



UNIVERSIDAD DE CUENCA

Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación

Carrera de Matemáticas y Física

“Guía didáctica para la enseñanza de conceptos de derivadas”

Trabajo de titulación previo a la obtención
del Título de Licenciado en Ciencias de la
Educación en Matemáticas y Física

AUTORES:

Nugra Loja Katherine Vanessa

C.I: 0104747373

Correo electrónico: kate3enugra@outlook.com

Picón Barrera Edison Javier

C.I: 0104605563

Correo electrónico: edyjavier98@hotmail.com

TUTOR:

Ing. Fabián Eugenio Bravo Guerrero

CI: 0101654861

Cuenca, Ecuador
21 de mayo de 2021



RESUMEN

El presente trabajo de titulación expone el desarrollo de una guía didáctica para la enseñanza de conceptos de derivadas dirigida hacia los docentes de tercero de bachillerato. Ciertas investigaciones muestran que los docentes tienen carencias en la aplicación de estrategias constructivistas como: recursos didácticos y tecnológicos para el desarrollo de las clases sobre conceptos de derivadas. Es fundamental establecer qué recursos pueden ayudar al docente a mejorar su proceso de enseñanza en las aulas, para que los estudiantes puedan obtener conocimientos significativos. Para ello se aplicaron entrevistas a ciertos docentes del área de Matemáticas de tercero de bachillerato de la Unidad Educativa La Inmaculada, en donde sugieren que sería adecuado implementar actividades con recursos tecnológicos, ejercicios prácticos aplicados a la vida real que estimulen el proceso de aprendizaje del estudiante y que a la vez estos sean sencillos de usar para el docente. Por lo tanto, se elabora una Guía Didáctica que contiene como apoyo pedagógico y constructivista el uso de material concreto y recursos tecnológicos de fácil acceso como: videos, juegos virtuales, demostraciones y simulaciones en GeoGebra, que incentiven a los estudiantes a identificar, demostrar, comprender e interpretar en qué momento y cómo aplicar las derivadas en sucesos que se presentan en vida cotidiana.

Palabras clave: Guía didáctica. Estrategias constructivistas. Recursos didácticos. Recursos tecnológicos.



ABSTRACT

This degree work presents the development of a didactic guide for the teaching of concepts of derivatives directed towards teachers of third year of high school. Some research shows that teachers are lacking in the application of constructivist strategies such as: didactic and technological resources for the development of classes on concepts of derivatives. It is essential to establish which resources can help teachers to improve their teaching process in the classroom, so that students can obtain significant knowledge. For this purpose, interviews were conducted with certain teachers of Mathematics in the third year of high school at the La Inmaculada Educational Unit, where they suggest that it would be appropriate to implement activities with technological resources, practical exercises applied to real life that stimulate the student's learning process and that at the same time are easy to use for the teacher. Therefore, a didactic guide is elaborated that contains as pedagogical and constructivist support the use of concrete material and easily accessible technological resources such as: videos, virtual games, demonstrations and simulations in geogebra, which encourage students to identify, demonstrate, understand and interpret when and how to apply the derivatives in events that occur in everyday life.

Keywords: Didactic guide. Constructivist strategies. Didactic resources. Technological resources.



ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	3
CAPÍTULO 1: FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA.....	5
1.1. Constructivismo como nueva metodología en el Ecuador y las matemáticas	5
1.1.1. ¿Qué es el constructivismo?	5
1.1.2. Constructivismo en la educación ecuatoriana.	6
1.1.3. Constructivismo en las clases de matemáticas.	6
1.1.4. Rol del estudiante y docente en el constructivismo.....	7
1.1.5. Recursos y materiales constructivistas para la enseñanza de matemáticas.	7
1.2. Carencias de estrategias constructivistas en la enseñanza de conceptos de derivadas....	8
1.2.1. Prácticas del docente tradicional en matemáticas.....	9
1.2.2. Desinformación sobre técnicas, metodologías y recursos didácticos de enseñanza.	10
1.2.3. Recursos propuestos por el Ministerio de Educación del Ecuador.	10
1.2.4. Evaluación tradicional aplicada por el docente de matemáticas.	12
1.3. Recursos didácticos y tecnológicos para la enseñanza de conceptos de la derivada	12
1.3.1. Guía didáctica para la enseñanza de los conceptos de derivada.....	12
1.3.2. Material concreto educativo en la enseñanza de los conceptos de derivada	13
1.3.3. Las tecnologías de la información y la comunicación (TICs) en la enseñanza de las matemáticas	13
1.3.4. Contenido de la guía didáctica para la enseñanza de los conceptos de derivadas..	14
1.3.5. Temas de la guía didáctica.....	15
CAPÍTULO 2: METODOLOGÍA Y RESULTADOS	16
2.1. Metodología	16
2.2. Muestra.....	17
2.3. Resultados	17



CAPÍTULO 3: PROPUESTA.....	23
3.1. Esquema de la propuesta	23
3.2. Estructura de la propuesta	24
3.3. Guía para el docente	26
CONCLUSIONES	143
RECOMENDACIONES	144
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	145
ANEXOS	148



Cláusula de Propiedad Intelectual

Katherine Vanessa Nugra Loja, autora del trabajo de titulación "Guía didáctica para la enseñanza de conceptos de derivadas", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autora.

Cuenca, 21 de mayo de 2021

Katherine Vanessa Nugra Loja

C.I: 0104747373



Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio
Institucional

Katherine Vanessa Nugra Loja en calidad de autora y titular de los derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación "Guía didáctica para la enseñanza de conceptos de derivadas", de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, 21 de mayo de 2021

Katherine Vanessa Nugra Loja

C.I: 0104747373



Cláusula de Propiedad Intelectual

EDISSON JAVIER PICÓN BARRERA, autor del trabajo de titulación "Guía didáctica para la enseñanza de conceptos de derivadas", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor.

Cuenca, 21 de mayo de 2021

A handwritten signature in black ink, reading "Edison Javier Picón Barrera", written over a horizontal line.

EDISSON JAVIER PICÓN BARRERA

C.I: 0104605563



Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio
Institucional

EDISSON JAVIER PICÓN BARRERA en calidad de autor y titular de los derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación "Gua didáctica para la enseñanza de conceptos de derivadas", de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, 21 de mayo de 2021

EDISSON JAVIER PICÓN BARRERA

C.I. 0104605563



DEDICATORIA

Este trabajo de titulación se lo dedico a Diosito por guiarme y cuidarme en cada paso que doy, por la vida y salud que día a día me ha otorgado y por la fortaleza que me ha dado en cada momento de dificultad.

Con mucho amor a mis padres Raquel y Ángel, quienes se sacrificaron y esforzaron por darme una buena educación, ellos han sido mi inspiración de trabajo, esfuerzo, honestidad, solidaridad y constancia, así mismo han sabido brindarme sus consejos, paciencia y apoyo los cuales me han ayudado en cada etapa de mi vida.

A mi hermano pequeño Eric, que día a día me motiva a seguir creciendo personal y profesionalmente, pues me ha demostrado su apoyo incondicional en cada proyecto y siempre ha sido un pilar fundamental en mi vida.

A mis abuelitos Manuel y Conchita, que han sido un ejemplo de amor, perseverancia y esfuerzo en mi vida, sus consejos y sabiduría me han ayudado a ser una persona de buenos valores.

A mi abuelita Auxilio, que ha estado junto a mí en cada logro que he ido obteniendo, a mi abuelito Miguel, que desde el cielo sé que me cuida y está feliz por las metas que voy alcanzando.

A mis mascotas Luna, Polo, Panda y Chispa, que me han regalado su amor, compañía, me han robado sonrisas, y por siempre darme mucha paz y felicidad.

Sé que estas palabras no son suficientes para expresar mi gratitud, pero espero que, con ellas se de a entender mis sentimientos de aprecio y cariño a todos ellos.

Katy.



DEDICATORIA

Este trabajo de titulación lo dedico a Dios y mis padres por apoyarme y guiarme en las mejores decisiones para mi preparación profesional. A mi hermano por ser un ejemplo a seguir como profesional. A mi cuñada quién con sus consejos me ha ayudado a tomar decisiones. A mis sobrinos Isaac y Joaquín, mis sobrinas Ivanna y Sarahí, quienes han sido mi mayor inspiración para alcanzar una de mis metas.

También lo dedico a mis abuelitos quienes cuidaron de mí y brindaron compañía en un momento de ausencia de mis padres. A Cami, por el apoyo en la toma de decisiones para mi bienestar y mi futuro. Se lo dedico además a mis amigos y familiares quienes confiaron en mí y directa o indirectamente favorecieron en este proceso de educación profesional.

Edy.



AGRADECIMIENTO

Al concluir esta etapa en mi vida quiero desde lo más profundo de mi corazón dar las gracias a Dios, a mis padres, hermano, abuelitos, familiares cercanos como lejanos y mascotas quienes aportaron su granito de arena en estos cinco años de estudio, ya sea con risas, horas de trabajo, abrazos y consejos.

A mis amigos, en especial a mi compañero de tesis Edison Picón, por toda su amistad y compañerismo en nuestra vida tanto dentro como fuera de la universidad.

Finalmente quiero extender mis más sinceros agradecimientos a cada uno de los docentes de la carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca por sus enseñanzas y consejos, y en especial al Ing. Fabián Bravo por brindarnos su apoyo académico en el desarrollo de este proyecto.

Katy.



AGRADECIMIENTO

Agradezco primeramente a Dios y la Virgen por las bendiciones a lo largo de mi vida y el estudio de mi carrera profesional. A mi padre, por el apoyo incondicional en la educación, por enseñarme el valor de la responsabilidad y la constancia. A mi madre, por enseñarme que no hay que darse por vencido, por enseñarme que los éxitos se consiguen luchando. A mi hermano, por los consejos para ser un gran profesional y seguir con la preparación académica a futuro.

Agradezco también a la Universidad de Cuenca, que, por medio de sus docentes de la carrera de Matemáticas y Física, pude lograr uno de mis sueños, alcanzando resultados favorables en mi aprendizaje. A mi tutor, Ing. Fabián Bravo por la paciencia y el apoyo en el proceso de elaboración del trabajo de titulación.

Finalmente agradezco a mis amigos, en especial a mi compañera y amiga Katherine, por la colaboración a lo largo de nuestro paso por la universidad y el desarrollo de nuestro trabajo de titulación.

Edy.



INTRODUCCIÓN

El trabajo de titulación hace referencia a la elaboración de una guía didáctica para la enseñanza de conceptos de derivadas, la que se puede definir como un recurso en donde se refleja toda la planificación de la materia preparada por el docente, en la misma deben constar las características más relevantes para el desarrollo de los conceptos a enseñar.

La característica principal de esta guía didáctica es promover la metodología constructivista para la enseñanza de matemáticas, en especial el tema de derivadas. Dentro de la guía se encuentran estrategias didácticas como el uso de material concreto, el uso de recursos tecnológicos, gamificación, etc.

Una de las causas para la creación de la guía didáctica, responde a la problemática de la enseñanza de conceptos del tema de derivadas con estrategias tradicionales por parte de los docentes, mismas que colocan al profesor como sabedor exclusivo de la teoría; dejando así, al estudiante como un ser pasivo, el cual debe ser receptor de lo que dice y aplica el docente en sus clases. Estas clases tradicionales no favorecen la enseñanza ya que al colocar al docente como activo de la educación, no existe la participación adecuada por parte de los estudiantes, generando preguntas en ellos que por temor a equivocarse no socializan con los profesores.

La investigación de esta problemática, se realizó por el interés de conocer las prácticas tradicionales que se aplican día a día en la enseñanza del área de matemáticas; y, especialmente en el tema de derivadas. Permitiendo encontrar un desfase entre la parte ideal y la parte real de la aplicación de estrategias constructivistas.

Por otra parte, establecer factores que ralentizan el proceso de enseñanza constructivista; así como la preparación profesional del docente, conocimientos tecnológicos por parte de los maestros de matemáticas.

En el ámbito profesional, como preparación para ser docente, el interés se refleja principalmente en la aplicación del modelo constructivista para la enseñanza de matemáticas, además de conocer los beneficios y ventajas de la implementación de una guía didáctica con estrategias constructivistas como complemento de la metodología a desarrollar.

En el capítulo I se analiza el constructivismo como nueva metodología en el Ecuador y las matemáticas, se indaga también acerca de las carencias de estrategias constructivistas en la



enseñanza de conceptos de derivadas y finalmente sobre la implementación de guía didáctica para la enseñanza de conceptos de derivada.

El análisis de los tópicos mencionados, se realiza con planteamientos como: ¿Qué es el constructivismo? ¿Qué es una Guía Didáctica? Enunciaciones acerca de: constructivismo en la educación ecuatoriana, constructivismo en las clases de matemáticas, rol del estudiante y docente en el constructivismo, recursos y materiales constructivistas para la enseñanza de matemáticas, prácticas del docente tradicional en matemáticas, desinformación sobre técnicas, metodologías y recursos didácticos de enseñanza, recursos propuestos por el Ministerio de Educación del Ecuador, evaluación tradicional aplicada por el docente de matemáticas, estructura de una guía didáctica, elementos contenidos en una Guía Didáctica para la enseñanza de conceptos de las derivadas como: material concreto y recursos didácticos; y, finalmente temas de la guía didáctica para la enseñanza de conceptos de derivadas.

En el capítulo II se hace referencia a la investigación del estado actual de la preparación pedagógica, el uso de recursos didácticos, metodologías y métodos basados en el constructivismo que los docentes usan para impartir su clase de derivadas, consistente en entrevistas aplicadas a los docentes de tercero de bachillerato de la Unidad Educativa La Inmaculada.

En el capítulo III se evidencia el desarrollo de la propuesta de este trabajo de titulación que es la elaboración de una guía didáctica para la enseñanza de conceptos de derivadas con estrategias constructivistas como el uso de material concreto, recursos didácticos y tecnológicos.

En el marco de la educación, la investigación se realizó por medio de entrevistas a docentes de la Unidad Educativa La Inmaculada, mismos que están encargados en la enseñanza del tema de derivadas a estudiantes de tercero de bachillerato. Los docentes quienes fueron dos hombres y una mujer, al ser seleccionados intencionalmente entre todo el cuerpo docente de la institución, resultan ser una muestra no probabilística. Por lo tanto, este es el tipo de muestra que fue usada para ejecutar la investigación.

Durante la investigación de campo, uno de los obstáculos en la entrevista fue el corto tiempo de disponibilidad por parte de los docentes. Indicaron que tenían labores institucionales por cumplir.



CAPÍTULO 1: FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Al hablar sobre una Guía didáctica para la enseñanza de conceptos de derivadas, debemos tener claro que para llegar a ello, se tuvieron que analizar varios aspectos como: ¿en qué modelo educativo se basará?, ¿por qué aplicar ese modelo educativo?, la importancia del mismo en la educación ecuatoriana y el campo de las matemáticas, específicamente en el tema de derivadas, otros tópicos analizados son: ¿qué problema existe para que se haya tenido que desarrollar esta guía didáctica? y al final se encontrará redactado el contenido de la guía didáctica y cuál es la innovación de la misma.

1.1. Constructivismo como nueva metodología en el Ecuador y las matemáticas

1.1.1. ¿Qué es el constructivismo?

- El constructivismo es un paradigma educativo que tiene sus inicios en la teoría de Jean Piaget, según menciona (Edacom, 2019) la educación resulta de la interacción entre el estudiante, la materia y la realidad que conciben a raíz de dicha interacción. Un ejemplo de esto es cuando a un niño se le pide dibujar el patio de la escuela, su dibujo no es una representación del patio, sino más bien lo que sabe de él (realidad), pero conforme el niño vaya conociendo e interactuando con más cosas del patio, su pensamiento se ampliará. En un artículo Saldarriaga, Bravo y Loor (2016) afirman que en la teoría constructivista de Jean Piaget el conocimiento se produce como un proceso complicado de construcción por parte del sujeto en interacción con la realidad, no se trata del simple hecho de obtener respuestas, sino que lo verdaderamente importante es cómo se produce el aprendizaje.
- Por otro lado, el aporte principal de Ausubel en la teoría constructivista según (Burbano, 2017), fue promover el aprendizaje significativo en lugar del aprendizaje de memoria. Para el autor, el aprendizaje significativo es cuando el estudiante relaciona nuevos contenidos con los conocimientos anteriores, otro aporte suyo fueron los “organizadores anticipados” los mismos que funcionan como un sendero entre la nueva materia y el conocimiento previo del educando.

De forma general, Saldarriaga, Bravo y Loor (2016) expresan que el constructivismo concibe el conocimiento como autoconstrucción del sujeto, que se va produciendo día a día como resultado de la interacción de los factores cognitivos y sociales, enfatizando de igual manera que este proceso se realiza a cualquier hora y en cualquier entorno en los que el sujeto



interactúa. Además, indican que esta teoría constructivista comprende al ser humano capaz de procesar la información obtenida del entorno, interpretarla de acuerdo con lo que ya conoce convirtiéndola en un nuevo conocimiento, es decir que las experiencias previas del sujeto le permitan realizar nuevas construcciones mentales, dando como resultado el aumento de la práctica de su metodología en las instituciones educativas.

1.1.2. Constructivismo en la educación ecuatoriana.

El constructivismo en la educación ecuatoriana con el pasar del tiempo ha ido obteniendo mayor aceptación por parte de la comunidad educativa. En un artículo, haciendo una comparación Delgado, Vera, Cruz & Pico (2018), exponen que en la actualización curricular 2010, las metodologías predominantes eran las cognoscitiva y constructivista. Ya para el año 2016 en la reforma curricular de educación en el Ecuador la metodología adoptada era la pedagogía socio constructivista:

Ambos currículos se abordan desde la teoría constructivista, la cual guía a los estudiantes hacia el protagonismo de su actuar educativo pero con la ligera diferencia que en el currículo 2010 se promueve el desarrollo de educandos con habilidades creativas, analíticas, reflexivas, individualmente; mientras que, en el currículo 2016 se busca que los alumnos obtengan, desarrollen y potencien las mismas cualidades descritas, individual y colectivamente, haciendo énfasis en el trabajo colaborativo y cooperativo. Delgado et al. (2018)

1.1.3. Constructivismo en las clases de matemáticas.

Al analizar el paradigma constructivista y su acogida en el currículo de la educación ecuatoriana, se puede evidenciar este proceso de ajuste de metodología también por separado, como por ejemplo Bravo, Trelles y Barraqueta (2017), mencionan: “La clase de matemáticas está en un proceso de evolución, las clases tradicionales centradas en el profesor van perdiendo vigencia en la educación ecuatoriana, dando paso a clases que priorizan al estudiante y sus aprendizajes” (p. 1). Para Bravo, Trelles y Barraqueta (2017), una clase constructivista de matemáticas implicaría tener un estudiante con una visión diferente a su educación tradicional o conductista y debe estar motivado por alcanzar aprendizajes significativos; para esto, el educando debe ser capaz de investigar, analizar, reflexionar, plantear soluciones creativas, resolver situaciones del contexto, formado en valores y que aporte al crecimiento de la sociedad.



1.1.4. Rol del estudiante y docente en el constructivismo.

Con el fin de mantener al estudiante motivado, el constructivismo ofrece nuevas estrategias para el desarrollo de esta nueva era de información mediante las modernas tecnologías que han surgido en los últimos años (Hernández, 2008), donde los estudiantes no sólo tienen a su alcance el acceso a una gran cantidad de información ilimitada de manera instantánea para investigación, sino que también se les ofrece la posibilidad de controlar su propio aprendizaje, con diferentes oportunidades como: direcciones web para que el estudiante trabaje, videos cortos que aporten a lo que el docente enseña, softwares que podrían ayudar a las demostraciones de fórmulas, como es el caso de las derivadas y sus conceptos. En uno de sus artículos también Hernández (2007), enfatiza que los estudiantes tienen la oportunidad de ampliar su experiencia de aprendizaje significativo, al momento de utilizar las nuevas tecnologías mencionadas anteriormente como herramientas para su aprendizaje constructivista.

Según afirma Moreta A, Las Matas de Farfán R. D. (2011), las estrategias constructivistas constituyen un estilo de enseñanza favorable para elevar el nivel de competencia en los educandos, convirtiéndolas en experiencias transformadoras con énfasis diversos, inscritas en prácticas alternativas que presentan al estudiante con capacidad crítica, y espíritu de investigación. Al hablar del estilo de enseñanza favorable, en el modelo constructivista:

El profesor es mediador del aprendizaje en dos sentidos: en primer lugar, guiando y estructurando el aprendizaje de común acuerdo con el estudiante y, en segundo lugar, construyendo y ofreciendo al educando un material significativo que puede adoptar diversas formas (mapas conceptuales, esquemas y redes). Por tanto, la función esencial del profesor como mediador consiste en actuar de intermediario entre los contenidos de aprendizaje y la actividad constructiva que ponen en práctica los estudiantes para asimilarlos. (Lara, 1997, p. 37)

1.1.5. Recursos y materiales constructivistas para la enseñanza de matemáticas.

Para que el docente logre la enseñanza efectiva de las matemáticas, como mediador desde el enfoque constructivista, requiere entender qué saben los estudiantes y qué necesitan aprender. A partir de ello, hay que ayudarlos y apoyarlos para que logren una buena formación, de la mano de las tecnologías antes mencionadas; ya que, como expresa Castillo:



La tecnología resulta esencial en la enseñanza y el aprendizaje, ya que influye en las matemáticas que se enseñan y mejora el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Las tecnologías específicas como, por ejemplo, las electrónicas (calculadoras y computadoras) son herramientas muy útiles para enseñar, aprender y hacer matemáticas. De igual manera, ofrecen representaciones de instrucciones basadas en axiomas, teoremas y leyes matemáticas, facilitan la organización y análisis de los datos y permiten que se hagan cálculos de manera eficiente y exacta. (2008, p. 185)

El uso de las tecnologías de información y comunicación (TIC), ha generado entornos más didácticos para el estudiante, sin embargo, para el uso correcto de estas tecnologías, los docentes también deben adaptarse a estas herramientas interactivas, esto con el fin de promover modelos de educación más activos, críticos y autónomos (Hernández, Orrego y Quiñones, 2018). Además, señalan que el docente debe integrar a la tecnología como un recurso para la enseñanza y la obtención del aprendizaje del estudiante; y ello, lleva a la formación de un docente con un manejo reflexivo, constructivista y evaluador en la obtención de nuevos productos. No obstante, la expansión de las TIC en nuestra sociedad presenta una serie de limitaciones, como problemas técnicos, de seguridad y limitaciones económicas y culturales (Marín & Romero, 2009, como se citó en Hernández, Orrego y Quiñones, 2018); sin embargo, ello no debe ser limitante para que el docente siga acrecentando la búsqueda de nuevas alternativas de aprendizaje con recursos tecnológicos, recursos didácticos y material concreto.

1.2. Carencias de estrategias constructivistas en la enseñanza de conceptos de derivadas

Cuando se asocia el constructivismo con la educación, a menudo, se encuentra que el principal problema es que este enfoque se ha entendido como dejar en libertad a los estudiantes para que aprenden a su propio ritmo; lo cual, muchas veces, de forma implícita sostiene que el docente no se involucra en el proceso, sólo proporciona los insumos, luego deja que los estudiantes trabajen con el material propuesto y lleguen a sus conclusiones o lo que, algunos docentes denominan como construir el conocimiento (Ortiz, 2015). Asegura también que esta es una concepción errónea del constructivismo puesto que este enfoque, lo que plantea en realidad es que existe una interacción entre el docente y los estudiantes, un intercambio dialéctico entre los conocimientos del docente y los del estudiante, de tal forma que se pueda llegar a una síntesis productiva para ambos y, en consecuencia, que los contenidos son revisados para lograr un aprendizaje significativo.



Esta concepción errónea, posiblemente se da por la razón de que el docente no ha sido formado en áreas de educación o pedagogía; sino más bien, como mencionan Bravo, Trelles y Barrazueta (2017), tradicionalmente el docente de matemáticas ha tenido formación profesional en áreas técnicas como algún tipo de ingeniería; y, poca capacitación en aspectos pedagógicos como metodologías y estrategias para la enseñanza, que le den habilidades para llevar adelante una clase fundada en paradigmas constructivistas del aprendizaje, centrados en el estudiante y la calidad de sus aprendizajes. Estas carencias en la formación pedagógica finalmente impiden al docente dar todo su potencial, teniendo limitaciones en cuanto a planificación de sus clases, aplicación de métodos y técnicas de enseñanza, uso de recursos didácticos, aplicación de nuevas tecnologías, planificación de la evaluación y el dominio de otras variables presentes en el proceso formativo, dejando como consecuencia una educación tradicional.

1.2.1. Prácticas del docente tradicional en matemáticas.

En un artículo Bravo, Trelles y Barrazueta (2017), mencionan algunas actitudes tradicionales reflejadas en el manejo de la clase por parte del profesor de matemáticas:

- Explicación ineficiente de los temas, los estudiantes no entienden, ya que el docente lee poco, su léxico es limitado y no dispone de términos correctos para dar una explicación exacta.
- El profesor sabe poco o nada de los temas correspondientes al área de matemáticas con respecto a las últimas actualizaciones del currículo.
- No tiene formas alternativas para desarrollar el tema, solo conoce un camino: como a él le enseñaron.
- Cuando no domina un contenido, pasa por alto; o manda como tarea para que los estudiantes realicen el trabajo.
- Intenta descubrir nuevas formas de desarrollar la clase, en base a ensayo y error, exponiendo a sus estudiantes a estos experimentos, finalmente desarrolla alguna otra manera de trabajar un tema luego de mucho tiempo.
- Las estructuras y planificaciones de las clases no son adecuadas, por eso los logros formativos son parciales.



1.2.2. Desinformación sobre técnicas, metodologías y recursos didácticos de enseñanza.

De tal manera, los maestros al no tener la suficiente información sobre el uso y aplicaciones de técnicas, metodologías y recursos didácticos de enseñanza, no toman en cuenta que las capacidades y habilidades particulares de cada estudiante se pueden ver afectadas al usar la educación tradicional, según Ardila (2008) este sistema no permite que exista la posibilidad de una interrelación entre las asignaturas lo que permitiría una mejor enseñanza, entonces da por sentado que el alumno debe tener suficiente información en su mente, para aprender. De este modo el estudiante está orientado hacia el pizarrón y dirigido totalmente por el docente, sin posibilidad de hacer pausas hasta que llegue el receso, por lo que quedan muchas dudas sin resolver y el alumno no cuestiona o pregunta por temor a parecer poco inteligente ante sus compañeros, haciendo que el pensamiento de los estudiantes se vuelva poco original e independiente dejando de lado que la enseñanza sea un proceso enriquecedor y de crecimiento.

Si el docente tuviera un conocimiento claro sobre el uso y aplicación de las distintas técnicas de enseñanza, metodologías o recursos didácticos dentro del aula, esta educación constructivista funcionará de manera positiva en la enseñanza de los estudiantes, pero por la misma falta de información de estas técnicas es difícil poder aplicar todo esto, como menciona Ávila (2017), existen muchas técnicas para el aprendizaje, sin embargo, la mala aplicación de las mismas puede ocasionar varios errores que el docente puede ir encontrando al momento de planificar su clase, entre ellos que se necesita tiempo y conocimiento sobre las diferentes metodologías, en los alumnos se pueden generar la deshonestidad académica, la desigualdad de trabajo entre los estudiantes, si no presenta una buena motivación al iniciar la técnica de enseñanza el docente puede ocasionar aburrimiento y un bajo nivel de curiosidad en los educandos, Mata (2011).

1.2.3. Recursos propuestos por el Ministerio de Educación del Ecuador.

Aparte de los factores analizados anteriormente como tiempo y falta de conocimiento por parte del docente. Se deben analizar factores como los recursos con los que cuenta el docente; y es que, dentro de uno de los recursos didácticos que el Ministerio de Educación presenta son los textos; sin embargo, estos contienen demasiada información y es difícil que un docente, que está acostumbrado a trabajar con técnicas tradicionales, pueda adaptarse de manera inmediata a las técnicas educativas constructivistas (Bravo, 2020). Esta dificultad es aún más evidente



en el área de matemática, pues se presentan cantidades exageradas de contenidos o temas que se deben abordar, dejando de lado el paradigma constructivista y siguiendo en auge el modelo tradicionalista donde el docente aún desarrolla su clase con metodologías tradicionales, teniendo recelo de usar las tecnologías, que no compatibiliza con la propuesta del Ministerio de Educación (Bravo, 2020).

El antecedente que conlleva a tener unos textos con excesiva información, tiene que ver con la reforma del diseño curricular 2016 que como asegura Bravo (2020), en la práctica, el diseño curricular considera una cantidad excesiva de aprendizajes a ser logrados por el estudiante, por consiguiente el documento de ajuste curricular expuesto por el MINEDUC, categoriza a estos aprendizajes como básicos imprescindibles y básicos deseables, y a pesar de que los aprendizajes imprescindibles son obligatorios, los aprendizajes deseables dan la posibilidad a las instituciones educativas de decidir los temas a desarrollar en el aula de clase. El problema está que tanto las instituciones educativas como los docentes, intentan alcanzar todos los temas del currículo como el caso de conceptos de derivadas, puesto que estos temas constan en las evaluaciones de Ser Bachiller, la cual sirve como nota de graduación y para el ingreso a la universidad.

Los recursos recomendados por el MINEDUC expuestos anteriormente, al entrar en práctica produce un desfase (Bravo 2020), primeramente entre el currículo y el docente de matemática, puesto que el currículo de matemática se fundamenta en la perspectiva pragmático-constructivista, donde el estudiante obtiene una buena formación educativa mediante la resolución de problemas de la vida real; y por otra parte, debido a la presión que el docente tiene por cumplir todos los temas del currículo, sus clases se enfocan en un paradigma no constructivista, basada en el desarrollo teórico, la resolución de ejercicios numéricos y literales que no contienen una aplicación a la vida real, dejando al estudiante en un papel pasivo en la clase, y en consecuencia que el mismo no alcance aprendizajes profundos y significativos. Señala también que existe un desajuste en la relación entre el docente y el texto, ya que existen dificultades, cuando el docente decide desarrollar temas que son de su dominio y prefiere separar aquellos que no son su fortaleza, en ese caso el estudiante puede verse privado de aprendizajes importantes para su formación integral.



1.2.4. Evaluación tradicional aplicada por el docente de matemáticas.

El docente al estar expuesto a esa presión constante por cumplir con los temas contenidos en el currículo, no solo se quedaría aplicando las clases tradicionales sino también las evaluaciones tradicionales, generando un problema ya que como afirma Valverde (2017), las estrategias de enseñanza-aprendizaje han evolucionado últimamente en el sistema educativo, y por lo tanto los procesos de evaluación de los aprendizajes también deben transformarse para estar acorde con los procesos anteriormente mencionados. Asegura también que las evaluaciones tradicionales implican que se realicen a través de exámenes y pruebas escritas, con el fin de obtener un número que satisfaga tanto a padres de familia como docentes, al momento de asignar una cantidad para medir el conocimiento de sus hijos y estudiantes. Esto provoca que al no conseguir una buena calificación, el estudiante adquiera “ansiedad ante la evaluación, teniendo como variables mediadoras la motivación controlada por la nota y la desmotivación del estudiante hacia su aprendizaje” (Ferreira, 2017, p. 3).

1.3. Recursos didácticos y tecnológicos para la enseñanza de conceptos de la derivada

Un recurso didáctico es cualquier material que facilita al docente en su función, pues estos recursos le ayudan a explicarse mejor para que los conocimientos lleguen de una forma más clara al alumno. Algunos de estos materiales son: vídeos, libros, gráficos, imágenes, actividades, y cualquier elemento que pueda ayudar a la comprensión de una idea o tema (Luján, 2016). Los recursos didácticos y tecnológicos facilitan mejores conocimientos e información al estudiante, puesto que ayudan a la motivación e interés del mismo.

1.3.1. Guía didáctica para la enseñanza de los conceptos de derivada

La guía didáctica es un documento en donde se plasma toda la planificación de la asignatura en la cual debe constar: que se ofrece al estudiante, pasos a seguir de cómo introducir a la materia, que se será lo más relevante de la asignatura, los recursos didácticos que ayudarán al proceso de enseñanza y cómo aplicarlos, las orientaciones para el uso adecuado de la metodología que se aplique, las actividades de aprendizaje que se proponen, el tiempo que se emplea en cada actividad, resultados de aprendizaje (evaluación), etc (García, 2009).

El principal recursos didáctico para la enseñanza de las derivadas es la guía didáctica, puesto que en base al autor Jean Piaget y su teoría sobre la concepción del constructivismo, la creación



de la misma ayudaría a mejorar las dificultades encontradas en nuestra educación actual, siempre que el elemento principal sean los estudiantes, sin dejar de lado a los docentes, es decir, exista la interacción entre ambas partes y así poder lograr que el estudiante sea capaz de construir y mejorar su aprendizaje con los conceptos bases que le brinde el docente durante la clase (Hernández, 2008). Además, la guía didáctica no está basada únicamente en el modelo de Jean Piaget sino también de las perspectivas que propone el Ministerio de Educación del Ecuador (2016) mediante su currículo en donde fomenta el modelo constructivista haciendo principal autor al estudiante de su aprendizaje contando con el apoyo del docente como guía.

1.3.2. Material concreto educativo en la enseñanza de los conceptos de derivada

El material concreto educativo es todo instrumento o elemento que el docente puede usar dentro del aula de clases, con la finalidad de transmitir contenido educativo en donde los estudiantes exploren nuevas formas de aprender y a la misma vez divertirse. (WordPress, 2008). Dentro del campo de la enseñanza del concepto de la derivada, se puede implementar una montaña rusa, la misma que ayudará al docente en sus clases de derivadas y por otra parte, servirá enormemente al aprendizaje de los estudiantes, pues permite que relacionen este tema con la vida real.

