ESTRATEGIAS PARA LA ENSEÑANZA DE PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN

TEXTO PARA EL ESTUDIANTE

BORIS MARCELO TENEMPAGUAY PAREDES
WILIAM WILFRIDO GORDILLO COLLAHUAZO

UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

Universidad de Cuenca

Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación

Carrera de Matemáticas y Física

DIRECTOR:

Ing. Fabián Bravo Guerrero

AUTORES:

Boris Marcelo Tenempaguay Paredes
Wiliam Wilfrido Gordillo Collahuazo

Estrategias para la enseñanza de Productos Notables y Factorización

Presentación

Centrándonos en la teoría constructivista y los fundamentos del aprendizaje significativo, se ha elaborado la siguiente guía didáctica de dedicada al estudiante, la cual tiene como objetivo ayudar a la comprensión y eliminar las dudas que se presentan durante el proceso de aprendizaje de los productos notables y factorización.

La guía didáctica cuenta con la planificación de 9 clases, de las cuales 3 son de productos notables y 6 de factorización, las mismas incluyen ejercicios lúdicos y contextualizados, aplicaciones de los productos notables, métodos para factorizar trinomios, ejercicios que involucran el trabajo grupal e individual, uso de material didáctico para reforzar los contenidos. Además conjuntamente con el docente y su apoyo activo, se podrá elaborar los diferentes conceptos mediante la resolución de ejercicios, haciendo uso de la observación y reflexión.

PRODUCTOS NOTABLES

Cuadrado de la suma y diferencia de un binomio

$(a+b)^2$ $(a-b)^2$

!SABÍAS QUE¡

Los productos notables son operaciones algebraicas que no necesitan ser desarrolladas paso a paso, ya que con la ayuda de ciertas reglas de los mismos se los pueden resolver de manera inmediata.

Existen diversos casos de productos notables tales como los siguientes:

- Cuadrado de la suma de un binomio
- Cuadrado de la diferencia de un binomio
- Producto de la suma por la diferencia de dos binomios
- Cubo de la suma de un binomio
- Cubo de la diferencia de un binomio

Recordemos lo siguiente

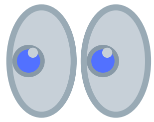
- En la multiplicación no importa el orden en que se multiplica, ejemplo ab=ba, 2*3=3*2, a esto se denomina "propiedad conmutativa".
- Cuando se multiplica no es necesario el signo de multiplicación solo si son: letras a*b=ab, letras y números 2*a=2a, 2*sin(x)=2sin(x).
- Cuando se multiplica es necesario colocar el signo de multiplicación si esas cantidades son números 2*3≠23.

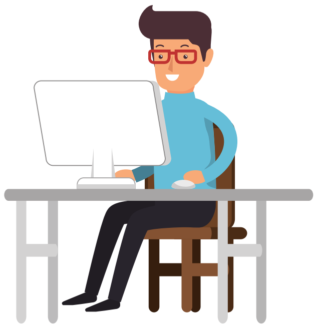
CUADRADO DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE UN BINOMIO

Actividades para la casa

Estimado estudiante a continuación se le presenta, la expresión y regla del cuadrado de la suma y diferencia de un binomio.

Nota: La expresión y la regla mostrada puede ser correcta o incorrecta, para ello usted deberá investigar ya sea online, libros, foros, etc. y verificarla.





Sugerencias para realizar la investigación en la web.

https://gerardosd.files.wordpress.com/2009/09/ejercicios-para-nivelacion.pdf

https://yoquieroaprobar.es/_pdf/32155.pdf

Sugerencias para realizar la investigación en libros.

Álgebra Elemental Moderan de Mancil, volumen 1

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Expresión del cuadrado de la suma de un binomio.

Regla del cuadrado de la suma de un binomio

El cuadrado de la suma de un binomio es igual a, el cuadrado del primer término, más el doble producto del primer por el segundo término, más el cuadrado del segundo término.

$$(a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Expresión del cuadrado de la diferencia de un binomio.

Regla del cuadrado de la diferencia de un binomio

El cuadrado de la diferencia de un binomio es igual a, el cuadrado del primer término, más el doble producto del primer por el segundo término, más el cuadrado del segundo término.

Después de haber investigado conteste las siguientes preguntas

1.¿Son correctas las expresiones mostradas anteriormente?

Cuadrado de la suma de un binomio ....

Cuadrado de la diferencia de un binomio ....

2.Argumente su respuesta desarrollando paso a paso la expresión del cuadrado de la suma y diferencia de un binomio.

$(a+b)^2$

Su regla es:

....

....

....

....

$(a-b)^2$

Su regla es:

....

....

....

....

Nota: Una vez quede comprendido como se obtiene la regla del cuadrado de la suma y diferencia de un binomio, se recomienda memorizar estas reglas.

Actividades en clase

....

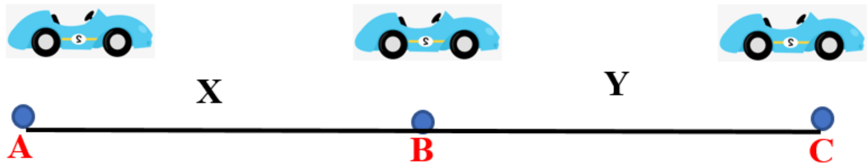
Escribamos una regla para este caso particular.

....

....

....

....



Un automóvil recorre desde el punto A hasta el punto B una distancia “**X**”, luego de ello recorre desde el punto B hasta el punto C una distancia “**Y**”

¿Qué distancia recorrió el automóvil?

Respuesta: Recorrió una distancia “**X+Y**”

Cuadrado de la suma de un binomio

¿Cómo se calcula el área de un cuadrado?

Área del cuadrado..

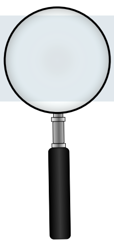
Ejemplo...

¿Cómo se calcula el área de un rectángulo?

Área del rectángulo..

Ejemplo...

!!Sabías que¡¡
El cuadrado de un binomio también se lo puede relacionar con las áreas de figuras geométricas planas " cuadrados y rectángulos"



Analice la figura 1 y responda las siguientes preguntas

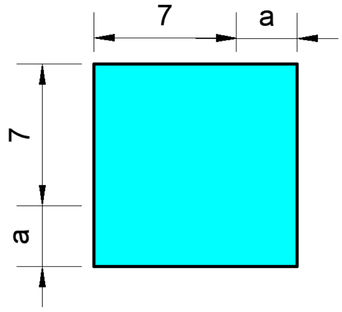


Figura 1

¿Cuál es la medida del lado del cuadrado?

....

¿Cómo se calcularía el área de este cuadrado?

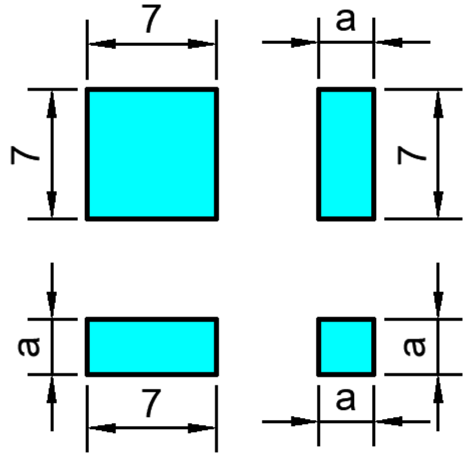
....

¿Existe algún parecido entre la fórmula para calcular el área del cuadrado, con la expresión matemática del cuadrado de la suma de un binomio?

.............¿por qué?...

....

Desarrolle, la expresión que obtuvo para encontrar el área de la figura 1 (se sugiere hacer uso de la regla del cuadrado de la suma de un binomio), identifique que partes corresponden a las áreas de cuadrados y rectángulos, anótelos en las figuras.



En base a lo realizado escriba con sus palabras una interpretación para el cuadrado de la suma de un binomio **"relacionándolo con áreas"**.

....

....

Escriba con su docente la interpretación del cuadrado de la suma de un binomio (relacione con áreas).

....

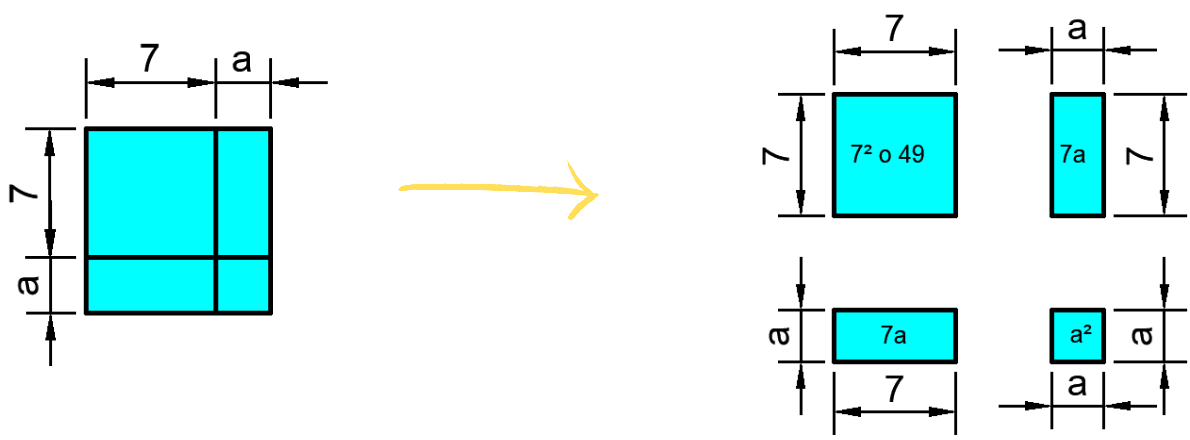
....

....

....

La imagen resume lo realizado

Cuadrado de la suma de un binomio	***Cuadrado de la suma de un binomio desarrollado***
$(7+a)^2$	$7^2 + 2*7*a + a^2$



Cuadrado de la diferencia de un binomio.

Observe la figura 1.1 y conteste los siguientes enunciados.

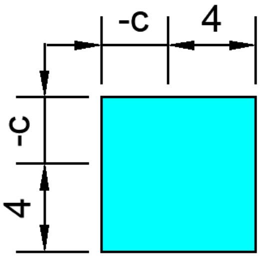
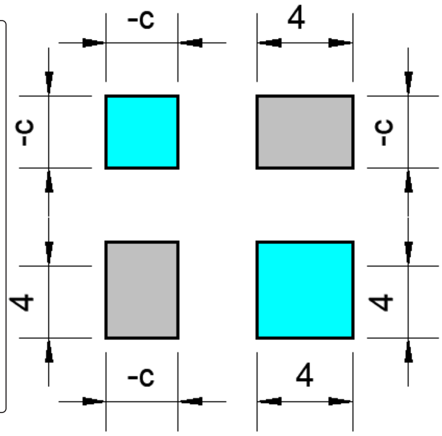


figura 1.1

¿Cuál es la medida del lado del cuadrado?.............................
¿Cúál es la expresión para calcular su área............................

¿La expresión tiene algún parecido a la diferencia del cuadrado de un binomio?
........¿Por qué? ....
....

Desarrolle la expresión que obtuvo, para encontrar el área del cuadrado de la figura 1.1 (se sugiere hacer uso de la regla del cuadrado de la diferencia de un binomio).
Identifique qué expresiones corresponden a las áreas de cuadrados y rectángulo.



¿Cuántas áreas negativas tenemos? (escriba cuales son y a que figura geométrica pertenecen)
....

Escriba con su docente la interpretación del cuadrado de la diferencia de un binomio (relacione con áreas).
....
....
....
....
.

Escriba con su docente la interpretación del cuadrado de la diferencia de un binomio (relacione con áreas).

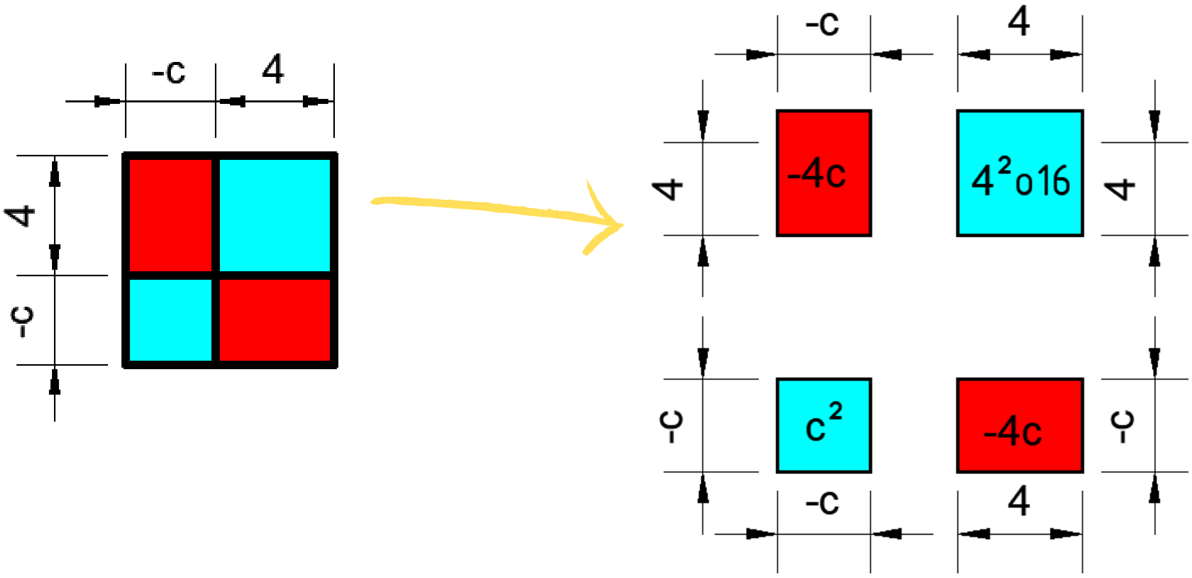
....

....

....

La imagen resume lo realizado

Cuadrado de la diferencia de un binomio	***Cuadrado de la diferencia de un binomio desarrollado***
$(4-c)^2$	$4^2 - 2*4*c + c^2$



Se sugiere ingresar al siguiente enlace y observar otro método alterno para resolver el binomio y trinomio al cuadrado.
https://www.youtube.com/watch?v=1FdkTwMfMh0
https://www.youtube.com/watch?v=mlD-4eYufN4

!Sabías que¡

Una aplicación del cuadrado de la suma y diferencia de un binomio, es ayudar a transformar una multiplicación difícil en una más fácil.

