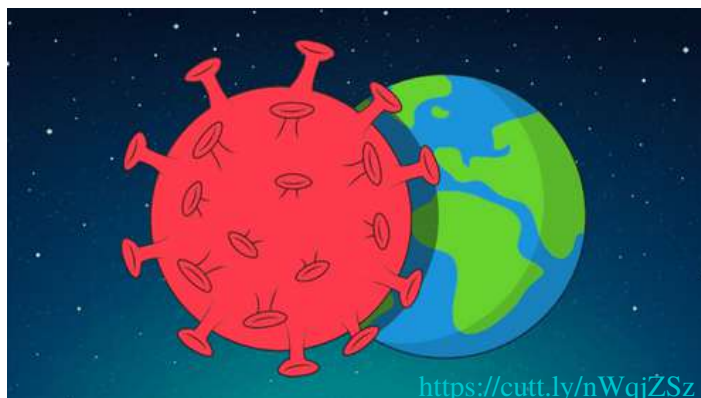


¿Crees que todo el CORONAVIRUS del mundo puede caber en una lata de refresco?

En febrero del 2021 Kit Yates, titular de biología matemática ha logrado calcular el espacio aproximado que ocuparía la unión de todo el coronavirus que hay en el mundo.



Mediante cálculos y fórmulas simples el matemático indicó que todo el coronavirus puede caber en una lata de aproximadamente 120 mililitros (ml).



<https://cutt.ly/nWqjZSz>

Puedes leer el artículo completo en:



<https://cutt.ly/WWqj1iO>



**Por lo tanto:**

Existe variedad de inquietudes que el ser humano tiene día a día, por ejemplo:

- encuentra el área mínima,
- el menor coste,
- la forma óptima,
- el máximo beneficio,
- el mayor alcance, etc.



Estos enunciados se engloban dentro de la categoría de Optimización de funciones y pueden ser resueltos aplicando el cálculo diferencial.



# CONSTRUCCIÓN

Tiempo estimado 35 minutos



ANTES DE EMPEZAR

Tomando en cuenta los conceptos importantes desarrollados, realizaremos un juego **online** en donde recordaremos para que sirven algunas aplicaciones de la derivada.

<https://cutt.ly/xWeclxx>



El docente usará el link señalado, de esta manera interactuará y observará la preparación de los estudiantes .

## Respuestas del juego

| Enunciados                                                | Respuestas                                                                       |
|-----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| Primera derivada es menor a cero, entonces la función es: | Cambia de cóncava a convexa o viceversa                                          |
| Segunda derivada es menor a cero                          | Hallar si la función tiene máximos o mínimos                                     |
|                                                           | reemplazando valores la segunda derivada es menor a cero                         |
| Una función es cóncava si                                 |                                                                                  |
| Primera derivada es mayor a cero, entonces la función es: |                                                                                  |
| Segunda derivada sirve para:                              | Una función es _____ si reemplazando valores la segunda derivada es mayor a cero |
|                                                           |                                                                                  |
| Segunda derivada es mayor a cero                          |                                                                                  |



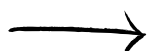
Tener precaución al elegir las respuesta ya que pueden variar la posición de los enunciados.





Para ir trabajando el proceso de optimizar empezaremos con un **simulador**, aquí el docente puede generar algunas preguntas en donde los estudiantes puedan ir analizando y respondiendo en una hoja de trabajo.

Link del simulador



<https://cutt.ly/JWykP6u>



## ENUNCIADO

Determinado ventanero de la ciudad de Cuenca necesita realizar un nuevo trabajo para la casa **Gran Colombia 4-37**, la misma posee una ventana que presenta forma de un rectángulo coronado por un semicírculo.

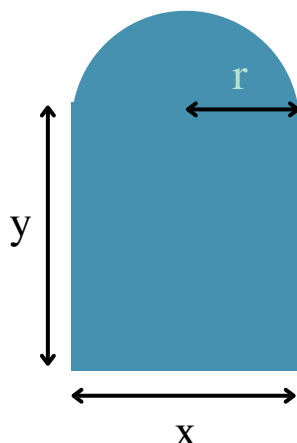


## ? PREGUNTA

Si su perímetro es de 10 m, encuentre las dimensiones para que su área permita el mayor paso de luz.



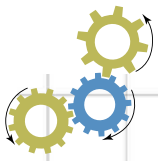
## DESARROLLO



Se explica los estudiantes un bosquejo de la ventana y con el simulador, utilizamos los deslizadores para ver cual sería el valor ideal.



## SIMULADOR



Área de la ventana =  $13.05 \text{ m}^2$

Valor máximo se alcanza cuando  $x = 4.06 \text{ m}$

### LEYENDA

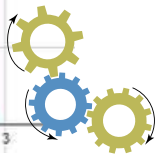
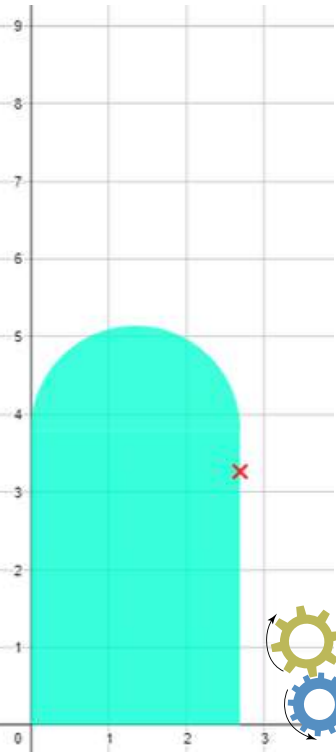
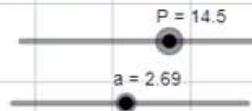
P = Perímetro en mts = 14.5 metros

a = la coordenada x = 2.69 metros

Coordenada en el eje y = 3.79 metros

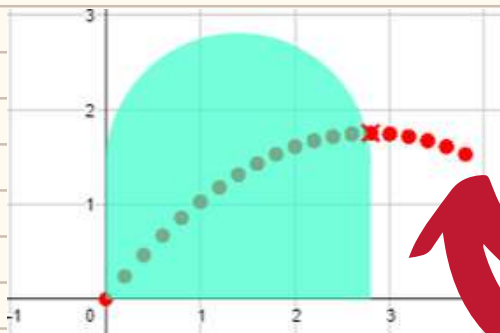
Si desea resetear la gráfica de la función solo acerque y aleje el zoom.

### DESLIZADORES



## IMPORTANTE

El simulador permite combinar los datos de forma numérica, simbólica y gráfica.



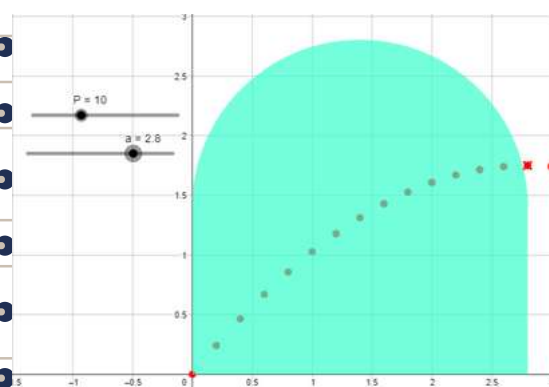
## PROCEDIMIENTO

- Colocamos el deslizador "P" en que 10, que equivale a los 10 metros del perímetro de ventana.
- Interactuamos con el deslizador "a", y generamos la siguiente función de color rojo.

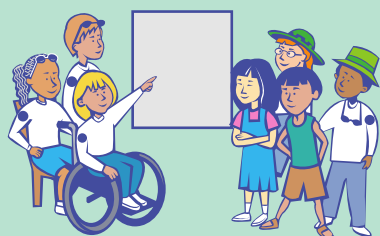
- Se les pide a los estudiantes: indiquen en que valor del deslizador se da el extremo de la función

Se explica a los estudiantes que teniendo el perímetro dado se puede hallar las medidas ideales para optimizar el área mediante el cálculo diferencial.

Tomando en cuenta el gráfico es en  $a = 2.8$  metros.

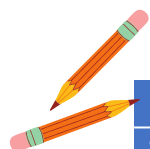


## TABLA (ACTIVIDAD 1)



Se trabaja en grupo de 3 estudiantes, los mismos que tendrán que ir manipulando el simulador a distintos perímetros dados y rellenando la tabla que se encuentra en el apartado **RECORTABLES**.

## SOLUCIÓN



| TABLA     |                  |            |                        |
|-----------|------------------|------------|------------------------|
| Perímetro | Valor optimizado | Valor en y | Área total             |
| 6 mts     | 1.68 mts         | 0.94 mts   | 2.51 mts <sup>2</sup>  |
| 9 mts     | 2.52 mts         | 1.16 mts   | 5.67 mts <sup>2</sup>  |
| 14 mts    | 3.92 mts         | 1.86 mts   | 13.72 mts <sup>2</sup> |
| 20 mts    | 5.6 mts          | 4.86 mts   | 28 mts <sup>2</sup>    |

Explicado los puntos anteriores se procede a generar un procedimiento matemático y sugerir a los alumnos utilizarlo.

Permitirá agilizar los procesos y optimizar el tiempo de resolución de ejercicios similares.



ANTES

RECORDEMOS

ALGUNAS

CONSIDERACIONES:

Los puntos máximos o mínimos locales pueden encontrarse entre:



- Los extremos del conjunto donde está definida la función.
- Los puntos donde hay un pico, es decir donde la derivada no existe.
- Los puntos donde la tangente es horizontal, es decir donde la derivada es cero.

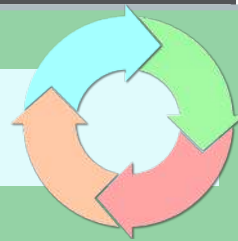
- Si en el mismo punto la segunda derivada es positiva, es un mínimo y si es negativa es un máximo.
- Si la segunda derivada es cero la prueba no es concluyente.

ADEMÁS





## PROCEDIMIENTO SUGERIDO



El docente puede hacer uso del siguiente procedimiento y a continuación lo irá explicando con un ejercicio adaptado.



- Dibujar una figura de análisis (Si es necesario)



$f(x)$

- Se plantea la función que hay que maximizar o minimizar.

$(x)$

- Se plantea una ecuación que relacione las distintas variables del problema, en el caso de que haya más de una variable.



- Se despeja una variable de la ecuación y se sustituye en la función de modo que nos quede una sola variable.



- Se deriva la función y se iguala a cero, para hallar los extremos locales.



- Se realiza la 2ª derivada para comprobar el resultado obtenido.

### SABÍAS QUÉ



En la industria actual, existe el GMAO (Gestión del Mantenimiento Asistido por Ordenador), es un software para facilitar la gestión del mantenimiento de activos de una organización, principalmente activos físicos, precautelando todo lo que gira en torno a ellos.

## EJERCICIO DE APLICACIÓN

En este ejercicio el docente tratará de explicar los pasos sugeridos anteriormente adaptándolos a una situación de la vida diaria del alumno.



### Enunciado

La Empresa Pública Municipal de Movilidad, Tránsito y Transporte de Cuenca (EMOV), realiza un estudio en donde se ha observado que en una carretera de salida de la ciudad, la velocidad de los coches entre las 2 horas y las 6 horas de la tarde viene dada por:

$$v(t) = t^3 - 15t^2 + 72t + 8 \text{ para } t \in [2, 6]$$

### PREGUNTAS:

¿A qué hora circulan los coches con mayor velocidad? Justifica la respuesta.

¿A qué hora circulan los coches con menor velocidad? Justifica la respuesta.