1.3.3. Las tecnologías de la información y la comunicación (TICs) en la enseñanza de las matemáticas

Las experiencias de enseñanza de las tic's en el ámbito educativo han demostrado ser una alta motivación en el aprendizaje de los estudiantes comparada con los procesos tradicionales de enseñanza. En los últimos años las tics han tomado un espacio importante dentro del sistema educativo, siendo una práctica didáctica destinada a que los estudiantes aprendan a través de actividades realizadas con medios informáticos (Rivero & Mendoza, 2005). En matemáticas específicamente en el tema del concepto de derivadas el maestro puede usar algunas tics como: juegos virtuales, software, simulaciones en línea, proyecciones, etc.

1.3.3.1. Software en el uso del concepto de derivadas

Los softwares son programas de computadora con una estructura de datos, gráficos que comprenden un conjunto de recursos interactivos informáticos diseñados para ser usados en el ámbito educativo, de allí la necesidad que hay en cuanto a las tareas del docente en incentivar su uso, con el objeto de que el estudiante logre un aprendizaje



significativo (Fernández, Riveros & Montiel, 2017). Para el caso de la enseñanza de derivadas el software educativo: geogebra, es una herramienta digital muy buena en el desarrollo de las demostraciones de las derivadas para las diferentes funciones, donde el estudiante puede visualizar de mejor manera el concepto del mismo.

1.3.4. Contenido de la guía didáctica para la enseñanza de los conceptos de derivadas

Esta guía didáctica se divide en subtemas del concepto de derivadas, a estos subtemas se les denomina: clases. Hay un total de diez clases y cada una de ellas consta de:

- Destrezas a obtener por parte de los estudiantes.

Vargas (2015) afirma que las destrezas expresan el saber hacer, con una o más acciones que deben desarrollar los estudiantes, y así establecer una relación entre la clase teórica y las destrezas planteadas.

- Datos curiosos para compartir con los estudiantes y captar su atención hacia el tema de derivadas.
- El tiempo estimado de duración de la clase.
- Una anticipación y construcción detallada de cómo el docente debe proceder al inicio y durante la clase, en donde intervienen las tics y ejercicios de razonamiento.
- Tic's entre ellas: Juegos virtuales, videos, demostraciones y simulaciones en geogebra.
- Consolidación: evaluaciones prácticas, ejercicios aplicados a la vida real, solucionario y una rúbrica de calificación.

Para verificar los conocimientos adquiridos por los estudiantes, al final de cada clase Guamán (2013) expresa que la planificación de evaluaciones formales e informales, es decir, con valoraciones cualitativas y cuantitativas, son una excelente opción. De igual forma que las Tics se usan para la construcción de las clases, se pueden usar en las evaluaciones, según (Rodríguez, 2010, como se citó en Fernández, Riveros & Montiel, 2017) estas permiten la interactividad con los estudiantes, retroalimentándolos y evaluando lo aprendido. Entre una de estas tics se encuentran los juegos en línea, que captan la atención de los estudiantes al mismo tiempo que se divierten, mientras el maestro comprueba sus conocimientos.



En algunas clases aparte de tener lo antes mencionado, se hace uso del material concreto: una montaña rusa, para explicar de una manera más visual y real el concepto de derivadas, en estas mismas clases el docente encontrará la manera de usarlo. El uso de recursos didácticos como material concreto ayuda inmensamente a la comprensión de los alumnos, Guamán (2013) propone el uso de material concreto, donde indica que las matemáticas inician con una parte exploratoria en este caso con la manipulación de material concreto.

En otras clases, se aplica efusivamente el uso de un software matemático: geogebra para la simulación y demostración de la derivada de varias funciones, el maestro usará estas simulaciones para que el estudiante tenga una participación activa en sus conocimientos. Fernández, Riveros & Montiel (2017) mencionan que en un software las ideas no pueden ser gestionadas por sí solas, siempre debe haber alguien que lidere estas ideas como un proceso de enseñanza en este caso el docente y los estudiantes están como motores fundamentales para su proceso de aprendizaje.

1.3.5. Temas de la guía didáctica

Antes se mencionó que la guía didáctica cuenta con diez clases o subtemas del concepto de derivadas, las cuales se han dividido de la siguiente manera:

1. Pendiente de una función.
2. Límites de una función.
3. Fórmula de la derivada analítica y geométrica.
4. Derivada de una constante y un monomio.
5. Derivada de suma, resta, producto y cociente de funciones.
6. Regla de la cadena.
7. Derivada de funciones exponenciales.
8. Derivada de logaritmos.
9. Derivada de funciones trigonométricas.
10. Proyecto final.

La guía didáctica sobre los conceptos de la derivada será aplicable según lo estipula el currículo en su reforma 2016 hacia los docentes del tercer año de bachillerato general unificado, la misma que servirá de apoyo educativo al maestro en sus clases.



CAPÍTULO 2: METODOLOGÍA Y RESULTADOS

2.1. Metodología

Esta investigación tiene un enfoque cualitativo, dado por la aplicación de la técnica de la entrevista. El objetivo de esta investigación fue evaluar el estado actual de la preparación pedagógica, el uso de recursos didácticos, metodologías y métodos basados en el constructivismo que los docentes de matemáticas de la Unidad Educativa “La Inmaculada” usan para impartir su clase de derivadas.

En las entrevistas participaron tres personas: un docente de matemáticas que está a cargo del tercero de bachillerato general unificado, un docente que está a cargo de los segundos de bachillerato y el inspector general de la institución educativa, quien es docente de matemática y ha tenido experiencia en el tema de derivadas, ellos aceptaron participar en la investigación de forma libre y verbalmente voluntaria.

Se planificó realizar entrevistas semiestructuradas, el cuestionario fue sometido a verificación por parte de un docente experto, quien dio algunas recomendaciones, que permitieron realizar los ajustes necesarios que dieron fiabilidad al cuestionario. Los docentes fueron entrevistados por alrededor de una hora, quedando grabadas sus participaciones, al momento de la entrevista, el entrevistador tuvo el cuestionario como guía de orientación para llegar a los temas de interés que generen la información necesaria para obtener los mejores resultados y satisfacer el objetivo de esta investigación, diagnosticar el uso de metodologías y recursos didácticos, y a la vez poder mejorar en la propuesta. En la entrevista, mediante el cuestionario se realizaron preguntas donde se abordan temas relacionados con la aplicación del constructivismo como sugiere el MINEDUC, también se genera un conversatorio con los participantes en base a sus experiencias y la metodología para dar clase usando diferentes técnicas y recursos.

Como siguiente paso, las entrevistas fueron transcritas y a los participantes se les asignó nombres ficticios para proteger su identidad y garantizar la confidencialidad de la información proporcionada. Posteriormente a la información obtenida se aplicó la técnica de análisis de contenido, donde, luego de varias lecturas de las transcripciones y algunos ciclos de reflexión de la información proporcionada en las entrevistas, los temas fueron separados, generando así algunas categorías y subcategorías que permitieron realizar el análisis de la información.



2.2. Muestra

Los tres docentes entrevistados aceptaron participar de forma libre y voluntaria, y se les garantizó el anonimato en la información que proporcionaron. Algunas características que encontramos en los docentes corresponden a: la jornada de trabajo, título profesional y sexo. Con respecto a la jornada de trabajo, los tres docentes pertenecen a la jornada vespertina. En cuanto a los títulos profesionales, dos de ellos son Licenciados en Matemáticas y el tercero especializado en otra área con afinidad a la materia. Finalmente, la muestra para la entrevista fue establecida por dos hombres y una mujer.

2.3. Resultados

Los resultados de las entrevistas realizadas a tres docentes de matemáticas de la Unidad Educativa “La Inmaculada”, nos brindan extensa información capaz de dividir en categorías y subcategorías como se presenta en la tabla 1, para conocer el nivel de preparación pedagógica en cuanto al tema de derivadas. Véase ANEXO 1.

Tabla 1

Nivel de preparación pedagógica, el uso de recursos didácticos, metodologías y métodos que los docentes usan para impartir su clase de derivadas.

TEMA PRINCIPAL	CATEGORÍA	SUBCATEGORIA
Preparación pedagógica de docentes en el tema de derivadas.	Uso de recursos didácticos	-Material concreto
		-Recursos digitales
		-Guía didáctica
	Métodos	-Trabajos colaborativos
		-Trabajos individuales
		-Evaluación continua
	Estrategias Metodológicas	-Constructivismo sugerido por el MINEDUC
		-Factor tiempo en la implementación de nuevas metodologías
		-Método inductivo y deductivo



A continuación, se presentan los resultados de las entrevistas realizadas a los docentes de matemática en la Unidad Educativa “La Inmaculada”.

La experiencia de los docentes ha sido buena en general, con algunas excepciones al momento de entrar al tema de derivadas, por algunas dificultades que presentan los estudiantes.

[...]la desigualdad de conocimientos que tienen los jóvenes al momento de abordar este tema, pues antes se llevaba en un solo plano [...] entonces era mucho más fácil abordar un tema [...]pues se podía iniciar desde cero [...]. (Entrevista a Danilo)

Los maestros indican que hay un desfase significativo con respecto a temas previos que permitan iniciar la clase con normalidad

[...] un poco de desfase que los estudiantes tienen [...]. (Entrevista a Rodrigo)

Para iniciar su clase de derivadas cada docente tiene su orden o estructura que debe ser planificada con anterioridad, uno de los tres docentes entrevistados mencionó sobre los tres momentos esenciales de clase que son anticipación, construcción y consolidación, sin embargo, los tres coinciden en que la estructura que desarrolla cada docente va de acuerdo a sus métodos y metodologías que usan, considerando también el tiempo o periodos de clase asignado al tema.

[...]la estructura de mis clases, tienen los tres momentos que son: anticipación, construcción y consolidación[...], para ello hago uso de metodología activa basada en el constructivismo dependiendo del tiempo y los métodos que estoy utilizando. (Entrevista a Verónica)

La tecnología es uno de los recursos más usados para la clase de derivadas por parte de un docente, uno de ellos nos menciona que estos recursos ayudan al aprendizaje del estudiante.

[...]se me ha facilitado la cuestión audiovisual, me he valido del geogebra, usando animaciones para que vean qué es la derivada [...]. (Entrevista a Danilo)

Si bien es cierto la matemática es una materia teórico práctica, pero como afirman los docentes entrevistados existen varios métodos y metodologías, entre ellos el método inductivo, deductivo, etc. que se pueden usar al momento de enseñar la materia y más aún si nos centramos en el tema de derivadas en donde se pueden involucrar varias estrategias metodológicas.



[...]los métodos y metodologías usadas para enseñar matemáticas son varias, pero la que más utilizo es la del método inductivo - deductivo[...], pero creo que si buscamos más información se pueden aplicar más métodos. (Entrevista a Verónica)

De esta manera cada docente al tener ideas diferentes para desarrollar su clase con distintos métodos y recursos, obtienen resultados variantes que al final los tres docentes concluyen en lograr buenos resultados con los estudiantes, que se ven reflejados en evaluaciones y trabajos que se realizan en el momento de clase y a lo largo del tema.

[...]los resultados obtenidos aplicando la metodología, son buenos en el momento, por eso enfatizó en un avance memorístico en los estudiantes[...]. (Entrevista a Verónica)

En la entrevista, uno de los tres docentes ha logrado implementar un recurso didáctico, haciendo uso de material reciclable. Específicamente una cuerda de hilo para dar algunas curvaturas, permitiendo realizar tangentes y poder identificar los conceptos de derivadas trabajados anteriormente.

[...]manualmente he usado animaciones donde trato con el dibujo de ser muy explícito, [...] construimos maquetas en donde hacíamos en base a los ejes con ligas representamos cada una de las partes, [...] trabajamos con sogas en el patio, construyendo la curva[...] uno aprende haciendo [...] se les hacía como una bolita dentro de un cable que se desplace y vayan viendo porque cambia su valor, cuando se hace cero, etc. [...]. (Entrevista a Danilo)

Otros recursos didácticos que han usado los docentes son los tecnológicos, como simulaciones en geogebra e incluso un docente entrevistado mencionó que ha podido usar algunos otros recursos que están planteados para otras materias, pero adecuándolas para la matemática.

[...]alguna vez cuando conversaba con un compañero de otra materia, me comentaba acerca de programas para educación, que con el pasar del tiempo lo he podido conectar con las matemáticas[...], de ahí básicamente uso el geogebra para los gráficos, etc. (Entrevista a Verónica)

Por otra parte, uno de los recursos que más ha sido usado por los tres docentes entrevistados ha sido el uso de internet.



[...] uno de los recursos para mí es el internet y equipos informáticos que hay en el laboratorio de computación [...]. (Entrevista a Rodrigo)

Los docentes entrevistados están en total acuerdo con lo que propone el MINEDUC acerca del constructivismo, aseguran que es un modelo muy bueno si se lograra implementar a nivel nacional en la educación.

[...]me parece muy buena la idea, ya que esto ayuda a que los chicos creen su propio conocimiento aplicando sus propias estrategias [...] al momento de aplicar el constructivismo los estudiantes están enfocados a que los maestros deben estar ahí con ellos, entonces no se puede aplicar satisfactoriamente esta propuesta, por lo tanto, esto debería venir desde la escuela [...]. (Entrevista a Rodrigo)

Sin embargo, enfatizan en que es un modelo que no se puede aplicar netamente por algún tipo de desventaja que presentan las instituciones fiscales con respecto a las particulares.

[...] son ideas muy buenas, pero lamentablemente solo teóricas, [...] nuestras instituciones se ven totalmente en desventaja frente a una particular [...] no disponemos de un laboratorio [...]. (Entrevista a Danilo)

Además de los contenidos extensos, los docentes aseguran que el tiempo durante la clase para poder lograr culminar con éxito estos contenidos y aplicando el modelo constructivista que sugiere el MINEDUC, es muy corto, siendo este un factor negativo para la implementación de dicho modelo. Por ello los docentes participantes afirman que no se puede aplicar el modelo al menos en todos los temas contenidos en el currículo.

[...] una de las inconsistencias que tiene esta propuesta es el exceso de contenidos [...], permitiendo que el tiempo para desarrollar estos contenidos con esta metodología sea insuficiente. (Entrevista a Verónica)

Otro docente se ratifica en que no se alcanzan a desarrollar tantos temas, y el déficit se viene acumulando desde años anteriores.

[...] nos falta tiempo, espacio, material, conocimientos desde abajo (escuela) para poder abarcar todos los temas necesarios de derivadas [...]. (Entrevista a Rodrigo)

Una de las dificultades que coinciden los maestros, es que no todos los estudiantes tienen el mismo razonamiento y capacidad espacial para entender de manera satisfactoria el tema de



derivadas, provocando desigualdad en el avance de contenidos que están en cierta parte encadenadas con la información que presenta y necesita este tema.

[...] el concepto espacial los estudiantes no manejan y se nos hace un poco difícil enseñar las derivadas [...]. (Entrevista a Danilo)

Para realizar ejercicios o entender algunas demostraciones de la derivada es necesario que los estudiantes puedan tener un desarrollo visual y mental (razonamiento), y los docentes nos comentan que algunos estudiantes carecen de este.

[...]hay muchas fallas de razonamiento, de visualización, [...] la falta de visualización ha generado que los estudiantes tengan bastante conflicto al momento de desarrollar los ejercicios [...]. (Entrevista a Verónica)

La forma en la que los docentes evalúan el conocimiento de los estudiantes en cuanto al tema de derivadas, es realizando trabajos colaborativos y cooperativos, además de trabajos en clase y en casa, sin dejar de lado una evaluación continua por medio de lecciones y pruebas antes, durante y después de la revisión del tema.

[...]la evaluación que aplico con mis estudiantes es una evaluación continua, obviamente aplicando el refuerzo respectivo[...]. (Entrevista a Verónica)

Un docente entrevistado, asegura que la evaluación es importante para poder continuar con los contenidos y verificar que los conocimientos han sido adquiridos por los estudiantes.

[...] como siempre nosotros hacemos una evaluación [...] siempre trato de hacer una conclusión, necesito saber que ha pasado, que han aprendido [...]. (Entrevista a Rodrigo)

Una guía didáctica para el desarrollo del tema de derivadas sería indispensable, aseguran los docentes entrevistados, siempre y cuando la guía didáctica contenga herramientas tecnológicas, siendo estas innovadoras y que vayan de acorde a la época tecnológica que los estudiantes manejan, y que sirva de ayuda para el docente.

[...] el implementar una guía didáctica sería indispensable [...] la parte tecnológica que ustedes puedan ajustar al tema de derivadas, sería buenísimo[...]. (Entrevista a Danilo)



Además, que la información presentada en la guía sea práctica e interesante para el docente, que vaya más allá de lo clásico, que cuente con diversos recursos que se puedan usar dentro del aula con los estudiantes, asimismo que la guía no se encuentre solo de forma física.

[...] en una guía didáctica que sea interactiva, atractiva desde la portada, [...] y lo más importante que esta guía incluye recursos tecnológicos, sitios web y repositorio digital en donde yo pueda tener varios años la guía didáctica[...]. (Entrevista a Rodrigo)

Después de realizar las entrevistas, las respuestas brindadas por los docentes nos ayudan a responder los objetivos de la misma, en donde se planteaba analizar la preparación pedagógica de los docentes que por medio de la metodología usada en esta investigación los resultados fueron favorables, al momento que los docentes nos compartieron sus experiencias, fortalezas y debilidades que se presentan al momento de enseñar y aplicar la metodología constructivista, donde también hacen uso de un modelo inductivo y deductivo. Otro objetivo hace referencia al uso tanto de recursos didácticos como de metodologías y métodos que estén basados en el constructivismo, donde pudimos constatar que hasta el momento existen ciertas desventajas mencionadas por los docentes entre ellas la falta de tiempo, falta de material tecnológico y concreto dentro de la institución, el exceso de temas contenidos en el currículo, la falta de conocimientos previos de los estudiantes y su falta de razonamiento visual-espacial, que impiden que se puedan utilizar o aplicar recursos tecnológicos en las instituciones educativas ralentizando la inclusión de la metodología constructivista.



CAPÍTULO 3: PROPUESTA

3.1. Esquema de la propuesta

En este capítulo se presenta la elaboración de una guía didáctica denominada “Guía didáctica para la enseñanza de conceptos de derivadas”, dirigida a los docentes de tercer año de Bachillerato. Esta guía contiene diversas estrategias metodológicas para la enseñanza de congruencia y semejanza de triángulos, basadas en la teoría constructivista de Jean Piaget y David Ausubel.

La propuesta cuenta con el desarrollo de diez clases, en donde las dos primeras clases, son estrictamente temas de introducción a las derivadas, en la tercera se encuentra la explicación de la fórmula de la derivada analítica y geométrica, las seis siguientes, corresponden a las propiedades de derivadas en las diferentes funciones, finalmente, la última clase contiene varias opciones para evaluar los temas contenidos.

Cada una de las clases viene estructurada con los tres momentos: anticipación, construcción y consolidación. Además, las clases cuentan con recursos didácticos, tecnológicos, actividades para la casa, en clase, individuales, grupales, juegos, problemas de razonamiento, etc. que ayudan a la integración entre docente y estudiantes.

3.2. Estructura de la propuesta

Tabla 2

Guía didáctica para la enseñanza de conceptos de derivadas

Guía didáctica para la enseñanza de conceptos de derivadas			
Clases	Anticipación	Construcción	Consolidación
1. Pendiente de una función	-Video sobre el concepto de pendiente.	-Definición de pendiente. -Tipos de pendientes. - ¿Cómo encontrar el valor de la pendiente entre dos puntos? -Ejercicios de aplicación a la vida real.	-Resolución de ejercicios propuestos con aplicaciones reales acordes a la dificultad expuesta en la construcción.
2. Límites de una función	-Juego: tingo, tingo, tango y pregunta: ¿para qué sirve analizar el límite de una función en un punto dado?, con las respuestas se hace una lluvia de ideas. -Ejercicio de repaso, físico y virtual.	-Concepto, gráfica, importancia, simbología y ejemplos de límites. -Límite de una función lineal, de una función constante y de una función de la forma $f(x)=x$. -Ejemplos de ejercicios de contexto con límites.	-Ejercicios de contexto individuales, para clase o casa. -Juego grupal virtual (en línea), para realizar en clase. -Solucionario de la tarea. -Rúbrica de calificación.
3. Fórmula de la derivada analítica y geométrica	-Definición de límite. -Pendiente de una recta entre dos puntos. -Concepto de pendiente en una curva.	-Demostración analítica de la fórmula de la derivada, con uso de material concreto (montaña rusa). -Demostración geométrica de la fórmula de la derivada, con uso de geogebra. -Ejercicios de aplicación con el uso de geogebra. -Ejercicios de aplicación a la vida real.	-Ejercicios y preguntas de aplicación con nivel de dificultad similar a los ejercicios de construcción.



4. Derivada de una constante y un monomio	-Concepto, gráfica y pendiente de la función constante y de un monomio.	-Demostración de la derivada de una constante y monomio a partir de la fórmula de la derivada.	-Ejercicios sencillos y de contexto para realizarlos en clase y de manera individual.
	-Simulaciones de la pendiente de una constante y un monomio en geogebra.	-Videos sugeridos, para la demostración de las fórmulas. -Ejercicios sencillos para resolver y despejar dudas de los estudiantes. -Ejercicio de contexto.	-Solucionario de la tarea. -Rúbrica de calificación.
5. Derivada de suma, resta, producto y cociente de una función	-Conversatorio o lluvia de ideas acerca de conceptos previos para el desarrollo de la clase.	-Solución de ejercicios de demostración de las fórmulas, analizadas con graficas en geogebra.	-Aplicación de acertijos aplicados a la vida real, con casos correspondientes al tema de estudio.
	-Explicación de las fórmulas con ayuda de material audiovisual.	-Juego en línea recomendado por el docente para fortalecer los conocimientos en el estudiante. -Resolución de ejercicios con aplicaciones físicas reales.	
6. Regla de la cadena	-Video de sugerencia para el maestro sobre la demostración de la regla de la cadena.	-Respondemos la siguiente pregunta: ¿cuándo se da la regla de la cadena?	-Juego virtual en grupo, para resolverlo en clase.
	-Concepto de función compuesta, con ejemplo.	-Se presenta la fórmula de la regla de la cadena y cómo aplicarla. -Ejercicio para resolver con los estudiantes.	-Juego físico en grupo para resolverlo en clase. -Rúbrica de calificación.
7. Derivada de funciones exponenciales	-Concepto y gráfica de las funciones exponenciales.	-Fórmula de la derivada de una función exponencial con base (a) y con base (e).	-Ejercicios sencillos y de contexto para realizar en clase de forma individual.
	-Link de geogebra de la variación de la gráfica de una función exponencial según cambia su base.	-Simulación en geogebra de la derivada de una función exponencial.	-Solucionario de la tarea. -Rúbrica de calificación.



	-Características importantes de la función exponencial. -Simulación en geogebra de la pendiente de una función exponencial.	-Ejercicios sencillos y de contexto a resolver en clase, en conjunto con los estudiantes.	
8. Derivada de logaritmos	-Socialización de propiedades de los logaritmos con ayuda de geogebra. -Demostración de la derivada de un logaritmo natural, con ayuda de video y geogebra. -Demostración de la derivada de un logaritmo común, con ayuda de video y geogebra.	-Resolución de ejercicios de demostración de las fórmulas. -Resolución de ejercicios combinados para los ejercicios de aplicación.	-Aplicación de acertijos con ejercicios propuestos aplicados a la vida real.
9. Derivada de funciones trigonométricas	-Código QR, para un recordatorio de las funciones trigonométricas, mediante una simulación. -Ejercicio para recordar las funciones trigonométricas y sus gráficos.	-Fórmulas derivadas de las funciones trigonométricas. -Simulación en geogebra de las derivadas de cada una de las funciones trigonométricas. -Ejercicios sencillos y de contexto, para analizarlos con los estudiantes.	-Ejercicios sencillos y de contexto para realizar en clase o para la casa de manera individual. -Solucionario de la tarea. -Rúbrica de calificación.
10. Proyecto final	-Objetivo del proyecto.	-Indicaciones de las diferentes opciones que el docente tiene para poner en práctica. -Tres diferentes proyectos a elegir por el docente según conveniencia.	-Juego de consolidación de los temas revisados en la guía didáctica con ejercicios de similar nivel de complejidad.

3.3. Guía para el docente

CONCEPTOS DE LA DERIVADA

GUÍA DIDÁCTICA PARA EL DOCENTE



KATHERINE NUGRA LOJA
EDISSON PICÓN BARRERA

PRÓLOGO

El presente trabajo de titulación tiene como base el cálculo diferencial de las matemáticas, haciendo referencia a los conceptos iniciales de las derivadas con su demostración analítica y geométrica. Se ha elaborado una guía didáctica pensada para el docente, con las principales funciones de sugerir y exponer estrategias basadas en el modelo constructivista, resultando para el docente crear planificaciones flexibles para las clases, que permitan el desarrollo de la asignatura de una manera dinámica haciendo uso de material concreto y didáctico con la ayuda de la tecnología. Algo novedoso y fuera de lo tradicional.

CONCEPTOS DE LA DERIVADA



Universidad de
Cuenca

Facultad de filosofía,
letras y ciencias de la
educación

Carrera de
Matemáticas y Física

2021

GUÍA DIDÁCTICA PARA
EL DOCENTE

DIRECTOR:
Ing. Fabián Bravo

AUTORES:
Katherine Vanessa Nugra Loja
Edisson Javier Picón Barrera

PRESENTACIÓN

En base a la propuesta pedagógica de una educación constructivista que ofrece el Ministerio de Educación, a continuación, se presenta el desarrollo de una guía didáctica para la enseñanza de conceptos de derivadas, la misma que está dirigida a los docentes de Matemáticas de tercero de bachillerato.

La guía cuenta con el desarrollo de diez clases, en donde las dos primeras clases, son estrictamente temas de introducción a las derivadas, en la tercera se encuentra la explicación de la fórmula de la derivada analítica y geométrica, las seis siguientes, corresponden a las propiedades de derivadas en las diferentes funciones, finalmente, la última clase contiene varias opciones para evaluar los temas contenidos.

Cada una de las clases viene estructurada con los tres momentos: anticipación, construcción y consolidación. Además, las clases cuentan con recursos didácticos, tecnológicos, actividades para la casa, en clase, individuales, grupales, juegos, problemas de razonamiento, etc. que ayudan a la integración entre docente y estudiantes.

ÍNDICE

32 CLASE 1

Pendiente de una función

42 CLASE 2

Límites de una función

55 CLASE 3

Fórmula de la derivada analítica y geométrica

71 CLASE 4

Derivada de una constante y un monomio

81 CLASE 5

Derivada de suma, resta, producto y cociente de una función

93 CLASE 6

Regla de la cadena

100 CLASE 7

Derivada de funciones exponenciales

110 CLASE 8

Derivada de logaritmos

120 CLASE 9

Derivada de funciones trigonométricas

134 CLASE 10

Proyecto final

CLASE 1

PENDIENTE DE UNA FUNCIÓN



PENDIENTE



PENDIENTE

Destreza:

- El estudiante será capaz de determinar los tipos de pendientes y sus características.

40 min - 1 período.



Anticipación:



Presentar a los estudiantes el siguiente video: (Física - Video 11 - El concepto de pendiente.), como introducción a la pendiente.

LINK DEL VIDEO:

<https://www.youtube.com/watch?v=A6Vp18ctfWc>

NOTA: Todos los vídeos, links, juegos y simulaciones de geogebra se encontrarán dentro de un link de One Drive (pág. 139)

Pendiente de una función.

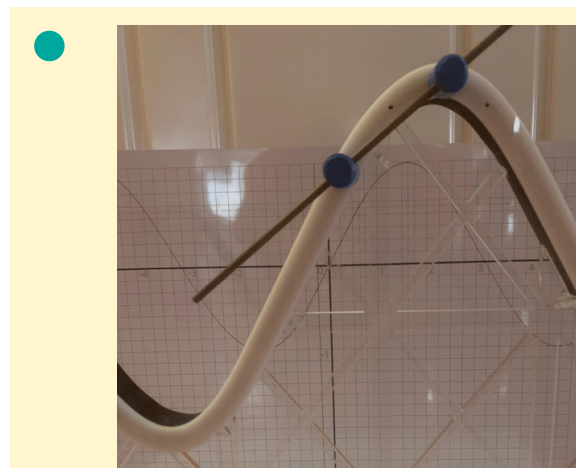
Para explicar el concepto de tangente y secante, vamos a usar una montaña rusa (material concreto) en donde se podrán visualizar las mismas:



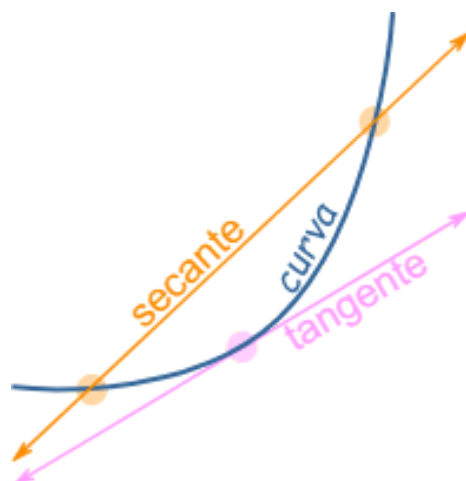
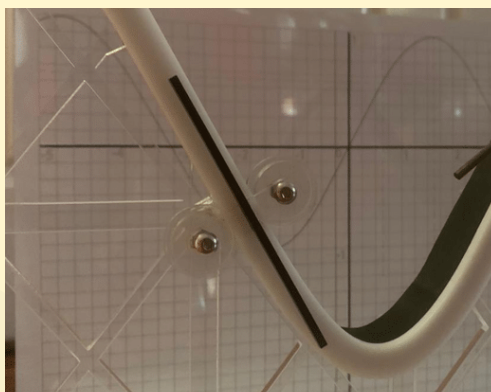
RECTA SECANTE

Es la recta que corta a una curva en dos o más puntos.

Conforme estos puntos se acercan y su distancia se reduce a cero, la recta que corta a la curva en un punto, adquiere el nombre de



RECTA TANGENTE



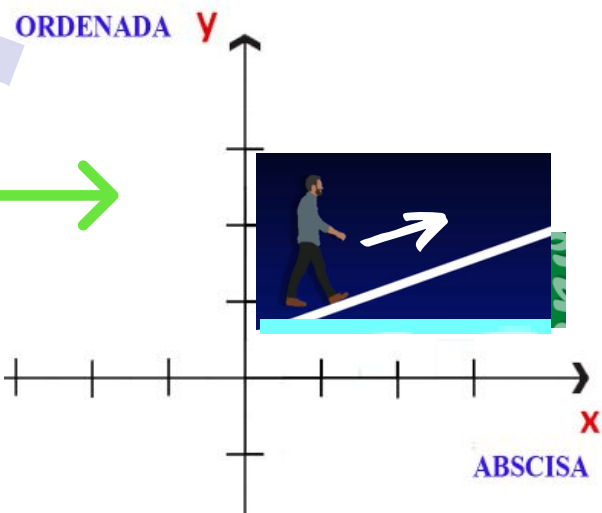
Pendiente de una función.

Construcción:

¿QUÉ ES LA PENDIENTE?

Es la medida de inclinación de una recta.

La inclinación de una recta depende del eje "x", o sea el movimiento del objeto de izquierda a derecha, y del eje "y", o sea la altura que avanza.

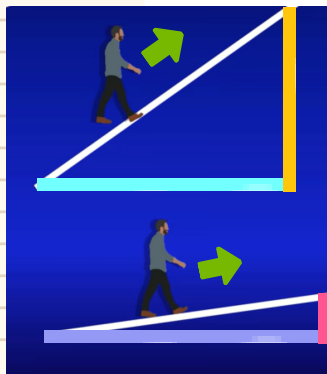


TIPOS DE PENDIENTE

PENDIENTE POSITIVA

Esto pasa cuando la altura aumenta conforme el objeto se mueve de izquierda a derecha.

Una pendiente se encuentra en la inclinación de un techo, de una carretera, o bien de una escalera apoyada en una pared.



PENDIENTE CERO

Se da cuando a pesar de movernos de izquierda a derecha la altura no cambia, entonces la inclinación será completamente horizontal.



Pendiente de una función.

PENDIENTE INFINITA

Ahora veremos que la inclinación será de 90° , o sea una línea completamente vertical.



Esta clase de pendiente se puede encontrar en las paredes de nuestras casas.

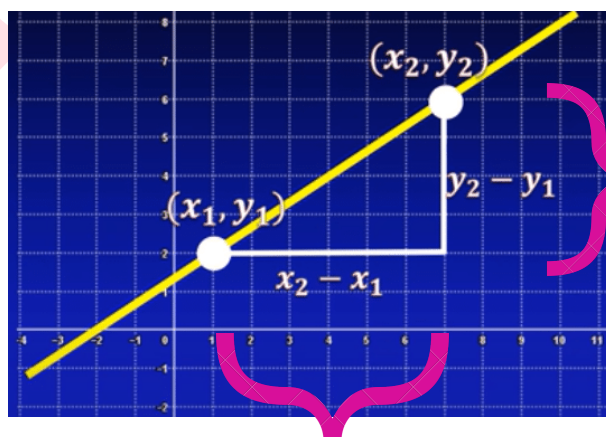
PENDIENTE NEGATIVA

Es lo contrario de la pendiente positiva, cuando la altura va disminuyendo conforme se avanza de izquierda a derecha.



¿Cómo se calcula la pendiente en una recta?