Calcular $(11)^2$

Se descompone al número 11 en dos números cuya multiplicación sea más fácil efectuar, ejemplo $10 + 1 = 11$

$$(11)^2 = (10+1)^2$$

$(10+1)^2$ se aplica la regla del cuadrado de la suma de un binomio

$$(10+1)^2 = 10^2 + 2*10*1 + 1^2$$

$$(10+1)^2 = 100 + 20 + 1$$

$$(10+1)^2 = 121$$

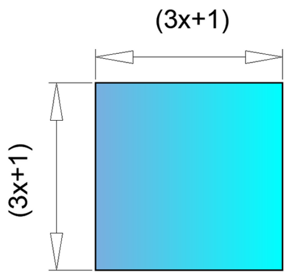
$$\text{Entonces } (11)^2 = (10+1)^2 = 121$$

Tarea en clase

Haciendo uso de la aplicación del cuadrado de la suma o diferencia de un binomio multiplique lo siguiente

$$(39)^2$$

Calcule y desarrolle el área del siguiente cuadrado



COMPLE CON LA AYUDA DE SU PROFESOR

CUADRADO DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE UN BINOMIO		
POSITIVO	NEGATIVO	INTERESANTE

Resuelva el Test 3 del siguiente enlace, e imprima su resultado para la siguiente clase.

http://manualalgebraico.blogspot.com/2013/09/auto-evaluacion-de-productos-notables.html

Auto evaluación de productos notables

A continuación tienes algunos test sobre productos notables para que lo resuelvas interactivamente. Debes reolverlos, te permitirán reforzar tu aprendizaje.

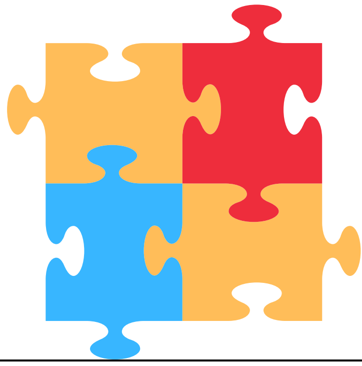
Test N° 1, elaborado por Carlos Tiznado en ThatQuiz
Test N° 2, elaborado por Blanca Madinabeitia en ThatQuiz.
Test N° 3, elaborado por J. Antonio Redondo Pino, en ThatQuiz.
Test N° 4, elaborado por Juan Araoz Portella, en ThatQuiz.
Test N° 5, elaborado por Alfonso Navarro Restrepo, en ThatQuiz.
Test N° 6, elaborado por Alejandro Castro, en ThatQuiz.
Test N° 7, elaborado por Juan Carlos Ortega, en ThatQuiz.
Test N° 8, elaborado por Miguel Angel Perez Ruiz.

Rompecabezas

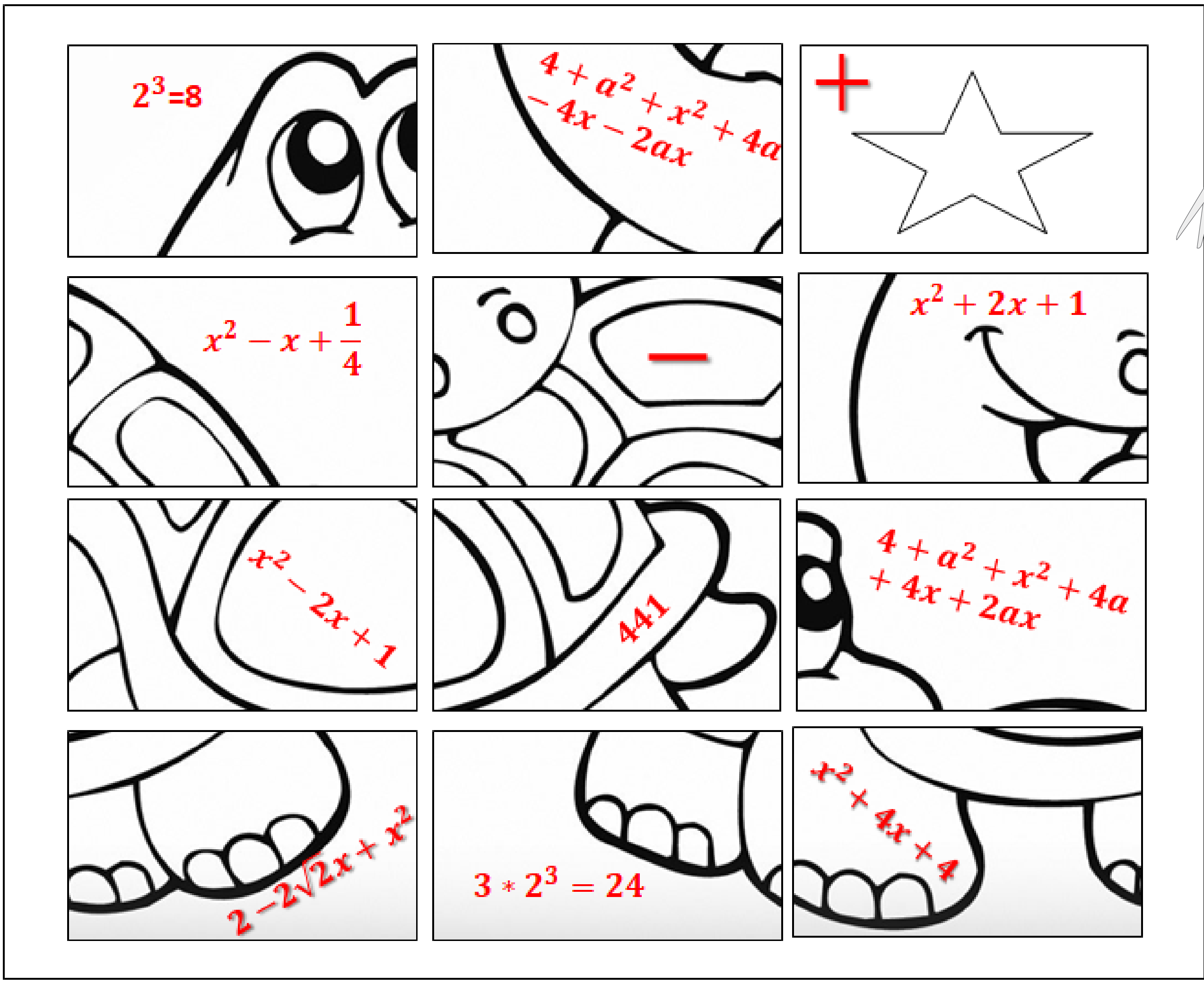
Resuelva los siguientes ejercicios y pegue la imagen con la respuesta correspondiente.

Nota:

- Las imágenes se encuentran en la página siguiente.
- Pegue las imágenes de tal manera que se pueda observar la resolución de los ejercicios, o resuelvalos en otra hoja.



$2*2*2$	$(2+a+x)^2$	$(-)(-)$
$(x+1)^2$	$(+)(-)$	$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$
$(2-a+x)^2$	$(x-1)^2$	$(21)^2$
$3*2*2*2$	$(-2-x)^2$	$(\sqrt{2}-x)^2$


2^3=8
$4+a^2+x^2+4a$
$-4x-2ax$
$+$
$x^2-x+\frac{1}{4}$
$-$
x^2+2x+1
x^2-2x+1
441
$4+a^2+x^2+4a$
$+4x+2ax$
$2-2\sqrt{2}x+x^2$
$3*2^3=24$
x^2+4x+4

Respondamos lo siguiente, referente a la clase del cuadrado de la suma y diferencia de un binomio.
Me gusto la forma en que aprendí este tema...................¿por qué?...
....
....

Me gusto investigar el tema por mi cuenta...................¿por qué?..
qué?...
....
....

Me intereso, saber que el cuadrado de la suma y diferencia de un binomio se lo puede relacionar con áreas de cuadrados y rectángulos..................¿por qué?...
....
....

Comentarios sobre esta clase:
....
....
....
....

Producto de la suma por la diferencia de dos binomios

$(a+b)(a-b)$

Actividad en clase: conteste las siguientes preguntas

¿Podríamos representar el producto de la suma por la diferencia de dos binomios de las siguientes formas?

$$(a - b)(a + b) = (a - b)^2$$

.............¿Por qué?..

....

$$(a - b)(a + b) = (a + b)^2$$

.............¿Por qué?..

....

Puesto que no se puede representar de ninguna forma mostrada anteriormente el producto de la suma por la diferencia de dos binomios, entonces ¿Cuál será su expresión resultante? para ello resolvamos los siguientes ejercicios.

Ejercicios	$(y-1)(y+1)$	$(x+3)(x-3)$	$(c^3+r)(c^3-r)$
Desarrollo			
Expresión resultante			

Responda.

Tienen algo en común las expresiones resultantes...........Argumente su respuesta.................

....

....

Con sus palabras a que sería igual el producto de la suma por la diferencia de dos binomios.

....

....

Conjuntamente con su docente formule la regla para el producto de la suma por la diferencia de dos binomios.

Producto de la suma por la diferencia de dos binomios.

....

....

....

....

....

....

RECUERDA

La expresión matemática de la suma y diferencia del cuadrado de un binomio son:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

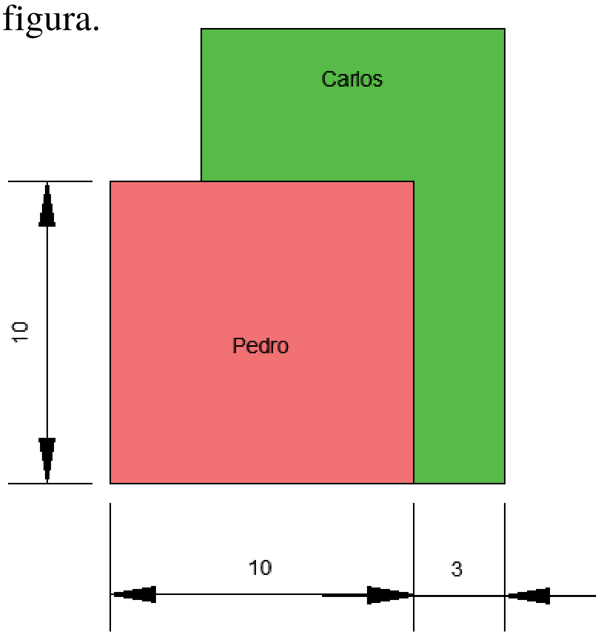
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

La expresión matemática del producto de la suma por la diferencia de dos binomios es:

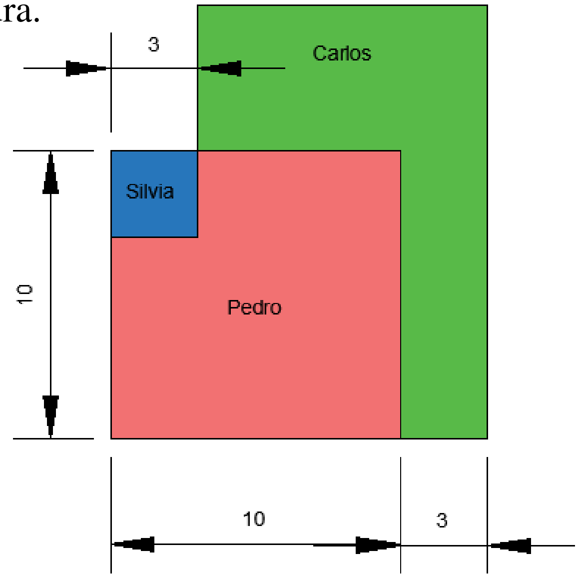
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

LEA TODA LA SITUACIÓN PLANTEADA

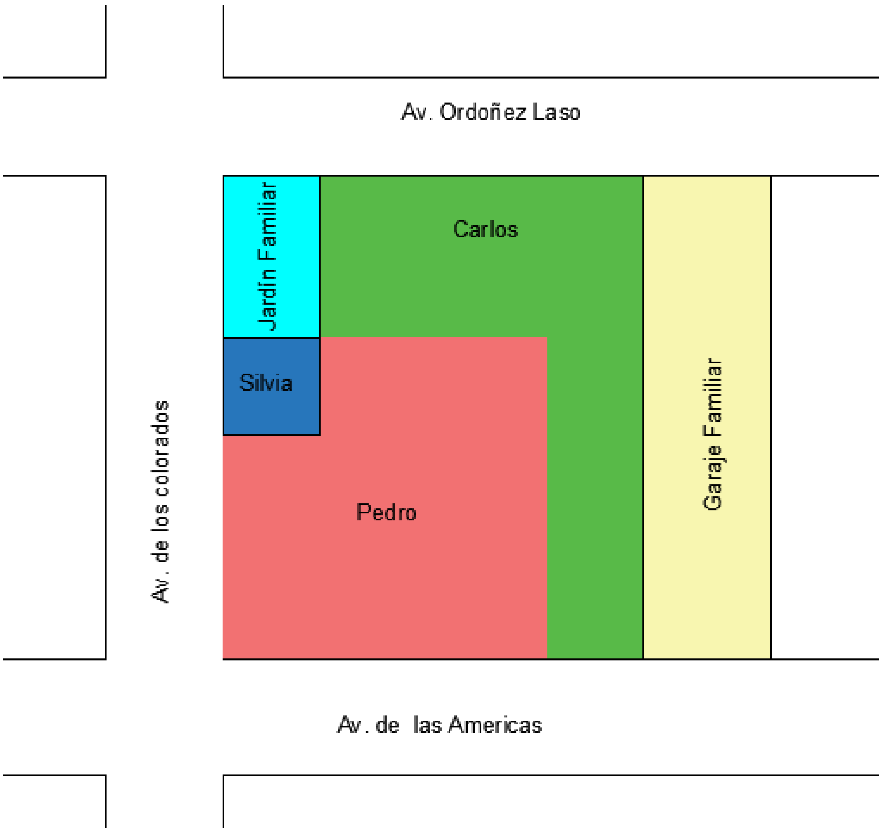
Pedro tiene un terreno cuadrado de 10 metros de lado, junto al de su hermano Carlos, como se muestra en la siguiente figura.



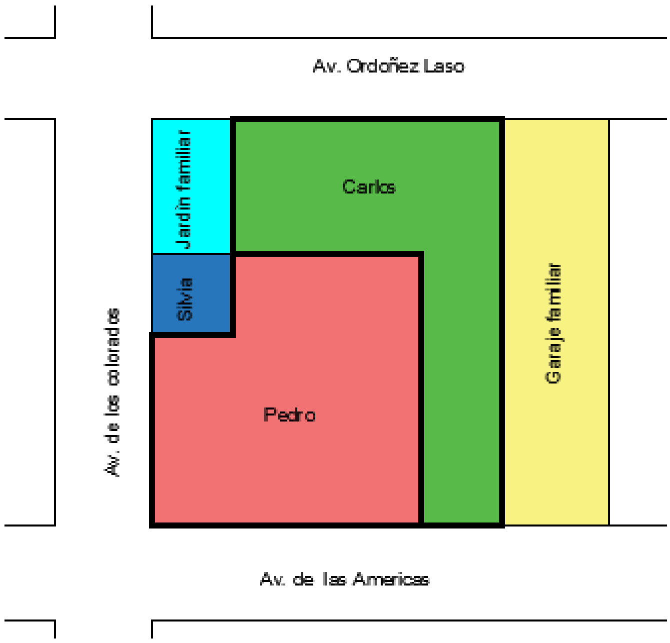
Pero Pedro decide regalarle a su hermana Silvia una porción cuadrada de su terreno de 3 m de lado como se muestra en la figura.