### PASOS

- Dibujar una figura de análisis (Si es necesario)  
En este caso no es necesario ya que no tenemos una situación de análisis geométrico, en su caso ya está la velocidad en función del tiempo.

- Se plantea la función que hay que maximizar o minimizar.

La función ya se encuentra planteada y es:

$$v(t) = t^3 - 15t^2 + 72t + 8 \text{ para } t \in [2, 6]$$

- Se plantea una ecuación que relacione las distintas variables del problema, en el caso de que haya más de una variable.



Como la velocidad está en función del tiempo, no hay otra variable que intervenga, por lo tanto trabajamos con la función inicial.

- Se deriva la función y se iguala a cero, para hallar los extremos locales.



Función principal →

Primera derivada →

Igualando a cero →

Resolviendo la ecuación →

Tenemos dos extremos

$$v(t) = t^3 - 15t^2 + 72t + 8$$

$$v'(t) = 3t^2 - 30t + 72$$

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 30t + 72 = 0$$

$$t = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 864}}{6}$$

$$t_1 = \frac{30 + \sqrt{36}}{6} = 6$$

$$t_2 = \frac{30 - \sqrt{36}}{6} = 4$$

- Se realiza la 2ª derivada para comprobar el resultado obtenido.



$$v''(t) = 6t - 30$$

$$v''(6) = 6(6) - 30 = 6 > 0 \quad \text{Mínimo}$$

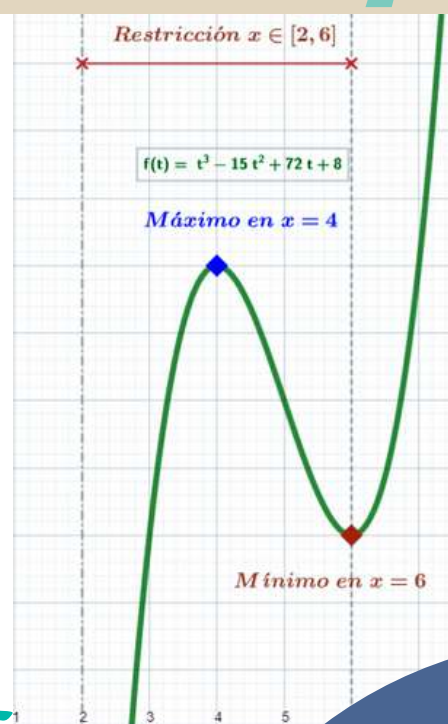
$$v''(4) = 6(4) - 30 = -4 < 0 \quad \text{Máximo}$$

### RESPUESTA

A las 4 p.m. los coches circulan a mayor velocidad, mientras que a las 6 p.m. a menor velocidad.

Puedes visualizar la gráfica completa en

<https://cutt.ly/qWxBczI>





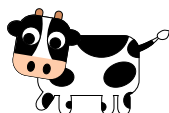
## HOJA DE TRABAJO (ACTIVIDAD 2)



En la siguiente actividad el docente interactúa con el simulador y en grupos de 3 estudiantes, llenan la hoja de trabajo que se encuentra en el apartado **recortables**.

Link del simulador

<https://cutt.ly/oWQRkZ9>



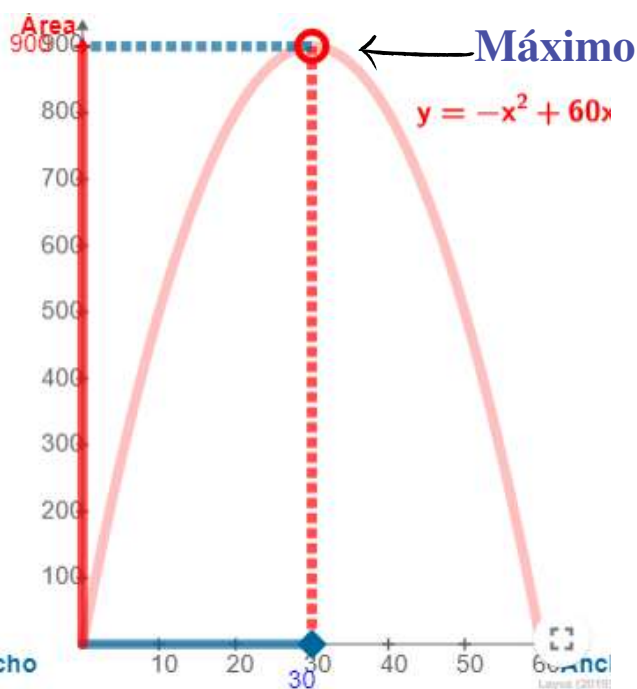
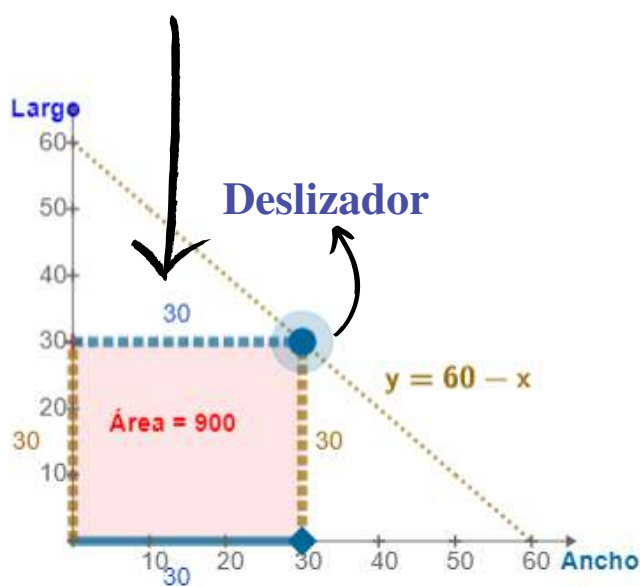
### ENUNCIADO



Un ganadero de la parroquia Tarqui tiene 120 metros de malla de alambre y con ello desea cercar un terreno de forma rectangular para que sus cabezas de ganado no salgan de su propiedad.

¿Cuál es el área máxima que puede cercar?

Área del terreno



La hoja de trabajo consta de casillas en donde los estudiantes irán colocando las respuestas a sus procedimientos matemáticos que vayan realizando.



## HOJA DE TRABAJO (ACTIVIDAD 2)



**Rellena los ítems correctamente manipulando el simulador:**

- De los parámetros de la función cuadrática, indica cual nos indicaría la solución del máximo valor del área:



Concavidad de la función



Eje de simetría



Dominio



Coordenadas del vértice



Los ceros



Rango

- Lo que se quiere cercar es el perímetro, para que su área sea máxima, siendo "x" el ancho y "y" el largo, por lo tanto dicho perímetro sería:

Perímetro

$$2x$$



$$2y$$



$$120$$

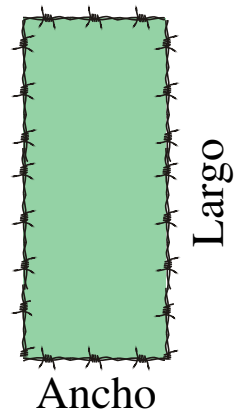
Y por lo tanto su área es



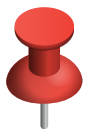
$$x$$



$$y$$



- Como ya lo hemos estudiado antes, debemos expresar la función a optimizar en una sola variable, por lo tanto utilizamos la restricción, en este caso el perímetro.



**Los estudiantes deberán realizar los procedimientos matematicos en una hoja aparte.**

Perímetro a utilizar

$$y=60-x$$

Perímetro reemplazado en la función área

$$A(x)=60x-x^2$$

- Como ya tenemos la función necesaria procedemos a realizar la optimización.





**Función a optimizar**

$$A(x) = 60x - x^2$$

SELECT

**Primera derivada**

$$A'(x) = 60 - 2x$$

SELECT

**Puntos críticos**

$$x = 30$$

SELECT

**Segunda derivada**

$$A''(x) = -2$$

SELECT

**Máximo o mínimo**

**Máximo**

SELECT



Por lo tanto las medidas que deberá tener el terreno para que su área sea máxima será:

**Ancho**

**30 metros**

SELECT

**Largo**

**30 metros**

SELECT



**900 m<sup>2</sup>**



## CONSOLIDACIÓN



Tiempo estimado 5 minutos



Dentro de este marco realizaremos un cuestionario online, en donde se trata de los procesos, puntos importantes y pasos que deben registrarse para poder solucionar procesos de optimización:

Link del cuestionario →

<https://cutt.ly/iWEpkiC>



Tabla de respuestas correctas →

| Preguntas                                                                                                     | Opción correcta                                        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| Cómo deben estar configuradas las funciones para ser optimizadas?                                             | En torno a una sola variable, cualquiera que ésta sea. |
| Cuál de las siguientes opciones nos ayuda a maximizar o minimizar una función                                 | Segunda derivada                                       |
| La función a optimizar también es llamada función....                                                         | Función objetivo                                       |
| Si la función a optimizar sería de la forma que se muestra en la imagen, podría realizarlo o tuviera que..... | Establecer restricciones                               |
| Descomponer el número 16 en dos sumandos positivos tales que su producto sea máximo.                          | #1=8 y #2=8                                            |
| En qué ámbitos se visualiza el uso de la optimización. Señale una opción.                                     | Opción 3                                               |
| Si deseo que entre más luz solar por mi ventana, las dimensiones de esta deberían ser:                        | Máximas, si cuento con el perímetro justo.             |

## TRABAJO DE FIN DE UNIDAD



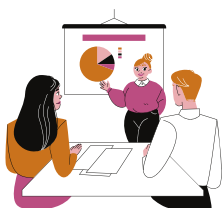
El docente genera la siguiente actividad para sus alumnos, el plazo de entrega del mismo será 10 días, las pautas se brindan a continuación.

Sobre todo se tomará en cuenta la imaginación de los estudiantes.

El presente trabajo consistirá en formar grupos de 5 estudiantes en los que vamos a buscar en nuestro entorno situaciones que podamos optimizar:

- consumo de luz
- consumo de agua
- consumo de internet, etc

A su vez realizar el procedimiento matemático, gráficas, interpretaciones y alternativas de mejora.



El trabajo podrá ser presentado en power point, canva, prezi o en la plataforma digital que deseen los estudiantes.

**IMPORTANTE**

Conversar entre cada grupo de estudiantes y verificar que los temas no se repitan.



RECORTABLES





## TABLA (ACTIVIDAD 1)



### Integrantes:

---

---

- Ingrese al simulador expuesto en clase y llene la tabla con los datos correctos

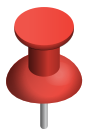
Link del simulador:

<https://cutt.ly/JWykP6u>



### IMPORTANTE

Si no encuentra la medida exacta puede aproximar al inmediato superior.