Para recordar el cálculo de la pendiente y su fórmula el docente puede usar la siguiente gráfica:



Distancia recorrida.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Altura

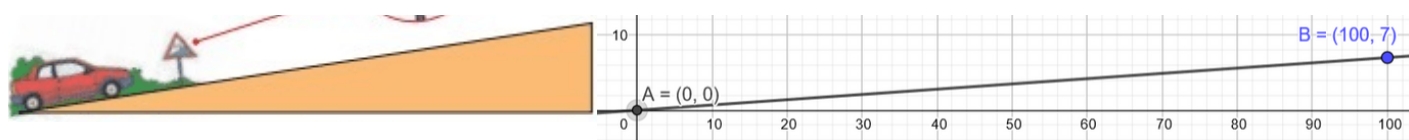
Según la teoría la pendiente es igual a la variación de la altura sobre la distancia recorrida.

Pendiente de una función.

Construcción:

A continuación se presentan algunos ejercicios aplicados a la realidad que el maestro puede usar para explicar, como encontrar la pendiente.

1) Un vehículo avanza una cuadra en subida, y ha alcanzado una altura de 7 metros con respecto a la posición inicial. Sabiendo que una cuadra tiene una longitud de 100 metros. Calcule el valor correspondiente a la pendiente de dicha avenida.



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Determinamos los dos puntos de referencia de la pendiente

$$m = \frac{7 - 0}{100 - 0}$$

Sustituimos valores en la fórmula

$$m = \frac{7}{100}$$

Relación: "por cada 100m que avanzo horizontalmente, he alcanzado una altura de 7m respecto a la horizontal"

$$m = 0,07$$

$$m = 7\%$$

La relación se puede expresar en porcentaje

Pendiente de una función.



Construcción:



2) Para construir el techado de una media agua, el arquitecto sugiere al obrero que la caída o pendiente del techo sea del 4%. ¿A que altura con respecto a la base del techo debe colocar el obrero la viga de soporte, sabiendo que la longitud de la base es de 10m?

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$0,04 = \frac{y_2 - 0}{10 - 0}$$

$$0,04 = \frac{y_2}{10}$$

$$y_2 = 10 * 0,04$$

$$y_2 = 0,40$$

Relacionamos los datos del problema con los de la fórmula para reemplazar.

El valor de la pendiente no puede ser expresado como porcentaje, por lo tanto hacemos división para 100.

Realizamos las operaciones necesarias y despejamos la variable que desconocemos el valor, para posteriormente poder determinar.

La viga de soporte se debe colocar a 0,40m o 40cm de la base del techado.

Pendiente de una función.

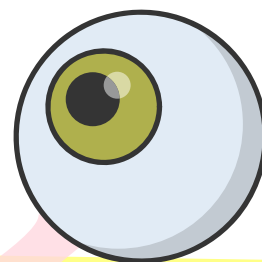
Construcción:

El maestro puede usar estas imágenes como algunos ejemplos de la pendiente que se pueden encontrar en la vida real.



Ojo

Para que no haya confusión, en matemáticas siempre se avanza de izquierda a derecha para analizar si se sube ($m+$) o se baja ($m-$).



El docente dejará planteado algunas gráficas de una función con una recta tangente, que se la conocerá como pendiente de la función en un punto dado.



Pendiente de una función.

Consolidación:

Para evaluar que los estudiantes tengan claro el concepto de pendiente, secante y tangente, el docente dejará como tarea planteado algunos ejercicios:

Objetivos de esta actividad:

- Verificar que los estudiantes tengan claro el concepto y aplicación de la pendiente, secante y tangente.

Instrucciones:

- .El docente enviará a realizar los ejercicios en casa, para la siguiente clase.
- La tarea será realizada de manera individual.

TAREA

1) Calcular el valor de la pendiente de una recta que pasa por los puntos;

a) A=(3;5) y B=(7;9)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{9 - 5}{7 - 3} = \frac{4}{4} = 1$$

b) A=(2;2) y B=(4;4)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{4 - 2}{4 - 2} = \frac{2}{2} = 1$$

2) Se tiene un triángulo de vértices A=(2;6), B=(7;12) Y C=(10;4). Hallar las pendientes de los 3 lados

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

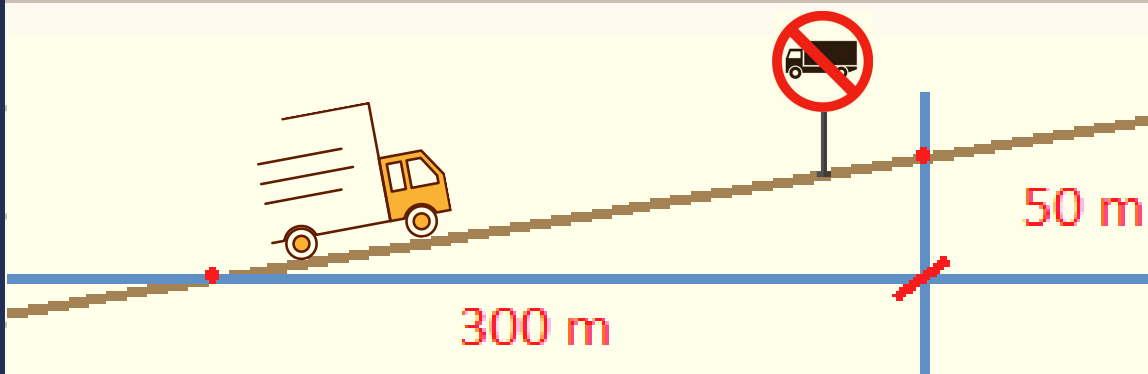
$$m_{AB} = \frac{12 - 6}{7 - 2} = \frac{6}{5}$$

$$m_{BC} = \frac{4 - 12}{10 - 7} = -\frac{8}{3}$$

$$m_{AC} = \frac{4 - 6}{10 - 2} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

Pendiente de una función.

3) Para abrir una carretera se realiza un estudio dónde indica que la diferencia de altura entre el punto inicial y final es de 50m además que la distancia horizontal entre los mismos es 300m. Los expertos sugieren que si la pendiente es mayor al 10% no se permita el ingreso a vehículos pesados. ¿Qué valor de pendiente tendrá esta carretera? Indique si se puede permitir o no el tránsito de vehículos pesados.



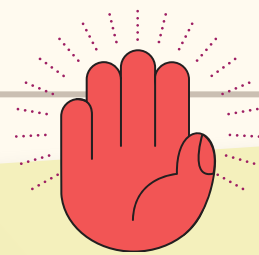
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{50 - 0}{300 - 0} = \frac{50}{300}$$

$$m = \frac{50}{300} = \frac{1}{6}$$

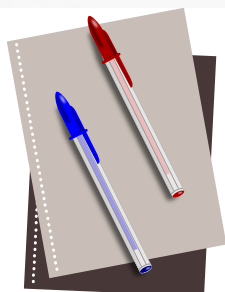
$$m = \frac{1}{6} = 0,16667$$

$$m = 0,16667 * 100 = 16.667\%$$



La pendiente al ser mayor a lo recomendado por los expertos. Se debe restringir la circulación de vehículos pesados.

Pendiente de una función.



Rúbrica de calificación:

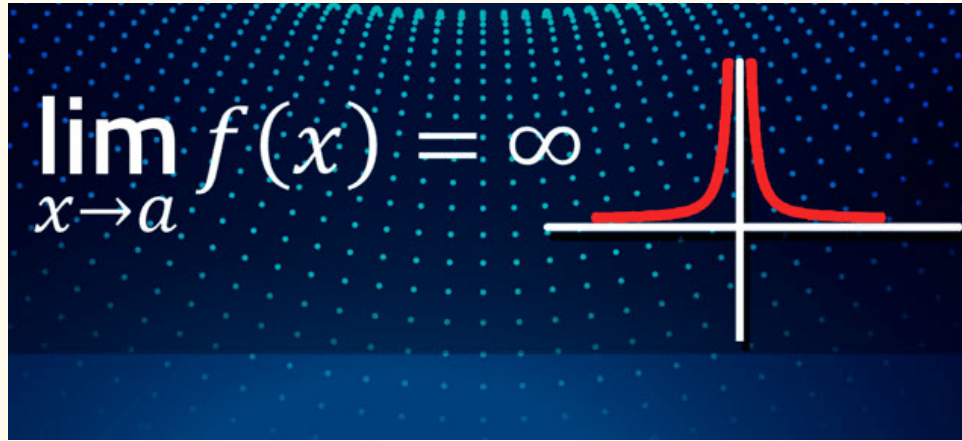


-En esta parte, se encuentra planteada la rúbrica de calificación para la actividad sugerida anteriormente.

	Excelente 4	Bien 3	Regular 2	Mal 1
Responsabilidad al realizar el acertijo y no dedicarse a otras actividades.				
Respetan el espacio y tiempo con sus compañeros.				
Aplica correctamente las fórmulas revisadas durante la clase.				
Existe un procedimiento previo antes de la respuesta.				
Las respuestas son correctas.				
La presentación del trabajo es ordenada y aseada.				
La escritura es clara y sin faltas ortográficas.				

CLASE 2

LÍMITES DE UNA FUNCIÓN



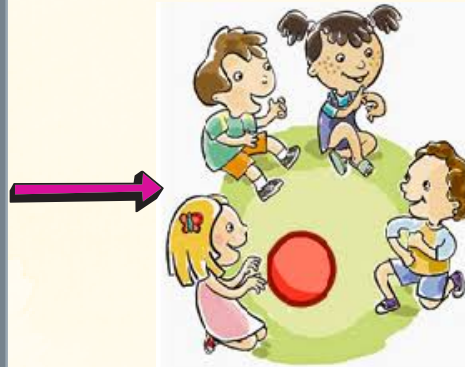
Destrezas:

- El estudiante será capaz de identificar la importancia de la resolución y las reglas de los límites en una función.

Anticipación:

Duración de la clase: 80 min

El maestro realizará un juego (TINGO, TINGO, TANGO): una pelota pequeña será pasada de mano en mano por los estudiantes y en el alumno que la pelota se detenga responderá la siguiente pregunta: **¿para qué sirve analizar el límite de una función en un punto dado?**



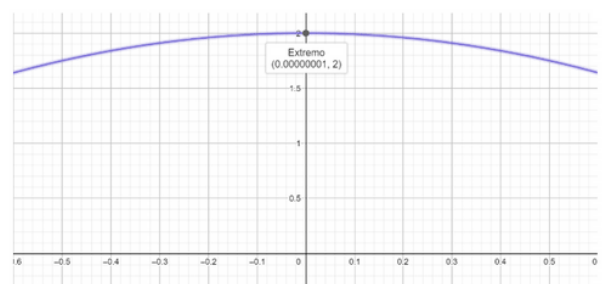
Esta pregunta, ayudará al maestro a generar una lluvia de ideas sobre los conceptos que los estudiantes tienen sobre límites.

Una vez, realizado la lluvia de ideas, el maestro procederá a realizar un ejercicio de límites para ir recordando con los alumnos la importancia de calcular el límite de una función.

$$f(x) = \frac{2x - x^3}{x}$$

x	y
-0.5	1.75
-0.1	1.99
-0.01	1.9999
-0.001	1.999999
a=0	INDE.
0.001	1.999999
0.01	1.9999
0.1	1.99
0.5	1.75

↓
L=2
↑

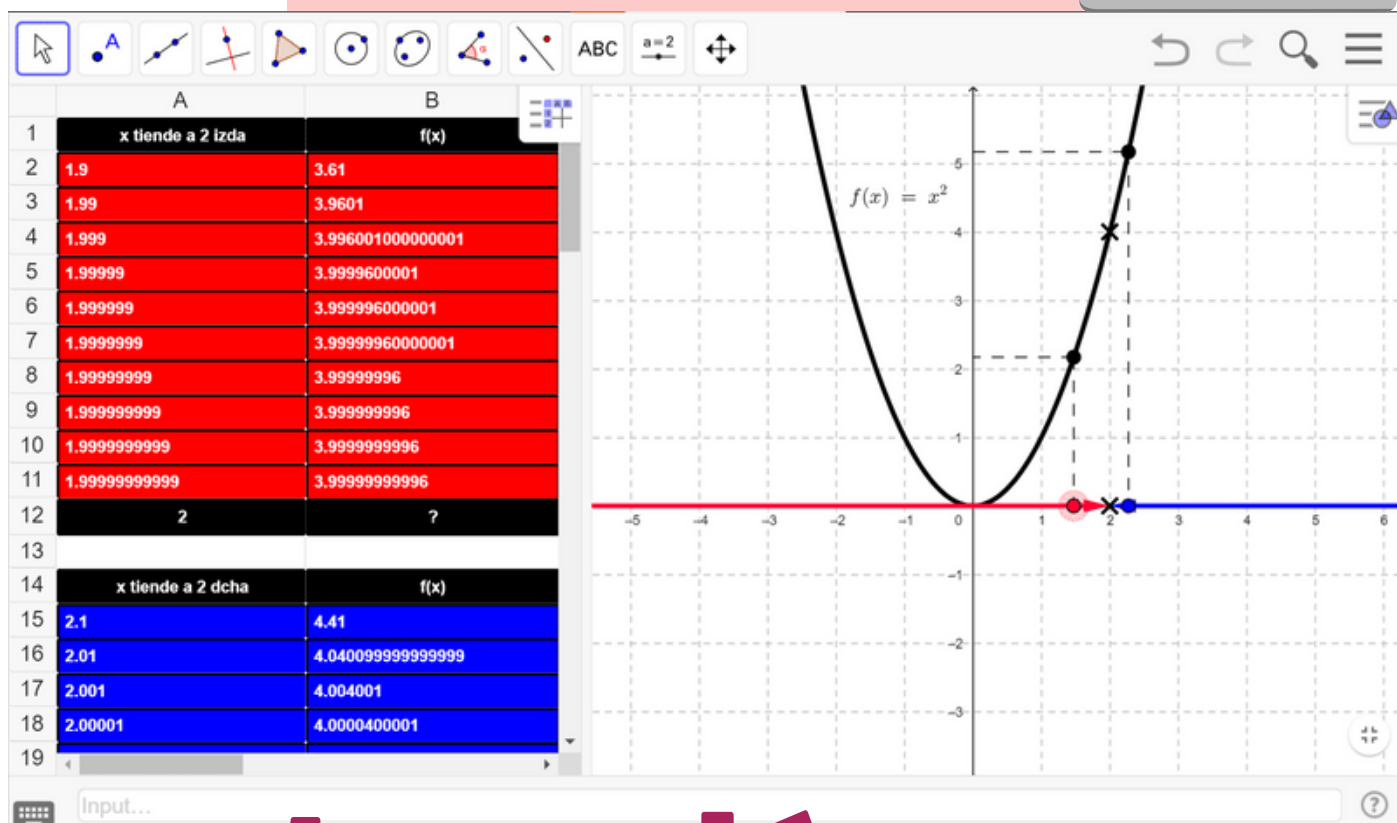


Límites de una función.

GeoGebra

En esta parte el maestro puede hacer uso de una simulación en geogebra para recordar el límite de una función:

<https://www.geogebra.org/m/XWWGS6ZK>



Construcción:



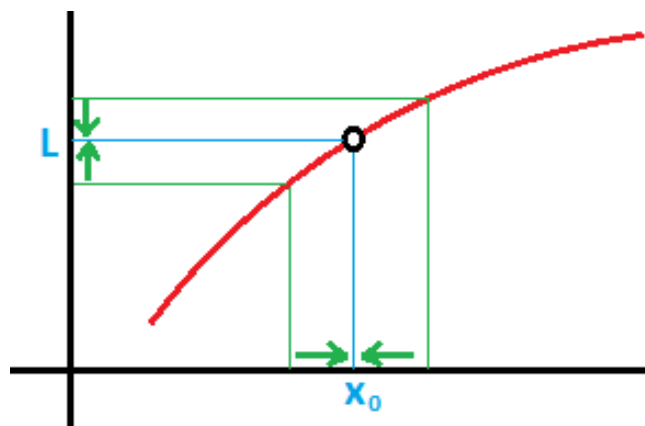
El maestro iniciará la clase recordando el concepto teórico y gráfico de los límites.



Concepto:

El límite (L) en un punto de la función $f(x)$ es el valor que se aproxima $f(x)$ cuando "x" tiende (significa que no llega) a un determinado punto.

Gráfica:



Límites de una función.



Aquí se muestran algunos ejemplos de la vida diaria en donde se aplican los límites:



Importancia:

- En finanzas nos ayuda a conocer el valor máximo o mínimo que puede adquirir el dinero en el mercado financiero en un determinado período.
- Nos ayuda a determinar cuándo se agotará un recurso, como por ejemplo el petróleo, según el consumo en un determinado período de tiempo.
- En el campo de la administración, nos ayuda a saber el nivel de producción y a encontrar el menor costo posible para generar una mayor ganancia.

Ahora RECORDAREMOS la forma de escribir un límite, y algunos ejemplos:

Simbología:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

Ejemplos:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{9 - x^2}{x + 3} = 6 \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{4 - 2x} = -1 \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -1$$

IMPORTANTE

Para que exista el límite de una función en un punto, tienen que existir los límites laterales en ese punto y coincidir.

Para calcular el límite de una función en un punto, no nos interesa lo que sucede en dicho punto sino a su alrededor.

Límites de una función.



Ahora, el docente realizará ejercicios sobre la equivalencia de funciones, para demostrar a los alumnos que una función compleja puede ser igual a otra, la cuál será un poco mas simple de resolver.

Calcule el límite de las siguientes funciones:

1. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{9x - x^2}{x + 3} = ?$

Se puede ver que al reemplazar el (-3) en el denominador, no es posible obtener un valor, entonces lo que se hace es tomar la función y descomponerla sin destruir su igualdad.

$$\frac{9x - x^2}{x + 3} = \frac{(3 - x)(3 + x)}{x + 3}$$

$$\frac{9x - x^2}{x + 3} = \frac{(3 - x)1}{1}$$

$$\frac{9x - x^2}{x + 3} = 3 - x$$

Pero no hay que olvidar la restricción inicial, en la que $x \neq -3$

Una vez obtenido una función equivalente y mas sencilla de resolver, calculamos el límite.

$$\lim_{x \rightarrow -3} (3 - x); x \neq -3 = 3 - (-3) = 3 + 3 = 6$$

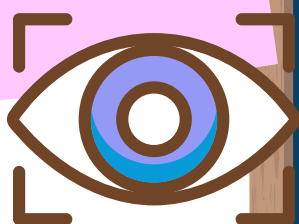
$$\lim_{x \rightarrow -3} (3 - x); x \neq -3 = 6$$



Se puede demostrar a los alumnos que esta es una de las maneras sencillas para calcular el límite de una función.

Límites de una función.

Aquí tenemos otro ejemplo para aplicar con los estudiantes.



$$2. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = ?$$

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} * \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}, x \neq 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2}, x \neq 4 = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2}, x \neq 4 = \frac{1}{4}$$



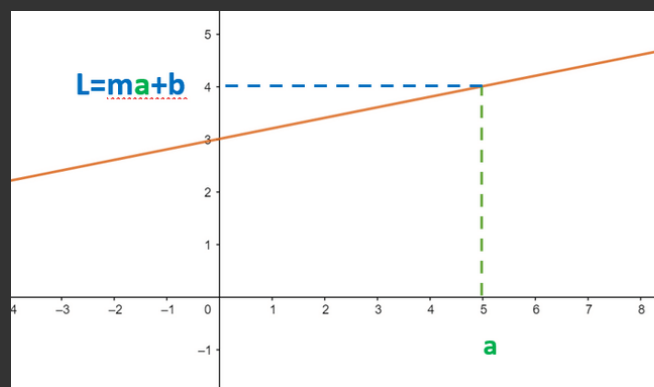
Ahora el maestro podrá recordar con los alumnos sobre el límite de una función lineal, constante y de la función $f(x)=x$.

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN LINEAL

$$f(x) = mx + b$$

$$\lim_{x \rightarrow a} mx + b = ma + b$$

Simplemente lo que se hace es reemplazar el valor de "a" en "x", y resolvemos el límite.



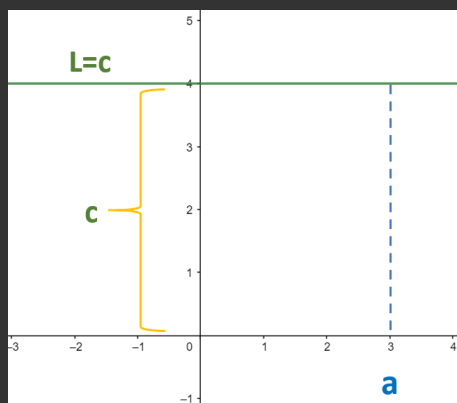
Límites de una función.



LÍMITE DE UNA FUNCIÓN CONSTANTE

$$f(x) = c \quad \lim_{x \rightarrow a} c = c$$

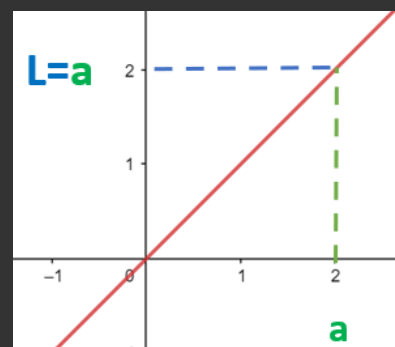
En este caso el límite sigue siendo el mismo porque al ser una función constante, cualquier valor que se de a "x", el resultado siempre será "c".



LÍMITE DE UNA FUNCIÓN $f(x)=x$

$$f(x) = x \quad \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

Para esta función el límite tomará el valor de "a" ya que los valores de "y" son iguales a los de "x".



A continuación se mostrarán algunos ejercicios de aplicación sobre límites, para que el maestro enseñe a sus alumnos el uso de los límites en ejercicios de la vida real:

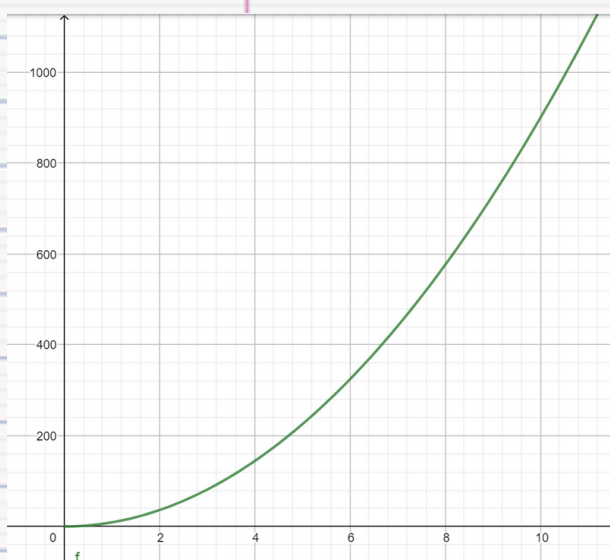
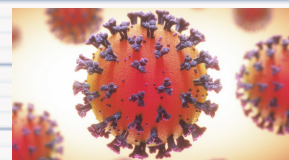
Límites de una función.



Estos ejercicios son de razonamiento, para que los estudiantes puedan relacionar los límites con la vida real.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. En un experimento se descubrió que los casos del virus Covid-19 crece cada día, y la función que representa este crecimiento está dada por:



$$f(x) = 9x^2, \quad x > 0$$

Donde "x" representa los días y f(x) son los casos del Covid-19.

La función de crecimiento es una función exponencial.

a) ¿Cuántos casos habrán un mes después de haber comenzado la pandemia?

Como me pide "un mes después", el límite es cuando x tiende a 30 días.

$$\lim_{x \rightarrow 30} f(x) = 9(30)^2$$
$$\lim_{x \rightarrow 30} f(x) = 8100 \text{ casos}$$

b) Ya después de 2 años de haber iniciado la pandemia, ¿Cuántos personas estarán contagiadas?

Al ser 2 años, x tiende a 730 días.

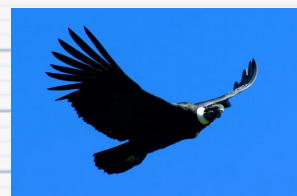
$$\lim_{x \rightarrow 730} f(x) = 9(730)^2$$
$$\lim_{x \rightarrow 730} f(x) = 4796100 \text{ casos}$$

Límites de una función.



EJERCICIOS DE APLICACIÓN

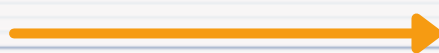
2. La Federación de caza del cóndor en Ecuador, para tratar de preservar esta especie ha introducido 50 cóndores en una determinada región. Se cree que el número de cóndores crecerá siguiendo el modelo:



$$C(t) = 2t + 1, \quad t > 0$$

donde t es el tiempo en años.

Está gráfica muestra el crecimiento de los cóndores al paso de los años.



- a) Calcule el número de animales que habrá luego de 5 y 10 años.

$$\lim_{x \rightarrow 5} C(t) = 2(5) + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} C(t) = 11 \text{ cóndores}$$

$$\lim_{x \rightarrow 10} C(t) = 2(10) + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 10} C(t) = 21 \text{ cóndores}$$



Ahora se verificará el aprendizaje alcanzado por parte de los estudiantes mediante ejercicios de aplicación y una lección virtual (si el maestro dispone de las suficientes herramientas).

Límites de una función.

Consolidación:



Objetivos de esta actividad:

-Comprobar que se tenga claro el tema de límites.

Instrucciones:

-Los tarea se realizará individual y será en clase o para la casa según le convenga al maestro.
-El juego se podrá realizar grupalmente.

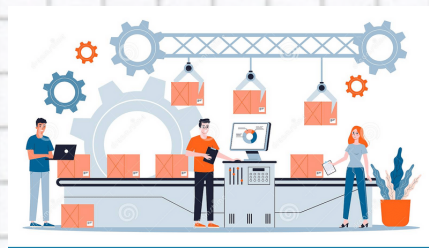
PROBLEMAS PARA RESOLVER

1. La siguiente función ha sido estudiada por ingenieros industriales, la cual describe el número de unidades terminadas para un empleado normal de acuerdo al número de horas de experiencia (t) que él tiene en su trabajo:

$$h(t) = 4t, t > 0$$

a) Determine el número de unidades de un empleado después de una semana (Lunes a Viernes), trabajando 8 horas diarias.

b) ¿Cuántas unidades puede terminar un empleado en un día, si trabajo 2 horas extra?



2. El Banco del Pichincha ha determinado que la siguiente función describe el porcentaje de cobranza por mes de sus tarjetas de crédito, después de concederlas:

$$P(t) = 3t^2, t > 0$$

Donde P es el porcentaje de cobranza en (t) meses después de otorgar la tarjeta.



Límites de una función.



a) ¿Qué porcentaje se espera cobrar luego de 2 y 5 meses?

b) Si transcurren 3 años después del otorgamiento de la tarjeta, ¿cuál será el porcentaje de cobranza?

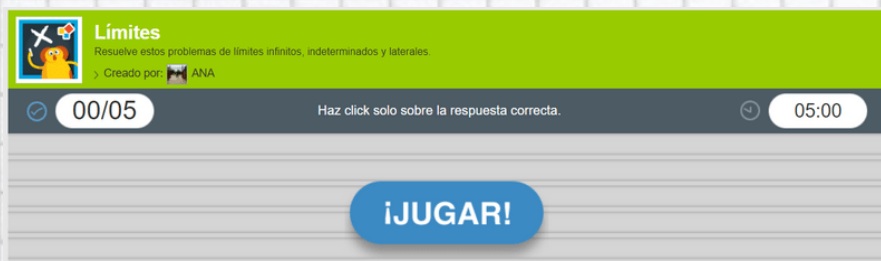


- 3. Para terminar se realizará un juego virtual, en donde hay ejercicios sencillos para que los estudiantes puedan divertirse mientras aprenden.

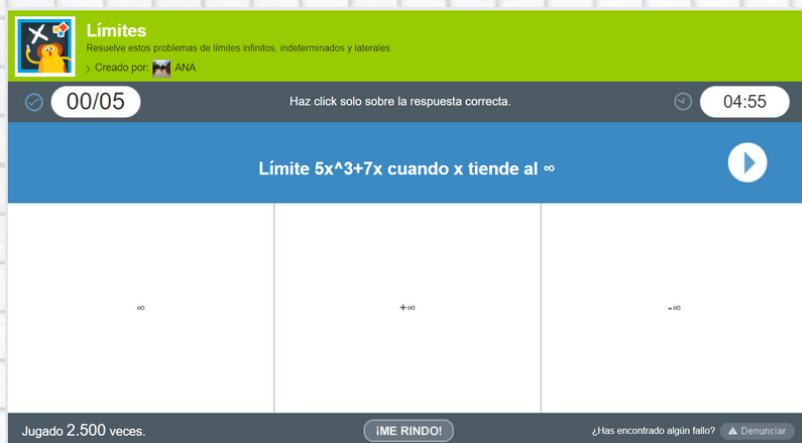
<https://www.cerebriti.com/juegos-de-matematicas/limites>



GAMIFICACIÓN



Son solo cinco ejercicios sencillos, en donde el maestro puede elegir la forma en que realizará este juego ya sea individual o grupal (recomendado).



Se recomienda hacer grupos de tres estudiantes máximo y el grupo que responda en menor tiempo será el acreedor a un puntaje extra.

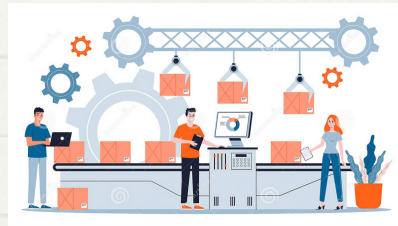
Límites de una función.

Solucionario:



PROBLEMAS PARA RESOLVER

1. La siguiente función ha sido estudiada por ingenieros industriales, la cual describe el número de unidades terminadas para un empleado normal de acuerdo al número de horas de experiencia (t) que él tiene en su trabajo:



$$h(t) = 4t, t > 0$$

a) Determine el número de unidades de un empleado después de una semana (Lunes a Viernes) trabajando 8 horas diarias.

Como dice "una semana, por 8 horas diarias", entonces calculamos las horas en una semana:
 $8 \cdot 5 = 40$ horas, por lo tanto, " t " tiende a 40.

$$\lim_{x \rightarrow 40} h(t) = 4(40)$$

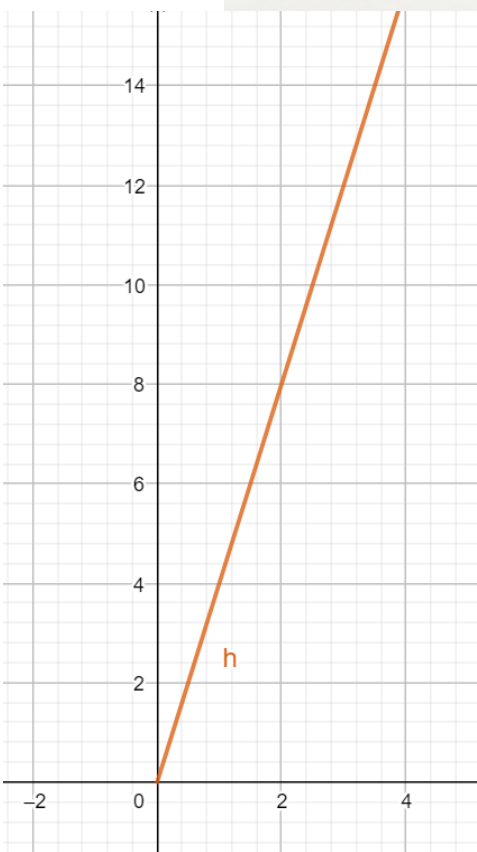
$$\lim_{x \rightarrow 40} h(t) = 160 \text{ unidades}$$

b) ¿Cuántas unidades puede terminar un empleado en un día, si trabajo 2 horas extra?

Un día son 8 horas de trabajo y mas 2 horas extra sería 10 horas, por lo tanto, " t " tiende a 10.

$$\lim_{x \rightarrow 10} h(t) = 4(10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 10} h(t) = 40 \text{ unidades}$$



Límites de una función.

2. El Banco del Pichincha ha determinado que la siguiente función describe el porcentaje de cobranza por mes de sus tarjetas de crédito, después de concederlas:

$$P(t) = 3t^2, \quad t > 0$$

Donde P es el porcentaje de cobranza en (t) meses después de otorgar la tarjeta.

a) ¿Qué porcentaje se espera cobrar luego de 2 y 5 meses?

Nos pide "el porcentaje de 2 y 5 meses", por lo tanto "t" tiende a 2 y 5.

$$\lim_{x \rightarrow 2} P(t) = 3(2)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} P(t) = 12\%$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} P(t) = 3(5)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} P(t) = 75\%$$

3. Respuestas del juego virtual:

Pregunta

Respuesta correcta

Límite $5x^3 + 7x$ cuando x tiende al ∞ :

∞

Límite de la [raíz cuadrada de x] - 1 ÷ x - 1 (cuando x tiende a 1) :

1÷2

Pregunta

Respuesta correcta

Límite de la [raíz cuadrada de x] - 2 ÷ x³ - 64 (cuando x tiende a 4) :

1÷192

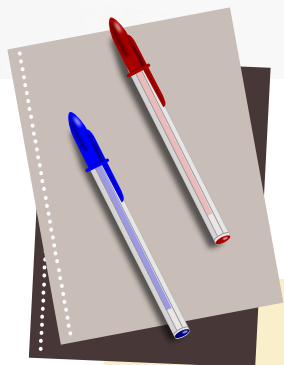
Límite 5 - x ÷ x - 2 cuando x tiende a 2+ :

+∞

Límite 5 - x ÷ x - 2 cuando x tiende a 2- :

-∞

Límites de una función.