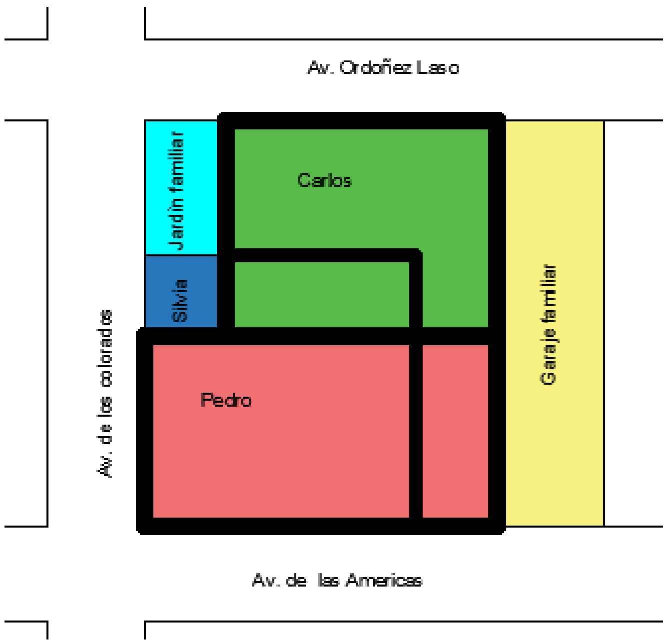


Debido a la deformación de los terrenos Pedro y Carlos deciden intercambiar de forma igualitaria partes de sus terrenos, de tal manera que se forme un solo terreno rectangular o cuadrado para cada uno de ellos. Considere que los terrenos están rodeados de calles, además que el jardín y el garaje familiar no se los pueden mover.



Luego de haber realizados los cambios de terrenos de forma igualitaria entre Pedro y Carlos queda de la siguiente forma.





Luego de comprender el problema dado

¿Cuánto ha aumentado y ha disminuido las dimensiones del terreno de Pedro?

Primer lado 10 - .... *ha disminuido* ....

Segundo lado 10 + ... *ha aumentado* ....

¿Que tienen en común ambos lados?

....

Por lo tanto su área se calcularía de la siguiente forma (haga uso de la regla)

A=(10-.....)(10+.....)

A=...........................

A=...........................

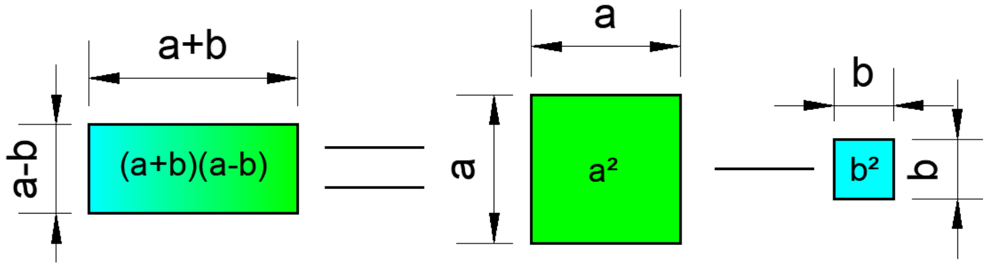
¿La expresión (10-3)(10+3) tiene algún parecido con el producto de la suma por la diferencia de dos binomios?

.... *¿Por que?*...

....

Entonces podemos decir que el ejercicio propuesto tiene una relación con el producto de la suma por la diferencia de dos binomios.

Interpretación: *El producto de la suma por la diferencia de dos binomios son áreas distribuidas de un cuadrado cuyo lado es el primer término menos el área de otro cuadrado cuyo lado es el segunda término.*



NOTA

- *"a" y "b" son valores cualesquiera, por lo que no cambiará su resultado aunque lo encontremos expresado con números u otras letras del abecedario.*
- *La interpretación geométrica del producto de la suma por la diferencia de dos binomios se reforzará en el estudio de la factorización "diferencia de cuadrados".*

Una de las aplicaciones de este tema es que nos puede ayudar a resolver ciertas multiplicaciones tal como se muestra a continuación.

Multipliquemos 205*195

Se busca otra forma de representar a esas cantidades

Por ejemplo: 205= 200+5 y 195=200-5

Entonces 205*195=(200+5)(200-5)

(200+5)(200-5) es lo mismo que tener $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$(200+5)(200-5) = 200^2 - 5^2$

$200^2 = 40000$ y $5^2 = 25$

Por lo tanto 205*195 = 40000-25

205*195 = 39975

Multipliquemos 17*3

17=10+7 y 3=10-7

17*3=(10+7)(10-7)=100-49

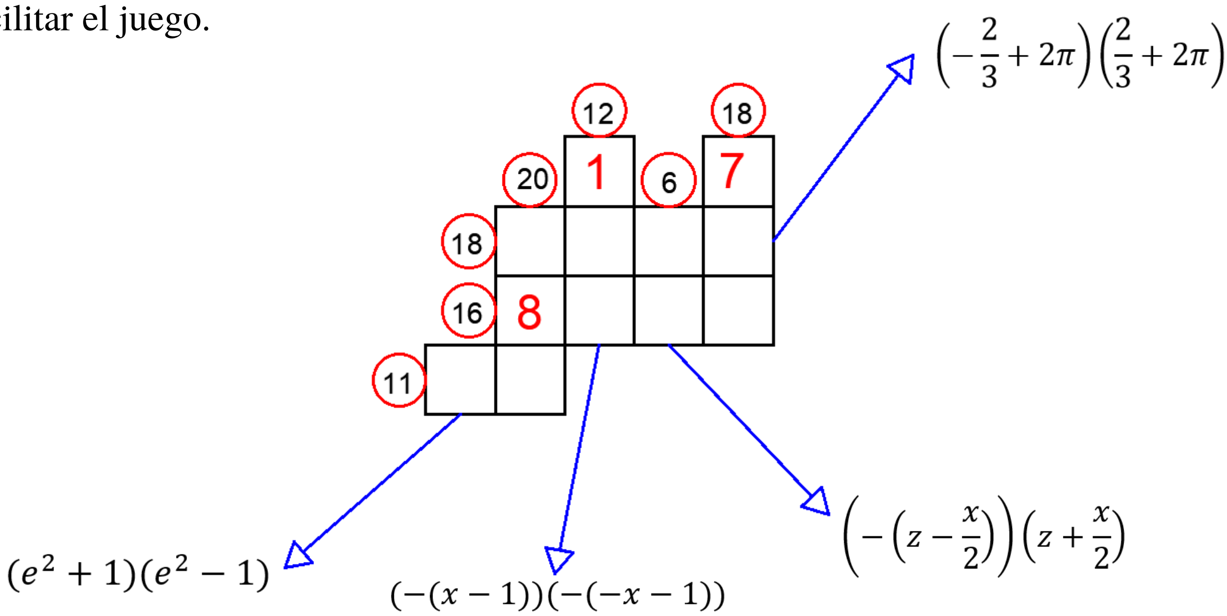
17*3=51

Para la casa

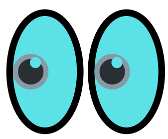
Resuelva el siguiente Kakuro, este juego es parecido al crucigrama pero en lugar de completarlo con letras se lo debe llenar con números del 1 al 9, el mismo juego cuenta con las siguientes reglas:

- Cada fila o columna deben sumar la cantidad indicada en la circunferencia hacia arriba y a la izquierda.
- No se puede repetir un mismo número en cada fila o columna.

Se recomienda factorizar los ejercicios mostrados y buscar las pistas correspondientes para facilitar el juego.



Factorice los ejercicios mostrados anteriormente y según sea la respuesta busque en las pistas el número correspondiente y anótelo en su respectivo casillero.



Pistas

- $e^4 - 1$ ⇒ 2
- $4\pi^2 - \frac{4}{9}$ ⇒ 6
- $\frac{x^2}{4} - z^2$ ⇒ 1
- $1 - x^2$ ⇒ 7

Complte el siguiente cuado comparativo

CUADRO COMPARATIVO			
Casos de productos notables	***Expresión matemática***	***Regla***	***ejemplo***

Resuelva el Test 8 del siguiente enlace e imprima su resultado para la siguiente clase

http://manualalgebraico.blogspot.com/2013/09/auto-evaluacion-de-productos-notables.html

Respondamos lo siguiente, referente a la clase producto de la suma por la diferencia de dos binomios.

Me gusto la forma en que aprendí este tema....................¿por qué?.......................................
....
....

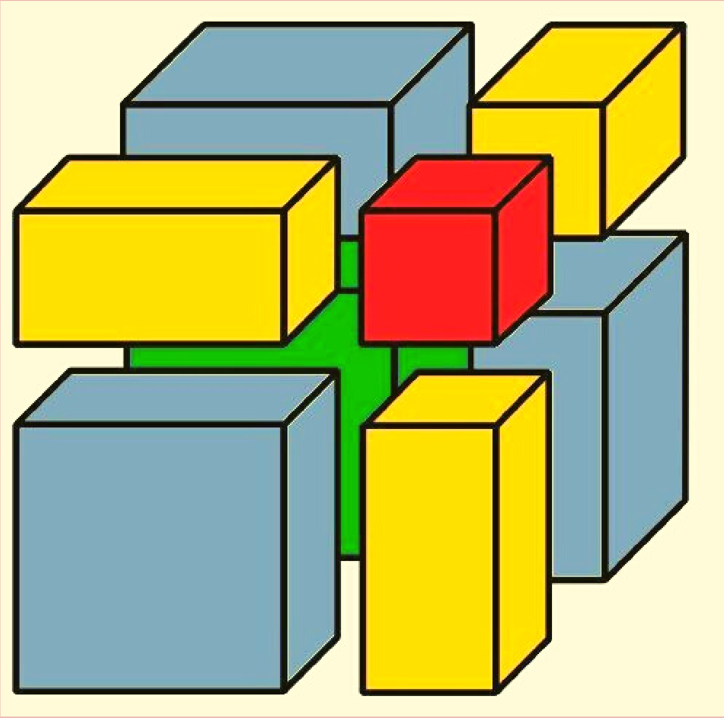
Me gusto resolver el juego llamado kakuro............¿por qué?..
....
....

Me gustaron las aplicaciones del producto de la suma por la diferencia de dos binomios.......
¿por qué?...
....

Comentarios sobre esta clase:
....
....
....
....

CUBO DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE UN BINOMIO.

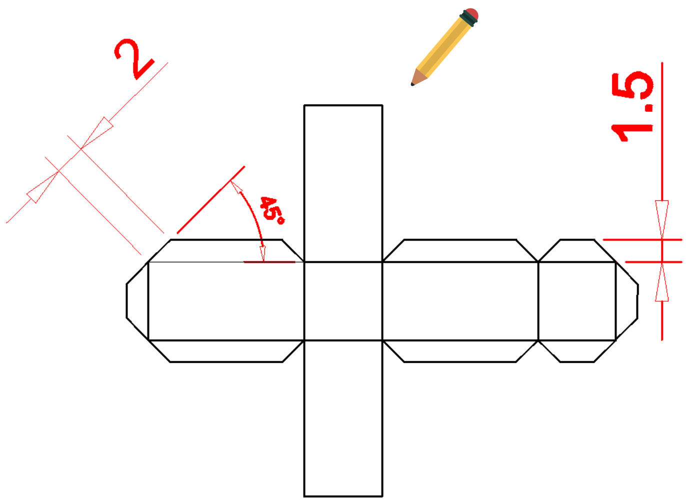
$(a+b)^3$



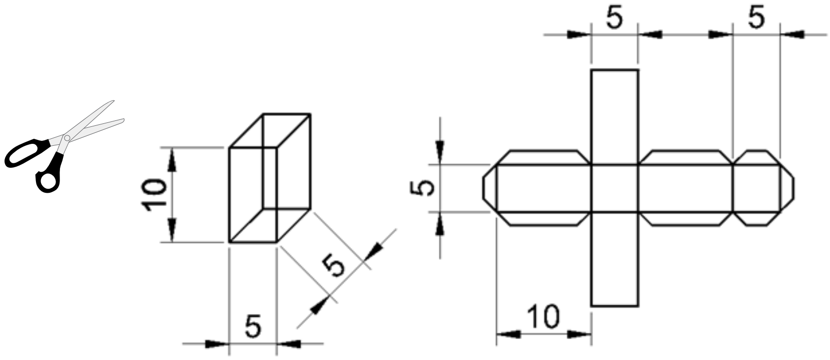
Formar grupos de cuatro estudiantes.

Construir en cartulina los siguientes paralelepípedos y cubos con las dimensiones que se muestran en las imágenes (las dimensiones están en centímetros).

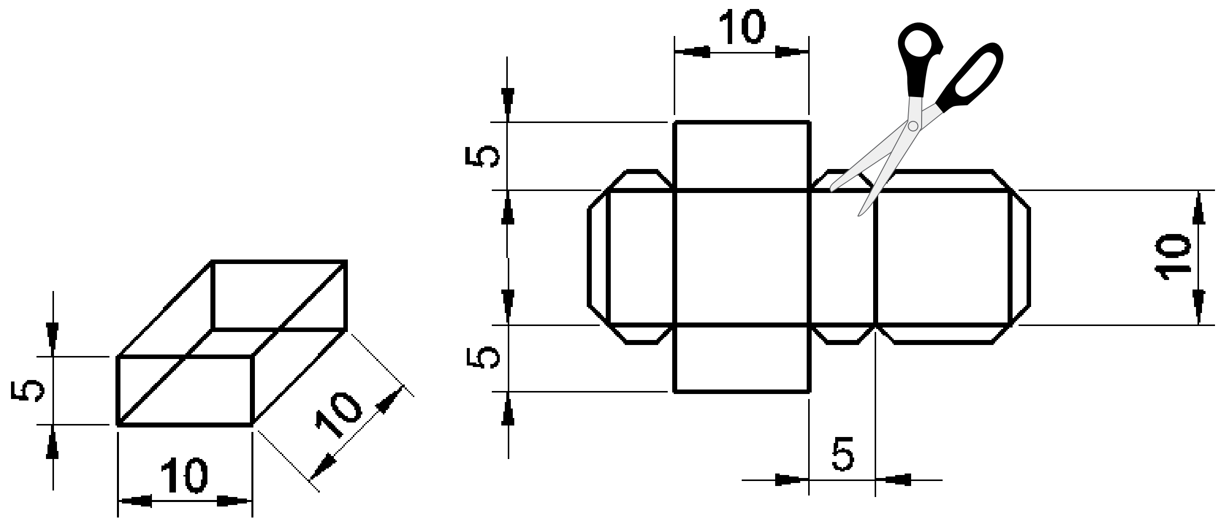
Nota: las dimensiones de las pestañas pueden variar pero se recomienda utilizar las siguientes.