Los estudiantes deberán realizar los procedimientos matemáticos en una hoja aparte y adjuntar a la hoja de trabajo.

| TABLA     |                  |            |            |
|-----------|------------------|------------|------------|
| Perímetro | Valor optimizado | Valor en y | Área total |
| 6 mts     |                  |            |            |
| 9 mts     |                  |            |            |
| 14 mts    |                  |            |            |
| 20 mts    |                  |            |            |





## HOJA DE TRABAJO (ACTIVIDAD 2)

**Integrantes:**

**Rellena los ítems correctamente manipulando el simulador:**



- De los parámetros de la función cuadrática, indica cual nos indicaría la solución del máximo valor del área:

- |                                                   |                                          |                                  |
|---------------------------------------------------|------------------------------------------|----------------------------------|
| <input type="checkbox"/> Concavidad de la función | <input type="checkbox"/> Eje de simetría | <input type="checkbox"/> Dominio |
| <input type="checkbox"/> Coordenadas del vértice  | <input type="checkbox"/> Los ceros       | <input type="checkbox"/> Rango   |

- Lo que se quiere cercar es el perímetro, para que su área sea máxima, siendo "x" el ancho y "y" el largo, por lo tanto dicho perímetro sería:

Perímetro



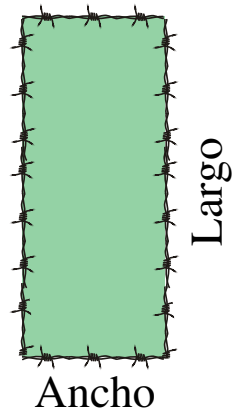


120

Y por lo tanto su área es







- Como ya lo hemos estudiado antes, debemos expresar la función a optimizar en una sola variable, por lo tanto utilizamos la restricción , en este caso el perímetro.



**Los estudiantes deberán realizar los procedimientos matemáticos en una hoja aparte y adjuntar a la hoja de trabajo.**

Perímetro a utilizar

Perímetro reemplazado en la función área

- Como ya tenemos la función necesaria procedemos a realizar la optimización.





**Función a optimizar**

SELECT

**Primera derivada**

SELECT

**Puntos críticos**

SELECT

**Segunda derivada**

SELECT

**Máximo o mínimo**

SELECT



Por lo tanto las medidas que deberá tener el terreno para que su área sea máxima será:

**Ancho**

**Largo**

SELECT

SELECT





# MATERIAL CONCRETO

PARA APLICACIONES  
DE LAS DERIVADAS

SEXTA CLASE

### Destreza:

El docente tendrá la capacidad de inventar ejercicios idealizados, así como usar material casero para realizar la demostración del uso de las aplicaciones de las derivadas.

### ANTICIPACIÓN

tiempo estimado 5 min



### RECUERDA



Tomar en cuenta que para la aplicación del material concreto los estudiantes deben dominar los temas de las clases anteriores, esto con el fin de agilizar los procesos matemáticos.



El material concreto es de fácil manipulación para el uso del docente y del alumno para la efectividad del aprendizaje.



### Importancia del material concreto en la enseñanza matemática

Permite que el mismo estudiante experimente el concepto desde la estimulación de sus sentidos, logrando llegar a interiorizar los conceptos que se quieren enseñar a partir de la manipulación de los objetos de su entorno.

### Ventajas:



Modifica las actitudes de estudiantes.

Permite agilizar los procesos de enseñanza.

Crea un aprendizaje significativo

## CONSTRUCCIÓN

tiempo estimado 80 min (2 sesiones)

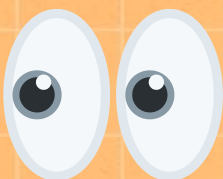
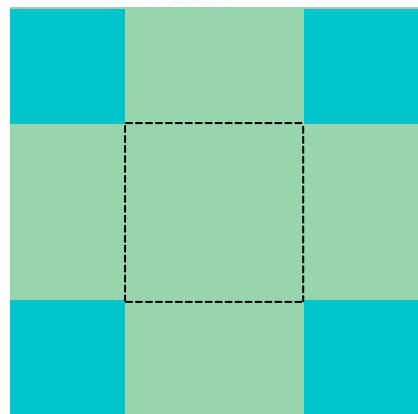
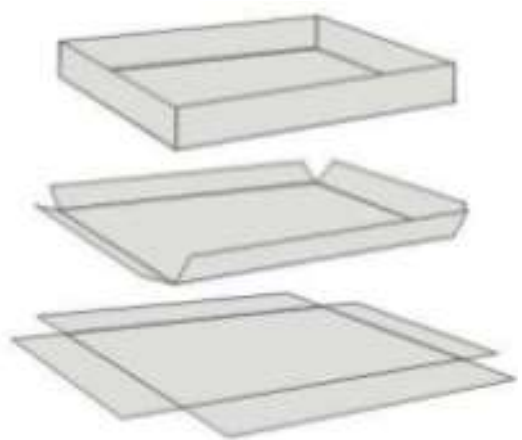


Primero se trabajará con desarrollo matemático, luego con material concreto y por último con el material virtual.

Se dispone de una lámina de cartón cuadrada de **24 cm** de lado, si cortamos cuadrados iguales en las esquinas, se puede construir una caja abierta doblando los laterales. Hallar las dimensiones de los cuadrados cortados para que el volumen sea máximo.

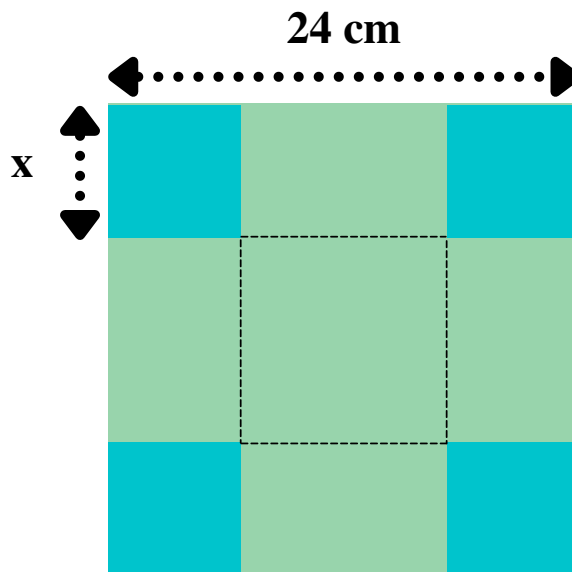
### 1 Interpretación gráfica

La gráfica muestra la forma en la que se construirá la caja una vez recortados los cuadrados en las esquinas.

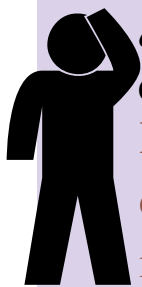


Las líneas entrecortadas que se muestran en la gráfica son donde se realizarán los distintos dobleces en los 4 lados del cuadrado.

## 2 Diagrama del planteamiento.



???



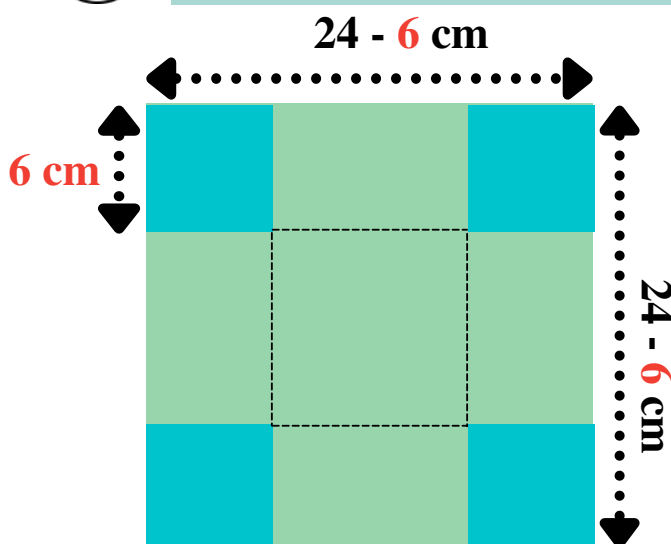
El docente pregunta a sus estudiantes:

¿Crees que el tamaño del cuadrado que se recorte haga cambiar el volumen de la caja?

**Respuesta:** el pedazo, al ser parte de la caja altera las medidas cuando esta se arme, modificando el volumen y la forma de la misma, lo cual explicaremos a continuación.



Para observar si el volumen cambia probaremos con diferentes medidas del cuadrado que se recorta.



Si se recortan cuadrados de 6 cm de lado ¿cuáles serán las dimensiones de la caja resultante?

**Respuesta:** En la figura podemos observar las siguientes dimensiones: longitud (18 cm), ancho (18 cm) y altura (6 cm)

## Dimensiones del diagrama

Largo (l) 12cm  
Ancho (a) 12cm  
Altura (h) 6cm



El volumen es el producto de las tres dimensiones

$$V = l \cdot a \cdot h$$

$$V = 12 \cdot 12 \cdot 6 = 864 \text{ cm}^3$$

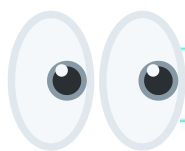
Ahora si se recortan cuadrados de 3 cm por lado las dimensiones y el volumen cambia.

Largo (l) 18cm  
Ancho (a) 18cm  
Altura (h) 3cm



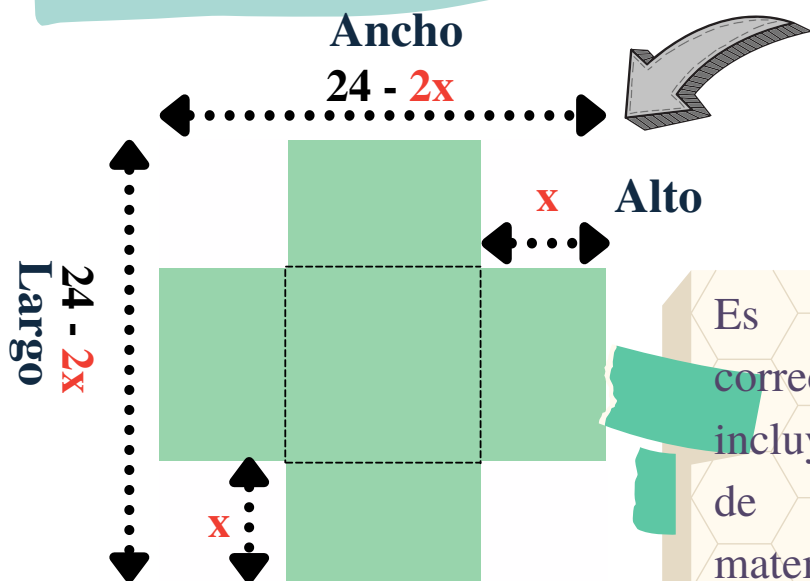
$$V = l \cdot a \cdot h$$

$$V = 18 \cdot 18 \cdot 3 = 972 \text{ cm}^3$$



Por lo tanto observamos que: al **disminuir** el tamaño del cuadrado que se recorta el volumen **aumenta** y viceversa.

### 3 Continuamos con el desarrollo del ejercicio en específico.



#### Dimensiones

Largo (l)  $24 - 2x$

Ancho (a)  $24 - 2x$

Alto (h)  $x$

Es importante asignar correctamente las medidas incluyendo las incógnitas antes de empezar a desarrollar matemáticamente el ejercicio.



**Dimensiones**Largo (l)  $24-2x$ Ancho (a)  $24-2x$ Alto (h)  $x$ 

El volumen es el producto de las tres dimensiones

$$V = l \cdot a \cdot h$$

$$V = (24-2x)(24-2x)(x)$$

Volumen de la caja 

$$V = (24 - 2x)(24 - 2x)x$$

$$V = (576 - 48x - 48x + 4x^2)x$$

$$V = (576 - 96x + 4x^2)x$$

**FUNCION A  
OPTIMIZAR** 

$$V = 576x - 96x^2 + 4x^3$$

**Primera derivada** 

$$V' = 576 - 192x + 12x^2$$



Ahora analizaremos la primera derivada como una ecuación para obtener los puntos críticos y finalmente el valor requerido.



$$0 = 12x^2 - 192x + 576 (\div 12)$$

$$0 = x^2 - 16x + 48$$

$$(x - 12)(x - 4) = 0$$

$$x = 12 \text{ y } x = 4$$

**TOMAR EN CUENTA QUE:**

Por la naturaleza del problema se ve que "x" no puede tomar el valor de 12 cm porque el volumen seria 0 por lo tanto **x= 4cm.**



# 5

## Análisis del punto encontrado

Reemplazamos los valores en la función obtenida del volumen:

$$V = 576 - 192x + 12x^2$$

★ Cuando  $x = 12$

$$V = 12(12^2) - 192(12) + 576$$

$$V = 1728 - 2304 + 576 = 0$$

Descartamos  $x = 12$  cm, porque el volumen es igual a  $0 \text{ cm}^3$ .

descartamos el valor

★ Cuando  $x = 4$

$$V = 12(4^2) - 192(4) + 576$$

$$V = 192 - 768 + 576 = 1024$$

Con  $x = 4$  cm, obtenemos un volumen de  $1024 \text{ cm}^3$ .