Rúbrica de calificación:

-La siguiente tabla es una guía que el maestro puede usar para la revisión de la tarea planteada:

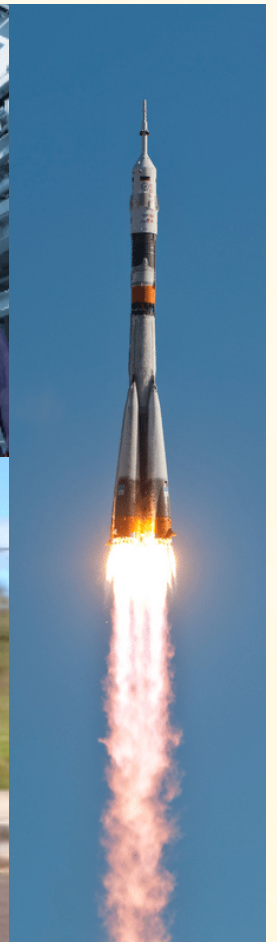


-Si el maestro desea, puede usar su propia rúbrica de calificación.

	Excelente 4	Bien 3	Regular 2	Mal 1
Entrega a tiempo la tarea.				
Aplica lo que se aprendió en clase.				
Los ejercicios tienen procedimiento.				
Las respuestas del ejercicio son correctas.				
La presentación del trabajo es ordenada y aseada.				
La escritura es clara y sin faltas ortográficas.				

CLASE 3

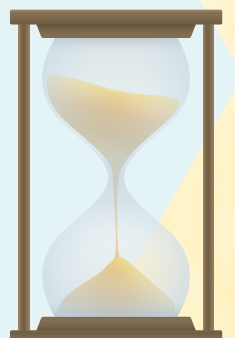
FÓRMULA DE LA DERIVADA, ANALÍTICA Y GEOMÉTRICA.



Destrezas:

- Interpretar de manera geométrica (pendiente de la secante) y física el cociente incremental (velocidad media) de funciones polinomiales de grado ≤ 4 , con apoyo de las TIC.
- Interpretar de manera geométrica y física la primera derivada (pendiente de la tangente, velocidad instantánea) de funciones polinomiales de grado ≤ 4 , con apoyo de las TIC.

80 min
2 períodos



Fórmula de la derivada, analítica y geométrica.

Anticipación:

1

LÍMITE:

El límite de una función en un punto es el valor al que se va aproximando la función cuando "x" tiende al valor del punto seleccionado.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = ?$$

¿SABÍAS QUÉ?

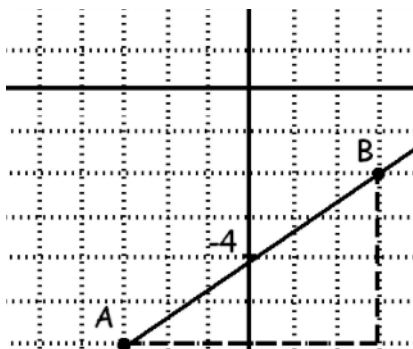
Las derivadas son usadas en la vida cotidiana en ámbitos como: administración, economía, ingeniería, en el ritmo de cambio de algún precio, en la física, en saber la aceleración de un móvil, etc.

2

PENDIENTE EN UNA RECTA:

Para hallar la pendiente de una recta mediante su representación gráfica, se señalan dos de sus puntos y se mide la variación de la x y la variación de la y al pasar de un punto al otro.

$$\text{pendiente} = m = \frac{\text{variación de } y}{\text{variación de } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

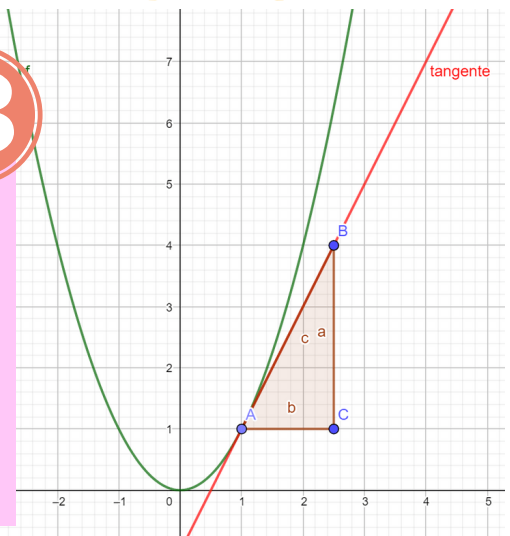


Antes de iniciar con la explicación de la derivada, el maestro recordará algunos conceptos que serán necesarios para esta clase:

3

PENDIENTE EN UNA CURVA

La pendiente de una curva en un punto es la inclinación que tiene la recta tangente a la curva en ese punto.



Fórmula de la derivada, analítica y geométrica.

Construcción:



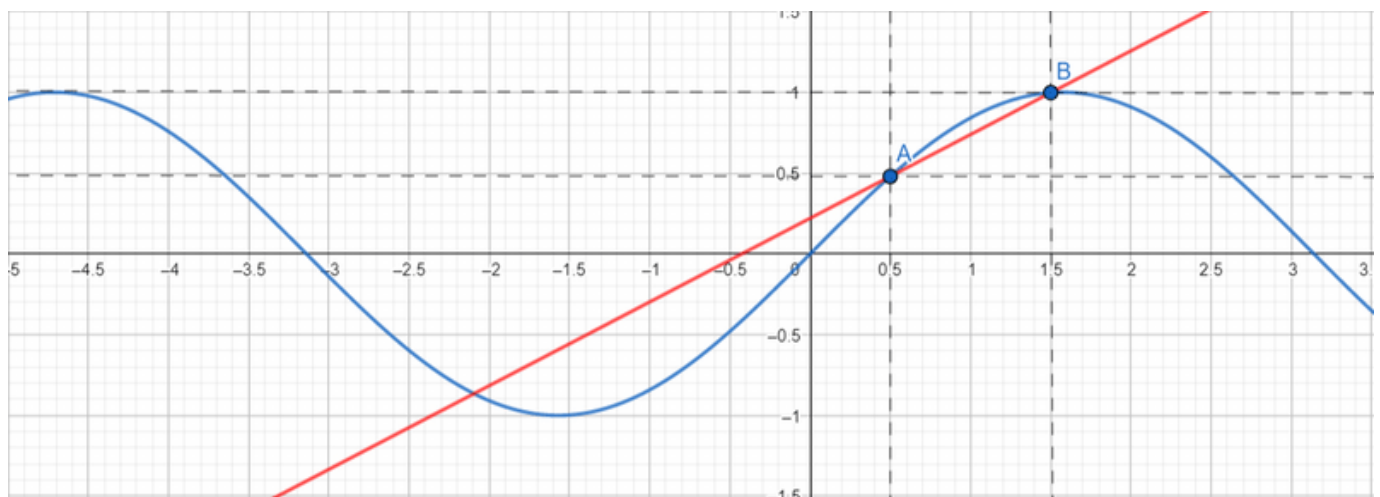
NOTA



Para la demostración de la fórmula del concepto de la derivada. Se ha elaborado material concreto que servirá de ayuda para que el docente puede hacer las respectivas demostraciones, al tiempo que va resolviendo preguntas generadas por los estudiantes.

Instrucciones:

El material concreto consta de un kit a escala de una montaña rusa, en dónde el docente encontrará adjunto un móvil. El mismo recorre una trayectoria mostrando la recta tangente en todos los puntos de la curva. Con ello, el docente tomando puntos de referencia en la función que describe la trayectoria del móvil, podrá obtener rectas secantes a la curva; para así, partir a determinar el concepto de la derivada y su fórmula mediante límites. Al mismo tiempo que, realiza la demostración y aplicación en la vida real del concepto de derivada.



Fórmula de la derivada, analítica y geométrica.



1

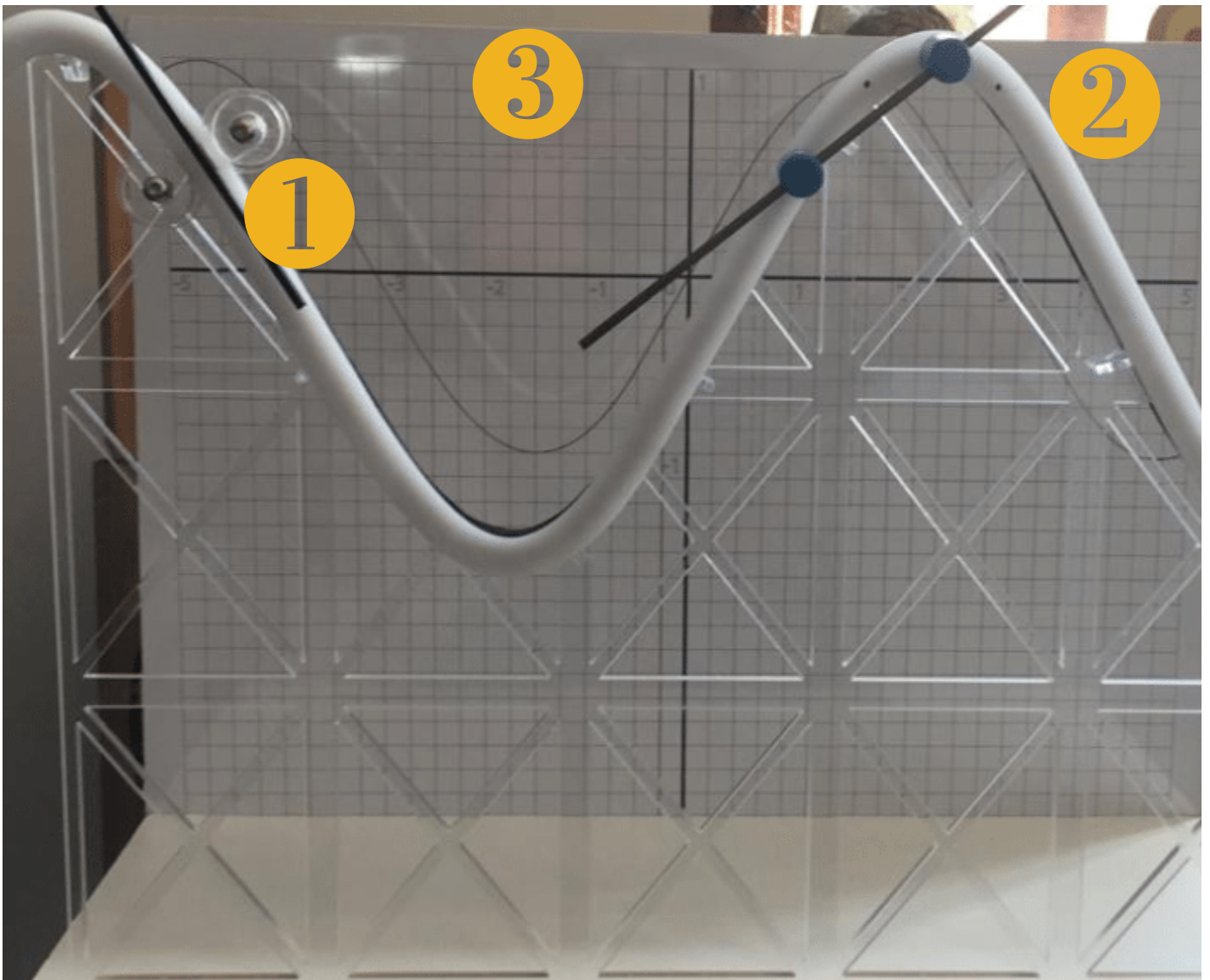
El docente puede deslizar el móvil para indicar los tipos de tangente existente en la función.

2

Esta parte servirá para que el docente indique lo que ocurre con la pendiente de la secante al momento que va acercando a la tangente.

3

El docente a la vez que va simulando en la montaña rusa el comportamiento de la tangente y secante, puede ir representando en la pizarra posterior: puntos de análisis, variación en los ejes, posición de puntos en el plano cartesiano.

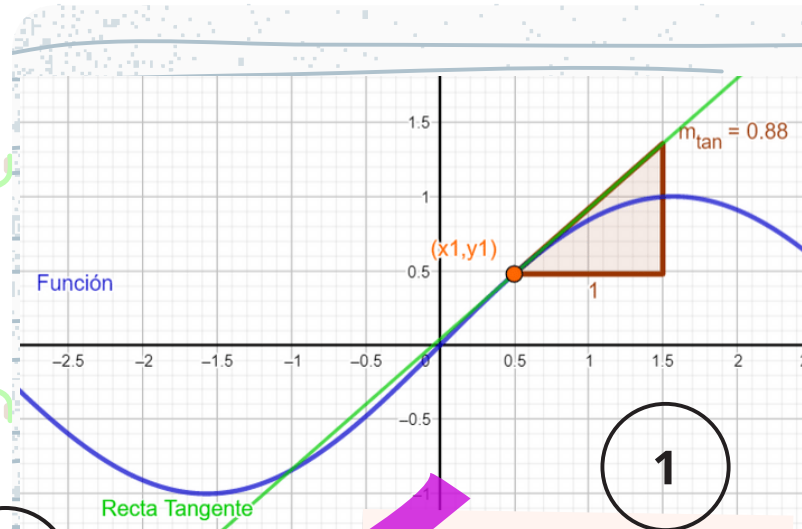


Fórmula de la derivada, analítica y geométrica.



Concepto

La derivada es el resultado de un límite y representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto.



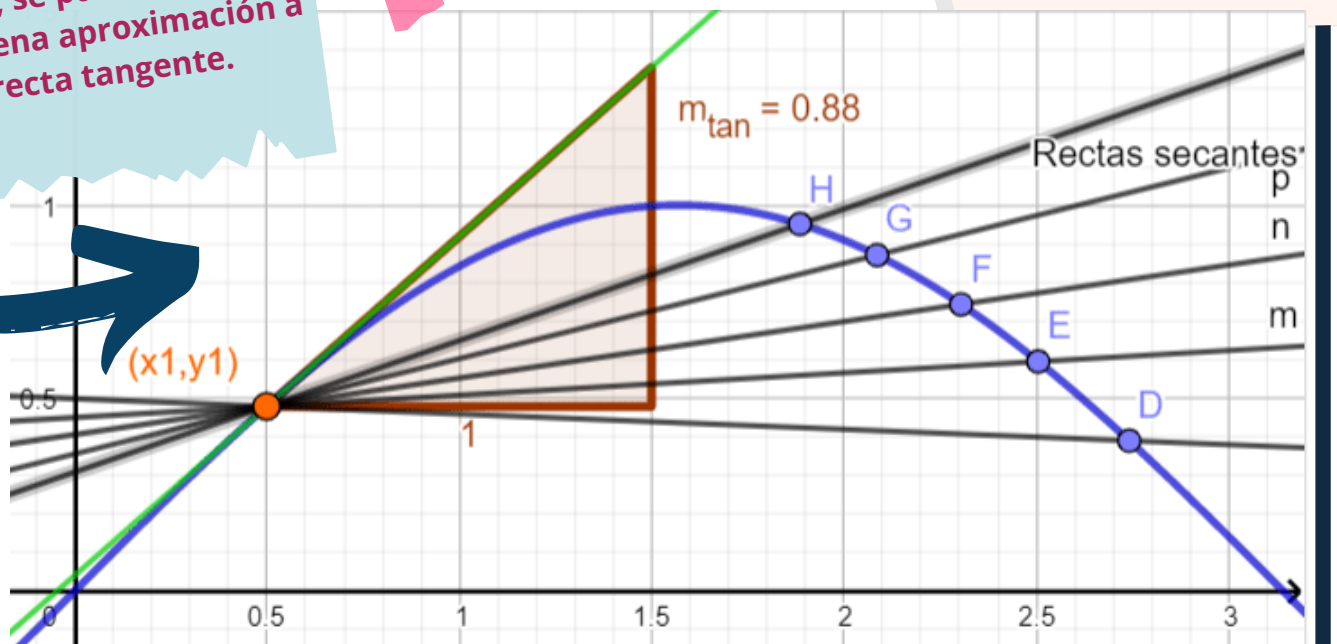
3

Por consiguiente al momento que trazamos varias rectas secantes, aproximándose al punto común, se puede obtener una buena aproximación a la recta tangente.

2

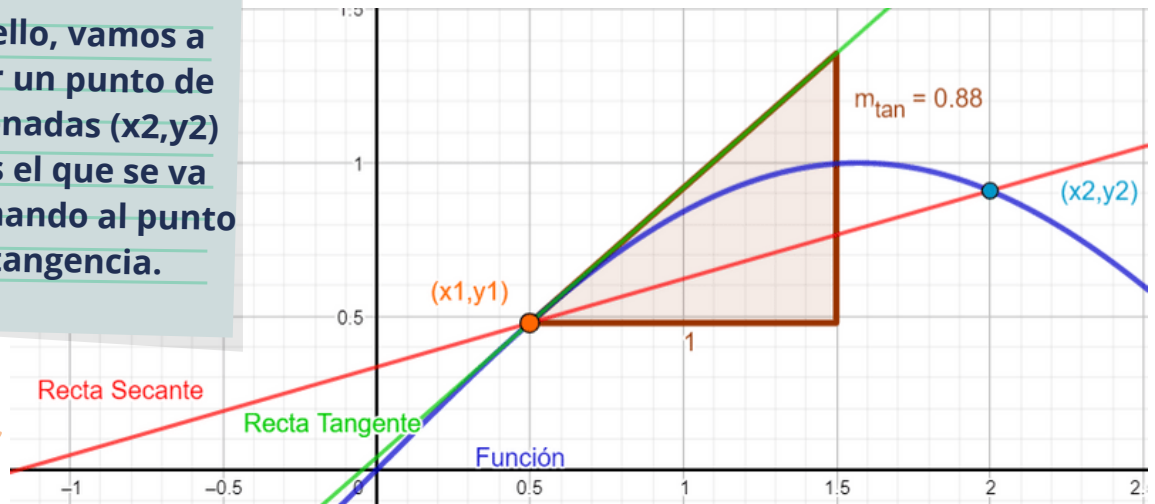
Se debe enfatizar en que la recta tangente y la función tienen un punto en común de coordenadas (x_1, y_1) .

El docente debe partir indicando que la forma en la que se demostró la fórmula de la derivada fue por medio de características de la recta. En este caso la pendiente.



Fórmula de la derivada, analítica y geométrica.

Para ello, vamos a definir un punto de coordenadas (x_2, y_2) que es el que se va aproximando al punto de tangencia.



- Una vez que definimos un segundo punto, podemos encontrar la pendiente de la recta secante, aplicando la fórmula de la pendiente entre dos puntos. Además este valor es el que debemos aproximar a la pendiente de la recta tangente.



Analíticamente:

$$m_{sec} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

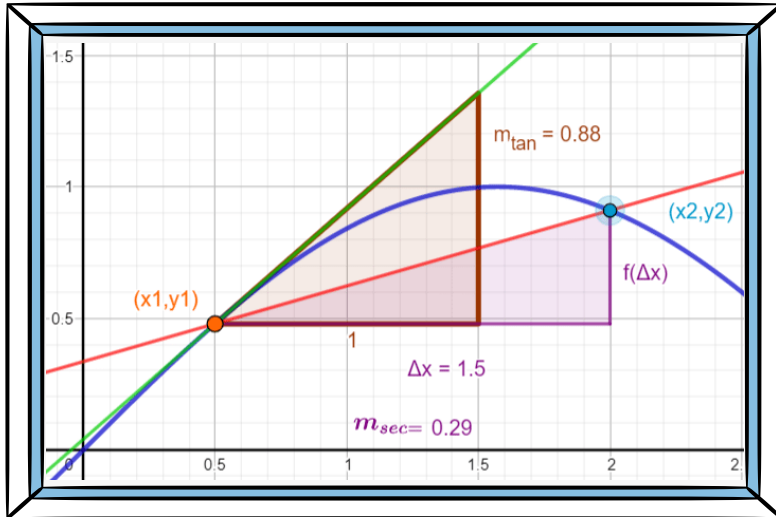
$$m_{tan} = \text{Aprox. } m_{sec}$$

$$m_{tan} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad y = f(x)$$

$$m_{tan} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Fórmula de la pendiente entre dos puntos.
- Iniciamos haciendo la aproximación de la pendiente de la recta secante.
- Tomando la parte de la tangente que nos interesa, se debe hacer la siguiente consideración con los valores de y .
- Quedando la siguiente expresión.

Fórmula de la derivada, analítica y geométrica.



- El triángulo bajo la recta secante nos ayuda a observar el comportamiento del incremento en el eje x , al momento que vamos acercando el punto 2 al punto 1, sin llegar a unirlos.

- El incremento en el eje x se puede representar así:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

- Reemplazando en la fórmula de la pendiente para la tangente obtenemos:

$$m_{tan} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$$

- También, podemos observar que el incremento en el eje x , al momento de acercar el punto 2 al punto 1, este tiende a 0:

$$\Delta x \rightarrow 0$$

- Por lo tanto es correcto aplicar el concepto de límites, obteniendo la siguiente expresión:

$$m_{tan} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$$

- Con el fin de expresar la fórmula en función de una sola variable, consideramos lo siguiente:

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

- De esta manera queda demostrada la fórmula del concepto de la derivada:

$$m_{tan} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

- Sin embargo la derivada se puede representar de otras maneras como se indica a continuación:

Newton

$$y \rightarrow \dot{y} = y'$$

Leibniz

$$\frac{dy}{dx}$$

Fórmula de la derivada, analítica y geométrica.



Geométricamente:

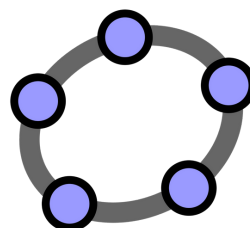
- El docente puede demostrar el análisis anterior de manera geométrica, es decir por medio de una gráfica dónde se pueda apreciar los comportamientos de los factores que inciden en el proceso.



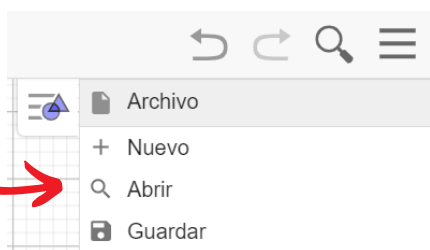
Para ello, el docente cuenta con recursos tecnológicos que le ayudarán a efectuar la demostración geométrica. Estos recursos se encuentran disponibles en la carpeta de **OneDrive**. Dentro de la carpeta **CLASE 3**, vamos a encontrar un archivo denominado **Demostración de la fórmula de la derivada**.

IMPORTANTE

Este recurso requiere la instalación del programa Geogebra Clásico, en sus versiones 5 o 6.



1



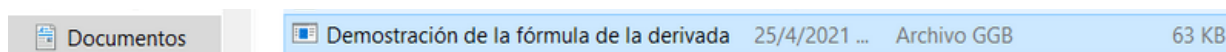
Dar click en **Abrir** para buscar el archivo.

2



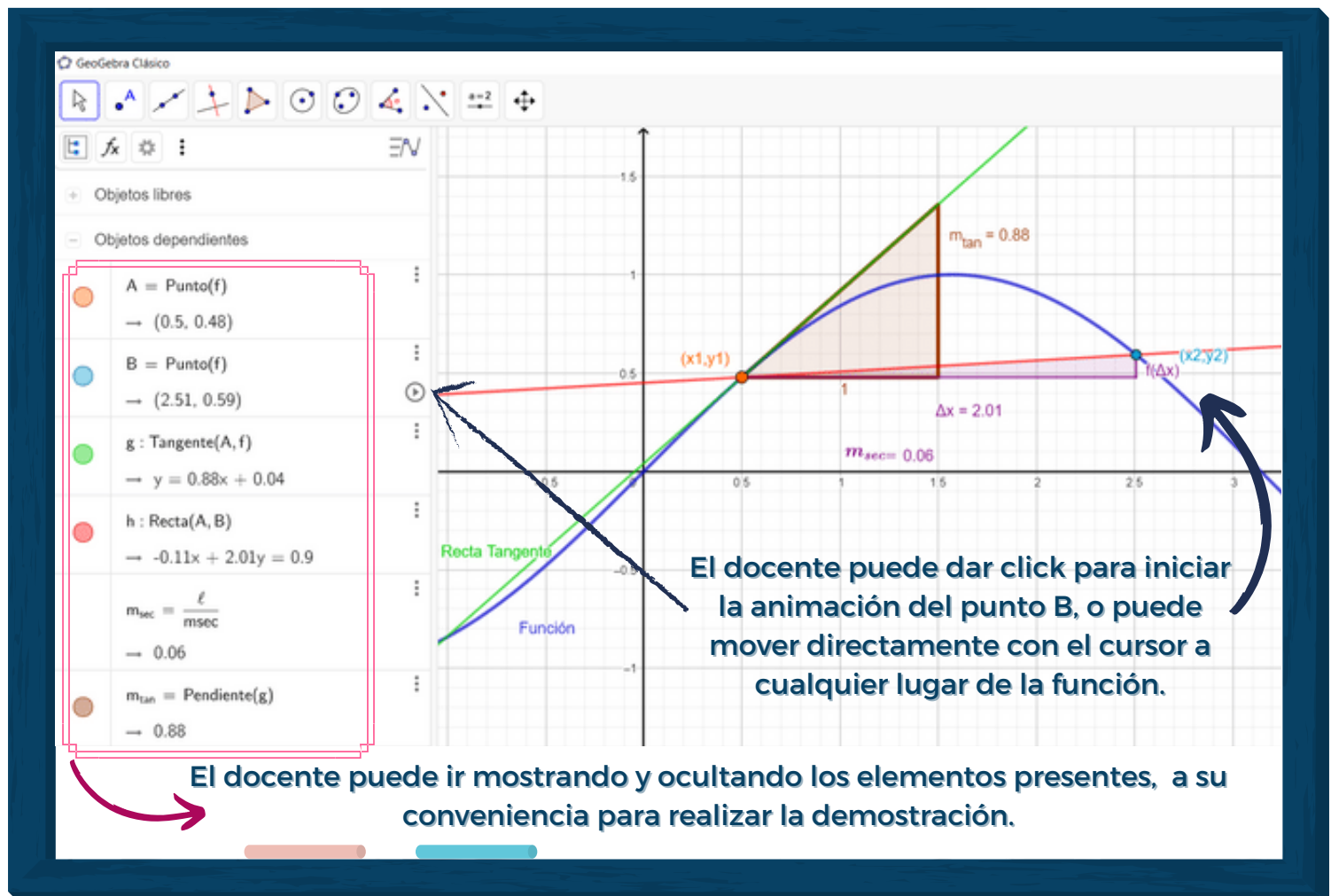
Dar click en **carpeta** para identificar la ubicación del archivo.

3



Seleccionar el **nombre correcto** del archivo y abrir.

Fórmula de la derivada, analítica y geométrica.



IMPORTANTE

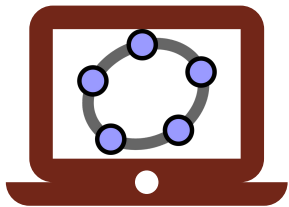
Aspectos a considerar por el docente en la gráfica.

- El valor de la pendiente de la secante, al momento que vamos acercando el punto B al punto A.
- El valor del incremento de x cuando el punto B se aproxima al punto A.

Fórmula de la derivada, analítica y geométrica.

Ejercicio de aplicación

Una población bacteriana tiene un crecimiento dado por la función $f(x)$, siendo x el tiempo medido en segundos. Calcule la velocidad en el instante que el tiempo es **1s**, aplicando el concepto de la derivada.



Al momento que va demostrando su fórmula y aplicaciones, el docente puede hacer uso de la simulación que se denomina **Demostración de la fórmula de la derivada con función polinomial**, se encuentra dentro de la carpeta **CLASE 3**, y, es compatible con el programa **geogebra**.

RESOLUCIÓN:

$$v = \frac{x}{h}$$

Desplazamiento:

$$x = x_2 - x_1$$

$$v = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h}$$

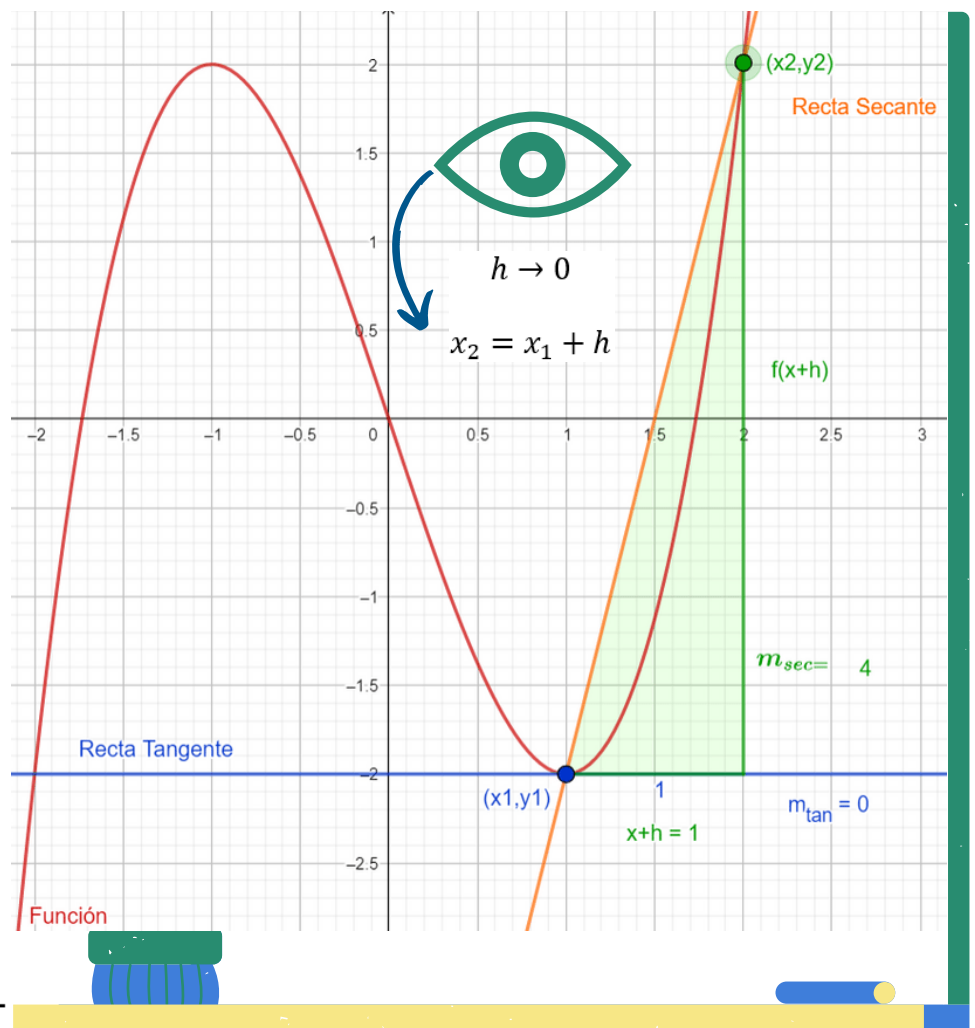
$$v = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h}$$

Consideraciones:

$$h \rightarrow 0$$

$$x_2 = x_1 + h$$

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$



Fórmula de la derivada, analítica y geométrica.



$$f(x) = x^3 - 3x$$

- Función del crecimiento poblacional.

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_1 + h)^3 - 3(x_1 + h) - (x_1)^3 + 3(x_1)}{h}$$

$$v(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + h)^3 - 3(1 + h) - (1)^3 + 3(1)}{h}$$

$$v(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(1)^2h + 3(1)(h)^2 + (h)^3 - 3(1) - 3h + 3(1)}{h}$$

- Simplificamos términos semejantes.

$$v(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h + 3(h)^2 + (h)^3 - 3 - 3h + 3}{h}$$

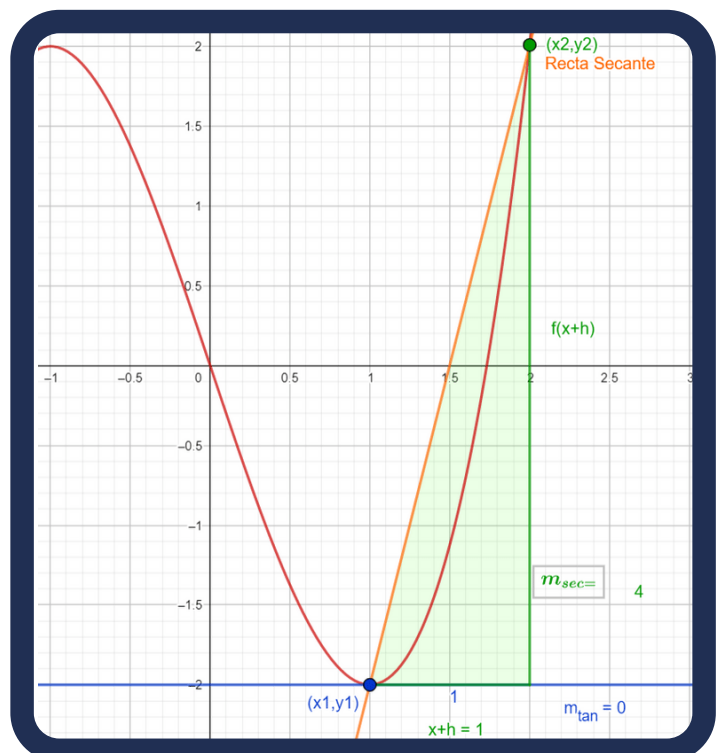
$$v(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h + 3(h)^2 + (h)^3 - 3h}{h}$$

$$v(1) = \frac{3(0) + 3(0)^2 + (0)^3 - 3(0)}{h}$$

- Reemplazamos el límite en la función.

$$v(1) = 0 \frac{m}{s}$$

- Con el simulador el docente puede ir indicando el valor de la velocidad en varios puntos de la función. Dicho valor está representado como la tangente en el punto dado.