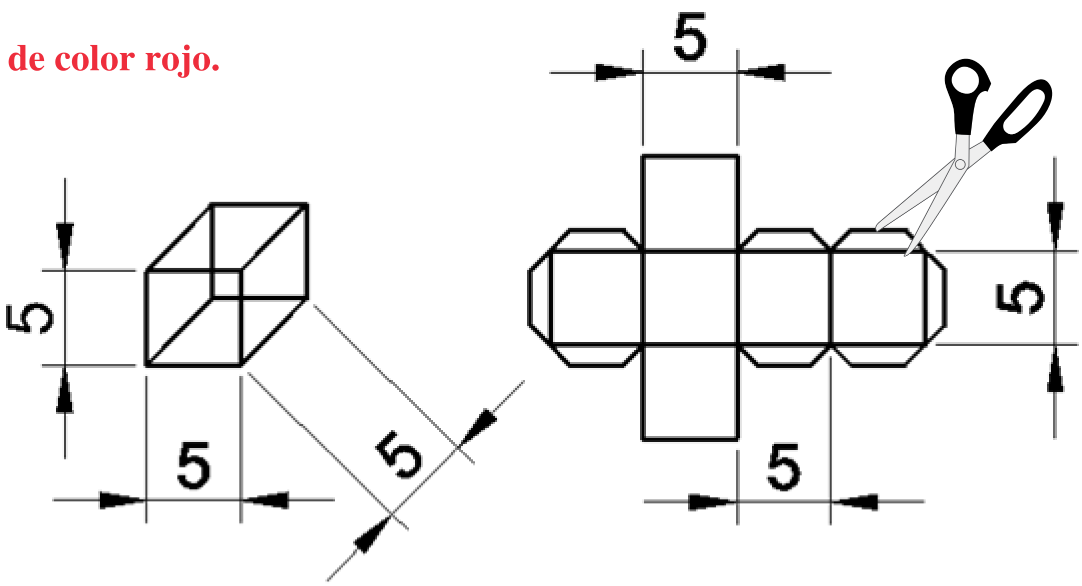
3 paralelepípedos de color rosado.



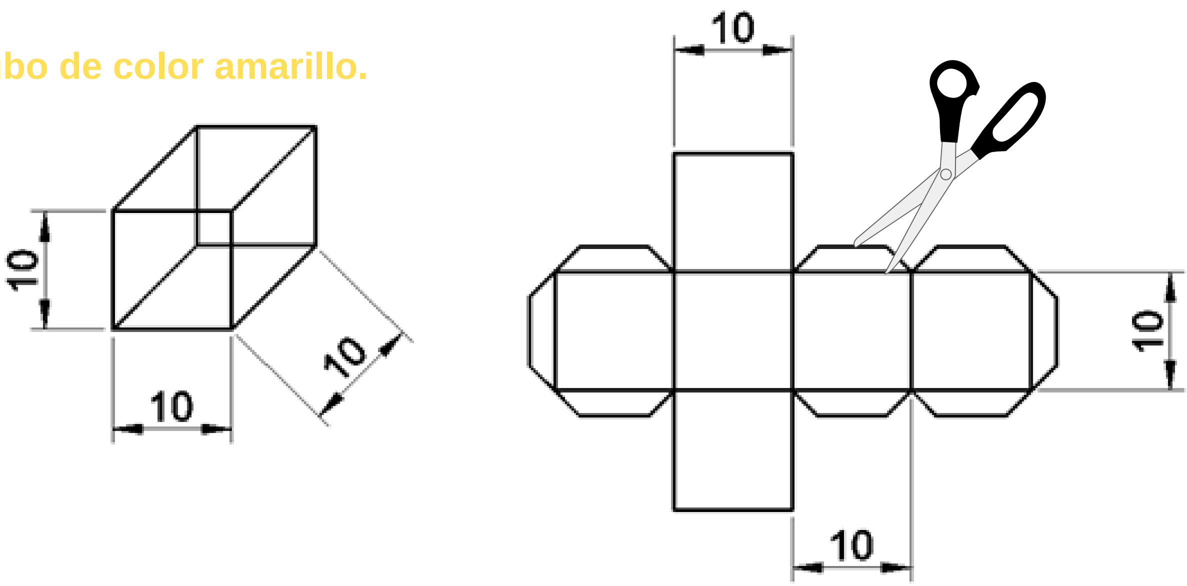
3 paralelepípedos de color azul.



1 cubo de color rojo.



1 cubo de color amarillo.



Actividad en clase

Transforme a multiplicaciones las siguientes potencias.

$$(a+x)^2$$

$$(\sin(x))^3$$

$$\left(\frac{y}{3}+2\right)^4$$

¡¡Algo que nos podría ayudar!!

- Una manera de aplicar la propiedad distributiva cuando tenemos más de dos binomios cualesquiera es la siguiente.

$$(a+4)(-3+a)(t-1)$$

- Aplique la propiedad distributiva escogiendo solo dos de los binomios y sume los términos semejantes.

$$(a+4)(-3+a)=-3a+a^2-12+4a$$

$$(a+4)(-3+a)=a^2+a-12$$

- El resultado multiplique por el binomio restante y sume los términos semejantes si existieran.

$$(a^2+a-12)(t-1)=a^2t-a^2+at-a-12t+12$$

$$(a+4)(-3+a)(t-1)=a^2t-a^2+at-a-12t+12$$

Obtengamos la representación matemática del cubo de la suma de un binomio

¿Cuál es otra forma de representar el siguiente ejemplo mediante las propiedades de la potenciación? (resuelva los ejercicios).

$$(w+y)^3$$

$$(2+3x)^3$$

$$(e+x)^3$$

Formule conjuntamente con su docente, la regla para el cubo de la suma de un binomio.

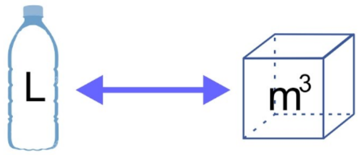
....
....
....
....

Volumen

Volumen: En general el volumen es el espacio que ocupa un cuerpo, como por ejemplo en la imagen el volumen que ocupa la botella es el agua.

Su unidad de medición en el sistema intencional es el metro cúbico (m^3)

¡¡sabías que!!
En 1 metro cúbico hay 1000 litros.



Para transformar de metros cúbicos a litros solo debemos multiplicar por 1000.

Volumen de un Paralelepípedo

Paralelepípedo: Es un poliedro de 6 caras de las cuales, cada par de caras opuestas son paralelas e iguales, además que se trata de una figura tridimensional, por lo que consta de largo alto y ancho como se aprecia en la figura 1.

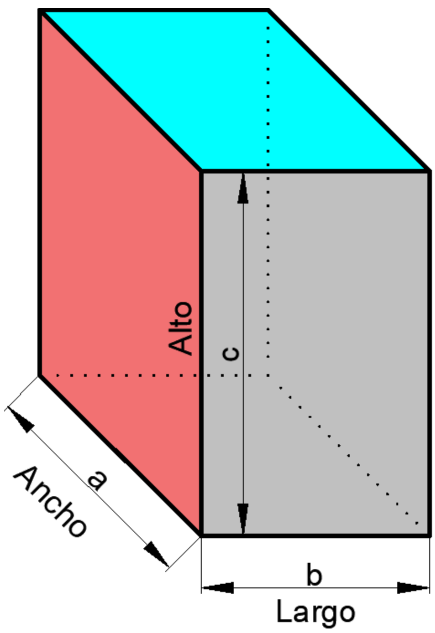
Ejemplos de paralelepípedos tenemos: los ladrillos y bloques, que se utilizan para la construcción.

El volumen de un paralelepípedo: es el espacio que encierran las 6 caras, para este caso particular dos de color rojo, dos de color gris, y dos de color celeste.

La fórmula para encontrar el volumen o el espacio que ocupa la figura es la siguiente:

$$V=a*b*c\ (m^3)$$

Figura 1



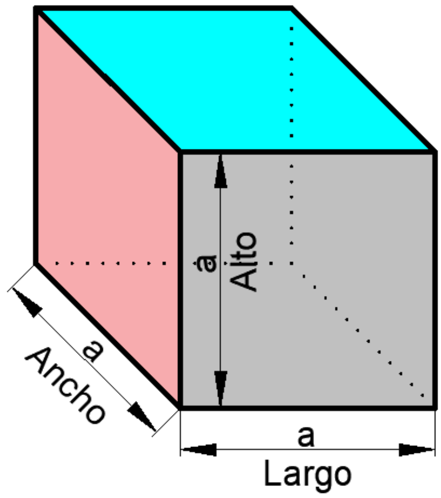
Volumen del Cubo

Cubo: Es la figura tridimensional cuyas dimensiones, largo, ancho y alto son iguales, este consta de 6 caras iguales, por lo que el cubo es un caso particular del paralelepípedo.

El volumen de un cubo: es el espacio que encierran las 6 caras, este espacio se puede calcular matemáticamente de la siguiente manera:

$$V = a*a*a$$

$$V = a^3 \ (m^3)$$



Complete

¿Cuál es la unidad de medida del volumen en el sistema internacional?...........................

Escriba algunos ejemplos que tengan forma de paralelepípedo..

....

....

¿Cómo se transforma de metros cúbicos a litros?

....

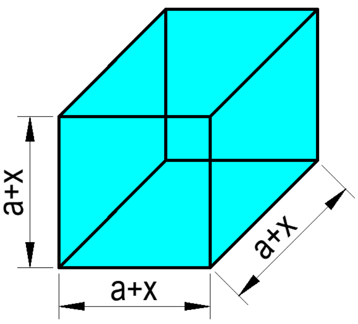
Responda con verdadero y falso los siguientes enunciados.

Para calcular el volumen de un cubo basta con multiplicar todas sus dimensiones.............

Para calcular el volumen de un paralelepípedo basta con multiplicar todas sus dimensiones...............

Para encontrar el volumen de un paralelepípedo o un cubo se puede encontrar primero el área de la base y multiplicar por su altura ....

Obtengamos una representación geométrica del cubo de la suma de un binomio



¿Cuánto mide el lado del siguiente cubo? ....

¿Cómo calcularía el volumen de este cubo?

....

....

¿Cuál es el volumen del cubo (Desarrolle)

De la expresión obtenida para calcular el volumen, identifique cuales son cubos y paralelepípedos con sus respectivas dimensiones.

Al calcular el volumen del cubo anterior ¿Que se obtuvo como resultado? (relacione con volúmenes).

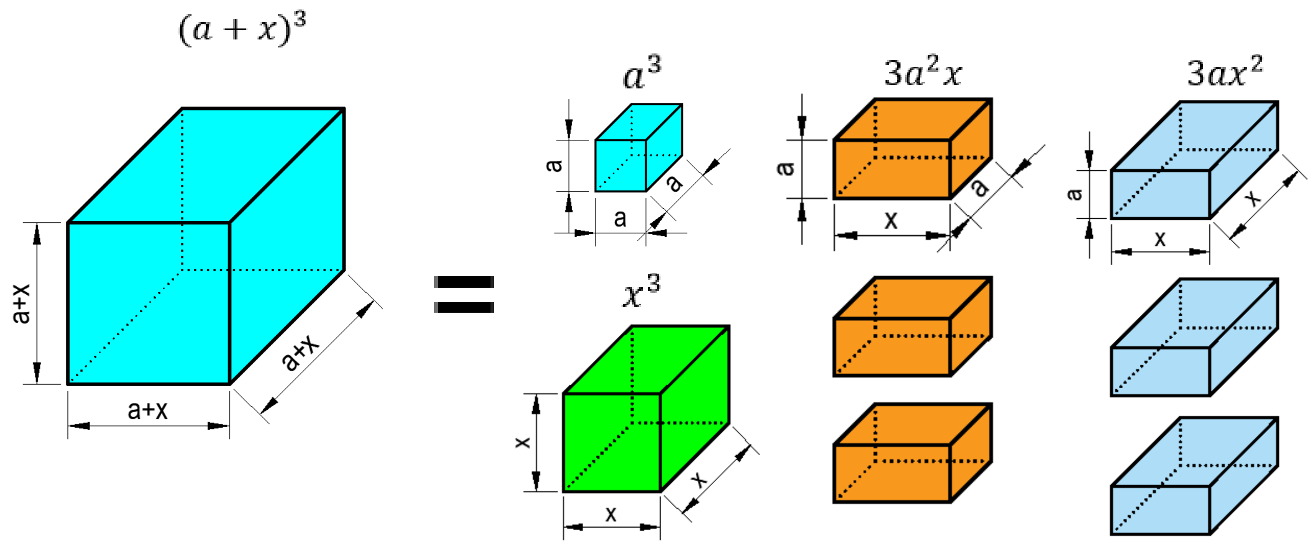
....

....

....

Interpretación geométrica

$$(a + x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$$



Elabore con su docente una interpretación para el cubo de la suma de un binomio (relacione con volúmenes).

....

....

....

....

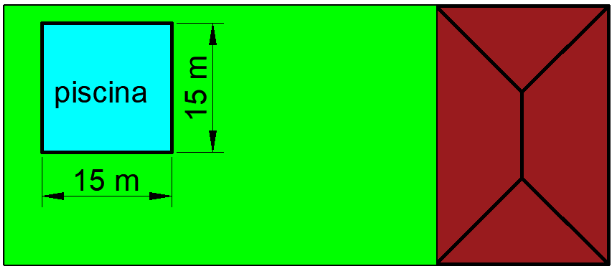
¡¡Sabías que!!

El cubo de la diferencia de un binomio es igual al cubo del primer término menos el triple producto del cuadrado del primer por el segundo término más el triple producto del primer por el cuadrado del segundo término y menos el cubo del segundo término.

$$(2x - 3) = (2x)^3 - 3(2x)^2(3) + 3(2x)(3)^2 - (3)^3$$

Ejercicio en clase

El señor Marcelo quiere construir una piscina al lado de su casa para lo cual a designado una parte de su terreno, tal como se muestre en la figura.



Si el señor Marcelo quiere que su piscina tenga un volumen de 900 metros cúbicos ¿Cual debería ser la profundidad de la piscina?

¿Cuantos litros de agua necesitara el señor Marcelo para llenar completamente su piscina?

Para la casa

Carlos tiene una cisterna de forma cúbica, y decide llenarla de agua, si la cisterna tiene un lado de 5 metros.

a. Calcule los litros de agua necesarios para llenar la cisterna.

b. Calcule el volumen de la cisterna utilizando el cubo de la suma de un binomio.