Por lo tanto analizaremos si es un máximo o mínimo

• Primera derivada

$$V' = 576 - 192x + 12x^2$$

• Segunda derivada

$$V'' = 24x - 192 \quad (\div 12)$$

$$V'' = 2x - 16$$

• Reemplazo  $x=4$  en la segunda derivada

$$V''(4) = 2 \cdot (4) - 16 = -8$$

$-8 < 0$  por lo tanto es un **máximo**.

### GRÁFICA



El docente puede analizar toda la función usando el siguiente link:



<https://cutt.ly/IQMT2ne>

## USO DEL MATERIAL CONCRETO

El docente hará uso de una tabla explicativa conjuntamente con el material asignado en donde tendrá 3 medidas diferentes de "x" y mostrará como varía el volumen en base al cuadrado recortado., así:

| Caja # | Corte(h) | Largo (l)                        | Ancho (a)                        | Volumen<br>$V = l \cdot a \cdot h$          |
|--------|----------|----------------------------------|----------------------------------|---------------------------------------------|
| Caja 1 | 2 cm     | $24 - 2 \cdot (2) = 20\text{cm}$ | $24 - 2 \cdot (2) = 20\text{cm}$ | $V = 20 \cdot 20 \cdot 2 = 800\text{cm}^3$  |
| Caja 2 | 4 cm     | $24 - 2 \cdot (4) = 16\text{cm}$ | $24 - 2 \cdot (4) = 16\text{cm}$ | $V = 16 \cdot 16 \cdot 4 = 1024\text{cm}^3$ |
| Caja 3 | 8 cm     | $24 - 2 \cdot (8) = 8\text{cm}$  | $24 - 2 \cdot (8) = 8\text{cm}$  | $V = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512\text{cm}^3$    |

### PROCEDIMIENTO

#### Tabla base

- Muestre el valor de la primera pieza cortada., es decir  $x=2$  cm

- Realice los cálculos tanto para el largo y ancho de la caja.

- Encuentre el volumen final de la caja y realice una **tabla base**, similar a la mostrada, la cual puede ser realizada en la pizarra

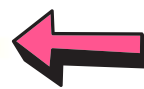
- Con ayuda de los estudiantes vaya colocando los valores obtenidos en una tabla similar colocada anteriormente.

- Pida a alguno de los estudiantes que arme la caja, es decir una los lados magnéticos de la misma.

- Presente la caja a los estudiantes.



Repita el proceso anterior para  $x=4\text{cm}$  y llene la tabla base.



Sin armar



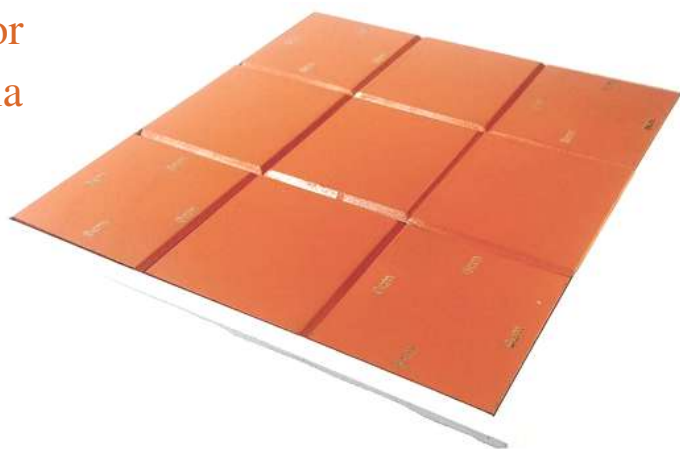
Armada





Repita el proceso anterior para  $x=8\text{cm}$  y llene la tabla base.

Sin armar



Armada



Finalmente se explica a los estudiantes que el valor optimizado es para el valor  $x=4\text{cm}$ , valor que matemáticamente obtuvimos y con el cual se da el volumen máximo.

### NOTA PARA EL DOCENTE

Para la elaboración de la caja podemos utilizar distintos materiales reciclados, como cartulinas, cartones viejos, láminas de acetatos, carpetas, playwood, etc

Esto con el fin de explotar la imaginación de los estudiantes

---

## INICIO DE LA SEGUNDA SESION

Se recomienda al docente utilizar una segunda sesión para esta última clase con el fin de que se logre abarcar y explicar todo el material preparado ya que es un tanto extenso.





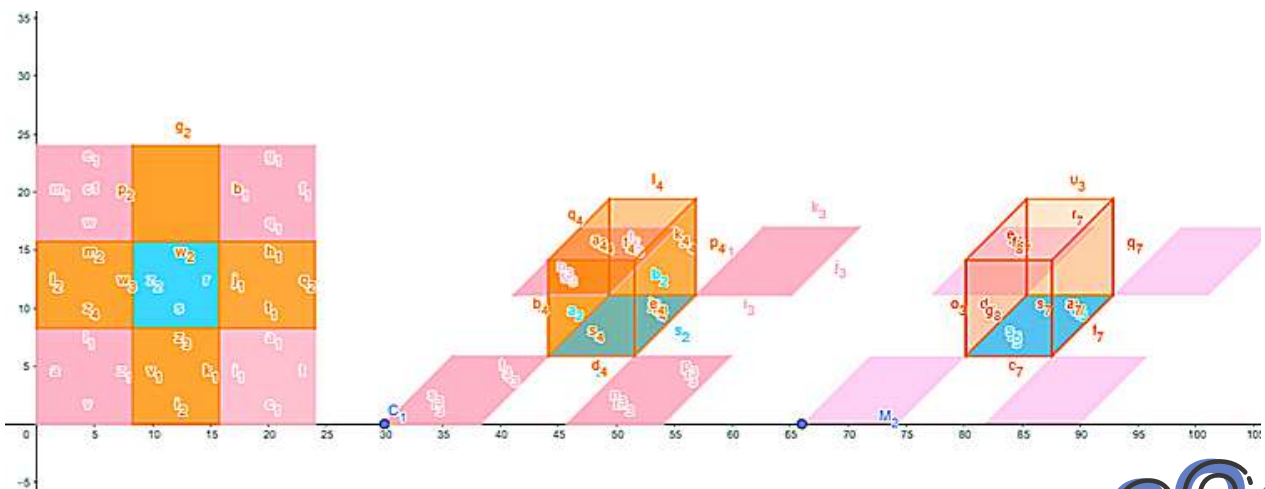
En el presente simulador de GeoGebra se puede observar diferentes tipos de cortes para obtener una caja con la función del ejercicio anterior, interactúe con los estudiantes y pida responder las preguntas planteadas.



Ingresar al siguiente link para observar el simulador del ejercicio.



<https://cutt.ly/0Q98arm>



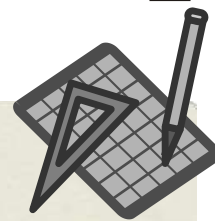
Responder las preguntas en su cuaderno



- 1 Si mantenemos una caja cuadrada de 24 cm de lado y aumentamos el valor del corte ¿ qué sucede? **si aumentamos el valor del corte el volumen aumenta hasta un valor máximo, de ahí empieza a disminuir hasta llegar a 0 cm<sup>3</sup>.**
- 2 ¿Desde qué intervalo de cortes, cree Ud. que se formará una caja rectangular de pizza? **aproximadamente desde el valor de x=1 hasta x=4 cm**
- 3 Si tengo una caja cuadrada de 15 cm de lado, al hacer un corte de 6cm ¿Cuál es el volumen total?  
**Utilizando el razonamiento explicado el volumen de la caja sería:**  
$$V = (15 - 2 \cdot (6)) \cdot (15 - 2 \cdot (6)) \cdot 6 = 54 \text{ cm}^3.$$



## LABORATORIO MATEMÁTICO



### ANTES DE COMENZAR



Previamente a esta clase, el docente pide a los alumnos que traigan un alambre de cualquier material pero de una medida estándar.

Se pide que traigan alguna herramienta para cortar y doblar el alambre.



Se explica la importancia de los bosquejos utilizados en clases anteriores para mejor comprensión de los ejercicios.

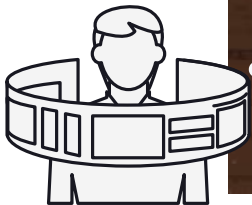
Importante señalar a los alumnos que las actividades interactivas logran desarrollar su capacidad de aprendizaje dentro del aula.



Enfatizar en la importancia de las matemáticas dentro de las actividades cotidianas del ser humano y el uso de las TICs.

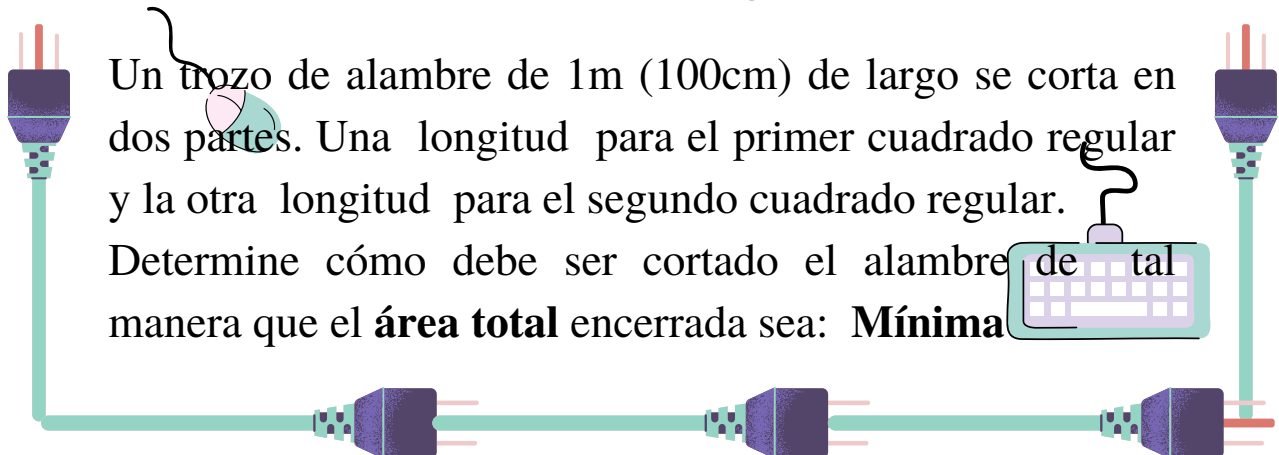


## DESARROLLO



- Se presenta un ejercicio adaptado a la vida real del alumno, con el fin que pueda analizarlo y resolverlo de manera eficiente.
- Se toma en cuenta los conceptos estudiados con anterioridad respecto a la derivada.
- Se promueve el uso de recursos tecnológicos dentro y fuera del aula.