Fórmula de la derivada, analítica y geométrica.

Construcción:

El maestro realizará ejercicios de aplicación con el objetivo de que los estudiantes entiendan la aplicación de la fórmula de la derivada.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Calcula la derivada de las funciones en los puntos que se indican, mediante la definición de derivada:

$$f(x) = x^2 + 4x - 5 \text{ en } x = 1$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 + 4(1+h) - 5 - (1^2 + 4 \cdot 1 - 5)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 + 4 + 4h - 5}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 6) = 6$$

$$f(x) = 3x^2 \text{ en } x = 2$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(2+h)^2 - 3 \cdot 2^2}{h}$$

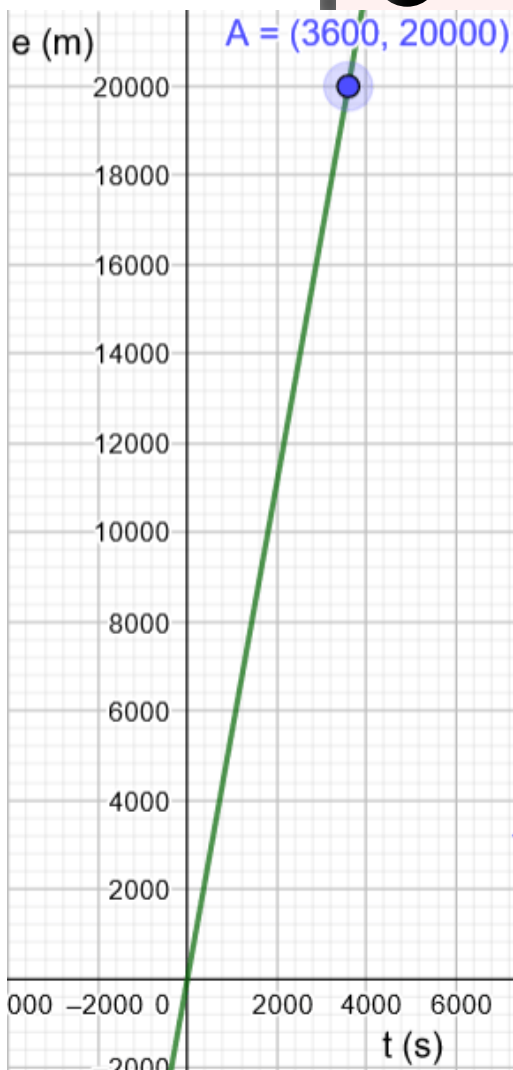
$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(4 + 4h + h^2 - 4)}{h}$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 + 12h}{h}$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} (3h + 12) = 12$$



Fórmula de la derivada, analítica y geométrica.



El Tranvía de Cuenca hace su recorrido ida y vuelta de aproximadamente 20 km por la ciudad, en un tiempo estimado de 1h. Esta relación se muestra en la gráfica espacio-tiempo. Calcular la velocidad con la que el Tranvía realiza su recorrido.

$$20 \text{ km} \longrightarrow 20000 \text{ m} \qquad 1 \text{ h} \longrightarrow 3600 \text{ s}$$

Función resultante a partir de la ecuación de la recta de la forma $y=mx+b$.

$$e(t) = \frac{50}{9}t$$

Encontrar la derivada del espacio respecto al tiempo que equivale a la velocidad del Tranvía.

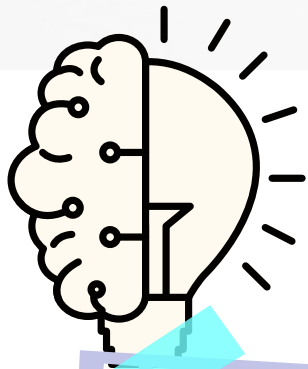
$$e'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

$$e'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{50}{9}(t+h) - \frac{50}{9}(t)}{h}$$

$$e'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{50}{9}t + \frac{50}{9}h - \frac{50}{9}t}{h}$$

$$e'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{50}{9}h}{h} = \frac{50}{9} = 5.5556 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Fórmula de la derivada, analítica y geométrica.



Consolidación:

Es muy importante que el docente, pregunte si hay alguna duda sobre el tema revisado y para comprobarlo se realizará una tarea en clase.

Objetivos de esta actividad:

-Asegurarse que el tema sobre derivadas este entendido.

Instrucciones:

Los ejercicios serán realizados en clase.

-La tarea será realizada de manera individual.



TAREA

1) Resuelva los siguientes ejercicios según la definición de la derivada, calcule la derivada de las siguientes funciones en el punto que se indica.

a. $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 2$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{\frac{x^2 + xh}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2 + xh} = -\frac{1}{x^2}$$

Sustituimos $x = 2$ en la derivada

$$f'(x) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$$

b. $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 3$

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+h} - \sqrt{3}}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3+h} - \sqrt{3})(\sqrt{3+h} + \sqrt{3})}{h(\sqrt{3+h} + \sqrt{3})}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{3} + \sqrt{3})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(2\sqrt{3})}$$

Fórmula de la derivada, analítica y geométrica.



c. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ en $x = 2$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x+h}{x+h-1} - \frac{x}{x-1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 - x + hx - h - x^2 - hx + x}{(x+h-1)(x-1)}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+h-1)(x-1)} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

Sustituimos $x = 2$ en la derivada

$$f'(2) = \frac{-1}{(2-1)^2} = -1$$

2) ¿Con qué simbología se representa a la derivada?, escriba las diferentes opciones.

a. $f'(x)$

b. $\frac{dy}{dx}$

3) Haciendo uso del concepto de derivada encuentre la velocidad de un vehículo de carreras en el instante que ha transcurrido 1s desde su arranque. La función que describe la trayectoria del vehículo está dada por: $f(x) = x^3 + 2x - 5$ en $x = 1$

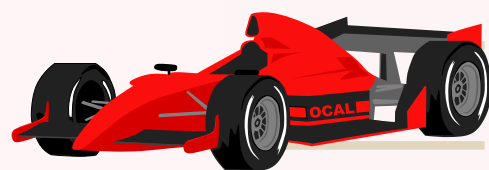
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 + 2(x+h) - 5 - (x^3 + 2x - 5)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2x + 2h - 5 - x^3 - 2x + 5}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 + 2)}{h} = 3x^2 + 2$$

$$f'(1) = 3(1)^2 + 2 = 5$$

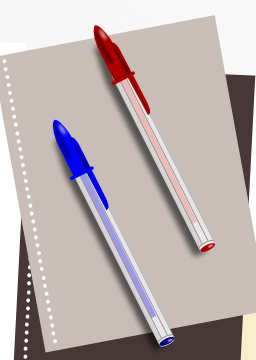


Velocidad Instantánea

Fórmula de la derivada, analítica y geométrica.



Rúbrica de calificación:



-En la siguiente
página encontrará
una rúbrica de
calificación para la
tarea planteada.

	Excelente 4	Bien 3	Regular 2	Mal 1
Responsabilidad al hacer el trabajo y no dedicarse a otras actividades.				
Respeto el espacio y tiempo con sus compañeros.				
Los ejercicios tienen procedimiento.				
Las respuestas del ejercicio son correctas.				
La presentación del trabajo es ordenada y aseada.				
La escritura es clara y sin faltas ortográficas.				

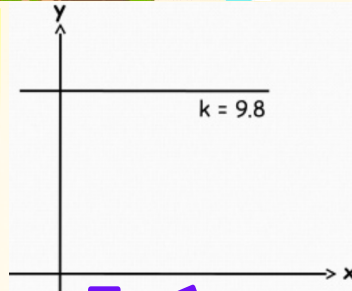
CLASE 4

DERIVADA DE UNA CONSTANTE Y DE UN MONOMIO.



Curiosidad

La gravedad en la Tierra es un ejemplo claro de una función constante, puesto que esta no cambia independientemente del lugar donde se encuentre, $g=9.8 \text{ m/s}^2$.



Destrezas:

- Al finalizar esta clase el estudiante, podrá encontrar la derivada de una función constante y de un monomio.

Anticipación:

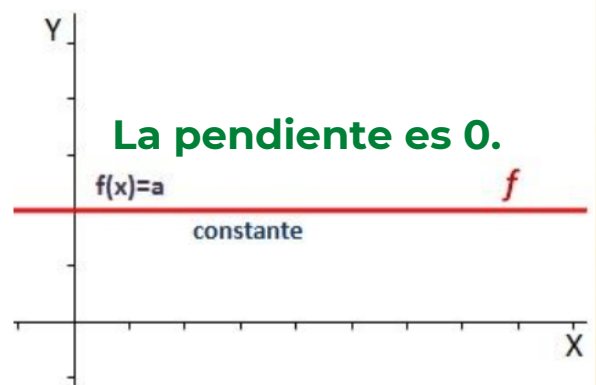
Duración de la clase: 40 min

Antes de iniciar con las demostraciones el docente deberá recordar algunos conceptos básicos de una función constante y un monomio con los alumnos.

FUNCIÓN CONSTANTE

Una función constante es una función tal que la variable dependiente "y" toma el mismo valor "a" para cualquier elemento del dominio "x".

$$f(x) = a \text{ siendo } a \text{ constante}$$



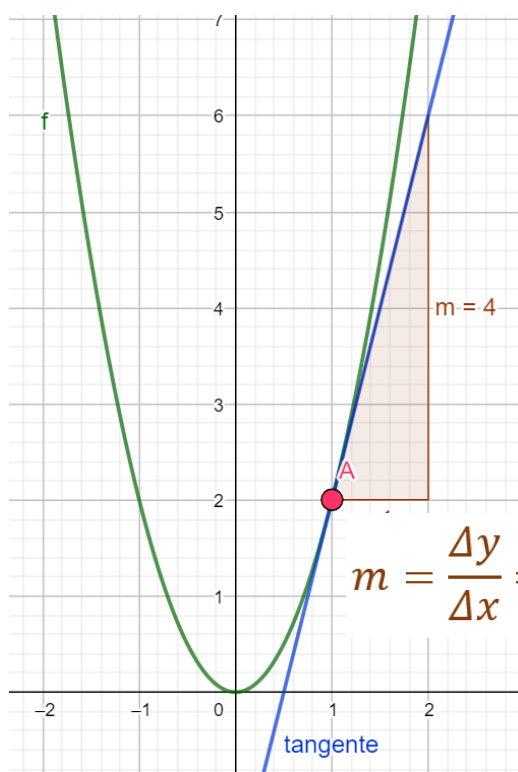
La gráfica de una función constante es una recta paralela al eje de abscisas x.

Derivada de una constante y de un monomio.

MONOMIO

Un monomio es una expresión algebraica que consta de un solo término, en donde aparecen dos operaciones: el producto y la potencia de exponente natural.

$$f(x) = 2x^2$$



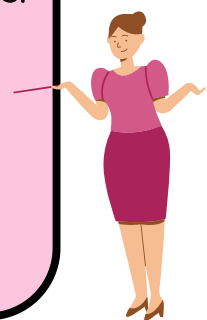
Con esta imagen el docente puede recordar en conjunto con los alumnos las partes de un monomio.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 2}{2 - 1} = 4$$

GeoGebra

Para una explicación mas visual y detalla, se encuentra una animación de geogebra en la carpeta: CLASE 4, con el nombre: "**Pendiente de un monomio**"

- El docente la puede usar esta simulación para interactuar directamente con los estudiantes.
- Dentro de la misma, se encuentra un triángulo que según se mueve el punto A en la función $f(x)$, la pendiente va cambiando.



Derivada de una constante y de un monomio.

Construcción:



Ahora analizaremos la derivada de una constante y de un monomio, a partir de la definición de la derivada (vista anteriormente).

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN CONSTANTE

Tenemos una función constante de la siguiente manera:

$$f(x) = c$$

Como ya sabemos, para cualquier valor que tome "x", "y" siempre tomará el valor de "c", entonces ahora analicemos en nuestra fórmula de la definición de la derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Sí:

$$f(x) = c$$

$$f(x+h) = c$$

Reemplazamos resolvemos y obtenemos la derivada de una constante:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f'(x) = 0$$

TIP



El maestro puede ver el siguiente vídeo, como guía para la derivada de una constante:

**TÍTULO: 01. Derivada usando definición como límite:
Función constante.**



<https://www.youtube.com/watch?v=nkG8A7cwzlo&t=5s>

Derivadas mediante definición (Límite)

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x) = 2$$



5:20

Derivada de una constante y de un monomio.

En esta parte se puede ver, algunos ejercicios demostrativos sobre la derivada de una constante:



¿Cuál es la derivada de las siguientes funciones?

a. $f(x) = 4$

$$f'(x) = 0$$

b. $g(x) = -5$

$$g'(x) = 0$$

c. $w(x) = \pi$

$$w'(x) = 0$$

d. $p(x) = -\frac{1}{8}$

$$p'(x) = 0$$

e. $j(x) = \sqrt{6}$

$$j'(x) = 0$$

DERIVADA DE UN MONOMIO

Tenemos la siguiente función:

$$f(x) = x^n$$

Debemos analizar $f(x+h)$, para poder sustituir en la fórmula de la definición de la derivada.

$$f(x+h) = (x+h)^n$$

Resolvemos el binomio, tomando como ejemplo algunos otros:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\end{aligned}$$

$$(x+h)^n = x^n + n(x^{n-1})h + c(x^{n-2})h^2 + \dots + h^n$$

Derivada de una constante y de un monomio.



Ahora reemplazamos en la fórmula de la definición de la derivada.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + n(x^{n-1})h + c(x^{n-2})h^2 + \dots + h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + n(x^{n-1})h + c(x^{n-2})h^2 + \dots + h^n - x^n}{h}$$

Podemos sacar factor común (h) y eliminar la "h" del denominador.

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(n(x^{n-1}) + c(x^{n-2})h + \dots + h^{n-1})}{h}$$

Nos quedará así:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} n(x^{n-1}) + c(x^{n-2})h + \dots + h^{n-1}$$

Ahora si, ya es posible reemplazar el valor de $h=0$:

$$= n(x^{n-1}) + c(x^{n-2}) \cdot 0 + \dots + 0^{n-1}$$

Y finalmente obtenemos la derivada de un monomio:

$$f'(x) = n(x^{n-1})$$



TIP

El maestro puede ver el siguiente vídeo, de la derivada de un monomio:

TÍTULO: 11. Derivada de función potencia: Demostración de fórmula, mediante definición como límite



<https://www.youtube.com/watch?v=2PZ86Qun4ls>

Derivadas mediante definición
(Límite)

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

Demostración

11:04

Derivada de una constante y de un monomio.

Para completar la clase de la derivada de un monomio, se realizarán unos ejercicios:

¿Cuál es la derivada de las siguientes funciones?

a. $f(x) = x^5$
 $f'(x) = 5x^{5-1}$
 $f'(x) = 5x^4$

$$b'(x) = -6x^{-4}$$
$$b'(x) = -\frac{6}{x^{-4}}$$

b. $g(x) = 6x^7$
 $g'(x) = 7(6x^{7-1})$
 $g'(x) = 42x^6$

c. $b(x) = \frac{2}{x^3}$
 $b'(x) = 2x^{-3}$
 $b'(x) = -3(2x^{-3-1})$

d. $l(x) = \sqrt[3]{x^5}$
 $l'(x) = x^{\frac{5}{3}}$
 $l'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}$
 $l'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$

El docente indicará una aplicación importante de la derivada: LA DERIVADA DE LA POSICIÓN ES LA VELOCIDAD.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

El minuterio de un reloj, tiene un movimineto de la siguiente forma:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}t^3$$

¿Cuál es la velocidad a los cuatro segundos?

$$\varphi'(t) = v(t) = 3 \cdot \frac{1}{2}t^{(3-1)}$$

$$v(t) = \frac{3}{2}t^2$$

Derivada de una constante y de un monomio.

$$v(4) = \frac{3}{2} \cdot 4^2$$

$$v(4) = 24 \text{ m/s}$$

La ecuación del movimiento de un vehículo, de acuerdo al tiempo que recorre es:

$$e(t) = 9\sqrt{t^5}$$

¿Cuál es su velocidad a los siete segundos?

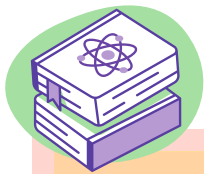
$$e'(t) = v(t) = 9 \cdot t^{\frac{5}{2}}$$

$$v(t) = 9 \cdot \frac{5}{2} t^{\left(\frac{5}{2}-1\right)}$$

$$v(t) = \frac{45}{2} t^{\frac{3}{2}}$$

$$v(4) = \frac{45}{2} \cdot 7^{\frac{3}{2}}$$

$$v(4) = 416,71 \text{ m/s}$$



En física este tema será muy importante y se podrán resolver problemas complejos en un menor tiempo.



Para observar si los alumnos han entendido sobre la derivada de una constante y de un monomio, evaluaremos algunos ejercicios en clase.

Consolidación:

Objetivos de esta actividad:

- Evaluar el aprendizaje sobre la derivada de una constante y de un monomio.

Instrucciones:

- Los ejercicios serán realizados en clase.
- La tarea será de manera individual.

Derivada de una constante y de un monomio.



TAREA

1) Encuentre la derivada de las siguientes funciones:

$$1. f(x) = x^7$$

$$2. p(x) = \Omega$$

$$3. g(x) = 8x^6$$

$$4. r(x) = \frac{5x^9}{3}$$

$$5. y(x) = \frac{3}{8}$$

$$6. w(x) = \frac{4}{x^7}$$

$$7. t(x) = \sqrt[3]{x^4}$$

2) La ecuación que describe el movimiento del agua en un río viene dada de la siguiente forma:

$$n(t) = -\frac{10}{t^4}$$

¿Cuál es la velocidad con la que el agua baja, a los 6 segundos?

Solucionario:



TAREA

1) Encuentre la derivada de las siguientes funciones:

$$1. f(x) = x^7$$

$$f'(x) = x^{7-1}$$

$$f'(x) = 7x^6$$

$$2. p(x) = 34$$

$$p'(x) = 0$$

$$3. g(x) = 8x^6$$

$$g'(x) = 6(8x^{6-1})$$

$$g'(x) = 48x^5$$

Derivada de una constante y de un monomio.



$$4. r(x) = \frac{5x^9}{3}$$

$$r'(x) = 9\left(\frac{5x^{9-1}}{3}\right)$$

$$r'(x) = 3\left(\frac{5x^8}{1}\right)$$

$$r'(x) = 15x^8$$

$$5. y(x) = \frac{3}{8}$$

$$y'(x) = 0$$

$$6. w(x) = \frac{4}{x^7}$$

$$w'(x) = 4x^{-7}$$

$$w'(x) = -7(4x^{-7-1})$$

$$w'(x) = 28x^{-8}$$



$$7. t(x) = \sqrt[3]{x^4}$$

$$t'(x) = x^{\frac{4}{3}}$$

$$t'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1}$$

$$t'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$$

2) La ecuación que describe el movimiento del agua en un río viene dada de la siguiente forma:

$$n(t) = -\frac{10}{t^4}$$

¿Cuál es la velocidad con la que el agua baja, a los 6 segundos?

$$n(t) = -10 \cdot t^{-4}$$

$$n'(t) = v(t) = -10 \cdot (-4)t^{(-4-1)}$$

$$v(t) = 40t^{-5}$$

$$v(t) = \frac{40}{t^5}$$

$$v(6) = \frac{40}{6^5}$$

$$v(6) = \frac{5}{972} \text{ m/s}$$

Derivada de una constante y de un monomio.



Rúbrica de calificación:

-En la siguiente página encontrará una rúbrica de calificación para la tarea planteada.

	Excelente 4	Bien 3	Regular 2	Mal 1
Responsabilidad al hacer el trabajo y no dedicarse a otras actividades.				
Respeto el espacio y tiempo con sus compañeros.				
Los ejercicios tienen procedimiento.				
Las respuestas del ejercicio son correctas.				
La presentación del trabajo es ordenada y aseada.				
La escritura es clara y sin faltas ortográficas.				

CLASE 5

DERIVADA DE SUMA, RESTA, PRODUCTO Y COCIENTE DE FUNCIONES.



Curiosidad

Varias de las funciones polinómicas se pueden observar en la vida real, como en diseños de puentes, lanzamientos de balón, en las compras del mercado, etc

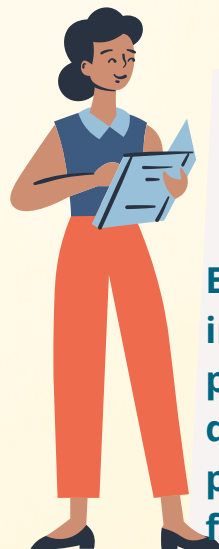


Destreza:

El estudiante tendrá la capacidad de identificar, resolver y aplicar la derivada de la suma, resta, producto y cociente.



80 minutos
2 períodos



Anticipación:

El docente debe hacer una introducción al tema con preguntas de retroalimentación de conceptos previos, que pueden ser respondidas en forma de conversatorio o lluvia de ideas con los estudiantes.

DERIVADA DE SUMA, RESTA, PRODUCTO Y COCIENTE DE FUNCIONES.

Anticipación:



¿Qué es un polinomio?

Expresión algebraica que constituye la suma o resta de un número finito de monomios.

¿Qué entiende por función polinómica?

Una función polinómica es una función cuya expresión algebraica es un polinomio que depende de variables.

TICS

En los siguientes links se encuentran las demostraciones de las fórmulas de las propiedades de la derivada.

SUMA - RESTA: <https://youtu.be/708fjcnFS7k>

PRODUCTO: <https://youtu.be/3pSrrRZ6U98>

COCIENTE: <https://youtu.be/FayoApkxLZs>



DERIVADA DE SUMA, RESTA, PRODUCTO Y COCIENTE DE FUNCIONES.

OPERACIÓN	FÓRMULA	EXPLICACIÓN
SUMA	$(f + g)' = f' + g'$	Derivada de la primera función, MÁS la derivada de la segunda función.
RESTA	$(f - g)' = f' - g'$	Derivada de la primera función, MENOS la derivada de la segunda función.
MULTIPLICACIÓN	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$	SUMA de la derivada de la primera función, MULTIPLICADO la segunda función. MÁS la derivada de la segunda función, MULTIPLICADO la primera función.
DIVISIÓN	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$	RESTA de la derivada de la primera función, MULTIPLICADO la segunda función. MENOS la derivada de la segunda función, MULTIPLICADO la primera función. DIVIDIDO entre la segunda función al cuadrado.

Recomendaciones para el docente:

1. Socializar las fórmulas de las propiedades de las derivadas.
2. Expresar en lenguaje verbal cada parte correspondiente a la fórmula.
3. Recomendar a los estudiantes los recursos presentados en el apartado de TICS, para fortalecer los conocimientos.

Construcción:

Aplicaciones Físicas:

Relación espacio - tiempo:

$$e(t)$$

1ra derivada (Velocidad instantánea):

$$e'(t) = v(t)$$

2da derivada (Aceleración instantánea):

$$e''(t) = v'(t) = a(t)$$



DERIVADA DE SUMA, RESTA, PRODUCTO Y COCIENTE DE FUNCIONES.

Ejercicios de demostración

- Con las dos funciones propuestas, se elaborará una tabla con sus respectivas derivadas, permitiendo al docente dar a conocer a los estudiantes la forma correcta de reemplazar en las fórmulas revisadas anteriormente.

Primera función

$$f(x) = 3x^2 + x + 3$$

$$f'(x) = 6x + 1$$

Segunda función

$$g(x) = 4x^3 + 5$$

$$g'(x) = 12x^2$$

Suma de la derivada de dos funciones

Fórmula: $(f + g)' = f' + g'$

- Con la ayuda de los cuadros anteriores tomamos las funciones que sean necesarias para el reemplazo en la fórmula de derivadas. En este caso:

$$f'(x) = 6x + 1 \quad g'(x) = 12x^2$$

Reemplazo:

- Agrupamos y ordenamos términos semejantes.

$$(f + g)' = (6x + 1) + (12x^2)$$

$$(f + g)' = 12x^2 + 6x + 1$$

DERIVADA DE SUMA, RESTA, PRODUCTO Y COCIENTE DE FUNCIONES.

Resta de la derivada de dos funciones

Fórmula: $(f - g)' = f' - g'$

- Con la ayuda de los cuadros anteriores tomamos las funciones que sean necesarias para el reemplazo en la fórmula de derivadas. En este caso:

$$f'(x) = 6x + 1 \quad g'(x) = 12x^2$$

Reemplazo:

- Agrupamos y ordenamos términos semejantes.

$$(f - g)' = (6x + 1) - (12x^2)$$

$$(f - g)' = -12x^2 + 6x + 1$$

Multiplicación de la derivada de dos funciones

Fórmula: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$

- Con la ayuda de los cuadros anteriores tomamos las funciones que sean necesarias para el reemplazo en la fórmula de derivadas. En este caso:

$$f(x) = 3x^2 + x + 3 \quad g(x) = 4x^3 + 5$$

$$f'(x) = 6x + 1 \quad g'(x) = 12x^2$$

Reemplazo:

- Agrupamos y ordenamos términos semejantes.

$$(f * g)' = (6x + 1) * (4x^3 + 5) + (12x^2) * (3x^2 + x + 3)$$

$$(f * g)' = (24x^4 + 30x + 4x^3 + 5) + (36x^4 + 12x^3 + 36x^2)$$

$$(f * g)' = 60x^4 + 16x^3 + 36x^2 + 30x + 5$$

DERIVADA DE SUMA, RESTA, PRODUCTO Y COCIENTE DE FUNCIONES.

División de la derivada de dos funciones

Fórmula:
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$$

- Con la ayuda de los cuadros anteriores tomamos las funciones que sean necesarias para el reemplazo en la fórmula de derivadas. En este caso:

$$f(x) = 3x^2 + x + 3 \qquad g(x) = 4x^3 + 5$$

$$f'(x) = 6x + 1 \qquad g'(x) = 12x^2$$

Reemplazo:

- Agrupamos y ordenamos términos semejantes.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{(6x + 1) * (4x^3 + 5) - (12x^2) * (3x^2 + x + 3)}{(4x^3 + 5)^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{(24x^4 + 30x + 4x^3 + 5) - (36x^4 + 12x^3 + 36x^2)}{4x^6 + 40x^3 + 25}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{-12x^4 - 8x^3 - 36x^2 + 30x + 5}{4x^6 + 40x^3 + 25}$$



JUEGO

El docente puede recomendar a los estudiantes el siguiente juego en línea, dónde ellos podrán fortalecer sus conocimientos practicando las derivadas.

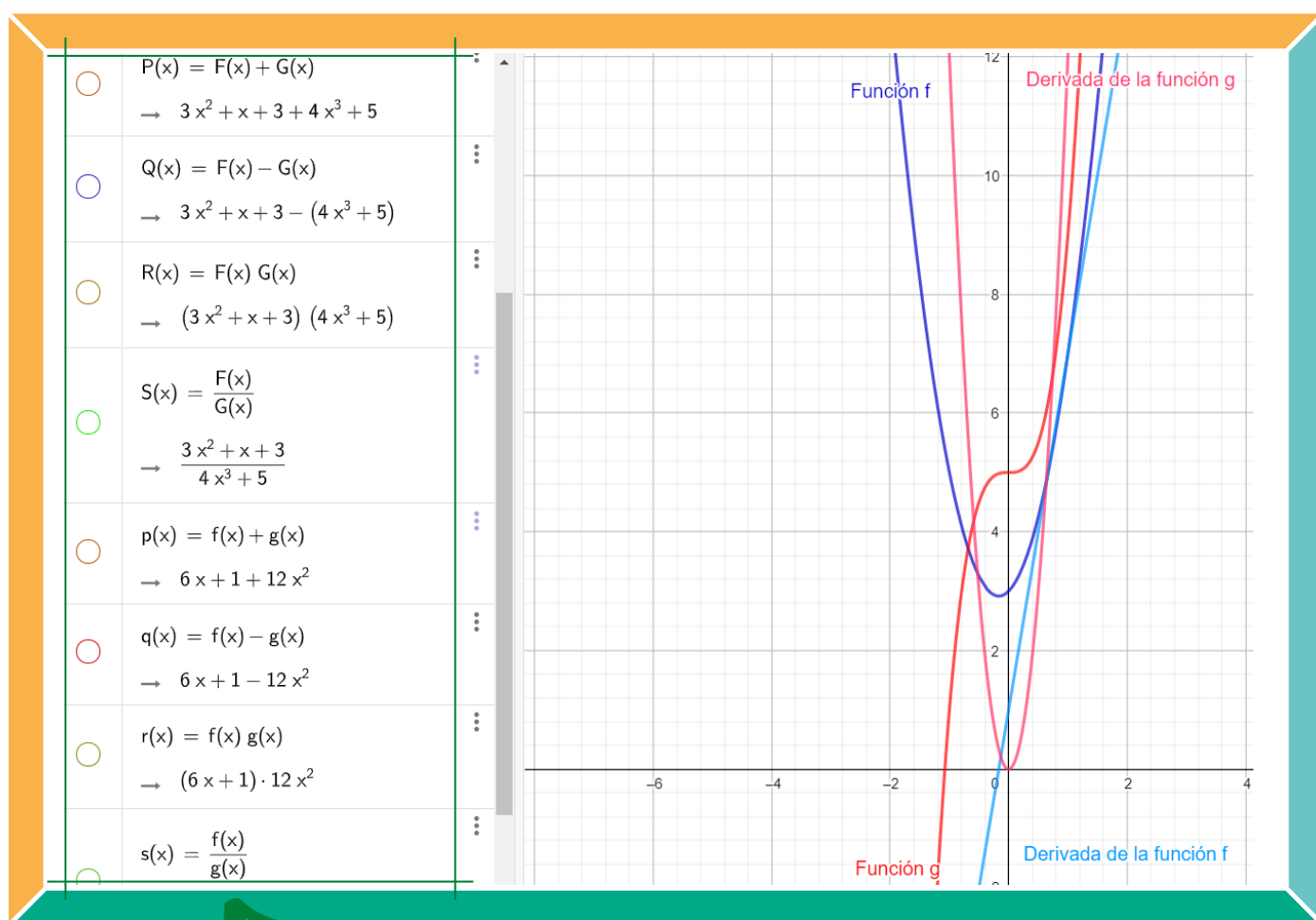
<https://www.cerebriti.com/juegos-de-matematicas/derivadas>

DERIVADA DE SUMA, RESTA, PRODUCTO Y COCIENTE DE FUNCIONES.



TICS

En la carpeta de **OneDrive**, el docente puede encontrar adjunto en la sección **CLASE 5**, las gráficas resultantes dentro de un archivo: **Derivada de suma, resta, producto y cociente de funciones.ggb**



El docente puede demostrar las gráficas que se obtienen al momento de realizar los procesos de suma, resta, producto y cociente de funciones; así como también, los procesos anteriores con sus respectivas derivadas.

DERIVADA DE SUMA, RESTA, PRODUCTO Y COCIENTE DE FUNCIONES.



Ejercicio de aplicación.

La relación entre la distancia recorrida en metros por un autobus desde la primera estación, hasta la última estación; y, el tiempo en segundos es $f(t)$ que resulta del producto entre las funciones $g(t)$ y $h(t)$.

Calcular la velocidad instantánea en $t=1$ s.

Funciones a utilizar:

$$f(t) = g(t) * h(t)$$

$$g(t) = 5t - 3 \quad h(t) = 7t - 9$$

$$g'(t) = 5 \quad h'(t) = 7$$

$$v(t) = f'(t) = (g(t) * h(t))'$$

- Desarrollamos el producto de funciones que es la relación recorrido - tiempo.

Para la velocidad instantánea, hago uso de la primera derivada.

$$v(1) = (g(1) * h(1))' = g' * h + h' * g$$

$$v(1) = (g(1) * h(1))' = 5(7t - 9) + 7(5t - 3)$$

$$v(1) = (g(1) * h(1))' = 35t - 45 + 35t - 21$$

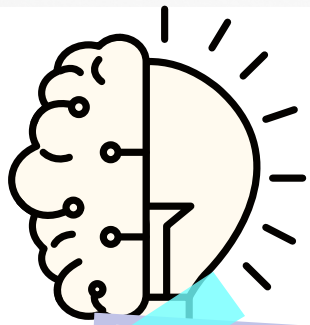
$$v(1) = (g(1) * h(1))' = 70t - 66$$

$$v(1) = (g(1) * h(1))' = 70(1) - 66$$

$$v(1) = (g(1) * h(1))' = 4 \text{ m/s}$$



DERIVADA DE SUMA, RESTA, PRODUCTO Y COCIENTE DE FUNCIONES.



Consolidación:

Para analizar si se comprendió o no el tema, se propondrán algunos ejercicios de aplicación, resolviendo la actividad propuesta.

Objetivos de esta actividad:

- Evaluar conocimientos sobre el tema de operaciones entre dos o más funciones con derivadas.

Instrucciones:

- .Los ejercicios serán realizados en el aula, para que el maestro pueda ayudar a los alumnos si tienen alguna duda.
- La actividad será realizada de manera individual.



ACTIVIDAD:

Daniel hizo un viaje. En la carretera por la que circulaba habían radares ubicados estratégicamente en 3 tramos, además la velocidad máxima permitida era 70 km/h. Cada tramo describe una función que es la relación espacio - tiempo. Tiempo después Daniel es notificado que ha excedido el límite de velocidad aquel día. Sin embargo Daniel no está seguro en que tramo excedió el límite, ya que al inicio de cada tramo él hacía una pausa para verificar el estado de su auto.



DERIVADA DE SUMA, RESTA, PRODUCTO Y COCIENTE DE FUNCIONES.



Ayuda a Daniel a determinar en que tramo irrespetó la velocidad permitida sabiendo que en cada tramo donde estaba ubicado el radar, Daniel tenía un tiempo de referencia de 20s con respecto al punto inicial de cada tramo.