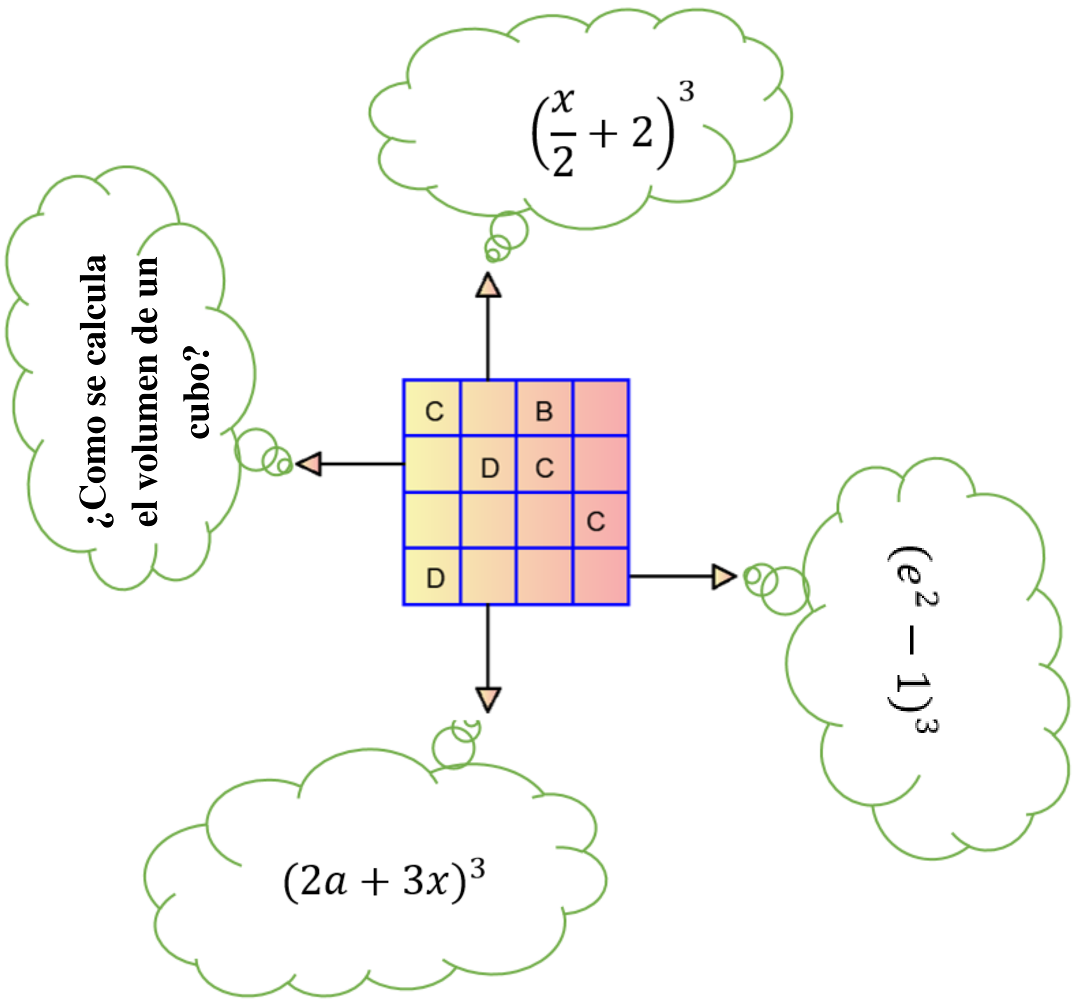
https://www.youtube.com/watch?v=6QHEbqIrr5E&t=4s

COMPLETE EL SIGUIENE SUDOKU DE LETRAS

El sudoku es un juego el cual consiste en ir llenando de números o letras (para este caso letras) pero no se deben repetir en una misma fila o columna.

Pistas: Resuelva los siguientes ejercicios y escriba la letra correspondiente.

LETRAS QUE SE DEBEN USAR (A, B, C, D)



PISTAS

$\frac{x^3}{8}+\frac{3x^2}{2}+6x+8$ ⇨ **A**

$e^6-3e^4+3e^2-1$ ⇨ **B**

$8a^3+36a^2x+54ax^2+27x^3$ ⇨ **C**

$V=a^3$ ⇨ **B**

ESPACIO PARA RESOLVER EJERCICIOS

Métodos para resolver los productos notables

La aplicación de las reglas de los productos notables no es el único método de solución, también existe la aplicación del triángulo de Pascal o el binomio de Newton.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & + & 1 & & & \\
 & & 1 & + & 2 & + & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

El triángulo de pascal es una serie infinita de números enteros, que consta de 1 a sus costados, para elaborarlo se comienza poniendo el 1 en la primera fila, luego de ello en la segunda fila se coloca seguidamente dos 1, los demás números se obtienen al ir sumando los números de la fila anterior y colocándolos debajo, tal como se muestra en la figura.

$$
\begin{array}{l}
1 \\
1 \quad 1 \longrightarrow (m+n)^1 \\
\boxed{1 \quad 2 \quad 1 \longrightarrow (m+n)^2} \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \longrightarrow (m+n)^3 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \longrightarrow (m+n)^4
\end{array}
$$

El triangulo de pascal nos ayuda a obtener los coeficientes, de los binomios, sin importar a que exponente este elevado.

$$(m+n)^2 = \underbrace{1m^2 + 2mn^2 + 1m^2}_{\boxed{\text{Coeficientes}}}$$

Resolvamos un binomio elevado a la cuarta

$$(m+n)^4$$

- Nos ubicamos en la fila respectiva que representa los coeficientes de un binomio a la cuarta.

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \longrightarrow (m+n)^4$$

- Debemos saber que todo número que sea diferente de cero elevado a la cero es igual a 1.

$$a^0 = 1 \qquad (25)^0 = 1 \qquad (-500)^0 = 1$$

- El primer termino decrece con el mayor exponente y el otro crece desde el exponente cero, tal como se muestra.

$$(m+n)^4$$

$$m^4n^0 \quad m^3n^1 \quad m^2n^2 \quad m^1n^3 \quad m^0n^4$$

$$m^4 \quad m^3n \quad m^2n^2 \quad mn^3 \quad n^4$$

- Juntamos los términos con los coeficientes.

$$\begin{matrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ m^4 & m^3n & m^2n^2 & mn^3 & n^4 \end{matrix}$$

$$m^4 \quad 4m^3n \quad 6m^2n^2 \quad 4mn^3 \quad n^4$$

- Si el binomio se está sumando todos los signos son positivos, si es que se esta restando los signos son alternados +, -, +, -, ...

$$(m+n)^4 = m^4 + 4m^3n + 6m^2n^2 + 4mn^3 + n^4$$

$$(m-n)^4 = m^4 - 4m^3n + 6m^2n^2 - 4mn^3 + n^4$$

DATO CURIOSO

Del mismo modo se puede solucionar los productos notables mediante el uso del binomio de Newton, pero para ello es necesario conocimientos como los de permutación y combinación.

Respondamos lo siguiente, referente a la clase cubo de la suma de un binomio

Me gusto la forma en que aprendí este tema....................¿por que?.......................................

....

....

Me gusto resolver el sudoku de letras............¿por que?...

....

....

Me gusto trabajar con mi equipo de trabajo...........¿por que?..

....

....

Cree usted que fue importante conocer un nuevo método (triangulo de pascal) para resolver los productos notables............¿por que?...

....

....

Comentarios sobre esta clase:

....

....

....

....

INTRODUCCIÓN

A

FACTORIZACIÓN

Recordemos

El máximo común divisor de dos o más números es el número mayor que se repite y los divide de forma exacta.

¿Cual es el máximo común divisor de los siguientes números 12 y 20?

Se busca todos los divisores que sean números primos “2, 3, 5, 7, 11, 13, etc.” y que sean divisibles para ambas cantidades.

12	18	2
6	9	3
2	3	

2 es un número primo divisible para 12 y 18

12÷2=6
18÷2=9

3 es un número primo divisible para 6 y 9

6÷3=2
9÷3=3

No existen más números primos que sean divisibles para 2 y 3

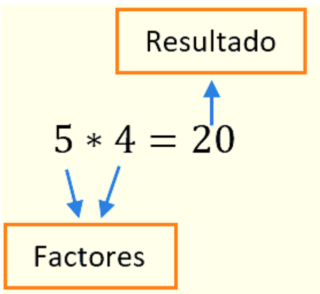
Cuando ya no existen más números primos que sean divisibles para ambas cantidades, se obtiene el MCD al multiplicar los divisores primos utilizados “2*3=6”

¿Cual es el máximo común divisor de los siguientes números 6, 12 y18?

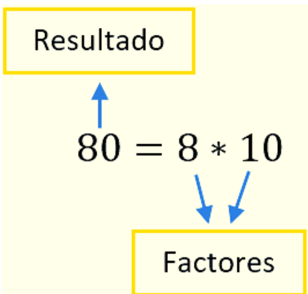
FACTORIZACIÓN

La factorización puede considerarse como el proceso inverso a la multiplicación, puesto que, la multiplicación consiste en obtener como resultado el producto de dos o más factores dados, la factorización busca obtener el producto de dos o más factores de un resultado dado, tal como se muestra en la siguiente imagen.

MULTIPLICACIÓN



FACTORIZACIÓN



Ejemplos de factorización 30=15*2 $a^2=a*a$ 18x=9x(2)

Escriba unos ejemplos ……………………… ……………………… ………………………

Nota: No existe un solo camino para factorizar, pero siempre se obtendrá el mismo resultado sin importar como se factorice.

Factorice para dividir

$$\frac{625}{25}=\frac{5*5*\cancel{5}*\cancel{5}}{\cancel{5}*\cancel{5}}=5*5=25 \qquad \frac{4}{64}=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{a^2}{a^3}=\frac{\cancel{a^2}}{a*\cancel{a^2}}=\frac{1}{a} \qquad \frac{x^3}{x^5}=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

A continuación, se dará a conocer los diferentes casos de factorización, y posteriormente se analizará de forma detallada cada uno de ellos.

- Factor común
- Factor común por agrupamiento
- Diferencia de cuadrados
- Trinomio cuadrado perfecto
- Trinomio de la forma $ax^{2n}+bx^n+c$
- Suma y diferencia de cubos perfectos

FACTOR COMÚN

Y

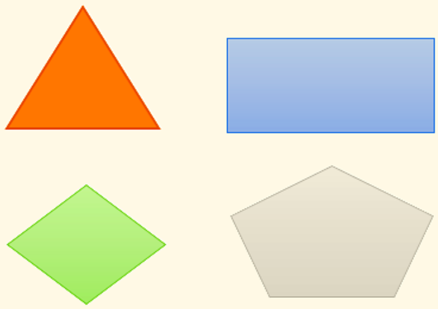
FACTOR COMÚN

POR

AGRUPAMIENTO

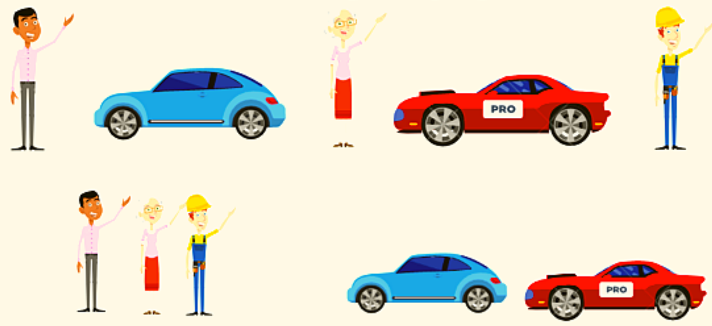
FACTOR COMÚN Y POR AGRUPAMIENTO EN LA VIDA COTIDIANA

Factor común.



Son figuras geométricas planas.

Factor común por agrupamiento.



Son seres humanos son vehículos

FACTOR COMÚN Y POR AGRUPAMIENTO MATEMÁTICAMENTE

¿En qué consiste obtener un factor común?

....

....

....

¿En qué consiste obtener un factor común por agrupamiento?

....

....

....

Recordemos:
Para representar una multiplicación existen diferentes símbolos (x, (), [],{ }, •)

Tenga presente lo siguiente.

- **No en todas las expresiones algebraicas existirá un factor común.**

a+b+1, no existe un factor común

- **En una expresión algebraica puede existir una letra o variable como factor común y siempre será la que contenga el menor exponente y esté presente en todos los términos de la expresión algebraica.**

$x^2 + 2x^3 - x$ $\longrightarrow$ Toda la expresión algebraica contiene "x" por lo que podemos obtener un factor comun

$x(x + 2x^2 - 1)$ $\longrightarrow$ Se escoge como factor común la "x" que contenga el menor exponente.

Para obtener la expresión factorizada se dividen cada uno de los términos de la expresión algebraica original para el factor comun encontrado.

Expresión algebraica = $x^2 + 2x^3 - x$ **Factor común = x**

$$x^2/x = x \quad +2x^3/x = +2x^2 \quad -x/x = -1$$

$$\mathbf{x^2 + x^3 + x = x(x + 2x^2 - 1)}$$

- **Es posible obtener un factor común numérico.**

$12a^2 + 6$ $\longrightarrow$ Escogemos el máximo común divisor de toda la expresión algebraica, para este caso "6"

$6(2a^2 + 1)$ $\longrightarrow$ Entonces "6" será el facto común numérico

$$\mathbf{12a^2 + 6 = 6(2a^2 + 1)}$$

- **Se puede tener un factor común numérico con una letra o variable.**

$8b^3 + 4b$ $\longrightarrow$ Se identifica el factor común de toda la expresión algebraica "4b"

$4b(2b^2 + 1)$ $\longrightarrow$ Entonces "4b" será el factor común

$$\mathbf{8b^3 + 4b = 4b(2b^2 + 1)}$$

- **En una expresión algebraica dentro de un factor común por agrupamiento se puede obtener un factor común.**

ay-by+ax-bx

Factor común por agrupamiento

$$(ay - by) + (ax - bx) \quad \text{o también} \quad (ay + ax) - (by - bx)$$

$$y(a - b) + x(a - b) \longleftrightarrow a(y + x) - b(y + x)$$

Factor común

$$(a - b)(y + x) \longleftrightarrow (y + x)(a - b)$$

Algo curioso

El factor común y factor común por agrupamiento puede estar presenta en la vida cotidiana, tal es el caso que siempre formamos grupos de amistades o de trabajo según una afinidad en común como por ejemplo deportes, juegos, edades, sacar buenas notas, etc.

Con ayuda de su docente plantee y factorice el siguiente ejercicio.

En una reunión de compañeros se preguntan sobre su deporte favorito y se obtienen los siguientes resultados.