## ENUNCIADO DEL EJERCICIO



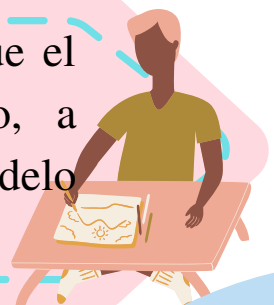
Un trozo de alambre de 1m (100cm) de largo se corta en dos partes. Una longitud para el primer cuadrado regular y la otra longitud para el segundo cuadrado regular. Determine cómo debe ser cortado el alambre de tal manera que el **área total** encerrada sea: **Mínima**

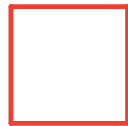
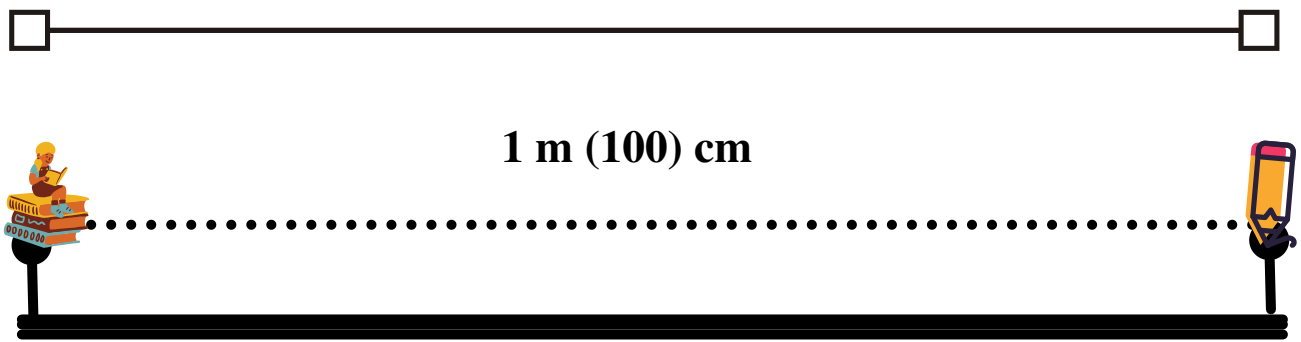


Antes de empezar el docente explica que al ser un laboratorio matemático los estudiantes deben realizar la práctica que se encuentra en el apartado **RECORTABLES**.

## BOSQUEJO DEL EJERCICIO

Se realiza el bosquejo por parte de docente para que el alumno observe el comportamiento del ejercicio, a continuación el alumno deberá encontrar el modelo matemático.

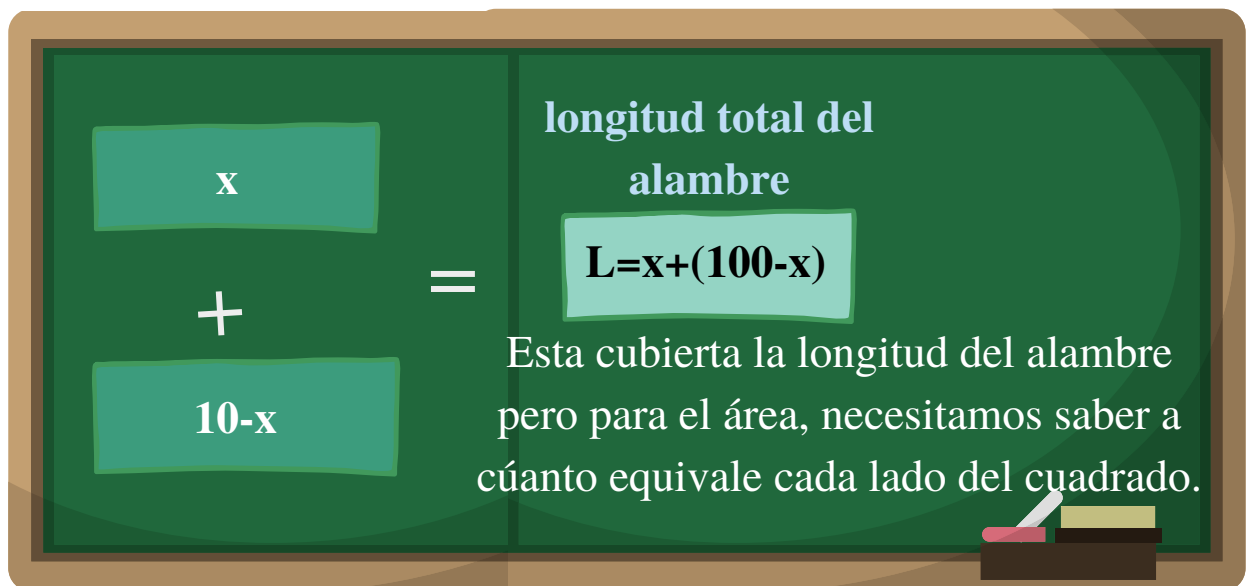




- Si esta parte que la llamaremos " $x/4$ " se corta, cómo se debería denominar la otra parte del alambre?

**100-x**

Se pide a los estudiantes brindar los posibles modelos para optimizar utilizando el alambre para hallar el área mínima :



Para seguir con el desarrollo dividimos cada pedazo del alambre para el número de lados del cuadrado., de esta manera podremos saber el lado y utilizarla en el área.

★ Área del cuadrado:  $\left(\frac{x}{4}\right)^2$  ó  $\frac{x^2}{16}$

★ Área del segundo cuadrado:  $\left(\frac{100-x}{4}\right)^2$

Reescribiendo:  $\frac{x^2 - 200x + 10000}{16}$

Este espacio es netamente para que el estudiante intente y pueda mediante ensayo error llegar a la función a optimizar, la cual esta en el recuadro blanco.

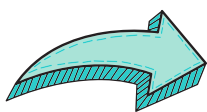
*Área del primer cuadrado + Área del segundo cuadrado*

$$A = \frac{x^2}{16} + \frac{x^2 - 200x + 10000}{16}$$

$$\text{Ó } A = \frac{2x^2 - 200x + 10000}{16} / 2$$

**Modelo matemático**  $A = \frac{x^2 - 100x + 5000}{8}$

- Coloque en el recuadro el modelo matemático ideal:



$$A = \frac{x^2 - 100x + 5000}{8}$$



Explique del por qué utilizo ese modelo y en base a qué pautas o condiciones esta realizado.

Usamos este modelo porque son dos pedazos de alambre, además el modelo abarca ambas áreas de los dos cuadrados y está en función de una sola incógnita.

Realice los procesos matemáticos y llene las casillas según corresponda.



**Función principal**

$$A = \frac{x^2 - 100x + 5000}{8}$$

**Desarrollando**

$$2x = 100$$

**Primera derivada**

$$A'(x) = \frac{1}{8} (2x - 100)$$

**Para el segundo cuadrado =**

$$100 - 50 = 50 \text{ cm}$$

**Puntos críticos  $A' = 0$**

$$\frac{1}{8} (2x - 100) = 0$$

**Resolviendo la ecuación**

$$\frac{1}{8} = 0 \therefore (2x - 100) = 0$$

**Primera derivada**

$$A'(x) = \frac{1}{8} (2x - 10)$$

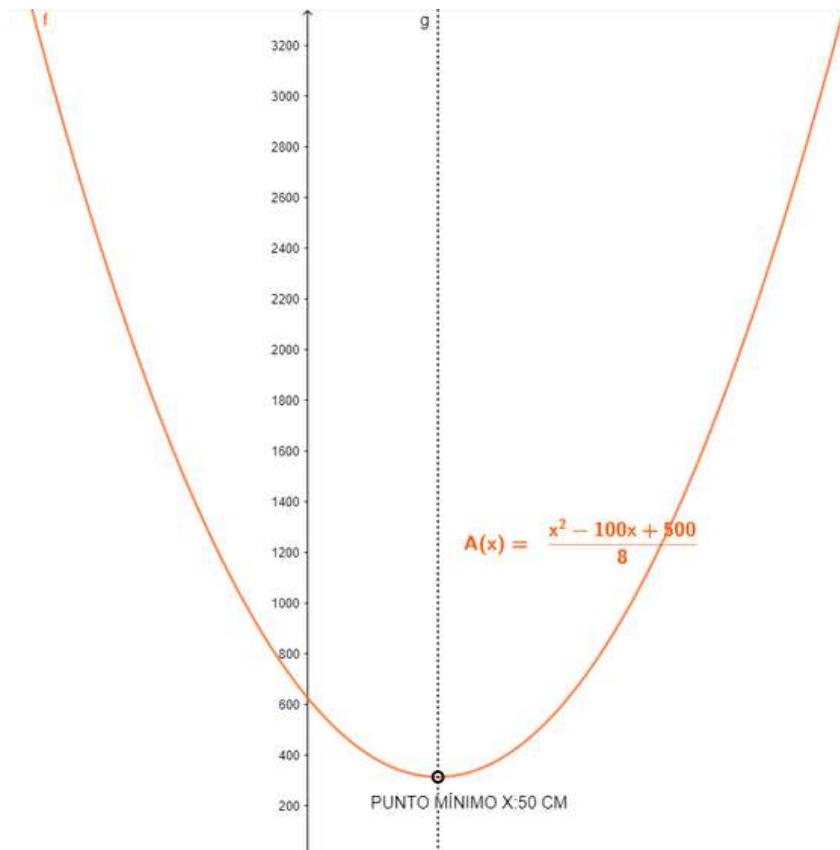
**Máximos/ Mínimos**

la prueba de la segunda derivada es un mínimo

**Respuesta**

$$x = 50\text{cm}$$

Espacio para realizar un bosquejo de la gráfica y señalar los ítems hallados anteriormente.

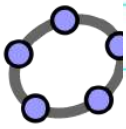


**Interpretación de la respuesta**

El corte para el primer alambre es de  $x=50$  cm, formándose dos cuadrados perfectos con las mismas medidas, teniendo una área total mínima entre los dos de 312,50 cm².