Recomendaciones:

Haga uso de las derivadas y sus reglas.

Determine la velocidad en los 3 tramos.

Funciones:

$$f_1(t) = \frac{t^2}{2} - 4t$$



$$f_2(t) = (2t^2) \left(\frac{5t^2}{2} - \frac{200t}{3} + \frac{1}{4} \right)$$



$$f_3(t) = \frac{2t^4 - 61t^3}{t^2}$$



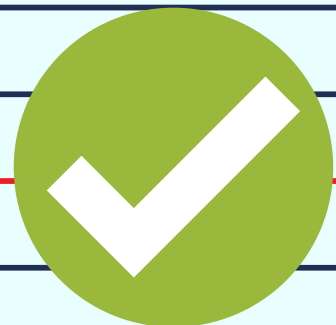
Regla de la suma

$$f_1(t) = \frac{t^2}{2} - 4t$$

$$f_1'(t) = \frac{2t}{2} - 4$$

$$f_1'(20) = t - 4 = 20 - 4 = 16 \frac{m}{s} = 57.6 \frac{km}{h}$$

Velocidad correcta



DERIVADA DE SUMA, RESTA, PRODUCTO Y COCIENTE DE FUNCIONES.

Regla de la multiplicación

$$f_2(t) = (2t^2) \left(\frac{5t^2}{2} - \frac{200t}{3} + \frac{1}{4} \right)$$

$$f_2'(t) = (4t) * \left(\frac{5t^2}{2} - \frac{200t}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{10t}{2} - \frac{200}{3} \right) * (2t^2)$$

$$f_2'(t) = \left(10t^3 - \frac{800t^2}{3} + t \right) + \left(10t^3 - \frac{400t^2}{3} \right)$$

$$f_2'(t) = 20t^3 - 400t^2 + 20$$

$$f_2'(20) = 20(20)^3 - 400(20)^2 + 20 = 20 \frac{m}{s} = 72 \frac{km}{h}$$

Daniel ha excedido el límite de velocidad en el segundo tramo.

Velocidad incorrecta



Regla de la División

$$f_3(t) = \frac{2t^4 - 61t^3}{t^2}$$

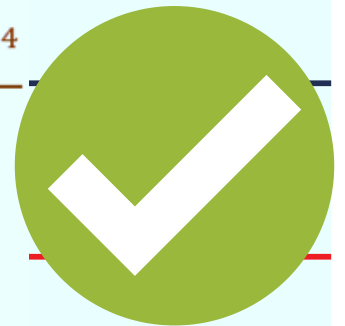
$$f_3(t) = \frac{(8t^3 - 183t^2) * (t^2) - (2t) * (2t^4 - 61t^3)}{(t^2)^2}$$

Velocidad correcta

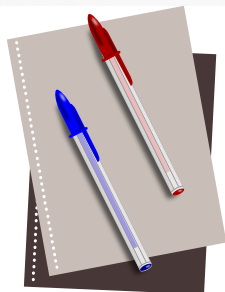
$$f_3(t) = \frac{(8t^5 - 183t^4) - (4t^5 - 122t^4)}{t^4} = \frac{4t^5 - 61t^4}{t^4}$$

$$f_3(t) = \frac{t^4(4t - 61)}{t^4} = (4t - 61)$$

$$f_3(t) = 4(20) - 61 = 80 - 61 = 19 \frac{m}{s} = 68.4 \frac{km}{h}$$



DERIVADA DE SUMA, RESTA, PRODUCTO Y COCIENTE DE FUNCIONES.



Rúbrica de calificación:



-En esta parte, se encuentra planteada la rúbrica de calificación para la actividad sugerida anteriormente.

	Excelente 4	Bien 3	Regular 2	Mal 1
Responsabilidad al realizar el acertijo y no dedicarse a otras actividades.				
Respetan el espacio y tiempo con sus compañeros.				
Aplica correctamente las fórmulas revisadas durante la clase.				
Existe un procedimiento previo antes de la respuesta.				
Las respuestas son correctas.				
La presentación del trabajo es ordenada y aseada.				
La escritura es clara y sin faltas ortográficas.				

CLASE 6

PROPIEDADES DE LA DERIVADA:

REGLA DE LA CADENA



El lanzamiento de un cohete implica dos cantidades, relacionadas que cambian con el tiempo (distancia y velocidad). La derivada nos informa como varían estas, de acuerdo a una función.



Destreza:

El estudiante estará en la capacidad de resolver problemas de derivada que involucren la regla de la cadena.



Anticipación:

Duración de la clase: 40 min

Si el maestro desea profundizar en la demostración matemática y gráfica sobre la regla de la cadena, puede ingresar al siguiente link:

<https://www.fisicalab.com/apartado/regla-cadena>



El docente iniciará la clase recordando el concepto de una función compuesta y para eso utilizará como ejemplo la siguiente función:

$$h(x) = \sqrt{10 + 2x^2}$$

A partir de esa función el docente iniciará con la explicación :

Propiedades de la derivada:

Regla de la cadena.



Una función compuesta es una función dentro de otra función. Y se representa: $f(g(x))$. Entonces $h(x) = \sqrt{10 + 2x^2}$ es una función compuesta, porque si $f(x) = \sqrt{x}$ °

$g(x) = 10 + 2x^2$, obtenemos la función original.

Entonces concluimos que "g" es la función dentro de "f", por lo que decimos que "g" es la función **INTERIOR** y "f" la función **EXTERIOR**.

$$h(x) = \sqrt{10 + 2x^2}$$

Diagram illustrating the function composition for $h(x) = \sqrt{10 + 2x^2}$. The expression is shown with a bracket above the square root symbol labeled "EXTERIOR" and a bracket below the expression inside the square root labeled "INTERIOR".

Finalmente preguntamos a los estudiantes si saben como resolver la derivada de una función compuesta y vamos anotando sus ideas en la pizarra (lluvia de ideas).

Construcción:

Con las ideas de los alumnos, el maestro iniciará con la explicación de la regla de la cadena.

La regla de la cadena se da cuando tenemos que derivar una función compuesta y se resuelve de la siguiente manera:

Derivada de una función compuesta es igual a la derivada de la función exterior por la derivada de la función interior.

$$\frac{d}{dx} h(x) = f'(x) * g'(x)$$



Propiedades de la derivada:

Regla de la cadena.



Con el ejercicio-ejemplo y la teoría de la anticipación, el maestro resolverá un ejercicio para que los alumnos puedan ver como se resuelve la derivada de funciones compuestas.

Para encontrar la derivada de la siguiente función, primero observamos que es una función una función compuesta: $h(x) = \sqrt{10 + 2x^2}$

Por lo tanto, usamos la **fórmula de la derivada de una función compuesta**:

$$\frac{d}{dx} h(x) = f'(x) * g'(x)$$

En segundo lugar identificamos la función exterior e interior:

$$h(x) = \sqrt{\overbrace{10 + 2x^2}^{\text{EXTERIOR}}}$$

INTERIOR

Procedemos a resolver la derivada:

$$h'(x) = \frac{1}{2} (10 + 2x^2)^{\frac{1}{2}-1} * 4x \quad h'(x) = \frac{1}{2} (10 + 2x^2)^{-\frac{1}{2}} * 4x$$

Lo que se hizo es: la derivada de la función exterior por la derivada de la función interior y por último paso se ordena la función:

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{10 + 2x^2}} * 4x \quad h'(x) = \frac{2x}{\sqrt{10 + 2x^2}}$$



NO OLVIDAR: después de cualquier clase que el maestro da, es importante preguntar a nuestros estudiantes si tienen alguna duda sobre el tema.

Algunos estudiantes, no responderán a la pregunta y se quedarán con sus dudas, entonces para reforzar; el docente aplicará otros ejemplos en clase, pero ahora los estudiantes participarán en la resolución de los mismos.



Propiedades de la derivada:

Regla de la cadena.



Hallar la derivada de la siguiente función:
No olvidar la participación estudiante-
maestro

PRIMER PASO: Identificar si es o
no una función compuesta.

SEGUNDO PASO: Identificar la
función exterior e interior.

TERCER PASO: Resolver la
derivada.



$$f(x) = \frac{2}{(x + x^2)^3}$$

$$f(x) = 2(x + x^2)^{-3}$$

$$f(x) = \overbrace{2}^{\text{EXTERIOR}} \underbrace{(x + x^2)^{-3}}_{\text{INTERIOR}}$$

$$\frac{d}{dx} h(x) = f'(x) * g'(x)$$

$$f'(x) = (-3)2(x + x^2)^{-3-1} * (1 + 2x^{2-1})$$

$$f'(x) = -6(x + x^2)^{-4} * (1 + 2x)$$

$$f'(x) = \frac{-6}{(x + x^2)^4} * (1 + 2x)$$

$$f'(x) = \frac{-6 * (1 + 2x)}{(x + x^2)^4}$$

$$f'(x) = \frac{-6 - 12x}{(x + x^2)^4}$$

Consolidación:



**Objetivos de esta
actividad:**

-Evaluar el tema
sobre la regla de la
cadena.

Instrucciones:

-Los ejercicios serán realizados en grupos de
trabajo de 3 o 4 estudiantes.
-Será trabajo en clase y deberá ser
presentados al maestro.

Propiedades de la derivada:

Regla de la cadena.

Los equipos resolverán un juego que se encuentra en el siguiente link:

https://www.zweigmedia.com/MundoReal/tutorials/frames3_2g.html

El docente puede escribir la respuesta y verificarla, en conjunto con los estudiantes, el juego consta de un puntaje y pueden ponerle nombre al grupo.

CONCURSO

$$\frac{d}{dx}(-4x^3 - 4x^2)^2 =$$

Verifica

Borra

¡Ayuda!

$$\frac{d}{dx}(3x^5 + 3x^4 + 2x^3)^{-5} =$$

Verifica

Borra

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^4 + 3x^3}\right] =$$

Verifica

Borra

Pista Gratis

$$\frac{d}{dx}\sqrt{2x^4 + x^2} =$$

Verifica

Borra

Pista

$$\frac{d}{dx}\sqrt[4]{(3x^3 + 2x^2)^5} =$$

Verifica

Borra

Pista

Dentro de la página web, el docente también podrá encontrar un resumen del concepto de la regla de la cadena:

La regla de la cadena

Si u es una función diferenciable de x , y f es una función diferenciable de u , entonces f es una función diferenciable de x , y:

$$\frac{d}{dx}[f(u)] = f'(u) \frac{du}{dx}$$

Ejemplo

Tomando $f(x) = x^3$, obtenemos

$$\frac{d}{dx}u^3 = 3u^2 \frac{du}{dx}$$

En palabras:

La derivada de una cantidad al cubo es igual a 3 veces la cantidad (original) al cuadrado por la derivada de la cantidad.

A veces se refiere a esto como un ejemplo de la regla generalizada de las potencias.

Propiedades de la derivada:

Regla de la cadena.



Si el docente no puede hacer uso de herramientas tecnológicas, escribirá los mismos ejercicios u otros que tenemos a continuación y la modalidad será la misma (un juego entre grupos de estudiantes):

CONCURSO

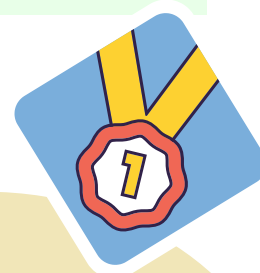
$$\frac{d}{dx} \left[\frac{4x+4}{-2x+3} \right]^{-1} = ?$$

- A $\left[\frac{20}{(-2x+3)^2} \right]^{-1}$
- B $-1 \left[\frac{4x+4}{-2x+3} \right]^{-2} \left[\frac{23}{(-2x+3)^2} \right]$
- C $-1 \left[\frac{20}{(-2x+3)^2} \right]^{-2}$
- D $-1 \left[\frac{4x+4}{-2x+3} \right]^{-2} \left[\frac{4}{-2} \right]$
- E $-1 \left[\frac{4}{-2} \right]^{-2}$
- F $-1 \left[\frac{4x+4}{-2x+3} \right]^{-2} \left[\frac{20}{(-2x+3)^2} \right]$
- G $-1 \left[\frac{4x+4}{-2x+3} \right]^{-2}$

CONCURSO

$$\frac{d}{dx} [(2x^2 - 4x - 1)(-2x + 1)^{-4}] = ?$$

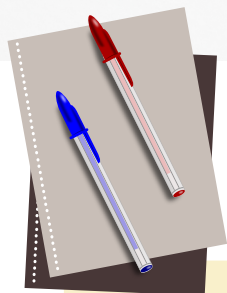
- A $(4x - 4)(-4)(-2x + 1)^{-5}(-2)$
- B $4(4x - 4)(-2x + 1)^{-4} + 8(2x^2 - 4x - 1)(-2x + 1)^{-4}$
- C $(4x - 4)(-2x + 1)^{-4} + (2x^2 - 4x - 1)(-4)(-2)^{-5}$
- D $(4x - 4)(-2x + 1)^{-4} - 4(2x^2 - 4x - 1)(-2x + 1)^{-4}$
- E $(4x - 4)(-2x + 1)^{-4} - 4(2x^2 - 4x - 1)(-2x + 1)^{-5}$
- F $(4x - 4)(-4)(-2)^{-5}$
- G $(4x - 4)(-2x + 1)^{-4} + 8(2x^2 - 4x - 1)(-2x + 1)^{-5}$



Como compensación el primer grupo en obtener las respuestas correctas tendrá un puntaje extra.

Propiedades de la derivada:

Regla de la cadena.



Rúbrica de calificación:

-En la siguiente página encontrará una rúbrica de calificación para la tarea planteada.

-Esta tarea será calificada grupalmente, osea la nota será una sola para el mismo grupo.

	Excelente 4	Bien 3	Regular 2	Mal 1
Responsabilidad al hacer el trabajo y no dedicarse a otras actividades.				
Respetan el espacio y tiempo con sus compañeros.				
Existe el trabajo en equipo.				
Las respuestas del ejercicio son correctas.				
La presentación del trabajo es ordenada y aseada.				
La escritura es clara y sin faltas ortográficas.				

CLASE 7

DERIVADA DE FUNCIONES EXPONENCIALES



Dato curioso

El arco Gateway que se encuentra en San Luis, Missouri, Estados Unidos, es el edificio en forma de arco mas grande del mundo y su forma gráfica es una combinación de varias funciones exponenciales (aunque parezca una parábola):

$$y = a(e^{bx} + e^{-bx})$$

Esta ecuación distribuye las fuerzas estructurales internas del arco.

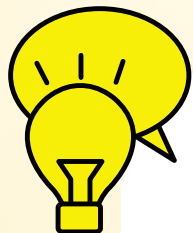


Destreza:

- Al final de esta clase el estudiante estará optimo para realizar ejercicios de la vida real en donde participen funciones exponenciales.

Anticipación:

Duración de la clase: 40 min



Para iniciar la clase de la derivada de funciones exponenciales, es importante recordar la estructura de las mismas:

Derivada de funciones exponenciales.

Concepto de las funciones exponenciales:

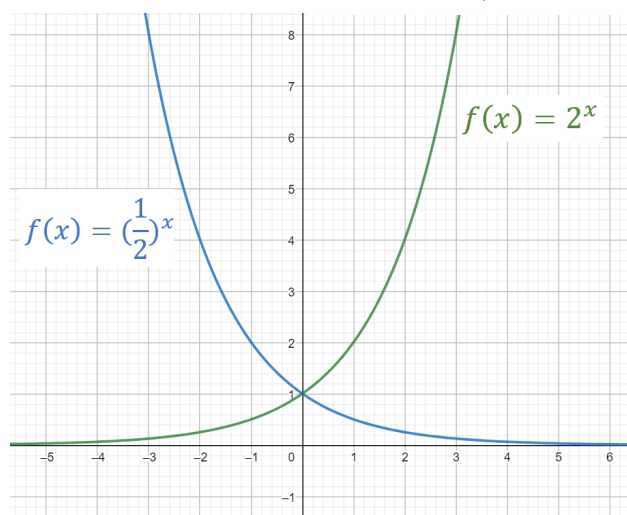
Se conoce como funciones exponenciales aquellas que se componen de una base y un exponente, en donde la base es un número mayor a 0 y diferente de 1; y el exponente es en donde se encuentra la variable.

$$f(x) = a^x$$

↓
BASE

EXPONENTE

$a > 0; a \neq 1$



Si la base (a) es mayor a 1, la gráfica será una curva creciente, caso contrario, si (a) tiene un valor entre: mayor a 0 y menor a 1 la curva será decreciente.

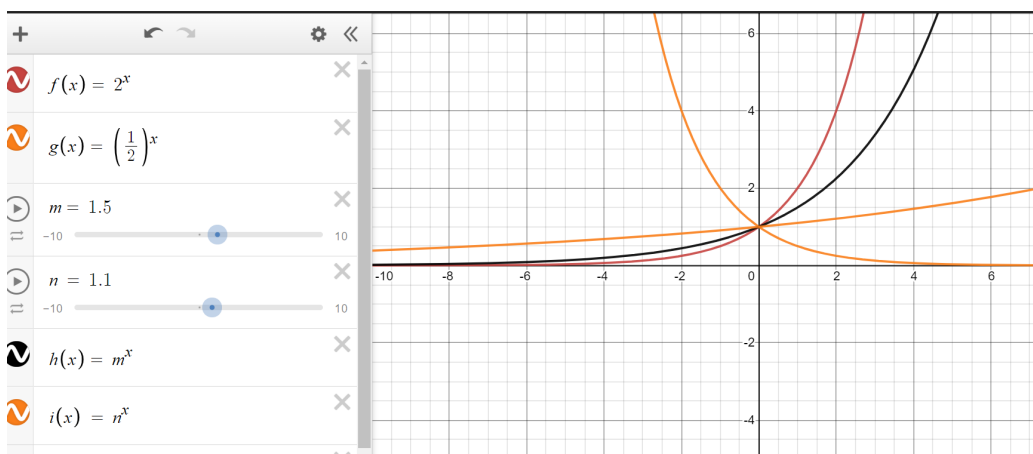
TIC'S

Al ingresar al siguiente link:

[https://www.desmos.com/calculator/pvmauakfvp?](https://www.desmos.com/calculator/pvmauakfvp?lang=es)

[lang=es](https://www.desmos.com/calculator/pvmauakfvp?lang=es), podrá visualizar las funciones exponenciales de base (-10, 10)

GeoGebra



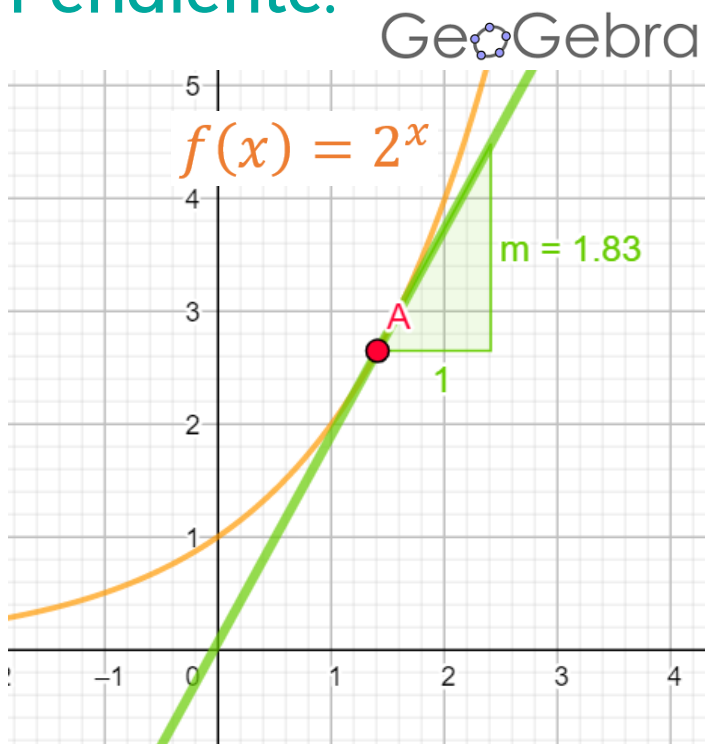
El maestro puede usar esta simulación para explicar sobre la base de la función exponencial y cómo varía la gráfica.

Derivada de funciones exponenciales.

Características importantes:

- Recordar a los estudiantes que la función inversa de la función exponencial es la función logarítmica.
- Su recorrido es $(0, +\infty)$.
- La función exponencial natural es: $f(x) = e^x$
- El número "e" es irracional y equivale a 2.718281828

Pendiente:



- En esta parte el maestro explicará la pendiente de una función exponencial, y analizará en conjunto con los estudiantes esta simulación, que se encuentra en la Carpeta: Clase 7, como: **"Pendiente de una función exponencial"**.

Construcción:



Derivada de una función exponencial de base (a):

- La derivada de la función exponencial es igual a la misma función por el logaritmo neperiano de la base y por la derivada del exponente.

$$f(x) = a^x \quad f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$$

Derivada de funciones exponenciales.

- Cuando en el exponente hay una función, se aplica al siguiente fórmula:

$$f(x) = a^{u(x)} \quad f'(x) = a^{u(x)} \cdot \ln(a) \cdot u'(x)$$

Derivada de una función exponencial natural:

- La derivada de la función exponencial natural es igual a la misma función por la derivada del exponente.

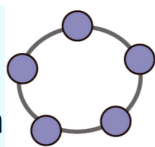
$$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$$

- Cuando el exponente es una función, la fórmula será la siguiente:

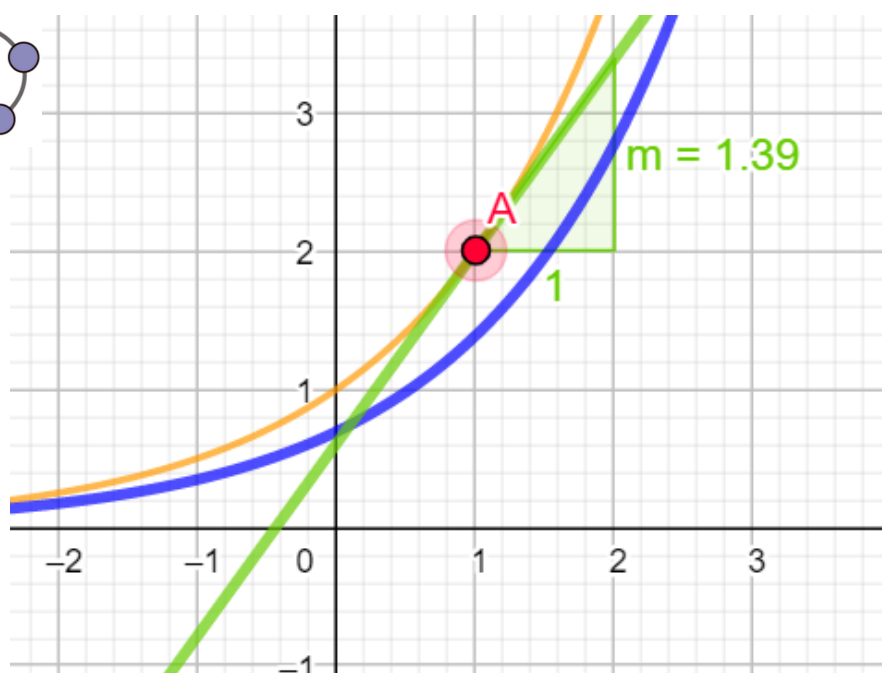
$$f(x) = e^{u(x)} \quad f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$$

Simulación gráfica de la derivada de la función exponencial:

- Esta simulación es la misma que se uso anteriormente para la explicación de la pendiente de una función exponencial.
- Nos fijamos que cuando el punto A marca 1 en x, la pendiente tiene valor de 1,39; estos puntos van formando la derivada de $f(x)$, $x'=1$ y $y'=1,39$; entonces cada vez que A se mueva irá marcando los puntos de $f'(x)$.



$$f(x) = 2^x$$
$$f'(x) = 2^x \cdot \ln 2$$



Derivada de funciones exponenciales.



Ejercicios prácticos:

- En esta parte se resolverán algunos ejercicios para que los estudiantes tengan mas claro la forma en que se resuelve la derivada de una función exponencial.

Encuentre la derivada de los siguientes ejercicios:

$$1. f(x) = 5^x$$
$$f'(x) = 5^x \cdot \ln 5$$

$$f(x) = a^x$$
$$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$$

$$2. f(x) = 10x^2 \cdot 3^x$$
$$f'(x) = 20x \cdot 3^x + 10x^2 \cdot 3^x \cdot \ln(3)$$

$$3. f(x) = 7^{(2x+5)}$$
$$f'(x) = 7^{(2x+5)} \cdot \ln 7 \cdot 2x$$

$$f(x) = a^{u(x)}$$
$$f'(x) = a^{u(x)} \cdot \ln(a) \cdot u'(x)$$

$$4. f(x) = x^3 e^x$$
$$f'(x) = 3x^{(2-1)} e^x + x^3 e^x$$
$$f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x$$
$$f'(x) = x^2 e^x (3 + x)$$

$$f(x) = e^x$$
$$f'(x) = e^x$$

$$5. f(x) = e^{(4-x^2)}$$
$$f'(x) = e^{(4-x^2)} \cdot -2x^{(2-1)}$$
$$f'(x) = -2x \cdot e^{(4-x^2)}$$

$$f(x) = e^{u(x)}$$
$$f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$$

Derivada de funciones exponenciales.

Ejercicios de razonamiento:

- En esta parte se resolverán algunos ejercicios relacionados a la vida real de la derivada de funciones exponenciales:

Encuentre la derivada de los siguientes ejercicios:

El señor Marco Jiménez, se ha comprado un auto nuevo por \$12 000 en la empresa Chevrolet. El valor de este auto después de años, esta dado por la función:

$$V(t) = 12000(0,78)^t$$

Donde "t" es el número de años después de la compra y V(t) es el valor del automóvil en dólares.

¿Cuál es la tasa de depreciación del auto por año?

$$V(t) = 12000(0,78)^t$$

$$V'(t) = 0 \cdot (0,78)^t + 12000 \cdot (0,78)^t \cdot \ln(0,78)$$

$$V'(t) = 12000 \ln(0,78) \cdot (0,78)^t$$

$$V'(1) = 12000 \ln(0,78) \cdot (0,78)^1$$

$$V'(t) = -2325,6$$



El auto se deprecia a una tasa de \$2325,6 por año.



Para encontrar la tasa de depreciación del auto del Sr. Marco, encontramos la derivada de V(t) en 2, que son los años que nos pide el ejercicio.

Derivada de funciones exponenciales.

Consolidación:

Objetivos de esta actividad:

-Evaluar el aprendizaje obtenido en la clase de derivada de funciones exponenciales.

Instrucciones:

-Los ejercicios serán realizados individualmente.
-Será un trabajo en clase.

Encuentre al derivada de los siguientes ejercicios:

$$a) h(x) = \frac{7}{2} x^4 \cdot 10^x$$

$$b) g(x) = \frac{4(x^3 - 7x)}{9}$$

$$c) f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Resuelva el siguiente problema de razonamiento:

En un ambiente de muy malas condiciones ambientales, una colonia de mil bacterias, iniciará su reproducción dos meses después. La función que representa la población de la colonia al variar el tiempo (expresado en meses) viene dada por:

$$P(t) = 1000e^{(t-2)}, t > 2$$

¿Cuál es la tasa de variación de la población al haber pasado 6 meses?



Derivada de funciones exponenciales.

Solucionario:



Encuentre al derivada de los siguientes ejercicios:

a) $h(x) = \frac{7}{2} x^4 \cdot 10^x$

$$h'(x) = \frac{7}{2} \cdot 4x^{4-1} \cdot 10^x \cdot \ln 10$$

$$h'(x) = 14x^3 \cdot 10^x \ln 10$$

$$h'(x) = \ln 10 \cdot 14x^3 \cdot 10^x$$

En este caso se usa la siguiente fórmula de derivación:

$$f(x) = a^x$$

$$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$$

b) $g(x) = \frac{4^{(x^3-7x)}}{9}$

$$g'(x) = \frac{4^{(x^3-7x)} \cdot \ln 4 \cdot (3x^{3-1} - 7)}{9}$$

$$h'(x) = \frac{\ln 4 \cdot (3x^2 - 7) 4^{(x^3-7x)}}{9}$$

Aquí usaremos la fórmula, en donde el exponente es una función:

$$f(x) = a^{u(x)}$$

$$f'(x) = a^{u(x)} \cdot \ln(a) \cdot u'(x)$$

c) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x} \cdot (-1))$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$$

En este último ejercicio, se aplica los dos casos de la función exponencial con base "e":

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f(x) = e^{u(x)}$$

$$f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$$

Derivada de funciones exponenciales.

Solucionario:



Resuelva el siguiente problema de razonamiento:

En un ambiente de muy malas condiciones ambientales, una colonia de mil bacterias, iniciará su reproducción dos meses después. La función que representa la población de la colonia al variar el tiempo (expresado en meses) viene dada por:



$$P(t) = 1000e^{(t-2)}, t > 2$$

¿Cuál es la tasa de variación de la población al haber pasado 6 meses?

$$P'(t) = 1000e^{(t-2)} \cdot t$$

$$P'(t) = 1000t \cdot e^{(t-2)}$$

$$P'(6) = 1000 \cdot 6 \cdot e^{(6-2)}$$

$$P'(6) = 6000 \cdot e^{(4)}$$

$$P'(6) = 327588,9$$

- Para encontrar la tasa de variación de la población de las bacterias, se tiene que hallar la derivada de $P(t)$ en 6 meses.
- Como la función es un exponencial de base "e", se usa al siguiente fórmula de derivación:

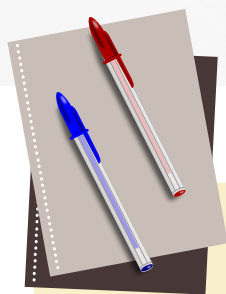
$$f(x) = e^{u(x)}$$

$$f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$$



La población aumenta a una tasa de 378 588,9 bacterias por 6 meses.

Derivada de funciones exponenciales.



Rúbrica de calificación:

-En la siguiente página encontrará una rúbrica de calificación para la tarea planteada.

	Excelente 4	Bien 3	Regular 2	Mal 1
Responsabilidad al hacer el trabajo y no dedicarse a otras actividades.				
Respeto el con sus compañeros.				
Analiza y entiende el ejercicio.				
Existe un procedimiento previo antes de la respuesta.				
Las respuestas son correctas.				
La presentación del trabajo es ordenada y aseada.				
La escritura es clara y sin faltas ortográficas.				

CLASE 8

DERIVADA DE LOGARÍTMOS



Dato curioso?

En los efectos de un tornado encontramos esta curva, los lavabos también dibujan espirales.

Si observamos las margaritas, los girasoles o las hojas de una rosa podemos contemplar familias enteras de espirales logarítmicas.

TICS

Sitio web donde el docente puede encontrar la gráfica de la espiral en forma de simulador.

<https://www.geogebra.org/m/QxJNCgXe>



40 minutos - 1 período

Destreza:

Resolver aplicaciones reales o hipotéticas con ayuda de las derivadas de funciones logarítmicas.



Derivada de Logarítmicos

Anticipación

El docente debe socializar estas propiedades de logaritmos con los estudiantes para la aplicación de ejercicios propuestos.



Función logarítmica del producto.

$$f(x \cdot y) = \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$



<https://www.geogebra.org/m/b2fanP7c#material/Wzr4E58q>



Función logarítmica de la división.

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$



<https://www.geogebra.org/m/b2fanP7c#material/gdq4wYsd>



Función logarítmica de la potencia.

$$f(x^y) = \log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$$



<https://www.geogebra.org/m/b2fanP7c#material/Vvq57pX9>

Derivada de Logarítmos



El profesor debe exponer las fórmulas de las derivadas de logaritmos a los estudiantes, analizando cada parte contenida en la fórmula. Para que posterior el estudiante pueda identificarlas sin problema.