3 personas les gusta el Voleibol y Fútbol

5 personas les gusta Natación y Baloncesto

2 personas les gusta Fútbol y Tenis

7 personas les gusta Baloncesto y Béisbol

Algo importante

Se puede cambiar el signo que antecede a un paréntesis, si seguidamente se cambian todos los signos dentro del paréntesis.

$$x+4y(b-1) = x-4y(-b+1)$$

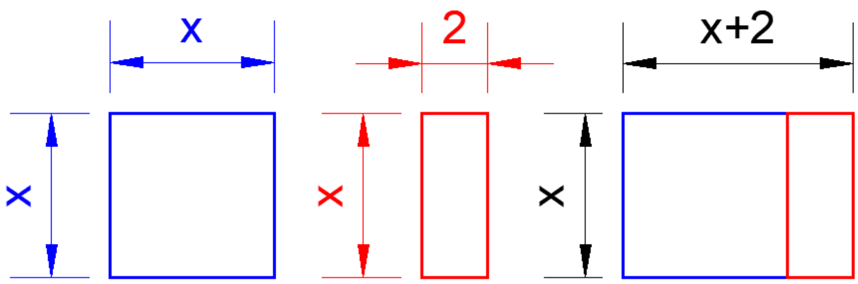
Obtengamos una interpretación geométrica del factor común, para ello analicemos los siguientes ejercicios.

$$x^2 + 2x = x(x+2)$$

Área de un cuadrado cuyo lado mide "x"

Área de un rectángulo cuyos lados miden "2" y "x"

Área de un rectángulo cuyos lados miden "x" y "x+2"

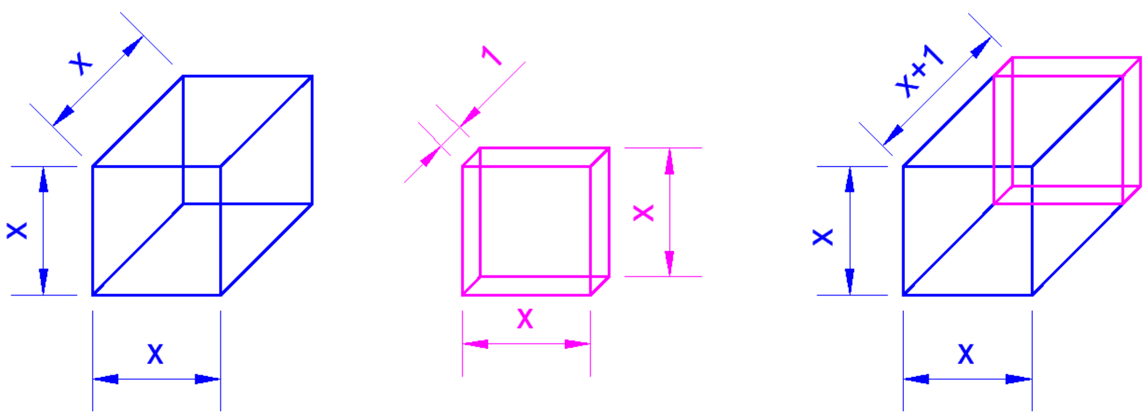


$$x^3 + x^2 = x^2(x+1)$$

Volumen de un cubo cuyo lado mide "x"

Volumen de un paralelepípedo cuyos lados miden "x, x, 1"

Volumen de un paralelepípedo cuyos lados miden "x+1, x, x"



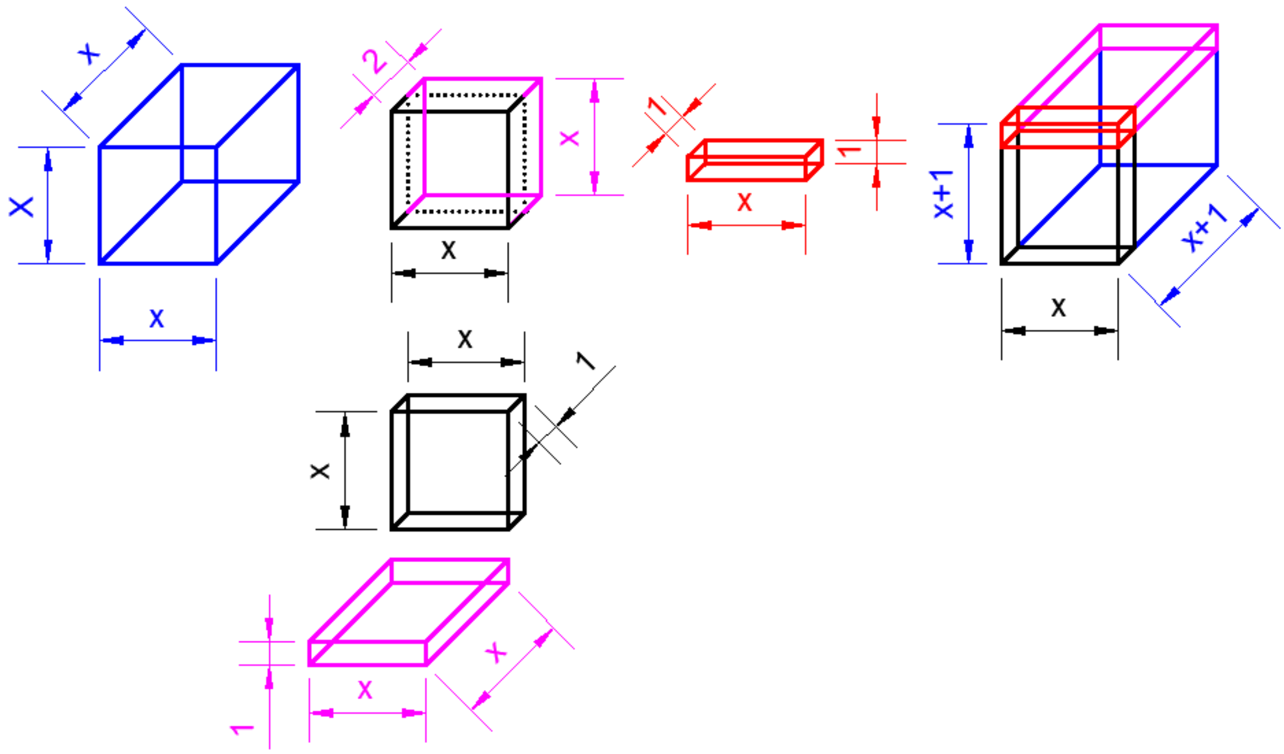
$$x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$$

Volumen de un cubo cuyo lado mide "x"

Volumen de un paralelepípedo cuyos lados miden "2, x, x"

Volumen de un paralelepípedo cuyos lados miden "1, 1, x"

Volumen de un paralelepípedo cuyos lados miden "x, x+1, x+1"



Algo curioso

Para la interpretación geométrica del factor común, se debe identificar el grado mayor de la expresión algebraica y según sea el grado mayor se puede deducir lo siguiente:

- Cuando son de segundo grado, son áreas de figuras geométricas planas cuadrados y rectángulos, pero al momento de ser factorizadas se convierten en el área de una sola figura geométrica plana y puede ser un cuadrado o rectángulo.
- Cuando es de tercer grado son volúmenes de figuras geométricas solidas cubos y paralelepípedos, pero al momento de ser factorizadas se convierte en el volumen de una sola figura geométrica sólida y puede ser un paralelepípedo o cubo.

Para la casa

Identifique cual es el factor común o factor común por agrupamiento en las siguientes imágenes.

Obtengamos el factor común o factor común por agrupamiento de las siguientes expresiones algebraicas.

$25x^2y + 5xy^3$

$75a^4 - 25a^9$

$6a + 12a^2 + 8a^3$

$4ac - 12a^2c + 7bx - 21abx$

$35a^2x - 40a^4 - c^9x + c^{12}$

$4a^2b + 3z - 12ab - za$

Respondamos lo siguiente, con relación a la clase de Factorización "Factor común y Factor común por agrupamiento"

Me gusto aprender la factorización mediante el juego....................¿por qué?.........................
....

Me intereso, saber que el factor común o factor común por agrupamiento esta presente en la vida cotidiana...................¿por qué?...
....
....

Comentarios sobre la clase.
....
....
....
....
....

FACTORIZACIÓN

DEL

TRINOMIO

CUADRADO

PERFECTO

$ax^2 \pm bx + c$

De manera matemática la factorización del trinomio (tres términos) cuadrado perfecto, consiste en obtener como resultado un binomio elevado al cuadrado.

$$\underbrace{4x^2 + 4x + 1}_{\text{Tres términos}} = \overbrace{(2x + 1)^2}^{\text{Binomio al cuadrado}}$$

Como se puede observar al factorizar un trinomio cuadrado perfecto se obtiene la suma o diferencia de un binomio al cuadrado.

$$\underbrace{2a^2 - 4a\sqrt{2} + 4}_{\text{Tres términos}} = \overbrace{(\sqrt{2}a - 2)^2}^{\text{Binomio al cuadrado}}$$

¿Todo trinomio cuadrado perfecto se puede factorizar?
....

¿Existen pasos que se deben seguir para factorizar los trinomios cuadrados perfectos?
....

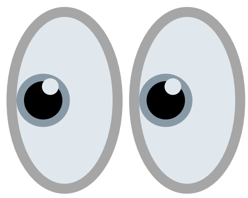
Para contestar estas interrogantes resolvamos las siguientes actividades

Cuadro de la suma de un binomio	***Trinomio cuadrado perfecto***
$(a+t)^2$	
$(2+r)^2$	
$(x^2+z)^2$	

Cuadro de la diferencia un binomio	***Trinomio cuadrado perfecto***
$(a-t)^2$	
$(2-r)^2$	
$(x^2-z)^2$	

Escriba cuales son las características en común que tienen los trinomios cuadrados perfectos.

Observe los ejercicios desarrollados



Recuerde que si el índice de una raíz coincide con el exponente de un número estas se pueden simplificar.

$$\sqrt{3^4} = 3^2 \qquad \sqrt{a^2} = a$$

$$\sqrt[4]{2^4} = 2 \qquad \sqrt[3]{\pi^3} = \pi$$

Una raíz de índice par siempre tiene dos respuestas

índice

$$\sqrt[4]{16} = \pm 2$$

Con ayuda de su profesor y de sus compañeros construyamos los pasos a seguir para factorizar trinomios cuadrados perfectos.

Para reforzar

Factorice: $4a^2 + 16b^2 + 16ab$

Paso1: La expresión algebraica cuenta con tres terminos

Paso 2: Escogemos el termino $4a^2$ y ordenamos la expresión algebraica de forma descendente

$$4a^2 + 16ab + 16b^2$$

Paso 3: El primer y tercer término son positivos

Paso 4: $\sqrt{(4a^2)} = 2a$ y $\sqrt{(16b^2)} = 4b$

Paso 5: $(2a)(4b)*2 = 16ab$

Paso 6: 16ab coincide con el término medio de la expresión algebraica ya ordenada

$$4a^2 + 16ab + 16b^2$$

Paso 7: El signo del segundo término es positivo por lo que debemos sumar 2a y 4b

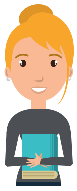
$$2a+4b$$

Paso 8: Elevamos al cuadrado la suma anterior $(2a+4b)^2$

$$4a^2 + 16ab + 16b^2 = (2a+4b)^2$$

Nota: No es necesario escribir todos los pasos, pero si es indispensable cumplirlos, ya que muchos de los pasos se los pueden resolver solo observando el ejercicio.

Resuelva conjuntamente con su profesor



$Factorizar: \ 2a^2 + 3b^2 - 2\sqrt{6}ab$

Recuerde

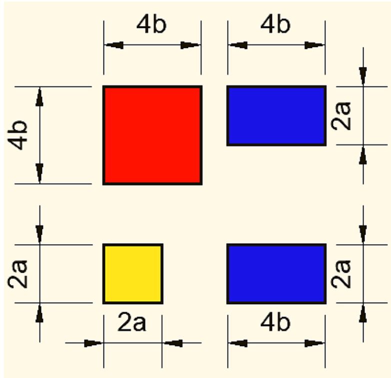
$\sqrt{2}a \neq \sqrt{2a}$

$2a^2 \neq (2a)^2$

Obtengamos una interpretación geométrica

- Desarrolle el cuadrado de la suma de un binomio (aplique la regla)

$(2a+4b)^2=$...



- La expresión obtenida anteriormente corresponde a un trinomio cuadrado perfecto, identifique cuantas áreas tiene dicha expresión y anótelas dentro de las figuras geométricas.

- Construyamos juntos una interpretación geométrica del trinomio cuadrado perfecto en base a lo realizado.

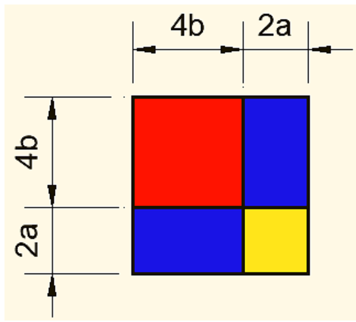
....

....

....

- Si $(4b + 2a)^2$ es la forma factorizada de $(2a)^2 + 2(2a)(4b) + (4b)^2$

¿Qué sucedió con las áreas distribuidas al momento de ser factorizadas? (observe la imagen y anote las áreas de cada figura geométrica)



....

....

....

- En base a lo realizado obtengamos una interpretación geométrica para el trinomio cuadrado perfecto y su respectiva factorización.

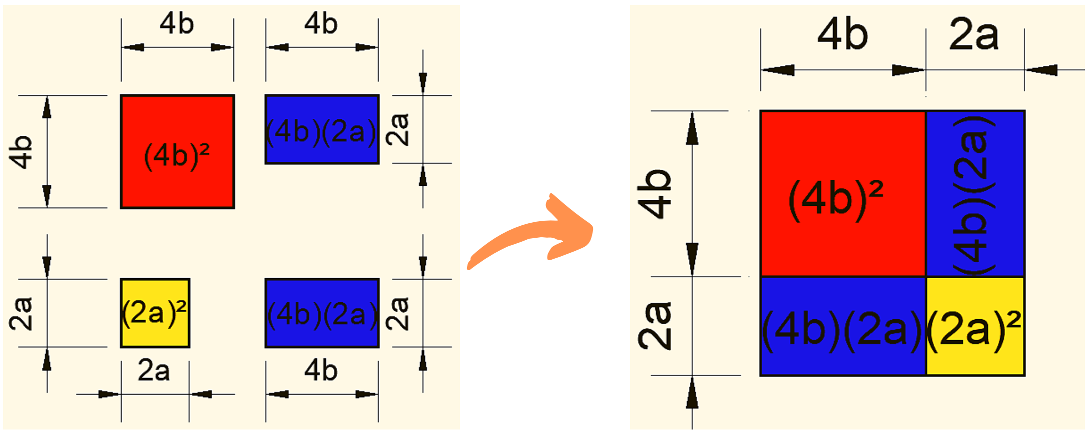
....

....

....

$16b^2 + 16ba + 4a^2$ **$(4b + 2a)^2$**

La imagen resume lo aprendido



Sin factorizar *Factorizado*

Para la casa

Factorice las siguientes expresiones algebraicas.

$$a^2 + b^2 + 2ab$$

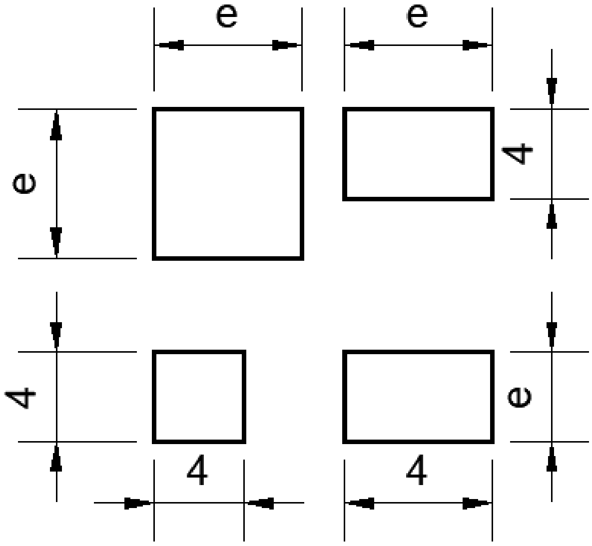
$$\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4}xy + \frac{1}{4}y^2$$

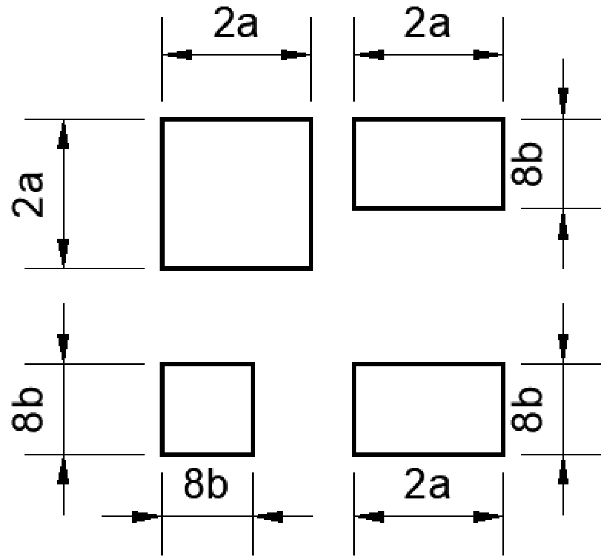
$$3e^2 - 2 * \sqrt{3} * \sqrt{2}eq + 2q^2$$

Factorice de manera geométrica

Escriba en los espacios cual es la expresión matemática del trinomio cuadrado perfecto y su forma factorizada, pinte y dibuje la figura con sus respectivas dimensiones.