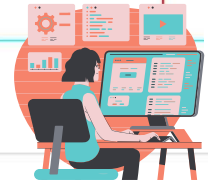
## CONSOLIDACIÓN

tiempo estimado 10 min

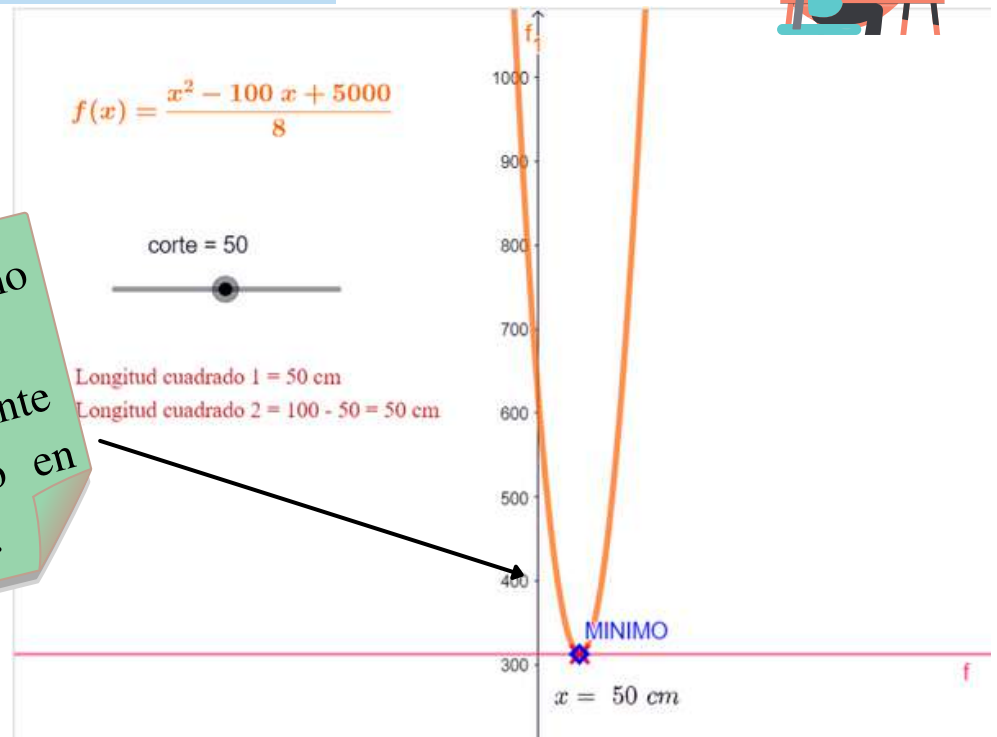


Use el siguiente simulador para verificar su respuesta, el comportamiento de las figuras a distintas longitudes de corte del alambre y responda las siguientes preguntas:

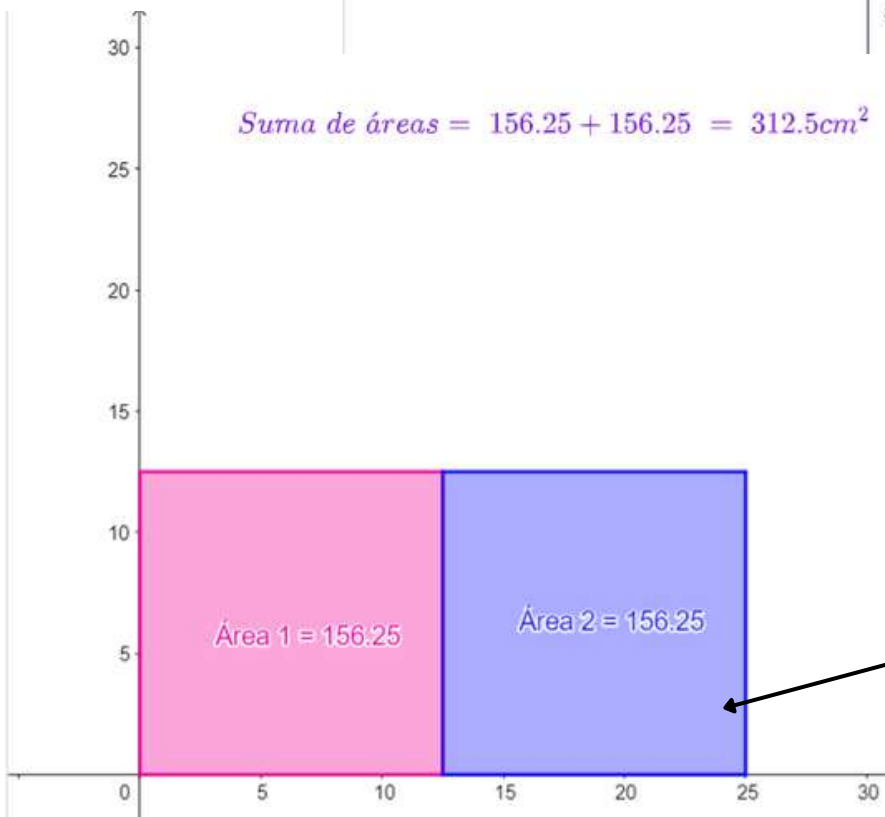
<https://cutt.ly/XQ94jSE>



Valor máximo encontrado matemáticamente y visualizado en el simulador.



$$\text{Suma de áreas} = 156.25 + 156.25 = 312.5 \text{ cm}^2$$



Forma que tomará el alambre al armar los cuadrados.





Las siguientes preguntas serán para trabajar en casa, la cual estará en el apartado de **recortables**, con esto lograremos que el estudiante interactúe con el simulador y despertar el interés por las TIC's.

## ACTIVIDAD #1



**Responda las preguntas en su cuaderno**



- 1 Teniendo en cuenta que el valor mínimo de corte para el ejercicio anterior es de  $x=50$  cm, ¿Cuál es el valor de cada lado del cuadrado rojo?

El valor de cada lado del cuadrado rojo es  $50\text{cm}/4= 12,5$  cm.

- 2 ¿En qué valor del corte se da la suma de áreas máxima?

La suma de áreas máxima se da en cortes  $x=0$  cm y en  $x=100$  cm., es decir cuando se corta todo el alambre para formar un solo cuadrado en ambos casos.

- 3 El problema se puede realizar con más figuras geométricas, explique el por qué?

Si se puede realizar con otras figuras geométricas, como el triángulo por ejemplo, siempre y cuando estén bien planteadas las funciones a optimizar.







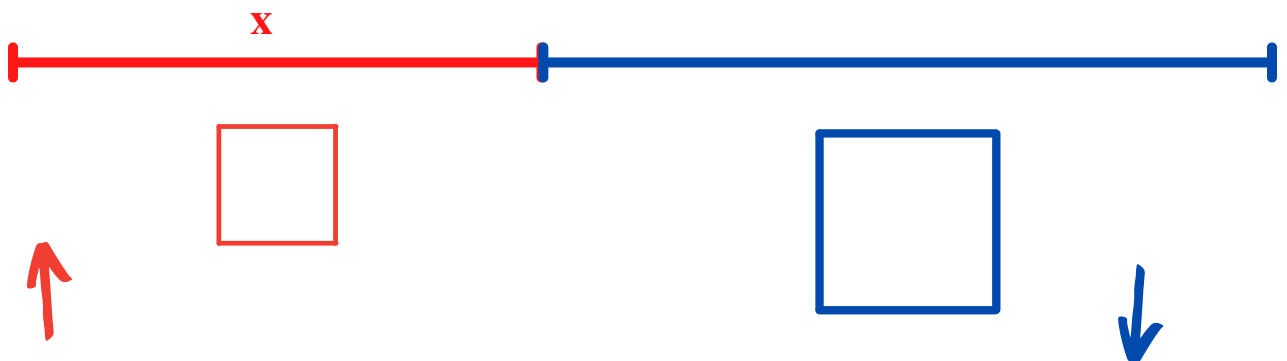
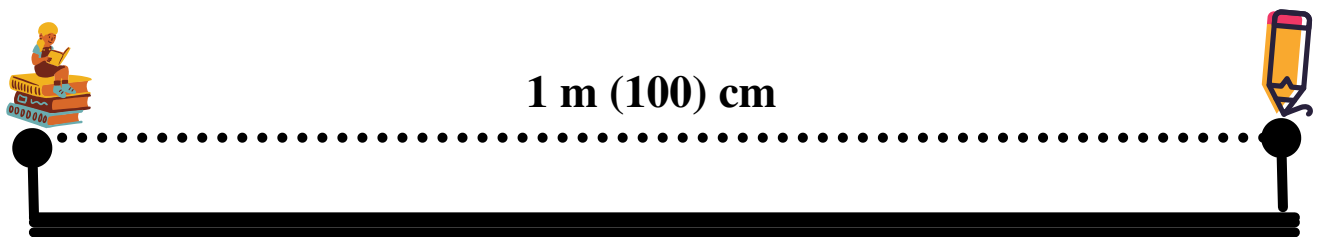
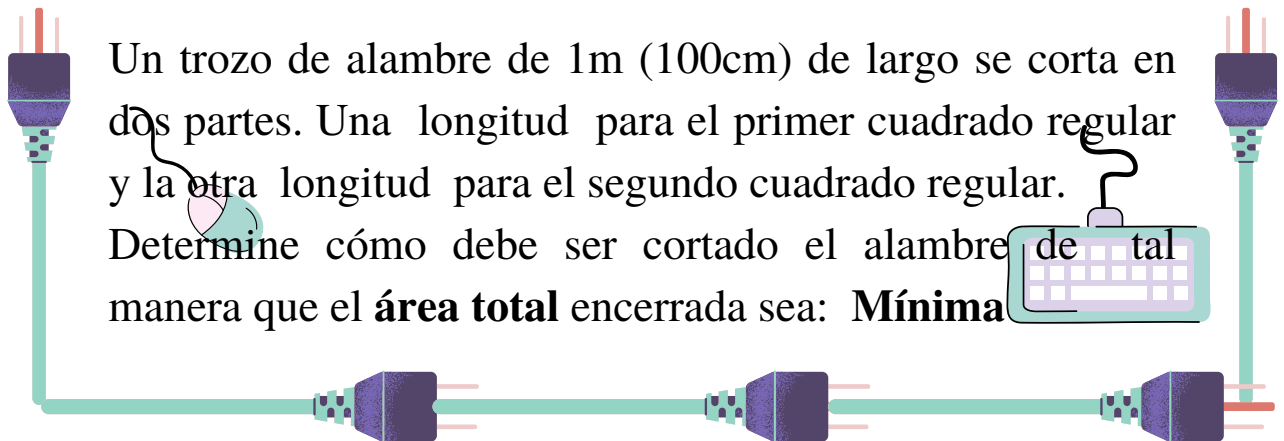
RECORTABLES





## PRACTICA #1

Nombre: \_\_\_\_\_

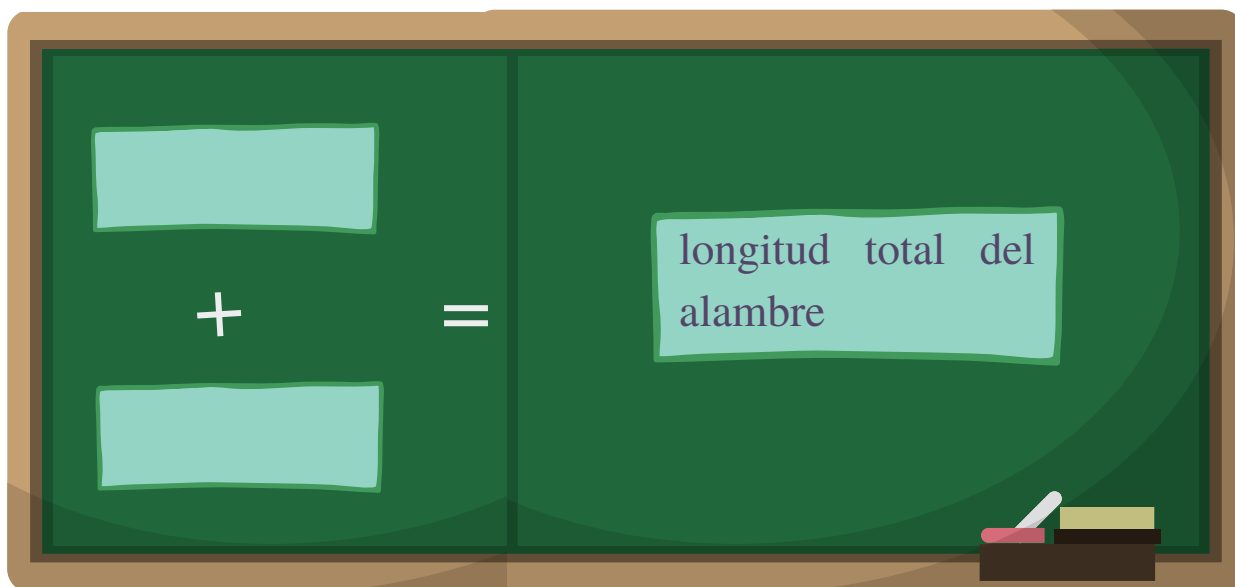


- Si esta parte que la llamaremos "x" se corta, cómo se debería denominar la otra parte del alambre?