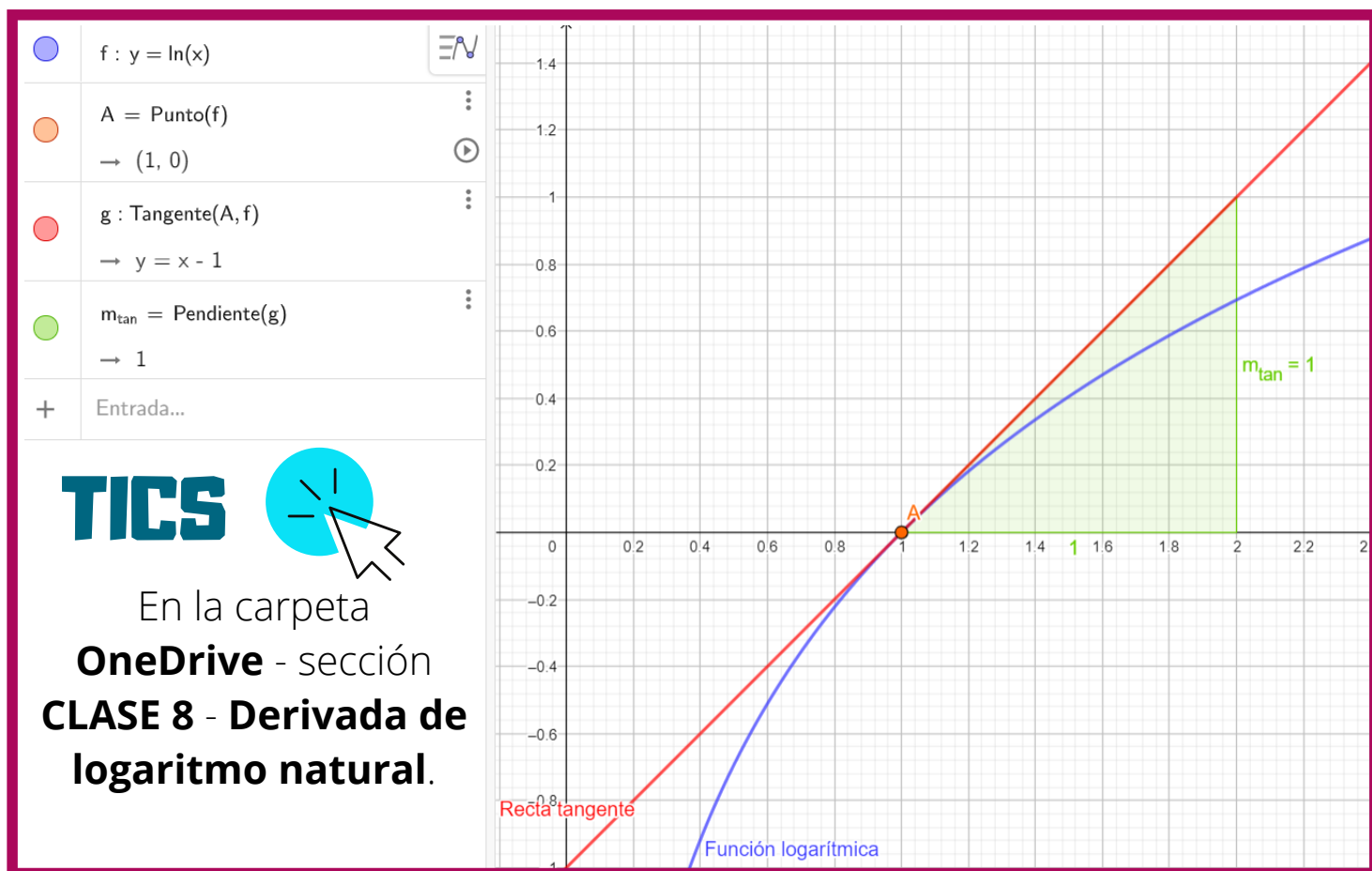
LOGARITMO NATURAL

$$y = \ln f(x) \quad \rightarrow \quad y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$



Demostración de la Fórmula

<https://www.youtube.com/watch?v=XDk7NuTw3Nk>



Derivada de Logarítmos



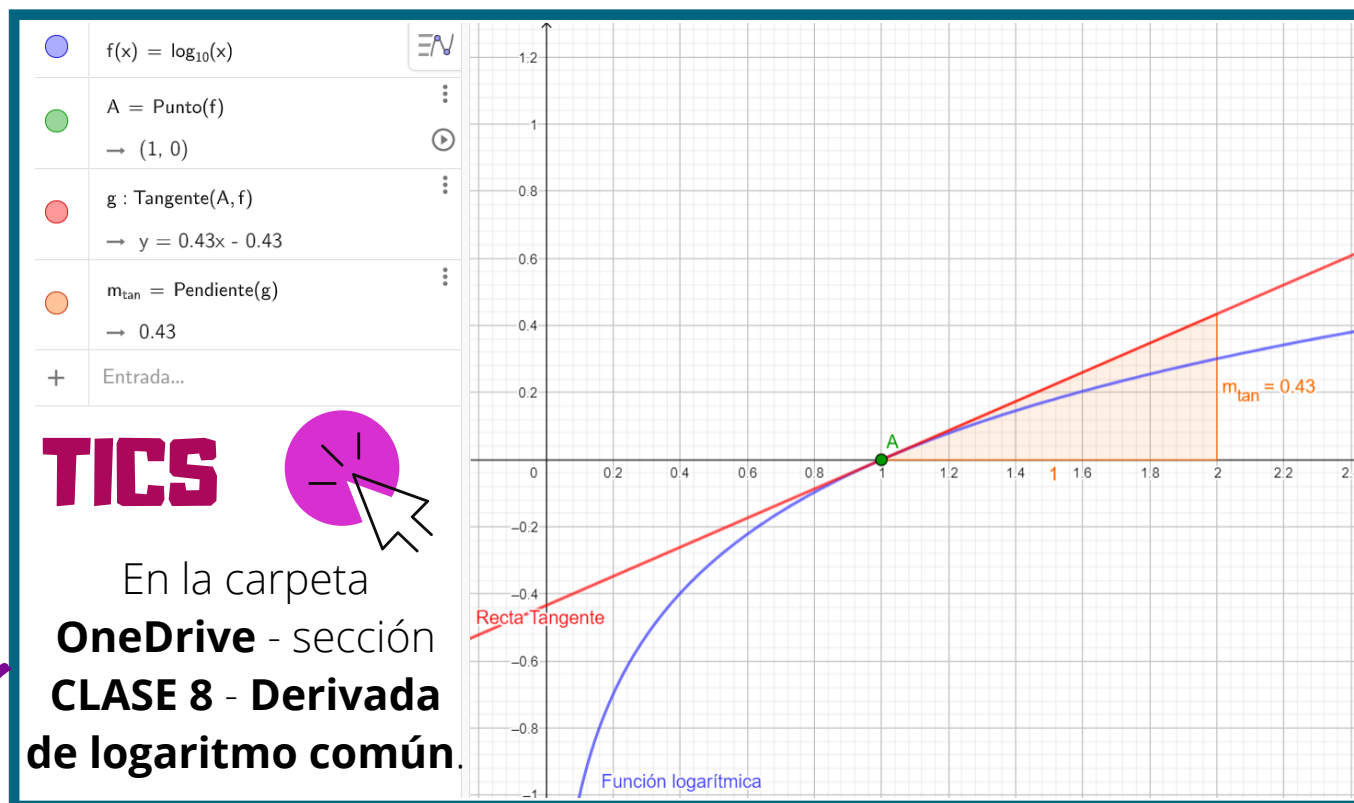
LOGARITMO COMÚN

$$y = \log_a f(x) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{f'(x)}{f(x) * \ln a}$$



Demostración de la Fórmula

<https://www.youtube.com/watch?v=NhAorDp6SIs>



El docente puede hacer uso de las animaciones, al momento que va explicando las fórmulas de la derivada de las funciones logarítmicas e ir analizando conjuntamente con los estudiantes el comportamiento de la derivada (recta tangente) en cada punto de la función.



Derivada de Logarítmos

CONSTRUCCIÓN:

- Solucionar los siguientes ejercicios propuestos paso a paso con el fin de lograr que el estudiante comprenda el procedimiento.

EJERCICIOS DEMOSTRATIVOS

$$y = \log_2(x^4 + 3x)$$

$$y' = \frac{f'(x)}{f(x) * \ln a}$$

$$f(x) = (x^4 + 3x)$$

$$f'(x) = (4x^3 + 3)$$

$$y' = \frac{4x^3 + 3}{(x^4 + 3x)} * \log_2(e)$$

$$y = \ln(1 - x) - \ln(1 + x)$$

$$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$f(x) = (1 - x)$$

$$f'(x) = (-1)$$

$$g(x) = (1 + x)$$

$$g'(x) = (1)$$

$$y' = \frac{-1}{1 - x} - \frac{1}{1 + x}$$

$$y' = \frac{-1 - x - 1 + x}{(1 - x) * (1 + x)} = \frac{-2}{1 - x^2}$$

PROCESO

1. Determinar si la función contiene logaritmo común o neperiano.
2. Establecer la fórmula correcta para derivar la función logarítmica.
3. Identificar los elementos necesarios para reemplazar en la fórmula.
4. Resolver las derivadas por separado de la función.
5. Reemplazar los términos en la función.
6. Agrupar y resolver términos semejantes.

NOTA:

El número de Euler (**e**) equivale a 2.71828 aproximadamente y se emplea en diversas ramas de las Matemáticas, ya que supone la base de los logaritmos naturales. Además es posible transformar un logaritmo común en neperiano; y viceversa, de la siguiente manera.

$$\log_a e = \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}$$

Derivada de Logarítmos

El docente debe compartir con los estudiantes otros casos con operaciones combinadas. Con el fin de aclarar dudas e inquietudes.

El docente para hacer la clase dinámica, puede preguntar a los estudiantes: ¿Qué proceso es correcto aplicar en este ejercicio? Obteniendo la participación y despertando interés de aprender en los estudiantes.

El docente puede recomendar el siguiente video a los estudiantes, con el fin de repasar más ejemplos.
<https://www.youtube.com/watch?v=7opD4hqprSg>

Ejercicios combinados

$$f(x) = \sqrt[3]{\log_4 3x}$$

Para derivar necesitamos mostrar a f como composición de dos funciones derivables

$$h(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$g(x) = \log_4 3x$$

Entonces

$$f(x) = h(g(x)) = \sqrt[3]{\log_4 3x}$$

Derivamos h y g , tomando en cuenta la fórmula para derivar funciones logarítmicas

$$h'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$g'(x) = \frac{3}{3x} \cdot \log_4 e$$

Usamos regla de la cadena y desarrollamos

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(\log_4 3x)^2}} \cdot \frac{3}{3x} \cdot \log_4 e = \frac{\log_4 e}{3x\sqrt[3]{(\log_4 3x)^2}}$$

$$f(x) = x^5 \cdot \ln x$$

Notamos que la función es un producto de funciones

$$u = x^5$$

$$v = \ln x$$

Derivamos tomando en cuenta la fórmula para derivar funciones logarítmicas

$$u' = 5x^4$$

$$v' = \frac{1}{x}$$

Usamos regla del producto

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Sustituimos y desarrollamos

$$f'(x) = 5x^4 \cdot \ln x + x^5 \cdot \frac{1}{x} = 5x^4 \cdot \ln x + x^4 = x^4(5 \ln x + 1)$$

Derivada de Logarítmos



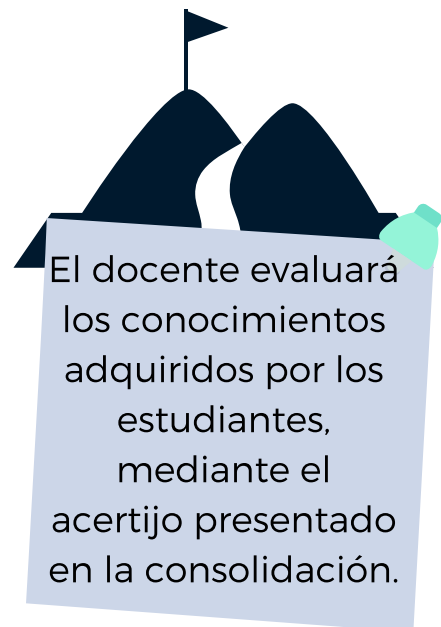
CONSOLIDACIÓN

Objetivos de esta actividad:

- Evaluar conocimientos sobre el tema de derivadas de funciones logarítmicas.

Instrucciones:

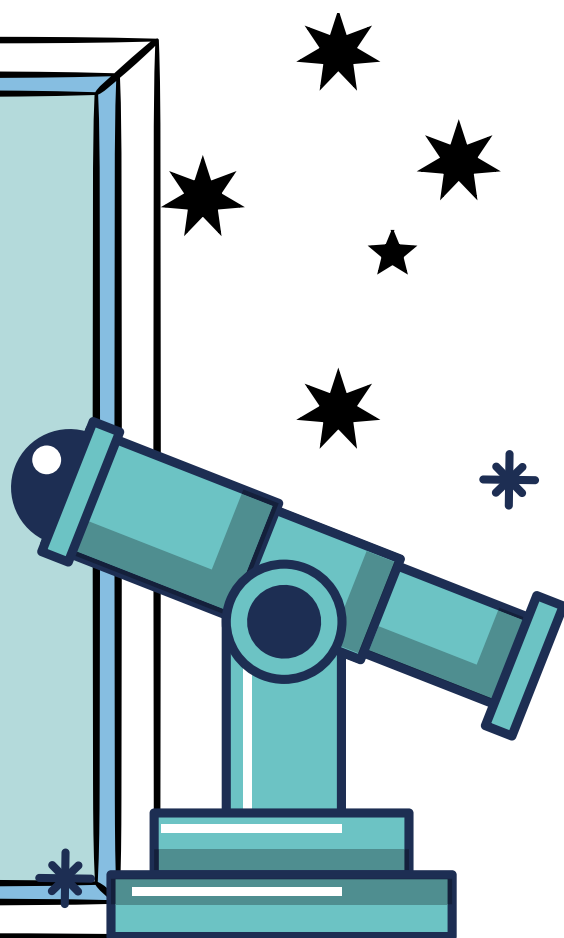
- Los ejercicios serán realizados en el aula, para que el maestro pueda ayudar a los alumnos si tienen alguna duda.
- La actividad será realizada de manera individual.



El docente evaluará los conocimientos adquiridos por los estudiantes, mediante el acertijo presentado en la consolidación.

Acertijo

Un astrónomo quiere medir la magnitud estelar más alta entre 4 estrellas. Para ello los cálculos que efectúa son relacionados con funciones logarítmicas, que al derivar obtiene una ecuación única en dónde existe una variable que debe ser reemplazada con el valor de 2.5 por haber realizado sus cálculos iniciales con tablas de logaritmos correspondiente a esa base. ¿Qué estrella tiene la magnitud estelar más alta en los cálculos del astrónomo?



Derivada de Logarítmos



Cálculos de las funciones

$$E_1(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$$

$$E_2(x) = \frac{1}{\ln(x-1)}$$

$$E_3(x) = \log(x-3)^2$$

$$E_4(x) = \ln\sqrt{x^5 - x^3 + 3}$$

SOLUCIÓN

Primera estrella

$$E_1(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$$

$$E_1'(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} * (2x - 3)$$

$$E_1'(x) = \frac{1}{(2.5)^2 - 3(2.5) + 2} * (2(2.5) - 3)$$

$$E_1'(x) = \frac{4}{3} * 2 = \frac{8}{3} = 2.667 u$$

Segunda estrella

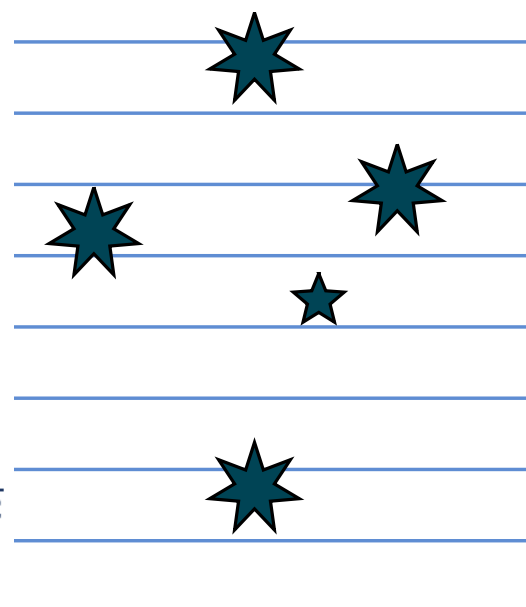
$$E_2(x) = \frac{1}{\ln(x-1)}$$

$$E_2'(x) = \frac{-\frac{1}{(x-1)}}{\ln(x-1)^2}$$

$$E_2'(x) = -\frac{1}{(x-1) * \ln(x-1)^2}$$

$$E_2'(2.5) = -\frac{1}{(2.5-1) * \ln(2.5-1)^2}$$

$$E_2'(2.5) = -4.055 u$$



Derivada de Logarítmos

SOLUCIÓN

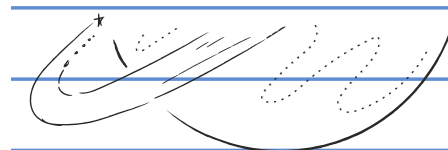
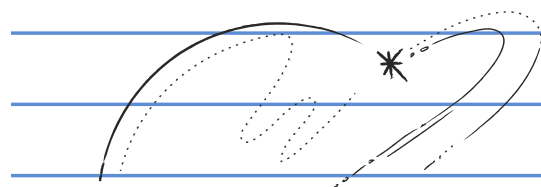
Tercer estrella

$$E_3(x) = \log(x - 3)^2$$

$$E_3'(x) = \frac{2(x - 3)}{(x - 3)^2 \ln(10)}$$

$$E_3'(2.5) = \frac{2(2.5 - 3)}{(2.5 - 3)^2 \ln(10)}$$

$$E_3'(2.5) = \frac{-1}{-0.5756} = -1.7371 u$$



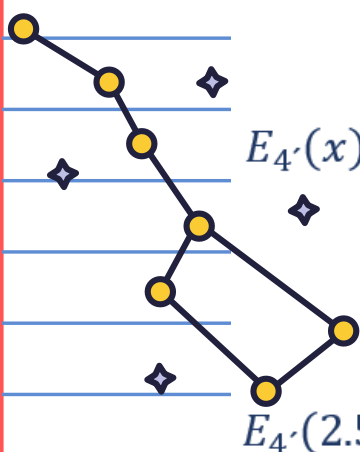
Cuarta estrella

$$E_4(x) = \ln \sqrt{x^5 - x^3 + 3}$$

$$E_4'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^5 - x^3 + 3}} * \frac{1}{2\sqrt{x^5 - x^3 + 3}} (5x^4 - 3x^2)$$

$$E_4'(x) = \frac{5x^4 - 3x^2}{x^5 - x^3 + 3}$$

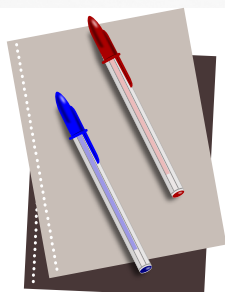
$$E_4'(2.5) = \frac{5(2.5)^4 - 3(2.5)^2}{(2.5)^5 - (2.5)^3 + 3} = \frac{5650}{2721} = 2.0764 u$$



Respuesta

La estrella con mayor magnitud estelar es la primera.

Derivada de Logarítmos



Rúbrica de calificación:



-En esta parte, se encuentra planteada la rúbrica de calificación para la actividad sugerida anteriormente.

	Excelente 4	Bien 3	Regular 2	Mal 1
Responsabilidad al realizar el acertijo y no dedicarse a otras actividades.				
Respetan el espacio y tiempo con sus compañeros.				
Aplica correctamente las fórmulas revisadas durante la clase.				
Existe un procedimiento previo antes de la respuesta.				
Las respuestas son correctas.				
La presentación del trabajo es ordenada y aseada.				
La escritura es clara y sin faltas ortográficas.				

CLASE 9

DERIVADA DE FUNCIONES

TRIGONOMÉTRICAS



Destrezas:

- El docente estará preparado para identificar y resolver problemas sobre la derivada de las funciones trigonométricas.

¿SABÍAS QUE

Las funciones trigonométricas son usadas para transformar un diseño arquitectónico en un gran atractivo turístico. Las construcciones engloban temas como estructura y diseño tomando en cuenta las particularidades de monumentalidad y solidez que atrae la vista del espectador.



Derivada de las funciones trigonométricas.

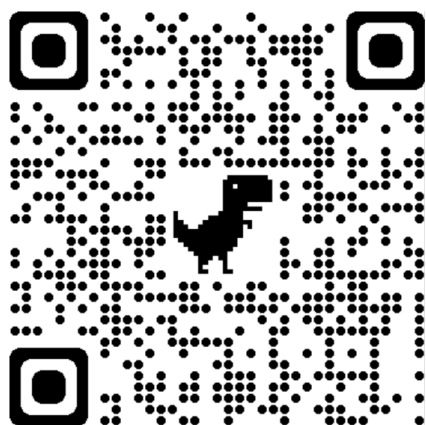
Anticipación:

Duración de la clase: 80 min



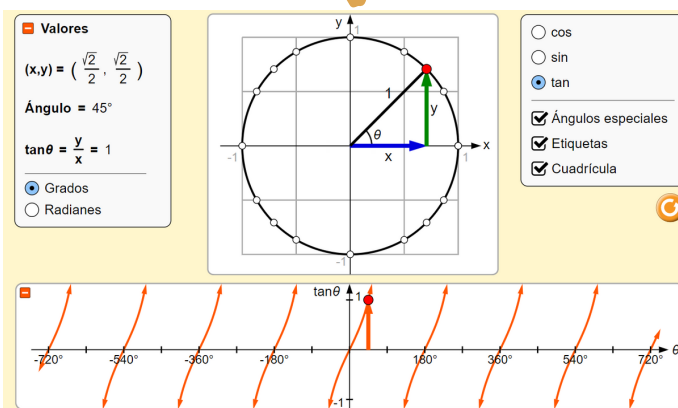
El docente hará un pequeño recordatorio de las funciones trigonométricas más importantes:

Y para ello puede usar un simulador de gráficas, usando un proyector y la pizarra :



Para ingresar al simulador puede escanear el código QR o ir al siguiente link:

https://phet.colorado.edu/sims/html/trig-tour/latest/trig-tour_es.html

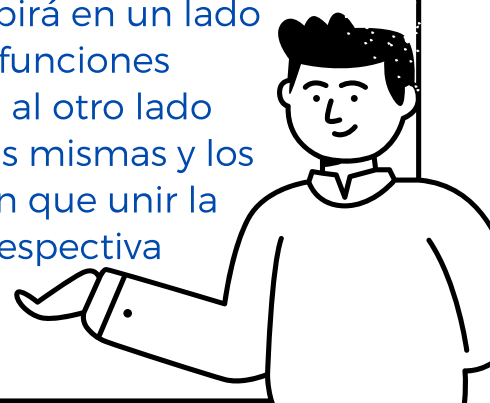


Dentro de este simulador, se puede observar como se van formando las gráficas de las funciones trigonométricas (sen, cos y tan), mediante la formación de un triángulo dentro de un círculo con diferentes ángulos.



En caso que el docente **no pueda tener la facilidad de las herramientas tecnológicas**, puede hacer la anticipación de la siguiente manera:

El maestro escribirá en un lado de la pizarra las funciones trigonométricas, al otro lado las gráficas de las mismas y los alumnos tendrán que unir la función con su respectiva gráfica.



Derivada de las funciones trigonométricas.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \cos x$$

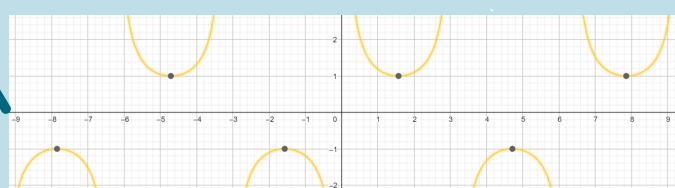
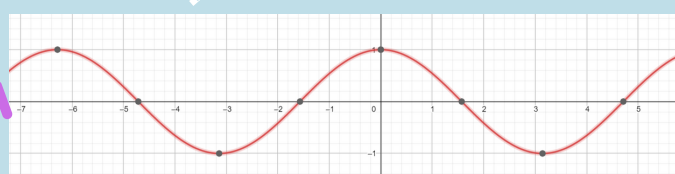
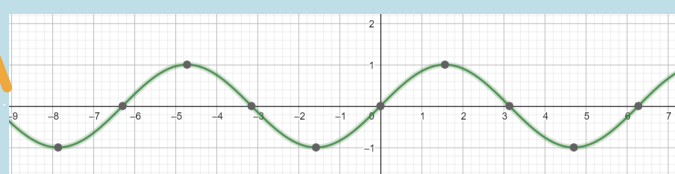
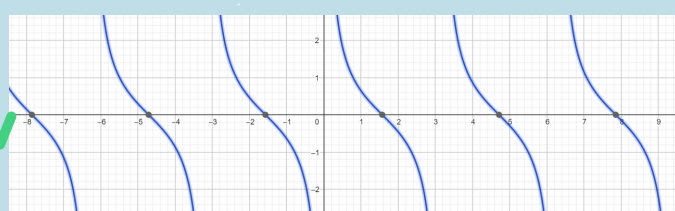
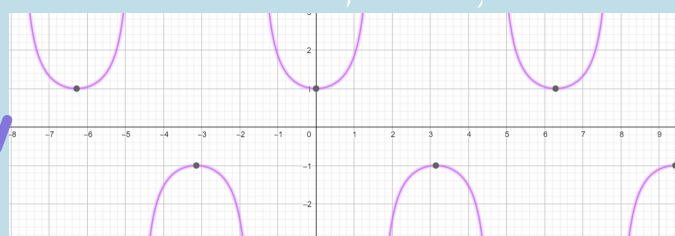
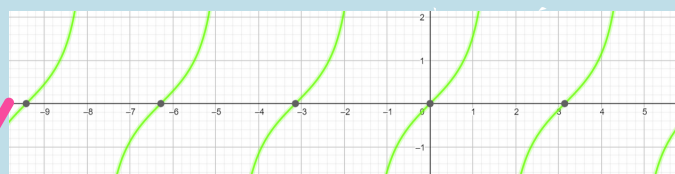
$$f(x) = \tan x$$

$$f(x) = \csc x$$

$$f(x) = \sec x$$

$$f(x) = \cot x$$

GRÁFICOS



Derivada de las funciones trigonométricas.

Construcción:



Después de recordar las funciones trigonométricas y sus gráficas, pasamos a mostrar las derivadas de las mismas.

IMPORTANTE

En esta parte, ya no hay demostraciones porque serían muy largas entonces nos vamos a concentrar en aplicar las fórmulas dentro de ejercicios relacionados con la vida diaria.

FUNCIÓN

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \tan(x)$$

$$f(x) = \csc(x)$$

$$f(x) = \sec(x)$$

$$f(x) = \cot(x)$$

DERIVADA

$$f'(x) = \cos(x)$$

$$f'(x) = -\sin(x)$$

$$f'(x) = \sec^2(x)$$

$$f'(x) = -\csc(x) * \cot(x)$$

$$f'(x) = \sec(x) * \tan(x)$$

$$f'(x) = -\csc^2(x)$$

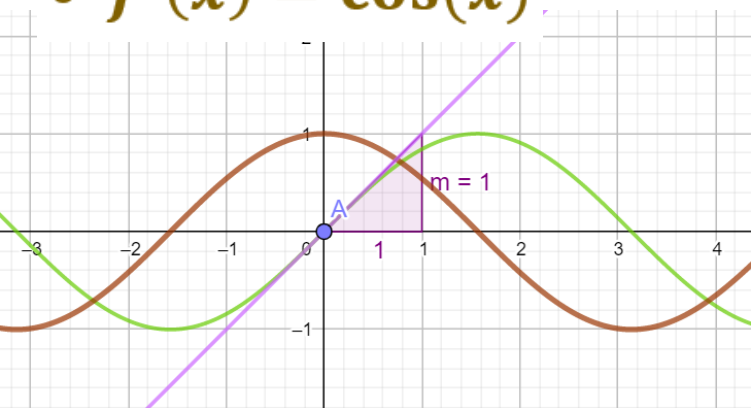
Derivada de las funciones trigonométricas.

DERIVADAS TRIGONOMÉTRICAS Y SUS GRÁFICAS

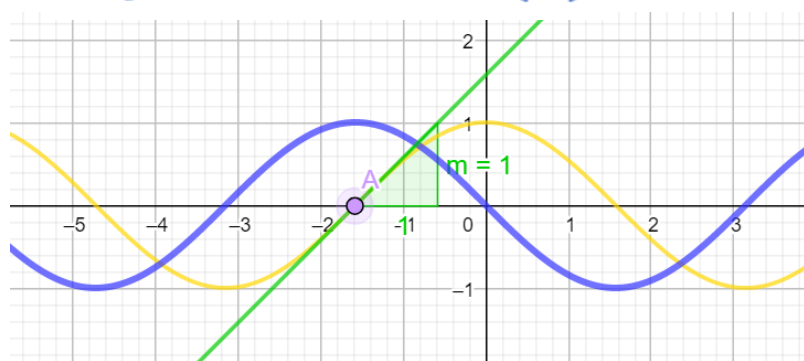
GeoGebra



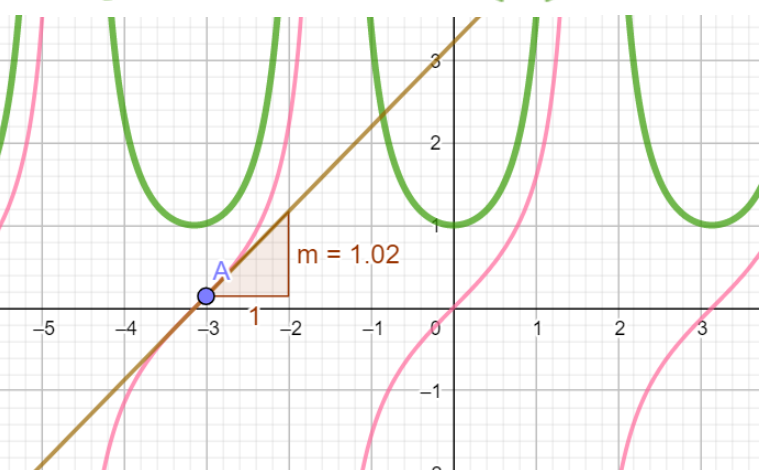
- $f(x) = \sin(x)$
- $f'(x) = \cos(x)$



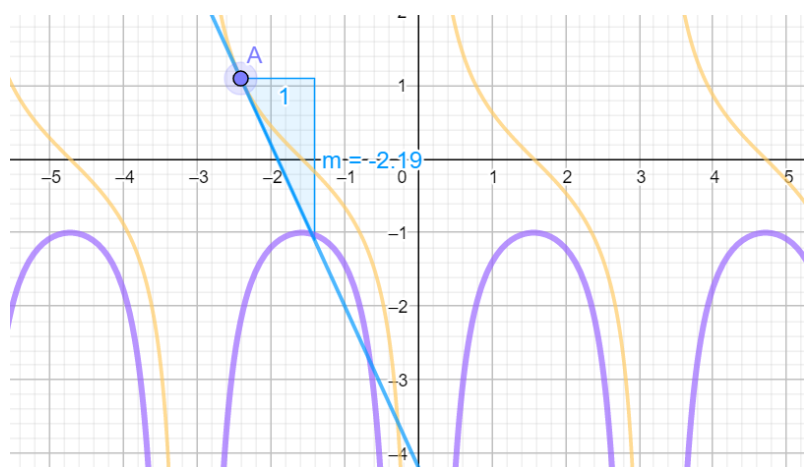
- $f(x) = \cos(x)$
- $f'(x) = -\sin(x)$



- $f(x) = \tan(x)$
- $f'(x) = \sec^2(x)$

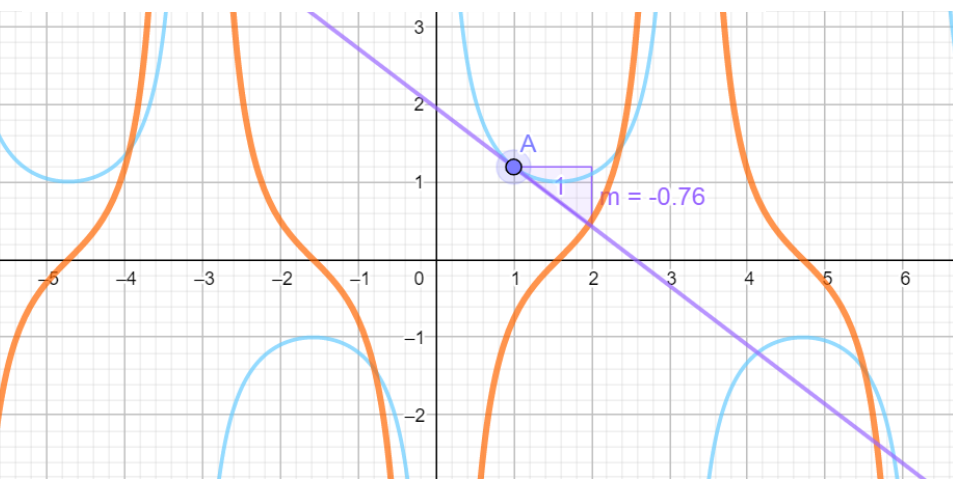


- $f(x) = \cot(x)$
- $f'(x) = -\csc^2(x)$

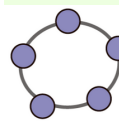
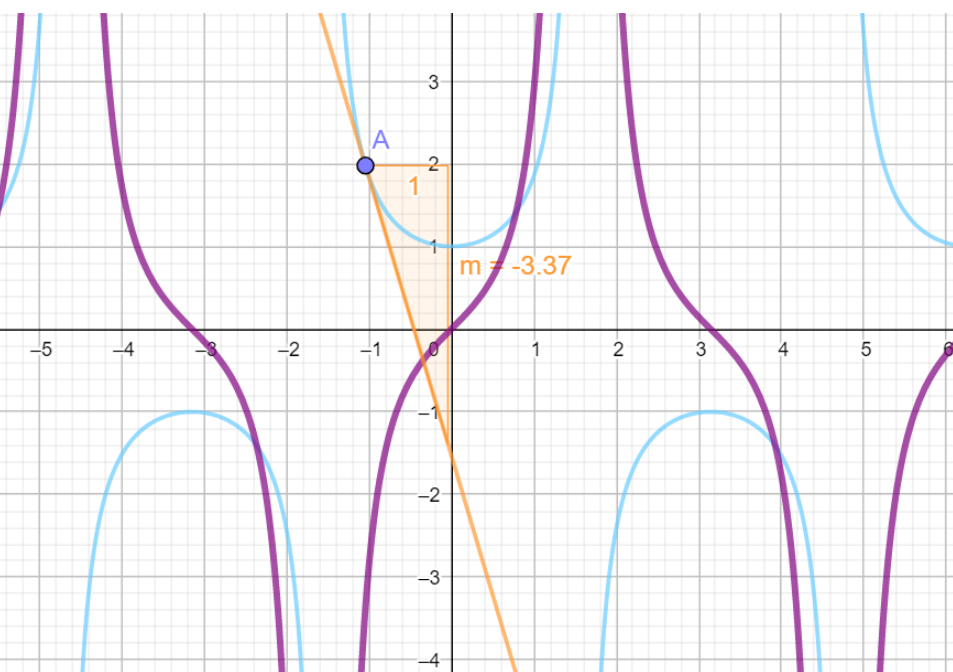


Derivada de las funciones trigonométricas.