....





....

Respondamos lo siguiente, referente a la clase de Factorización " Factorización del trinomio cuadrado perfecto"

Me gusto trabajar con mi grupo formado ....¿por qué?...
....
....

Me gusto trabajar material concreto......................¿por qué?..
....
....

Comentarios sobre esta clase.
....
....
....
....
....

MÉTODOS PARA FACTORIZAR TRINOMIOS

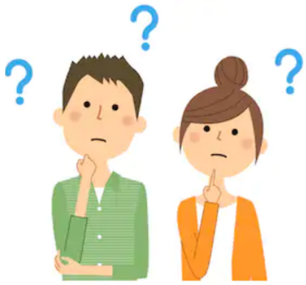
$px^2+qx+r=???$

MÉTODOS PARA FACTORIZAR TRINOMIOS QUE NO SEAN CUADRADOS PERFECTOS

¿ Qué haríamos en el caso que una expresión algebraica (trinomio) no se pueda factorizar por el método del trinomio cuadrado perfecto?

Existen ciertos métodos para factorizar las expresiones algebraicas tales como:

- Método de la multiplicación y división
- Método de tanteo
- Uso de la ecuación de segundo grado y otros métodos más



Nota: Estos diversos métodos de factorizar se les pueden aplicar a trinomios, cada una de ellas posee sus ventajas y desventajas como se muestra continuación.

Método de multiplicación y división

Factorice $3p^2+17p+10$

- Cerciorarse que el trinomio este ordenado de forma descendente.
- Elija el valor numérico del primer término (para nuestro ejercicio es el 3).
- Multiplique y divida toda la expresión algebraica para ese mismo número.

$$\frac{3}{3}(3p^2 + 17p + 10)$$

- Aplique la propiedad distributiva para el numerador (en el segundo término solo exprese la multiplicación).

$$\frac{(9p^2 + 3 * 17p + 30)}{3}$$

- Obtenga la raíz del primer término del numerador.

$$\sqrt{9p^2} = 3p$$

- Se buscan dos números que multiplicados nos den el valor numérico del tercer término y sumados el valor numérico del segundo término de la expresión original (con su respectivo signo).

$$\frac{(9p^2 + 3 * 17p + 30)}{3}$$

Los números son +15 y +2 ya que (+15)(+2)=+30 y +15+2=+17

- Se procede a factorizar, entonces se busca dos binomios que multiplicados nos den el mismo numerador de la expresión.

El primer binomio se lo forma con la raíz obtenida del primer término "3p" sumando uno de los valores numéricos encontrados "2" (3p+2).
El segundo binomio se forma con la raíz obtenida del primer término "3p" sumando el otro valor numérico encontrado "15" (3p+15).
Luego de ello se multiplican los dos binomios y se divide para su denominador.

$$\frac{(9p^2 + 3 * 17p + 30)}{3} \qquad \frac{(3p+2)(3p+15)}{3}$$

- Se obtiene los factores común numéricos y se simplifica.

$$\frac{(3p+2)\cancel{3}(p+5)}{\cancel{3}} = (3p+2)(p+5)$$

- Entonces el trinomio ha quedado factorizado.

$$3p^2 + 17p + 10 = (3p+2)(p+5)$$

Ventajas y Desventajas

Ventajas	Desventajas
• Este método sirve para factorizar cualquier trinomio de grado 2, 3, etc.	• Solo se expresa la multiplicación del segundo término una vez aplicada la propiedad distributiva, y eso puede generar confusión. $\frac{3}{3}(3p^2 + 17p + 10)$ $\frac{(9p^2 + 3 * 17p + 30)}{3}$ • Encontrar valores numéricos que multiplicados nos den un número y sumado otro.

Método de tanteo

Factorice $3p^2+17p+10$

- Se ordena de forma descendente la expresión algebraica.
- Se buscan dos valores "numéricos, literales, o su combinación" que multiplicados nos den el primer término y otros dos valores que multiplicados nos den el tercer término (con su respectivo signo).

(**+3p y +p** ; **+10 y +1**) ya que: $(3p)*p=3p^2$ y $(10)(1)=10$

- De multiplica en cruz y se suman, este resultado debe dar el segundo término

+3p	**+10**	$=+10p$		**+ p**	**+10**	$=+30p$
+ p	**+ 1**	$=+\ 3p$		**+ 3p**	**+ 1**	$=+\ p$
		$+13p$				$+31p$

Nota: Es necesario hacer más de un ordenamiento y si no cumple busque otros números.

- Puesto que 13p y 31p son diferentes que 17p se deben buscar otros valores, tales como.

(**+3p y +p ; +5 y +2**) ya que: $(3p)*p=3p^2$ y $(5)(2)=10$

+3p	**+5**	$=+5p$		**+ p**	**+5**	$=+15p$
+ p	**+2**	$=+6p$		**+ 3p**	**+2**	$=+\ 2p$
		$+11p$				$+\ 17p$

Al hacer el segundo ordenamiento vemos que cumple entonces estos son los términos válidos.

- Se procede a factorizar con el ordenamiento valido, para ello se suma los dos términos y posteriormente se multiplica.

$+\ p \rightarrow +\ 5 = (p+5)$

$+\ 3p \rightarrow +\ 2 = (3p+2)$

$(p+5)(3p+2)$

Entonces el trinomio queda factorizado.

$$3p^2+17p+10=(3p+2)(p+5)$$

Ventajas y Desventajas

Ventajas	Desventajas
• Este método sirve para factorizar cualquier trinomio de grado 2, 3, etc.	• Pueden existir muchos términos diferentes que multiplicados nos den los términos buscados ya sean positivos o negativos.

Uso de la ecuación de segundo grado

Factorice $3p^2+17p+10$

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c} \longrightarrow \boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Para hacer uso de la ecuación de segundo grado debemos saber que "a, b, c" son los valores numéricos que acompañan a cada variable.

Para este caso los valores son a=3, b=17, c=10, así que solo debemos remplazar en la ecuación.

$$p=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$p=\frac{-17\pm\sqrt{17^2-4*3*10}}{2*3}$$

$$p=\frac{-17\pm\sqrt{289-120}}{6}$$

$$p=\frac{-17\pm\sqrt{169}}{6}$$

$$p = \frac{-17 \pm 13}{6}$$

$$p = \frac{-17 + 13}{6} \qquad p = \frac{-17 - 13}{6}$$

$$p = \frac{-4}{6} \qquad p = \frac{-30}{6}$$

$$p = \frac{-2}{3} \qquad p = -5$$

Llegados a este punto solo debemos iguala a cero para ello, lo que esta dividiendo pasa multiplicando y lo que esta restando pasa sumando y viceversa.

$$3p + 2 = 0 \qquad p + 5 = 0$$

Por ultimo solo se multiplica la expresión que está igualado a cero y nuestra expresión queda factorizada.

$$3p + 2 = 0 \qquad p + 5 = 0$$

(3p+2)(p+5)

Y la expresión queda factorizada

Factorice $3p^2+17p+10=(3p+2)(p+5)$

Ventajas y Desventajas

Ventajas	Desventajas
• Los trinomios se factorizan de forma muy rápida y sencilla solo hay que remplazar los valores numéricos en la ecuación y resolverla.	• Solo es aplicable para factorizar trinomios de grado 2

Tres en raya

Pedro y Carlos están jugando tres en raya, Pedro elije (O) y Carlos elije (X).
Pedro inicia el primer movimiento y marca (O) en una de las 9 casillas.
¿Quién gano el juego de tres en raya?, para ello solucione los ejercicios y coloque (O) y (X) respectivamente.

(2x+1)(7x-5) O	(x-6)(x-3)	(-x+5)(x+1)
(x-1)(x-3)	$(x^2-5a)(x^2+a)$ X	(-x+a)(x+2a)
(-x+1)(x-2)	(-x+1)(x+2)	$(5x^2+1)(-3x^2+1)$ O

(**O**) Pedro: $14x^2 - 3x - 5 = (2x + 1)(7x - 5)$

(**X**) Carlos: $x^4 - 4x^2a - 5a^2 = (x^2 - 5a)(x^2 + a)$

(**O**) Pedro: $-15x^4 + 2x^2 + 1 = (5x^2 + 1)(-3x^2 + 1)$

(**X**) Carlos: $-x^2 + 4x + 5 =$

(**O**) Pedro: $-x^2 + 3x - 2 =$

(**X**) Carlos: $x^2 - 4x + 3 =$

(**O**) Pedro: $-x^2 - x + 2 =$

¿Quién gano el juego?

....

Espacio para solucionar los ejercicios

Respondamos lo siguiente, referente a la clase de Factorización " métodos para factorizar trinomios"

Me gusto que para esta clase se usara la tecnología .... ¿por qué?.............................
....
....
Me gusto aprender diferentes métodos para factorizar trinomios...................... ¿por qué?.....
....
....
Me gusto trabajar con mi equipo.....................¿por qué?...
....
....
Me hubiera gustado conocer mas métodos para factorizar los trinomios..........¿por qué?......
Se comprendió el tema dado en clase............¿por qué?.
Comentarios sobre esta clase.
....
....
....
....
....

FACTORIZACIÓN DE DIFERENCIA DE CUADRADOS

$(x)^2-(y)^2=???$

De manera matemática la factorización de diferencia de cuadrados

Para comprender la factorización de diferencia de cuadrados recordemos a que equivale el producto de la suma por la diferencia de dos cantidades, ya que esta es su forma factorizada

Producto de la suma por la diferencia de dos cantidades	Diferencia de cuadrados
$(a+b)(a-b)$	
$(3+t^3)(3-t^3)$	
$(3e+v^2)(3e-v^2)$	
$(1+\sqrt{y})(1-\sqrt{y})$	

Entonces podemos afirmar que la factorización de la diferencia de cuadrados es igual a....

....

Con sus palabras cuales serian los pasos a seguir para factorizar la diferencia de cuadrados "observe los ejercicios resueltos"

....

....

¿Construya junto a su docente los pasos a seguir para factorizar estas diferencias de cuadrados?

....

....

....

Ejercicios en clase

$a^2 - b^2 =$

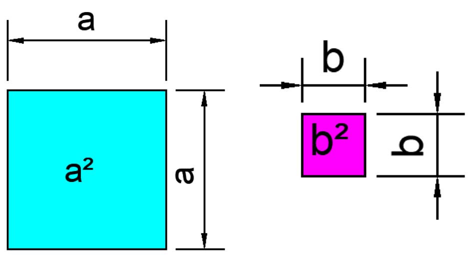
$4 - x^2 =$

$x^4 - 16 =$

$c^2 - (1-x)^2 =$

$a^2 + 4 =$

De manera geométrica la factorización de diferencia de cuadrados



$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

a^2 es el área de un cuadrado cuyo lado es ....

b^2 es el área de un cuadrado cuyo lado es ....

$(a+b)(a-b)$ es el área de un rectángulo cuyos lados son...............y......................

Entonces que significa (a^2-b^2) "relacione con áreas"

....

....

Con sus palabras exponga en que consistiría la diferencia de cuadrados y su forma factorizada.

....

....

Conjuntamente con su docente obtenga una interpretación para la diferencia de cuadrados y su forma factorizada.

....

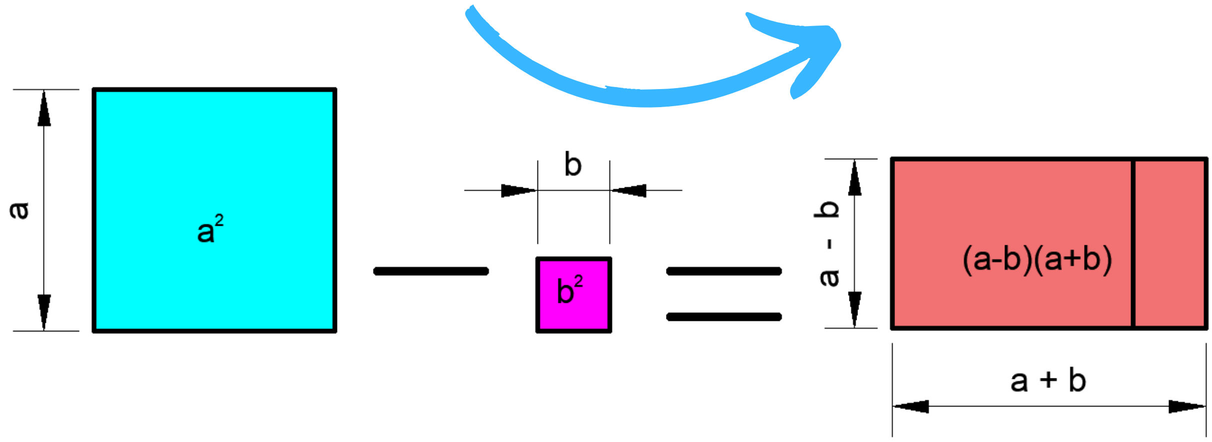
....

SIN FACTORIZAR

$a^2 - b^2$

FACTORIZADO

$(a+b)(a-b)$



Con ayuda de su docente plantear y factorizar el siguiente ejercicio.

El piso del baño de Pedro tiene 64 cerámicas cuadradas del mismo tamaño, de las cuales se desconoce sus dimensiones, Pedro se pregunta ¿Cuál es el área restante del baño sabiendo que el inodoro, lavamanos y basurero ocupan entre todos un área de 1 metro cuadrado?

Algo importante

Solo se pueden sumar cantidades que posean la misma unidad ejemplo:

7cm + 8cm = 15cm

Cuando sean diferentes unidades de medición puede convertirlas para poder sumar como por ejemplo:

1m+100 cm= 1m +1m = 2m

¿Cuál es el área restante del baño con su respectiva unidad sabiendo que el inodoro, lavamanos y basurero ocupan un área de 1 metro cuadrado y sabiendo que cada cerámica mide 50 cm de lado?