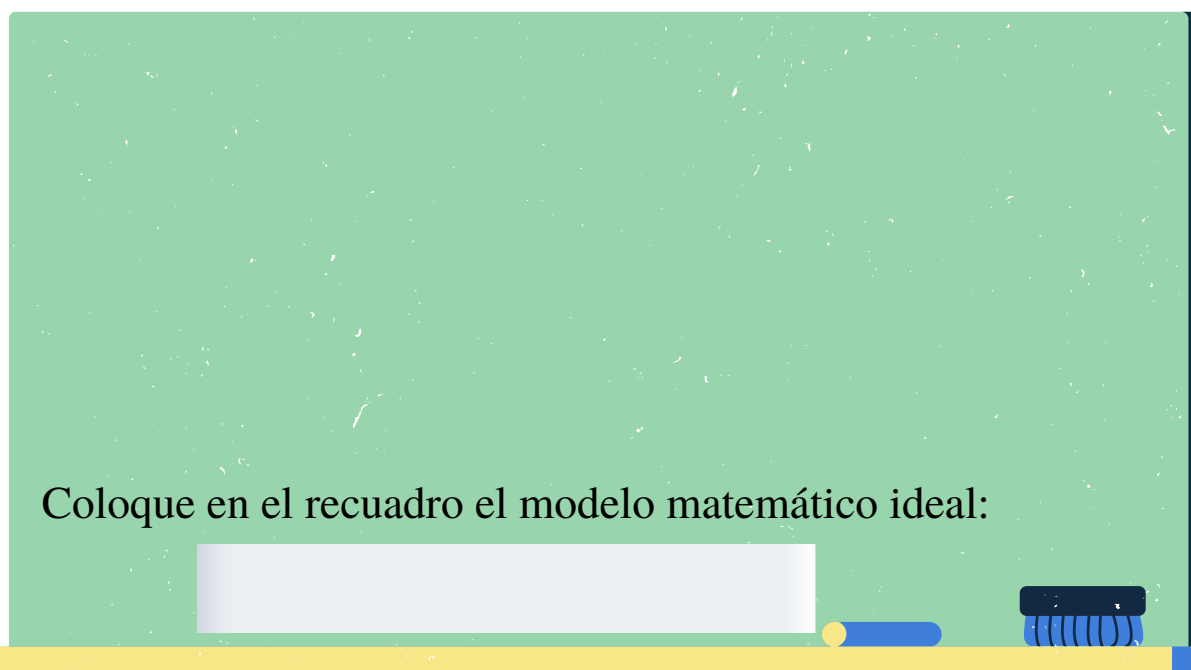
Ensaye los posibles modelos para optimizar utilizando el alambre para hallar el área mínima :





Realice en su cuaderno el proceso para hallar la función objetivo, la cual servirá para continuar con el desarrollo matemático.

- En el siguiente espacio ensaye los modelos que Ud. crea conveniente para la optimización del ejercicio:





|  |  |
|--|--|
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

A full-page view of a blank sheet of white graph paper. The page is covered by a uniform grid of thin gray lines, forming small squares. A single vertical red line runs down the right side of the page, approximately one-tenth of the way from the edge. There are no markings, text, or drawings on the paper.

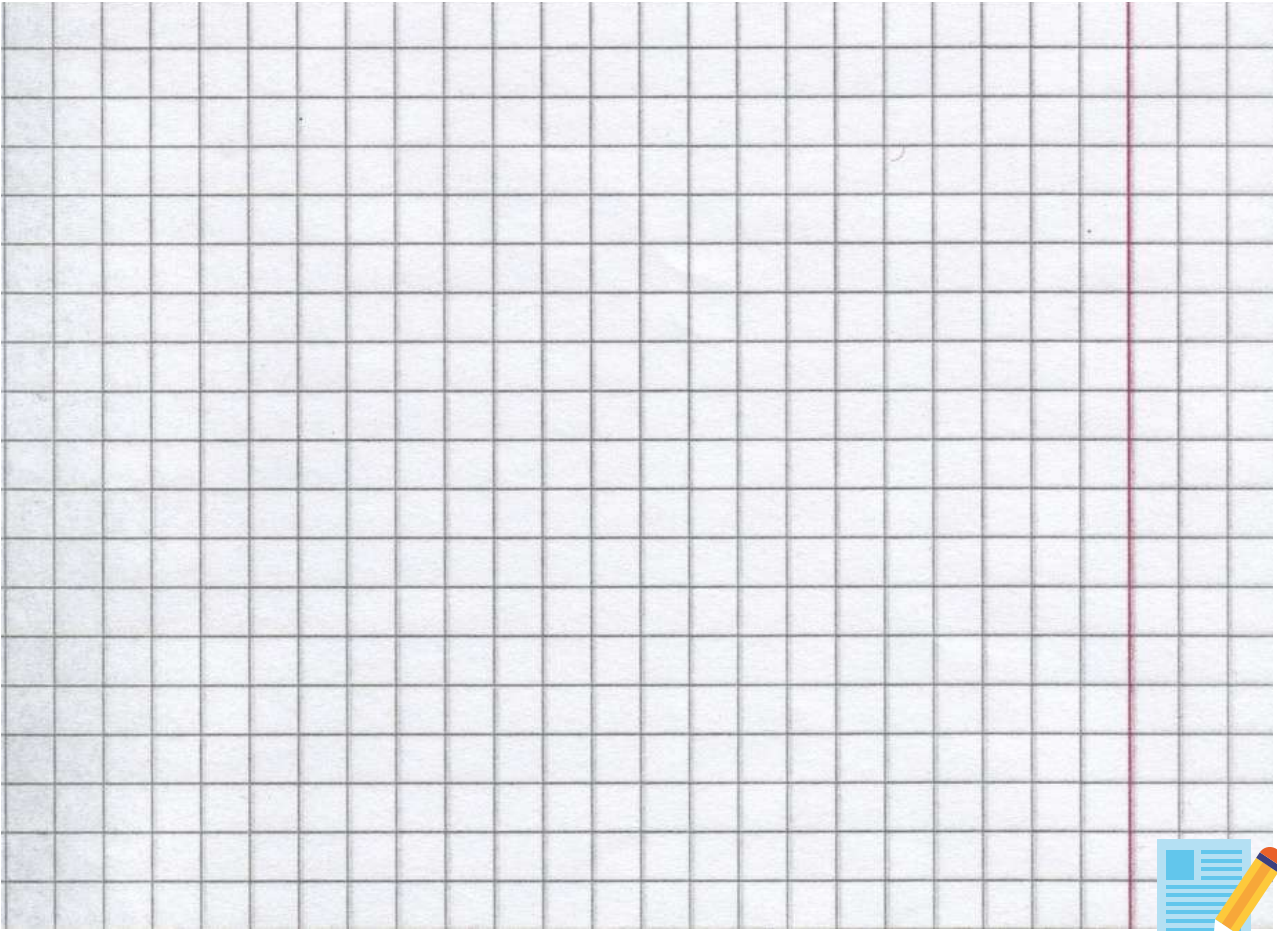
\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

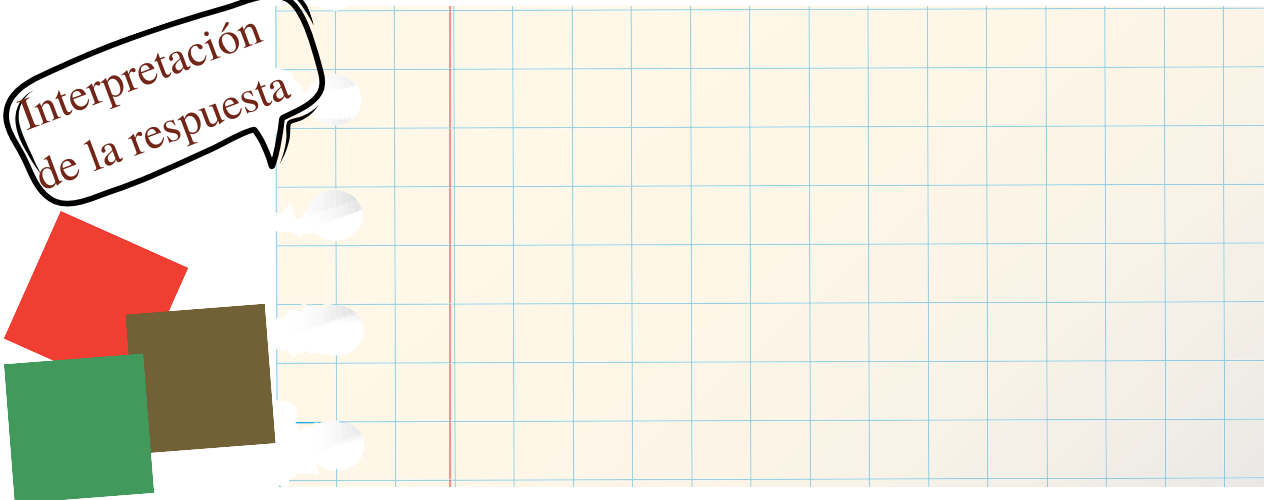
\_\_\_\_\_



Espacio para realizar un bosquejo de la gráfica y señalar los ítems hallados anteriormente.

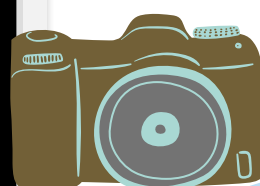
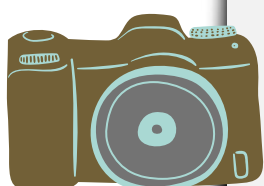
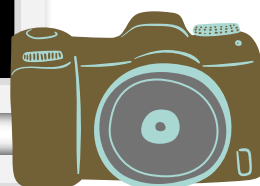
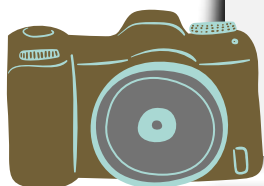
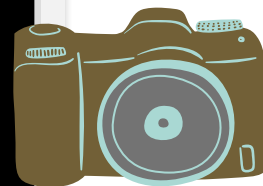
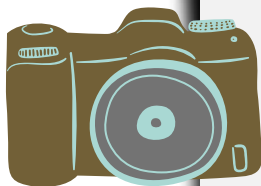


Interpretación  
de la respuesta





Al haber encontrado la medida mínima, realice los cortes en el alambre, doble y arme las figuras., coloque una foto del resultado final.





## ACTIVIDAD #1

Nombre: \_\_\_\_\_



**Responda las preguntas en su cuaderno**



**1** Teniendo en cuenta que el valor mínimo de corte para el ejercicio anterior es de  $x=50$  cm, ¿Cuál es el valor de cada lado del cuadrado rojo?

**2** ¿En qué valor del corte se da la suma de áreas máxima?

**3** El problema se puede realizar con más figuras geométricas, explique el por qué?







## CONCLUSIONES

El sistema educativo nacional Ecuatoriano busca implementar nuevas estrategias metodológicas basadas en el constructivismo y el uso de recursos didácticos. En el cual tanto el docente orientador como el estudiante deben mantener un equilibrio dentro del aula. Las entrevistas realizadas a los docentes de matemáticas muestran que aún se aplican prácticas tradicionales en el aula las mismas que impiden que el estudiante obtenga aprendizajes significativos.