- $f(x) = \csc(x)$
- $f'(x) = -\csc(x) * \cotg(x)$

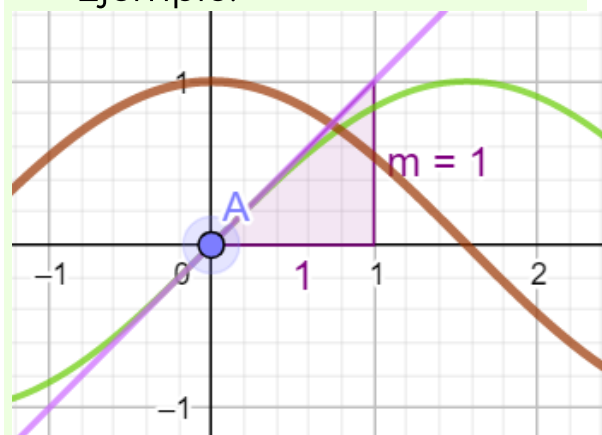


- $f(x) = \sec(x)$
- $f'(x) = \sec(x) * \tan(x)$



- Estas simulaciones se encuentran dentro de la Carpeta: CLASE 9.

- Cada simulación muestra la pendiente de la función original en un punto móvil, que al moverse su pendiente va formando la derivada de esa función.
- Ejemplo:



- Aquí la función original es el seno (verde), nos fijamos en la pendiente que cuando $x=0$, $m=1$, ese es un punto de la derivada del seno (café), y si se sigue moviendo el punto A, seguiremos encontrando más puntos de la derivada de la función.
- Con la ayuda de un proyector el maestro mostrará una simulación para cada una de las funciones trigonométricas.

Derivada de las funciones trigonométricas.



A continuación se resolverán ejercicios sobre las derivadas trigonométricas, dentro y fuera de la vida real.

En este ejercicio, se aplica la regla de la cadena, y la derivada de la función seno.

Aquí también aplicamos la regla de la cadena, y la derivada de la función coseno.



Obtener las derivadas de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \text{Sen}(3x + 5)$

$$f'(x) = (\cos(3x + 5))(3 + 0)$$

$$f'(x) = 3 \cos(3x + 5)$$

2. $f(x) = \cos^3 4x$

$$f'(x) = 3 \cos^2(4x) \cdot (-\text{sen}(4x)) \cdot 4$$

$$f'(x) = -12 \cos^2(4x) \cdot \text{sen}(4x)$$

Resuelva los siguientes ejercicios de razonamiento:

- La relación entre la distancia recorrida en metros por un móvil y el tiempo en segundos esta descrita por la siguiente función:

$$f(t) = \cos(5t^2 + 7t + 1)$$

Se pide encontrar la velocidad con la que el móvil se mueve cuando ha recorrido dos segundos:

Los alumnos deben saber que la derivada del espacio recorrido es la velocidad:

$$f'(t) = -\text{sen}(5t^2 + 7t + 1) \cdot (10t + 7)$$

$$v(t) = -(10t + 7) \text{sen}(5t^2 + 7t + 1)$$

Derivada de las funciones trigonométricas.



La nueva función es la velocidad, entonces reemplazamos los dos segundos y sacamos la velocidad en ese instante.

$$v(t) = -(10t + 7) \operatorname{sen}(5t^2 + 7t + 1)$$

$$v(2) = -(10(2) + 7) \operatorname{sen}(5(2)^2 + 7(2) + 1)$$

$$v(2) = 11.56 \text{ m/s}$$

- La posición de un carrusel de una montaña rusa esta definida de la siguiente forma: $s(t) = \operatorname{sen}(t)$, encuentre:

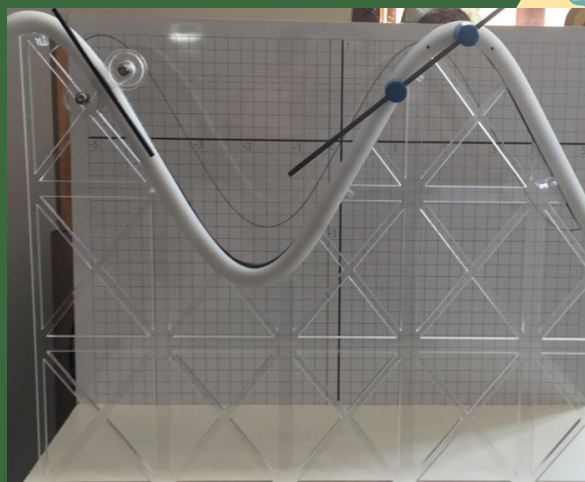
- ¿En qué instante el carrusel tiene una velocidad de $2/3 \text{ m/s}$?
- ¿Cuándo la aceleración es cero?



a)

Como nos pide "el instante a los 5 m/s ", derivamos una vez y reemplazamos los datos:

- $s'(t) = \cos(t)$
- $v(t) = \cos(t)$
- $\frac{2}{3} = \cos(t)$
- $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = t$
- $t = 48,2 \text{ s}$



El maestro usará la montaña rusa para mostrar la función por la que fue formada y el movimiento del carrusel.

Derivada de las funciones trigonométricas.

b)

En este literal los estudiantes aprenderán que la segunda derivada de la posición es la aceleración, por lo tanto derivamos y reemplazamos.

- $v(t) = \cos(t)$
- $v'(t) = -\text{sen}(t)$
- $a(t) = -\text{sen}(t)$
- $0 = -\text{sen}(t)$
- $t = 0 \text{ s}$

Derivada de las funciones trigonométricas.



Consolidación:



Se evaluará el aprendizaje de los alumnos en ejercicios sencillos y prácticos.

Objetivos de esta actividad:

- Evaluar el tema sobre las derivadas trigonométricas.

Instrucciones:

- Los ejercicios serán realizados individualmente en clase o para la casa, según el maestro disponga.
- La forma de evaluación será de manera escrita (cuaderno de trabajo).



EJERCICIOS PLANTEADOS

Relacione cada función con su derivada correspondiente:

- $f(x) = \sec(x)$ • $f'(x) = -\sin(x)$
- $f(x) = \tan(x)$ • $f'(x) = -\csc^2(x)$
- $f(x) = \cos(x)$ • $f'(x) = \sec^2(x)$
- $f(x) = \csc(x)$ • $f'(x) = \cos(x)$
- $f(x) = \sin(x)$ • $f'(x) = -\csc(x) * \operatorname{ctg}(x)$
- $f(x) = \cot(x)$ • $f'(x) = \sec(x) * \tan(x)$

Encuentre las derivadas de las siguientes funciones, aplicando lo aprendido en clase.

- a) $f(x) = \sqrt[3]{\sin(x)}$ b) $g(x) = \frac{1}{2} \cos^2(5x)$
- c) $h(x) = 3 \tan 2x$

Derivada de las funciones trigonométricas.

d) Determine la velocidad y aceleración que un auto tiene a los 6 segundos de su movimiento, si el mismo está dado por la siguiente función:

$$s(t) = \text{ctg}(-9t^2 + 7t)$$

Solucionario:



A continuación se presenta el solucionario de los ejercicios planteados, para una mayor facilidad de calificación.

EJERCICIOS PLANTEADOS

Relacione cada función con su derivada correspondiente:

- | | |
|--------------------|--------------------------------------|
| • $f(x) = \sec(x)$ | • $f'(x) = -\sin(x)$ |
| • $f(x) = \tan(x)$ | • $f'(x) = -\csc^2(x)$ |
| • $f(x) = \cos(x)$ | • $f'(x) = \sec^2(x)$ |
| • $f(x) = \csc(x)$ | • $f'(x) = \cos(x)$ |
| • $f(x) = \sin(x)$ | • $f'(x) = -\csc(x) * \text{ctg}(x)$ |
| • $f(x) = \cot(x)$ | • $f'(x) = \sec(x) * \tan(x)$ |

Encuentre las derivadas de las siguientes funciones, aplicando lo aprendido en clase.

a) $f(x) = \sqrt[3]{\sin(x)}$
 $f'(x) = [\sin(x)]^{1/3}$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \sin(x)^{-2/3} \cdot \cos(x)$$

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{3\sqrt[3]{\sin^2(x)}}$$

Derivada de las funciones trigonométricas.



Encuentre las derivadas de las siguientes funciones, aplicando lo aprendido en clase.

b) $g(x) = \frac{1}{2} \cos^2(5x)$

$$g'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cos(5x) [-\operatorname{sen}(5x)](5)$$

$$g'(x) = -5 \cos(5x) \cdot \operatorname{sen}(5x)$$



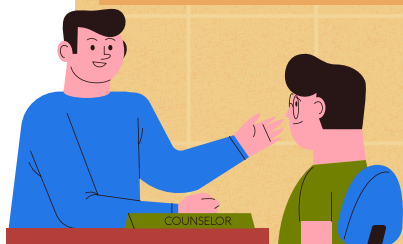
IMPORTANTE:

En algunos ejercicios, es posible usar algunas identidades trigonométricas.

c) $h(x) = 3 \tan 2x$

$$h'(x) = 3 \sec^2(2x)(2)$$

$$h'(x) = 6[1 + \tan^2(2x)]$$



En el último ejercicio, los estudiantes pueden pedir ayuda al maestro para no confundirse.

d) Determine la velocidad y aceleración que un auto tiene a los 6 segundos de su movimiento, si el mismo está dado por la siguiente función:

$$s(t) = \operatorname{ctg}(-9t^2 + 7t)$$

■ **Velocidad: (primera derivada de la posición)**

$$s'(t) = -\operatorname{csc}(-9t^2 + 7t) \cdot (-18t + 7)$$

$$v(t) = \frac{18t - 7}{\operatorname{sen}(-9t^2 + 7t)}$$

$$v(6) = \frac{18(6) - 7}{\operatorname{sen}(-9 \cdot 6^2 + 7 \cdot 6)}$$

Derivada de las funciones trigonométricas.

$$v(6) = 103,26 \text{ m/s}$$

- Aceleración: (segunda derivada de la posición)

$$v'(t) = \frac{18\text{sen}(-9t^2 + 7t) - \cos(-9t^2 + 7t) \cdot (-18t + 7)}{\text{sen}^2(-9x^2 + 7x)}$$

$$a(t) = \frac{18\text{sen}(-9t^2 + 7t) + (18t - 7)\cos(-9t^2 + 7t)}{\text{sen}^2(-9x^2 + 7x)}$$

$$a(6) = \frac{18\text{sen}(-9 \cdot 6^2 + 7 \cdot 6) + (18 \cdot 6 - 7)\cos(-9 \cdot 6^2 + 7 \cdot 6)}{\text{sen}^2(-9 \cdot 6^2 + 7 \cdot 6)}$$

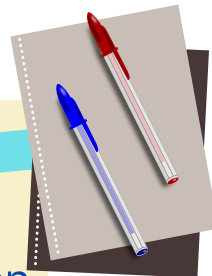
$$a(6) = 40,35 \text{ m/s}^2$$

Derivada de las funciones trigonométricas.

Rúbrica de calificación:

-En la siguiente página encontrará una rúbrica de calificación para la tarea planteada.

-Puede ser que los estudiantes no terminen su tarea en clase, por lo tanto se la podrá enviar a la casa.



	Excelente 4	Bien 3	Regular 2	Mal 1
Responsabilidad al hacer el trabajo y no dedicarse a otras actividades.				
Respetan el espacio y tiempo con sus compañeros.				
Analiza y entiende el ejercicio.				
Existe un procedimiento previo antes de la respuesta.				
Las respuestas son correctas.				
La presentación del trabajo es ordenada y aseada.				
La escritura es clara y sin faltas ortográficas.				

CLASE 10

PROYECTO FINAL



Objetivo:

- Verificar los conocimientos adquiridos por los estudiantes durante el tema de derivadas.

A continuación se presentan varias opciones a elegir que el docente puede usar para sintetizar el tema de los conceptos de derivadas, las opciones presentadas se encuentran en forma de juego o una dinámica didáctica, en la que participen todos los estudiantes:

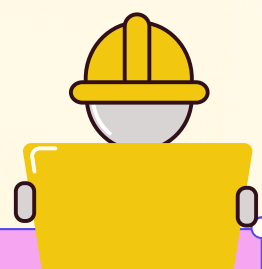
1. MAQUETAS DIDÁCTICAS



Para este proyecto los estudiantes deben armar una maqueta, o un prototipo pequeño de un material didáctico en donde puedan explicar el tema de concepto de derivada, propiedades o sus aplicaciones en la vida real.

INSTRUCCIONES:

- Se calificará la creatividad de los estudiantes.
- Utilización de material reciclable.
- Presentación y dominio del tema.
- El aseo de la material didáctico.
- Trabajo en equipo.
- Funcionamiento del material didáctico.



2. JUEGOS VIRTUALES

Para este juego, el maestro necesitará de un proyector e internet. En la



siguiente página web encontrará una variedad de juegos relacionados con las derivadas, para elegirlo según su conveniencia:

<https://www.cerebriti.com/juegos-de-derivadas/tag/mas-recientes/>

INSTRUCCIONES:



- Se elegirá uno de los juegos.
- Se formarán equipos de 2 a 3 personas máximo.
- El maestro proyectará el juego y los grupos deberán ir poniendo sus respuestas escritas, dentro de una caja.
- Se debe tener en cuenta, el grupo que responda primero.
- El grupo ganador serán quienes hayan respondido rápida y correctamente.

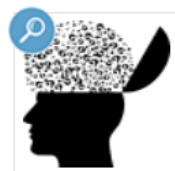


Creado por Mario C

> Derivando: Deriva las funciones

Tipo de juego: Encuentra la Pareja

#funciones #derivadas



Creado por edrianis h

> Mis primeros pasos para derivar

Tipo de juego: Selecciona las Respuestas Correctas

#derivada #derivadas #constante



Creado por Daniela O

> Derivada de un producto

Tipo de juego: Palabras Secretas

#productos #producto #derivada #derivadas



Creado por Menganita

> Cálculo: Reconoce la imágenes

Tipo de juego: Encuentra la Pareja

#ecuaciones #cálculo #funciones #derivadas



Creado por Daniela O

> Derivada de una suma

Tipo de juego: Encuentra la Pareja

#suma #sumas #funciones #derivadas



Creado por Mariana T

> Noción de derivada

Tipo de juego: Tipo Test

#funciones #derivada #derivadas

Los ejercicios planteados en los juegos, son prácticos y teóricos, sin embargo no se encuentran todos los temas vistos, y todos los ejercicios son fáciles de resolver.



3. EL TESORO PERDIDO



En el siguiente juego con la temática sobre la búsqueda de un tesoro, el maestro podrá evaluar los aprendizajes obtenidos por los estudiantes de una forma divertida.

El juego puede presentarse:

- 1.- En una pancarta impresa, que el docente la puede colocar en la pizarra.
- 2.- Dentro del **One drive** en la carpeta: **Clase 10**, para esto el maestro necesitará un proyector.

Acertijos:

1

El pirata para llegar a la cascada, necesita recorrer una trayectoria que viene dada por la derivada de la función:

$$f(x) = e^{x^2+2x} + \cos(x)$$

2

El pirata va a descender la cascada solo si el valor absoluto de su pendiente es menor o igual a 5.

3

Para cruzar el puente, el pirata necesita derivar la siguiente función que indica por dónde debe seguir.

$$g(x) = \ln(6x^3)$$

4

La trayectoria que llega hacia el volcán activo está establecida por la derivada de la función:

$$h(x) = (x - x^2)^2$$

7

Para poder abrir el cofre, el pirata empleará la clave de 3 dígitos que resulta de reemplazar el valor absoluto de la pendiente de la cascada, en la función derivada obtenida en el último tramo (6).



INSTRUCCIONES:

- Se formarán equipos de 3 o 4 estudiantes.
- El juego puede ser presentado, ya sea en pancarta o mediante un proyector.
- Para llegar al tesoro, los equipos tendrán que pasar por los acertijos, que serán ejercicios sobre derivadas.
- Los acertijos los explicará el docente de forma general para que los estudiantes puedan resolver.
- Cada grupo tendrá un delegado, que al momento de resolver el acertijo en menor tiempo anotará el resultado en la pizarra o pancarta.
- El docente verificará que el resultado sea correcto para continuar con el siguiente acertijo, caso contrario se dará la oportunidad a otro equipo.
- El equipo que llegue al tesoro en primer lugar, ganará el juego.

5

¿Qué velocidad necesita emplear el pirata para cruzar el volcán activo sin ningún peligro en 2 horas?

$$v(x) = h'(x)$$

6

El último tramo del mapa que tiene que recorrer el pirata, cumple con la derivada del producto entre las funciones derivadas del tramo 3 y 4.



Solucionario:

1

$$f(x) = e^{x^2+2x} + \cos(x)$$

$$f'(x) = e^{x^2+2x} * (2x + 2) - \text{sen}(x)$$

$$f'(x) = (2x + 2)e^{x^2+2x} - \text{sen}(x)$$

2

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{-25 - 0}{5 - 0} = \frac{-25}{5}$$

$$m = -5 = |5|$$

3

$$g(x) = \ln(6x^3)$$

$$g'(x) = \frac{18x^2}{6x^3} = \frac{3}{x}$$

4

$$h(x) = (x - x^2)^2$$

$$h'(x) = 2(x - x^2)(1 - 2x)$$

$$h'(x) = (2x - 2x^2)(1 - 2x)$$

$$h'(x) = 2x - 4x^2 - 2x^2 + 4x^3$$

$$h'(x) = 2x - 6x^2 + 4x^3$$

5

$$v(x) = h'(x)$$

$$v(2) = 2(2) - 6(2)^2 + 4(2)^3$$

$$v(2) = 4 - 24 + 32 = 12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

6

$$i(x) = g'(x) * h'(x)$$

$$i'(x) = (g'(x))' * h'(x) + (h'(x))' * g'(x)$$

$$i'(x) = \left(\frac{-3}{x^2}\right)' * (2x - 6x^2 + 4x^3) + (2 - 12x + 12x^2)' * \left(\frac{3}{x}\right)$$

$$i'(x) = \left(-\frac{6}{x^3} + 18 - 12x\right) + \left(\frac{6}{x} - 36 + 36x\right)$$

$$i'(x) = 24x - 18$$

7

$$\text{CÓDIGO} = 24(5) - 18$$

$$\text{CÓDIGO} = 102$$

Ganador

Para el equipo ganador el maestro tendrá como premio un puntaje adicional o puede ponerse de acuerdo con sus estudiantes de generar otro premio.



Los recursos tecnológicos mencionados en el desarrollo de las clases, se encuentran disponibles en la carpeta de OneDrive. La carpeta es gratuita y de libre acceso para las personas que hagan uso de esta guía didáctica. Para poder acceder a los recursos y simulaciones contenidos en la guía, el usuario deberá ingresar al link presentado a continuación:

<https://1drv.ms/u/s!AmG58-KTyZlxmBZRe2wbF6Qqk6xl?e=GdzfBt>

ÍNDICE DE IMÁGENES

CARÁTULA:

Montaña rusa. Página . Recuperado de <https://n9.cl/78nev>

CLASE 1:

Bote y techo de casa con pendiente. Página. Recuperado de <https://n9.cl/yn726>

Pendiente ascendente. Página . Recuperado de <https://n9.cl/uv5l3>

No pesados. Página . Recuperado de <https://n9.cl/oa4xq>

Tipos de pendiente. Vídeo. Recuperado de <https://n9.cl/33qOd>

CLASE 2:

Límite. Página. Recuperado de <https://n9.cl/1j0e2>

Niños jugando. Página. Recuperado de <https://n9.cl/ab9rid>

Límite en una curva. Página. Recuperado de <https://n9.cl/n0of>

Finanzas. Página. Recuperado de <https://n9.cl/dl4y5>

Petróleo. Página. Recuperado de <https://n9.cl/4whz>

Coronavirus. Página. Recuperado de <https://n9.cl/hil7f>

Cóndor. Página. Recuperado de <https://n9.cl/uk7g>

Personas trabajando. Página. Recuperado de <https://n9.cl/rswnv>

Tarjeta de crédito. Página. Recuperado de <https://n9.cl/g3zjs>

CLASE 3:

Montaña rusa. Página . Recuperado de <https://n9.cl/hl7w4>

Cohete. Página . Recuperado de <https://n9.cl/niai7>

Tranvía de Cuenca. Página . Recuperado de <https://n9.cl/vwl16>

CLASE 4:

Newton. Página. Recuperado de <https://n9.cl/q6h8w>

Función constante. Página. Recuperado de <https://n9.cl/0bmd6>

Partes de un monomio. Video. Recuperado de <https://n9.cl/r8hb5>

Geogebra. Página Recuperado de <https://n9.cl/063cc>

CLASE 5:

Puente. Página . Recuperado de <https://n9.cl/w955h>

Lanzamiento parabólico. Página . Recuperado de <https://n9.cl/sdzbe>

Calculadora. Página . Recuperado de <https://n9.cl/ve8zt>

Autobus. Página . Recuperado de <https://n9.cl/tjr9y>

CLASE 6:

Cohete. Página. Recuperado de <https://n9.cl/yq8ig>

CLASE 7:

Arco en la noche. Página. Recuperado de <https://n9.cl/zanr4>

Arco en el día. Página. Recuperado de <https://n9.cl/6nce4>

Geogebra. Página Recuperado de <https://n9.cl/063cc>

Vehículo. Página. Recuperado de <https://n9.cl/zztb>

Bacterias. Página. Recuperado de <https://n9.cl/idxju>

CLASE 8:

Girasol. Página . Recuperado de <https://n9.cl/eylmy>

Caracol. Página . Recuperado de <https://n9.cl/sdzbe>

CLASE 9:

Edificio. Página. Recuperado de <https://n9.cl/uewwdb>

Puente. Página. Recuperado de <https://n9.cl/25asu>

Edificio con árboles. Página. Recuperado de
<https://n9.cl/d5ek9>

Geogebra. Página Recuperado de <https://n9.cl/063cc>

CLASE 10:

Mapa de pirata. Página . Recuperado de <https://n9.cl/wrsjl>



CONCLUSIONES

Mediante la aplicación de una técnica de investigación, en este caso entrevista, a docentes de matemáticas se demostró que algunos docentes carecen de la aplicación de recursos didácticos y tecnológicos para la enseñanza en el tema de concepto de derivadas, por ende, sus prácticas educativas tienden a ser tradicionales, desfavoreciendo al aprendizaje de los estudiantes.

Por lo tanto, la propuesta del desarrollo de una guía didáctica de enseñanza de conceptos de derivadas contiene clases constructivas en donde el docente podrá encontrar distintos recursos educativos como: material concreto, software matemático, juegos, ejercicios, los cuales promueve una educación constructivista y ayudan al proceso de enseñanza, en el que el docente con la ayuda de estos recursos participa como orientador y los estudiantes también con el apoyo de los mismos materiales actúan como autores de su propio aprendizaje.

Entre uno de los recursos didácticos más notables que se encuentran dentro de la guía es la montaña rusa, que servirá como apoyo de enseñanza al docente en más de una clase, así mismo en los recursos tecnológicos están: GeoGebra el cual ayudará al docente con las distintas demostraciones y simulaciones, vídeos, juegos en línea, juegos grupales, etc.; además de esto se podrá visualizar ejercicios de razonamiento relacionados con la vida real y todo esto de fácil acceso y uso para que el docente pueda aplicar con sus estudiantes.



RECOMENDACIONES

Concientizar a docentes sobre los beneficios acerca del modelo constructivista, cuyas estrategias de enseñanza se pueden aplicar haciendo uso de material concreto, recursos tecnológicos, etc., que hoy en día la tecnología nos pone al alcance; dejando así, la enseñanza tradicional en decadencia, ya que lo que hace es limitar el proceso de enseñanza - aprendizaje, dejando al docente sin participación en clases y estudiantes con dudas por resolver.

Los contenidos o temas que el docente desee transmitir al estudiante deben ser explicados con claridad, así mismo que los conceptos sean definidos en palabras sencillas, con el fin de que el estudiante alcance las destrezas requeridas en el tema de estudio.

La presente guía didáctica es un material diseñado para la enseñanza de conceptos básicos de derivadas, por lo que se recomienda usar con estudiantes que no tengan conocimientos acerca de estos conceptos, o tengan conocimientos previos como la teoría de límites. Para ello el docente debe analizar si la guía didáctica cumple con las necesidades de aprendizaje del estudiante.

El uso de una guía didáctica mejora el proceso de enseñanza - aprendizaje, por lo que se recomienda incentivar a docentes y estudiantes a usarla para tener en clases un ambiente participativo y democrático, permitiendo socializar conocimientos y aprendizajes.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ardila, E. (2008). Desventajas de la educación tradicional. Recuperado de <http://psicologiaaprendizaje2008.blogspot.com/2008/10/desventajas-de-la-educacion-tradicional.html>
- Ávila, R. (2017). Técnicas para el aprendizaje. Recuperado de https://azslide.com/tecnicas-para-el-aprendizaje_5a38c84f1723dda84f955409.html
- Burbano, J. (2017). Análisis del Currículo 2010 y Currículo 2016 en la asignatura de Estudios Sociales de Educación General Básica Superior en el Sistema Educativo Ecuatoriano. [Trabajo de investigación previo a la obtención del Título de Licenciada en Ciencias de la Educación Mención Ciencias Sociales, Universidad Central del Ecuador]. <http://www.dspace.uce.edu.ec/bitstream/25000/13988/1/T-UCE-0010-CS029-2017.pdf>
- Bravo, F. (2020). Importancia del currículo, texto y docente en la clase de matemática. *Revista Científica UISRAEL*, 7(12), 113-124. <https://revista.uisrael.edu.ec/index.php/rcui/article/view/310/151>
- Bravo, F., Trelles, C., & Barrazueta, J. (2017). Reflexiones sobre la evolución de la clase de matemáticas en el bachillerato ecuatoriano. *INNOVA Research Journal*, 2(7), 1-12. <https://doi.org/10.33890/innova.v2.n7.2017.218>
- Castillo, S. (2008). PROPUESTA PEDAGÓGICA BASADA EN EL CONSTRUCTIVISMO PARA EL USO ÓPTIMO DE LAS TIC EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA. *Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), 171-194. <http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v11n2/v11n2a2.pdf>
- Delgado, J., Vera, M., Cruz J., & Pico, J. (2018). EL CURRÍCULO DE LA EDUCACIÓN BÁSICA ECUATORIANA: UNA MIRADA DESDE LA ACTUALIDAD. *Revista Cognosis. Revista de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación*, 3(4), 47-66. <https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Cognosis/article/view/1462/1718>
- Edacom. (10 de julio de 2019). ¿Qué es la enseñanza constructivista? [Mensaje en un blog]. Recuperado de <https://blog.edacom.mx/que-es-constructivismo>
- Fernández, I., Riveros, V., & Montiel, G. (2017). Software educativo y las funciones matemáticas. Una estrategia de aprobación. Recuperado de <https://www.redalyc.org/jatsRepo/737/73753475002/html/index.html>



- Ferreya, A. (2017). Motivación académica: su relación con el estilo motivacional del docente y el compromiso del estudiante hacia el aprendizaje. [Tesis de maestría, ESCUELA DE POSGRADO PUCP].
http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/9118/Ferreya_%20D%c3%adaz_Motivaci%c3%b3n_acad%c3%a9mica_relaci%c3%b3n.pdf?sequence=6&isAllowed=y
- García, L. (2009). La guía didáctica. Editorial del BENED. Recuperado de <https://www2.uned.es/catedraunesco-ead/editorial/p7-2-2009.pdf>
- Guamán, V. (2013). Métodos didácticos para la enseñanza de límites y derivadas. (Tesis de pregrado). Universidad de Cuenca, Ecuador.
- Hernández S. (2007). El modelo constructivista con las nuevas tecnologías: aplicado en el proceso de aprendizaje. Recuperado de <https://educra.cl/el-modelo-constructivista-con-las-nuevas-tecnologias-aplicado-en-el-proceso-de-aprendizaje/>
- Hernandez, S. (2008). El modelo constructivista con las nuevas tecnologías: aplicado en el proceso de aprendizaje. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento*, 26-35. Recuperado de <http://rusc.uoc.edu/rusc/ca/index.php/rusc/article/download/v5n2-hernandez/335-1252-2-PB.pdf>
- Hernández, R., Orrego, R., & Quiñones, S. (2018). Nuevas formas de aprender: La formación docente en el uso de las TIC, Propósitos y Representaciones 6(2), 671-701. Recuperado de <http://www.scielo.org.pe/pdf/pyr/v6n2/a14v6n2.pdf>
- Lara, J. (1997). Estrategias para un aprendizaje significativo-constructivista. Ediciones Universidad de Salamanca. 15, 29-50. Repositorio documental de la Universidad de Salamanca.
- Llanos, M. (2019). Guía didáctica para el aprendizaje de operaciones con números enteros utilizando las tic. [Tesis de maestría, Universidad tecnológica Israel].
<http://repositorio.uisrael.edu.ec/bitstream/47000/2307/1/UISRAEL-EC-MASTER-EDUC-378.242-2019-039.pdf>
- Luján, I. (2016). Recursos didácticos del Ministerio de Educación. Máster y doctorado en didácticas específicas. <https://www.uv.es/uvweb/master-investigacion-didactiques-especificques/es/blog/recursos-didacticos-del-ministerio-educacion->



1285958572212/GasetaRecerca.html?id=1285973234220#:~:text=Un%20recurso%20did%C3%A1ctico%20es%20cualquier,forma%20m%C3%A1s%20clara%20al%20alumno.

Mata, Z. (2011). Ventajas y desventajas de ciertas estrategias. Recuperado de <http://educando-distancia.blogspot.com/p/ventajas-y-desventajas-de-ciertas.html>

Moreta A, Las Matas de Farfán R. D. (2011). Estrategias constructivistas para el aprendizaje auténtico. Recuperado de <https://innovatedocente.webnode.es/products/estrategias-constructivistas-para-el-aprendizaje-autentico/>

Ortiz, D. (2015). El constructivismo como teoría y método de enseñanza Sophia. Recuperado de <https://www.redalyc.org/pdf/4418/441846096005.pdf>

Rivero, M. N., & Mendoza, A. P. (2005). Aprendizaje autodirigido y desempeño académico. *Tiempo de educar*, 6(11), 115-146

Saldarriaga, P., Bravo, G., Loor, M., (2016). La teoría constructivista de Jean Piaget y su significación para la pedagogía contemporánea. *Dominio de las ciencias*. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5802932>

Valverde, X. (2017). La evaluación tradicional vs. evaluación alternativa en la FAREM-Carazo. Recuperado de <https://www.lamjol.info/index.php/torreon/article/view/5563/5265>

Vargas, E. (11 de mayo de 2015). Destrezas con criterio de desempeño. La educación básica en el Ecuador. <https://sites.google.com/site/laeducacionbaesicaenecuador/system/app/pages/recentChanges>

Wordpress. (27 de mayo de 2008). Material Concreto. El Rincón matemático. <https://pedagogas.wordpress.com/2008/05/27/material-concreto/#:~:text=De%20esta%20forma%20podemos%20decir,los%20estudiantes%20tengan%20con%20estos>



UNIVERSIDAD DE CUENCA

ANEXOS



Anexo 1. Cuestionario para entrevista a docentes.



UNIVERSIDAD DE CUENCA
FACULTAD DE FILOSOFÍA, LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
CARRERA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN EN LA ESPECIALIZACIÓN
DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

ENTREVISTA A DOCENTES DE MATEMÁTICAS DE LOS TERCEROS DE
BACHILLERATO DE LA UNIDAD EDUCATIVA “LA INMACULADA”

Introducción:

En la siguiente entrevista, la información que usted brinde será netamente con la finalidad de obtener información sobre las metodologías y recursos usados por el docente, además será completamente confidencial. Para ello solicitamos que sus respuestas sean en base a la realidad presencial y con experiencias que usted ha tenido al momento de impartir clases con el tema de derivadas. De antemano le agradecemos por su tiempo, sinceridad y colaboración.

Objetivo:

Evaluar el estado actual de la preparación pedagógica, el uso de recursos didácticos, metodologías y métodos basados en el constructivismo que los docentes usan para impartir su clase de derivadas.

Preguntas:

- 1) ¿Cómo ha sido su experiencia en el área de matemáticas, específicamente con el tema de derivadas?
- 2) ¿Qué orden o estructura tiene su clase para desarrollar el tema de derivadas?
- 3) ¿Como usted planifica sus clases, por ejemplo: qué metodología usa?
- 4) ¿Qué resultados ha tenido al usar estos métodos o estrategias?
- 5) ¿Ha logrado usted implementar algún recurso didáctico dentro de la clase de derivadas, de ser así cuéntenos cuál o cuáles han sido y cómo ha ayudado dentro de su clase?
- 6) ¿Qué piensa sobre lo que sugiere el MINEDUC, acerca de la educación constructivista?
- 7) ¿Al momento que aplica el modelo constructivista siente que el tiempo es suficiente para poder conseguir los temas necesarios?
- 8) ¿Qué dificultad ha tenido al enseñar el tema de derivadas?



UNIVERSIDAD DE CUENCA



UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA, LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
CARRERA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN EN LA ESPECIALIZACIÓN
DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

- 9) ¿Cuál es la manera en la que usted evalúa el conocimiento de los estudiantes en el tema de derivadas?
- 10) ¿Qué piensa usted sobre una guía didáctica para la enseñanza de derivadas, en donde se encuentre detallado qué metodologías y recursos usted podría usar para ayudarlo en sus clase de derivadas?