Por lo tanto, la propuesta ha desarrollado una estrategia metodológica y recursos tecnológicos para la enseñanza de aplicaciones de las derivadas que le permite al docente utilizar en las clases una serie de métodos interactivos como: la resolución de problemas contextualizados mediante calculadoras online, graficadoras, simulaciones, investigaciones, software matemático, juegos lúdicos, entre otros. Los mismos que motivan a que el estudiante genere un autoaprendizaje dentro y fuera de la institución, haciendo que las clases tengan una interrelación efectiva entre el conocimiento y el aprendizaje del estudiante.

La estrategia metodológica también permite que el docente realice actividades a través del material concreto, el mismo que se ha plasmado en una clase con problemas relacionados a la vida cotidiana del alumno, como lo es la optimización de funciones, esta clase contiene una serie de actividades que se pueden resolver mediante ejercicios, simulaciones en Geogebra, software y laboratorio matemático. El mismo que ayudara a que el docente obtenga varios caminos para enseñar al alumno.



## RECOMENDACIONES

Para continuar con el estudio de las aplicaciones de las derivadas se recomienda al docente aplicar actividades interactivas y relacionarlas con el contexto del estudiante en su vida diaria para que así pueda obtener un aprendizaje significativo, interesante y motivador.

Al realizar actividades en el entorno virtual es aconsejable que el docente sea parte del proceso como un orientador y a su vez esté capacitado sobre el manejo de las herramientas que va a utilizar.

Es recomendable elaborar estrategias metodológicas bien estructuradas que apoyen al tema derivadas tanto en los conceptos como aplicaciones, pues así los docentes tendrán varios métodos de enseñanza los cuales contribuyen a la mejor comprensión de los contenidos.

Los temas que el docente debe desarrollar se sugieren que los realice con una claridad conceptual y práctica para que así el estudiante pueda alcanzar las destrezas planteadas en cada clase y a su vez promuevan el razonamiento y análisis matemático.

Es importante concientizar al docente a que lleve la clase con metodologías constructivistas el mismo que prioriza el trabajo colaborativo, con herramientas y recursos tecnológicos, desarrollo de problemas contextualizados y material manipulable. Dejando atrás las metodologías tradicionales las mismas que limitan el proceso de enseñanza – aprendizaje.



## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aldana, F., Mora-B, C., Ricaño, H, F. Álvarez S. E. López V., Navarro, P. J. Solórzano, H.R., Ramírez R.García A. M. Hernández F. M. Rosas M. E. (2016). Identificación de las causas de reprobación en la facultad de ingeniería mecánica eléctrica región Xalapa de la Universidad Veracruzana. Disponible en: [http://www.divergencias.com.mx/index.php?option=com\\_content&view=article&id=223:identificacion-de-las-causas-de-reprobacion-en-la-facultad-de-ingenieria-mecanica-electrica-region-xalapa-de-la-universidad-veracruzana&catid=115:ciencias-sociales&Itemid=363](http://www.divergencias.com.mx/index.php?option=com_content&view=article&id=223:identificacion-de-las-causas-de-reprobacion-en-la-facultad-de-ingenieria-mecanica-electrica-region-xalapa-de-la-universidad-veracruzana&catid=115:ciencias-sociales&Itemid=363).
- Alvarado, B. D. (2017). La escuela tradicional y escuela nueva, analisis desde la pedagogía crítica . U Pedagógica Nacional, 227.
- Arévalo, M., García, M., & Hernández, C. (2019). Competencias TIC de los docentes de matemáticas en el marco del modelo TPACK. Civilizar: Ciencias Sociales y Humanas, 19(36), 115-132. <https://doi.org/10.22518/usergioa/jour/ccsh/2019.1/a07>
- Ausubel, D. (1983). Teoría del aprendizaje significativo. Fascículos de CEIF, 1 (1-10).
- Bolaño Muñoz, O. E. (2020). El constructivismo: Modelo pedagógico para la enseñanza de las matemáticas. Revista EDUCARE - UPEL-IPB - Segunda Nueva Etapa 2.0, 24(3), 488–502. <https://doi.org/10.46498/reduipb.v24i3.1413>
- Bravo, F., Trelles, C., & Barrazueta, J. (2017). Reflexiones sobre la evolución de la clase de matemáticas en el bachillerato Ecuatoriano. INNOVA, 6-7
- Bravo Guerrero, F. E. (2020). Importancia del currículo, texto y docente en la clase de matemática. Revista Científica UISRAEL, 7(2), 109–120. <https://doi.org/10.35290/rcui.v7n2.2020.310>
- Campos, Y. (2000). Estrategias didácticas apoyadas en tecnología. México: DF
- Cedeño, M. C. (2014). La construcción del ser en educación: una mirada desde el. Universidad Politécnica Salesiana del Ecuador, 207-208.



- Correa, M., Vinueza, J., & Lazo, R. (2017). Fundamentos de aplicación de blenden-learning para las Universidades del Ecuador. *Dominio de las Ciencias*, 420-421
- Dávila Araiza, M. (2010). La derivada a partir de problemas de optimización en ambientes dinámicos creados con GeoGebra. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemáticas de la División de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Sonora. Hermosillo, México. Recuperado el 18 de noviembre de 2011 de <https://docs.google.com/file/d/0B9mJWnHPjDPwMWEyMWMzYjQtN2FhNi00ZWlXLTljNWEtMGFmNTc1Y2RmZTM/edit?hl=en&pli=1>.
- Delgado, M., & Solano, A. (2015). Estrategias didácticas creativas en entornos virtuales para el aprendizaje.
- Díaz, Y., Cruz, M., Velázquez, Y., & Molina, S. A. (2019). Estrategias didácticas para desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos de las derivadas de funciones reales de una variable real y aplicaciones. *Revista Épsilon*, 103, 7-23.
- Díaz, F. y Hernández, G. (1999). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista. México: McGraw-Hill.
- Dick, W., Carey, L., & Carey, J. (2005). The systematic design of instruction. USA: Person.
- Echeveria, Y. A. (2018). El modelo pedagogico tradicional, su influencia en la enseñanza del derecho. Algunas reflexiones sobre el tema. . Congreso virtual sobre la educacion. , 12.
- Erreyes, S. (2019). El modelo constructivista en el área de lengua y literatura . UTMACH, 52.
- Feo, R. (2010). Orientaciones básicas para el diseño de estrategias didácticas.
- Gagné, R., Briggs, L., & Wagner, W. (1992). Principios de diseño instruccional. USA: Holt, Reihsart, y Winston Inc.
- Gamboa, A., Hernández, C., & Prada, R. (2018). Práctica pedagógica y competencias TIC. *Saber, Ciencia y Libertad*, 13(1), 258-274. <https://doi.org/10.18041/2382-3240/>



- Gutiérrez, E. C. (2016). Las metodologías tradicionales de enseñanza desde la perspectiva de los familiares y docentes de colegios . U Internacional de Lioja, 57.
- Herrera, M., & Cochancela, M. (2020). Aportes de las reformas curriculares a la educación obligatoria en el Ecuador. Revista Scientific, 1.
- Hernández, C., Arévalo, M., & Gamboa, A. (2016). Competencias TIC para el desarrollo profesional docente en educación básica. Praxis & Saber, 7(14), 41-69. <https://doi.org/10.19053/22160159.5217>
- Hernández, C., Gamboa, A., & Ayala, E. (2016). Modelo de competencias TIC para docentes: Una propuesta para la construcción de contextos educativos innovadores y la consolidación de aprendizajes en educación superior. Katharsis, (22), 221-265.
- Hernández, C., Prada, R., & Ramírez, P. (2018). Perspectivas actuales de los docentes de educación básica y media acerca de la aplicación de las competencias tecnológicas en el aula. Revista Espacios, 49(43), 1-13.
- Lamata, Rafael, & Domínguez, Rosa 2003. La construcción de procesos formativos en educación no formal. Madrid: Narcea
- Martín, M., Hernández, C., & Mendoza, S. (2017). Ambientes de aprendizaje basados en herramientas web para el desarrollo de competencias TIC en la docencia. Revista Perspectivas, 2(1), 97-104. <https://doi.org/10.22463/25909215.1282>
- Martínez, J. (2008). ¿Mas o que é inovação educacional? Cuadernos de Pedagogía, 1 (3), 78-82
- Melquiades, A. F. (2013). Estrategias didácticas para un aprendizaje constructivista en la enseñanza de las matemáticas en los niños y niñas de nivel primaria. Perspectivas docentes, (52), 43-58.
- Ministerio de Educación. (2016a). Currículo de los niveles de educación obligatoria. Ecuador: Mineduc.



Ministerio de Educación. (2016b). Precisiones Curriculares para el Bachillerato General Unificado. Ecuador: Mineduc.

Mora, G. (2013). Repositorio UASB. Obtenido de <http://repositorio.uasb.edu.ec/bitstream/10644/5543/1/T2232-MGE-Mora-El%20aprendizaje.pdf>

Moreano, G; Asmad, U; Cruz, G e Cuglievan, G. Concepciones sobre la enseñanza de matemática en docentes de primaria de escuelas estatales. Rev. psicol. (Lima) [online]. 2008, vol.26, n.2, pp. 299-334. ISSN 0254-9247.

Ortiz, M. (2017). La formación y el trabajo docente en el Ecuador. Cuenca: Editorial Abya-Yala .

Ortiz, D. (2015). El constructivismo como teoría y método de enseñanza. Quito. Pontificia Universidad Católica del Ecuador

Ortiz, M. (2015). Currículo en acción de lenguaje y matemáticas en los primeros años de la Educación General Básica Ecuatoriana. Cuenca: Editorial Abya-Yala

Ortiz, M. (2017). La formación y el trabajo docente en el Ecuador. Cuenca: Editorial Abya-Yala .

Palmero, D. J. (2016). la importancia de las nuevas tecnologías en los procesos educativos. Revista Fuentes, 15.

Papalia, Diane, Wendkos, Sally, & Duskin, Ruth (2007). Desarrollo humano. México D.F.: McGraw-Hill Interamericana.

Parreño, C. M. T. (2019). El Constructivismo, según bases teóricas de César Coll. Revista

Pérez-Morales, M. I. (2014). Métodos alternativos o educación tradicional (Bachelor's thesis).

Pineda, W. B., Suárez, C. A. H., & Avendaño, W. R. (2020). Propuesta didáctica para el aprendizaje de la derivada con Derive. Praxis & Saber, 11(26), 9845.



- Pinto, M., Gomez-Camarero, C., & Fernández-Ramos, A. (2012). Los recursos educativos electrónicos: perspectivas y herramientas de evaluación. *Perspectivas em ciência da informação*, 17(3), 82-99. *Andina de Educación*, 2(1), 25-28.
- Ponce, J. (2000). *La educación básica en el Ecuador: Problemas y propuestas de solución*. SIISE. Quito, Ecuador.
- Prada, R., & Hernández, C. (2014). De la gráfica a la ecuación, la articulación de los dos registros. *Eco matemático*, 5(1), 49-59. <https://doi.org/10.22463/17948231.58>
- Santana Bonilla, P. J., Eirín Nemiña, R., & Marín Suelves, D. (2017). Análisis y evaluación de portales institucionales en España. Los casos de Canarias, Galicia y Valencia.
- Valverde, X. (2017). *evaluacion tradicional vs evaluacion alternativa*. *Torreon Universitario*, 8.
- Vélaez de Medrano, C. e Vaillant, D. (2011). *Ensinar desenvolvimento profissional e aprendizado*. Madri: Fundação Santillana /OEI.
- Waldegg, G. (1998). Principios constructivistas para la educación matemática. *Revista Ema*, 4(1), 15-31.
- Zambrano, J. C. (2017). Los recursos tecnológicos y sus influencias en el desempeño de los docentes. *Dominio de las Ciencias*, 219.