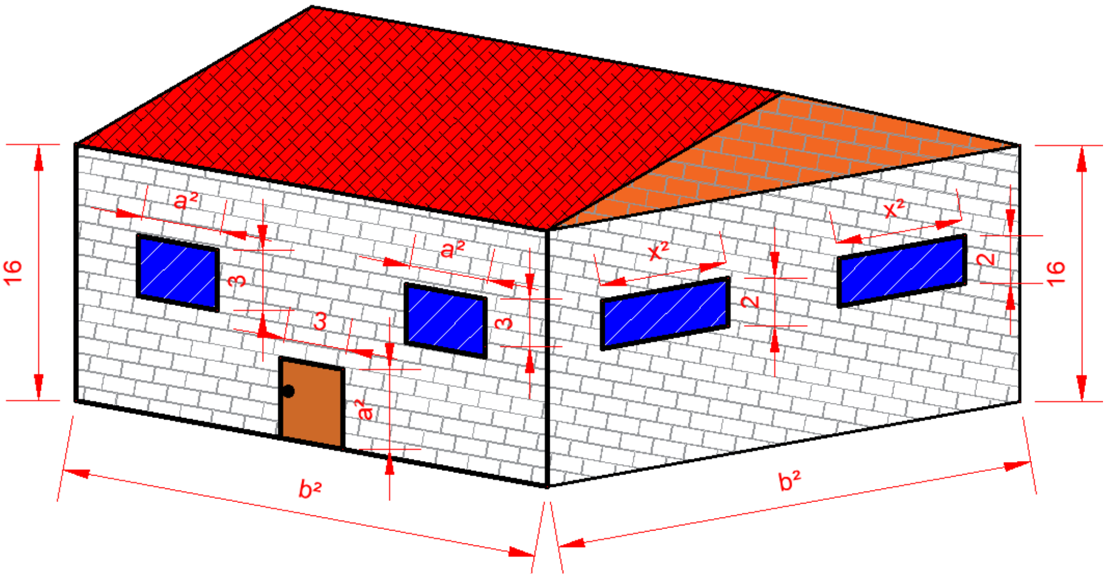
Sugerencia: Primero transforme los centímetros a metros y luego calcule el área.

Recuerda

- En 1 metro hay 100 centímetros.
- Para convertir de centímetros a metros solo debemos dividir para 100.
- Para convertir de metros a centímetros solo debemos multiplicar para 100

Para la casa

Suponga que debe pintar las dos paredes en blanco de la siguiente casa, calcule ¿cuál es el área que se debe pintar sin considerar las ventanas ni puertas?, luego de ello factorice la área obtenida.



Primera pared

Segunda pared

Factorice los siguientes ejercicios

$$w^2 - (x^2 - 2x + 1)$$

$$\frac{e^2}{4} - \frac{1}{a^2}$$

$$a^4 - v^4$$

$$2^6 - \frac{a^4}{x^2}$$

FACTORIZACIÓN DEL CUATRINOMIO CUBO PERFECTO

$$ax^3 \pm bx^2 + cx \pm d = ???$$

CUATRINOMIO CUBO PERFECTO $ax^3 \pm bx^2 + cx \pm d$

Un cuatrinomio cubo perfecto es una expresión algebraica que consta de cuatro términos de la forma "$ax^3 \pm bx^2 + cx \pm d$" y se pueden factorizar en un binomio elevado al cubo, tal como se puede apreciar en el siguiente ejemplo.

$$8a^3 + 12a^2x + 6ax^2 + x^3 = (2a + x)^3$$

Factorización de un cuatrinomio cubo perfecto a cubo de la suma de un binomio

$$8a^3 + 12a^2x + x^3 + 6ax^2$$

1. Se identifica que existan cuatro términos positivos en la expresión algebraica.

$$8a^3 + 12a^2x + x^3 + 6ax^2$$

2. Se elije dos términos que cuenten con el mayor exponente que sea múltiplo de 3.
Múltiplos de 3 = 3, 6, 9, 12, ...

$$8a^3 + 12a^2x + x^3 + 6ax^2$$

3. Se obtiene su raíz cubica.

$$\sqrt[3]{8a^3} = 2a, \quad \sqrt[3]{x^3} = x$$

4. Se elabora una tabla y se eleva al cuadrado, tal como se muestra.

	$2a$	x
Elevado al cuadrado	$4a^2$	x^2

5. Se multiplica en cruz y luego se multiplica por 3.

	$2a$	x
Elevado al cuadrado	$4a^2$	x^2
Multiplicación en cruz	$4a^2x$	$2ax^2$
Multiplicado por 3	$12a^2x$	$6ax^2$

6. El resultado debe dar como resultado los términos restantes del paso 2.

	$2a$	x
Elevado al cuadrado	$4a^2$	x^2
Multiplicación en cruz	$4a^2x$	$2ax^2$
Multiplicado por 3	$12a^2x$	$6ax^2$

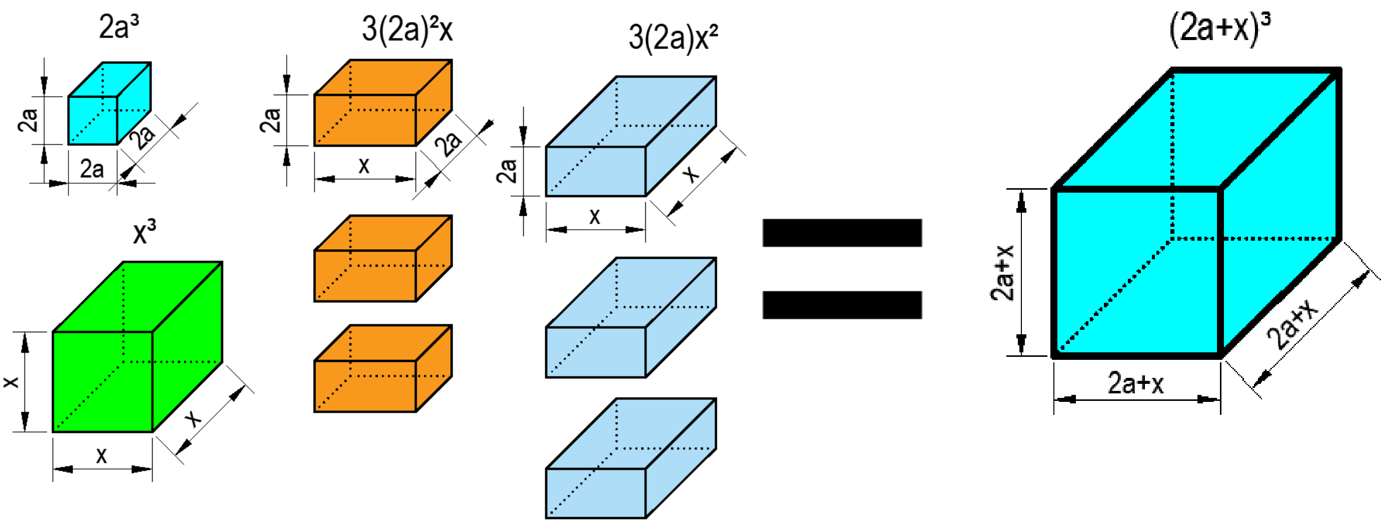
$$\Rightarrow 8a^3 + 12a^2x + x^3 + 6ax^2$$

7. Si los resultados coinciden, entonces el cuatrinomio cubo perfecto se factoriza en el cubo de la suma de un binomio, para ello sume las raíces obtenidas en el paso 3 y eleve al cubo.

$$8a^3 + 12a^2x + 6ax^2 + x^3 = (2a + x)^3$$

Su interpretación geométrica

El cuatrinomio cubo perfecto son volumen distribuidos de cubos y paralelepípedos, que al momento de ser factorizados se convierten en el volumen de un solo cubo.



Factorización de un cuatrinomio cubo perfecto a cubo de la diferencia de un binomio

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

1. Se identifica que existan cuatro términos en la expresión algebraica.

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

2. Se elije dos términos que cuenten con el mayor exponente que sea múltiplo de 3. Múltiplos de 3 = 3, 6, 9, 12, ..., pero el un término deberá ser (+) y el otro (-).

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

3. Se obtiene las raíces cubicas.

$$\sqrt[3]{a^3} = a, \quad \sqrt[3]{b^3} = b$$

4. Se elabora una tabla considerando los signos y se eleva al cuadrado, tal como se muestra.

	a	$-b$
Elevado al cuadrado	a^2	b^2

5. Se multiplica en cruz y luego se multiplica por 3.

	a	$-b$
Elevado al cuadrado	a^2	b^2
Multiplicación en cruz	$-ba^2$	ab^2
Multiplicación por 3	$-3ba^2$	$3ab^2$

6. El resultado debe dar como resultado los términos restantes del paso 2 con sus signos.

	a	$-b$
Elevado al cuadrado	a^2	b^2
Multiplicación en cruz	$-ba^2$	ab^2
Multiplicación por 3	$-3ba^2$	$3ab^2$

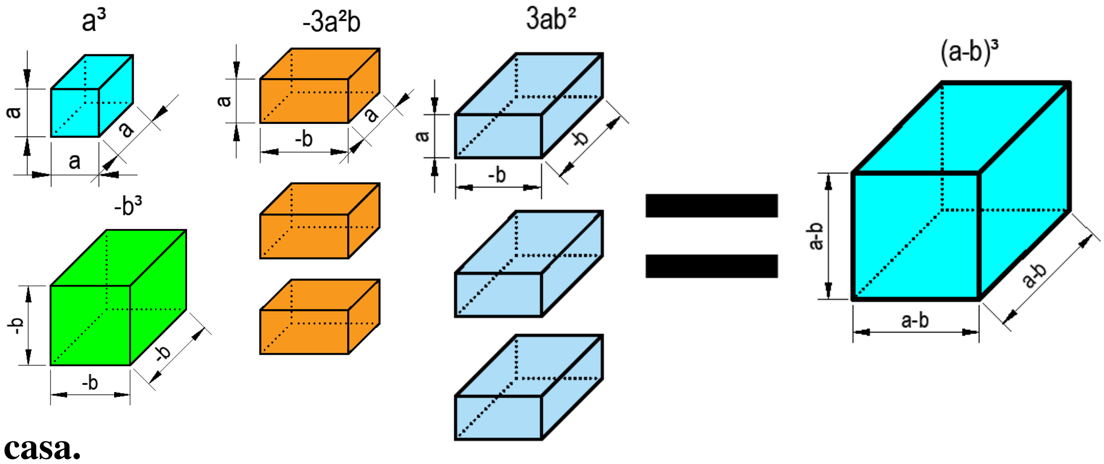
$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

7. Si los resultados coinciden, entonces el cuatrinomio cubo perfecto se factoriza en el cubo de la diferencia de un binomio, para ello reste las raíces obtenidas en el paso 3 y eleve al cubo.

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

Su interpretación geométrica

El cuatrinomio cubo perfecto son volúmenes distribuidos de cubos y paralelepípedos, que al momento de ser factorizados se convierten en el volumen de un solo cubo.



Para la casa.

Factorice los siguientes cuatrinomios cubos perfectos.

$$\frac{1}{8a^3}+\frac{3y}{4a^2}+\frac{3y^2}{2a}+y^3$$

$$x^6+6x^4+12x^2+8$$

$$x^{12} - 3x^8 + 3x^4 - 1$$

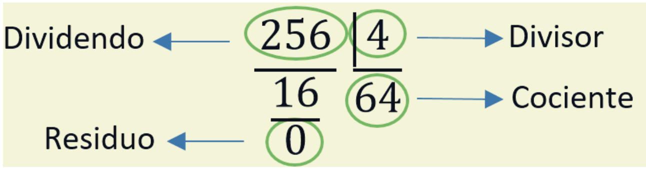
$$x^9 - 3x^8 + 3x^7 - x^6$$

FACTORIZACIÓN DE SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS

$(a)^3 \pm (b)^3 = ???$

APRENDAMOS

Partes de una división



Antes de abordar este tema debemos conocer un tema denominado "división de polinomios"
Ejemplo: divida $6x^2-19x+15$ para $3x-5$

$$\begin{array}{l|l} 6x^2-19x+15 & 3x-5 \\ \hline \end{array}$$

- Se coloca como una división normal, deberán estar de forma descendente, considerando todos los términos incluso si no existen.

$$\begin{array}{l|l} 6x^2-19x+15 & 3x-5 \\ \cline{2-2} & 2x \end{array}$$

- Se busca un cociente que multiplicado con el primer término del divisor nos de el primer término del dividendo. "3x(2x)=6x²"

$$\begin{array}{l|l} 6x^2-19x+15 & 3x-5 \\ \cline{2-2} -6x^2+10x & 2x \end{array}$$

- Los resultados obtenidos se colocan debajo del dividendo pero cambiando su signo" el cambio de signo solo significa la resta"

$$\begin{array}{l|l} 6x^2-19x+15 & 3x-5 \\ \cline{2-2} -6x^2+10x & 2x \\ \hline // \quad -9x+15 & \end{array}$$

- Se suman y se restan los valores obtenidos con el dividendo, comparo cuantos términos tengo en el divisor y se las igualan, para ello se bajan términos que forman parte del dividendo

$$\begin{array}{l|l} 6x^2-19x+15 & 3x-5 \\ \cline{2-2} -6x^2+10x & 2x-3 \\ \hline // \quad -9x+15 & \\ \quad\;\; +9x-15 & \\ \hline \quad\;\; // \quad // & \end{array}$$

- Se aplica nuevamente el paso 2 y se prosigue

¿SABÍAS QUE?

Este método de división es el que aplicamos a divisiones normales, para ello dividamos.
(10 para 2)

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ \hline -10 & 5 \\ // & \end{array}$$

$$10 \leftarrow \begin{array}{r|l} 8+2 & 2 \\ \hline -8 & 4+1 \\ //+2 & \downarrow \\ -2 & 5 \\ // & \end{array}$$

$$10 \leftarrow \begin{array}{r|l} 3+2+5 & 2 \\ \hline -2 & 1+\frac{1}{2}+1+2+\frac{1}{2} \\ 1 & \downarrow \\ -1 & 5 \\ //+2 & \\ -2 & \\ //+5 & \\ -4 & \\ 1 & \\ -1 & \\ // & \end{array}$$

Para obtener la factorizaciòn de la suma y diferencia de cubos, apliquemos la división de polinomios a: $(x^3+y^3)/(x+y)$ también $(x^3-y^3)/(x-y)$, ya que son divisiones exactas.

Factorización de la suma y diferencia de cubos

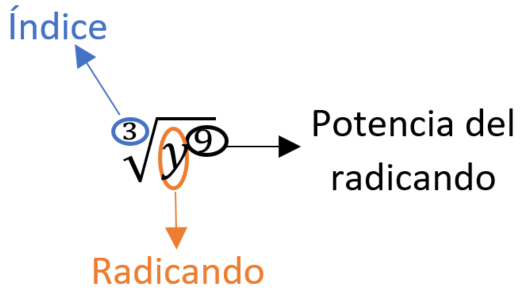
La factorización de la suma y diferencia de cubos son equivalentes a:

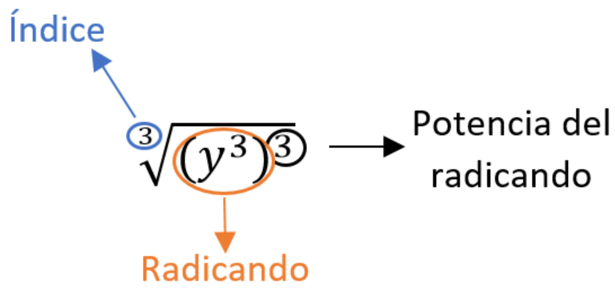
$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ **Suma de cubos**

$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$ **Diferencia de cubos**

Recordemos ciertos trucos para obtener las raíces cúbicas

Para obtener una raíz cúbica, o cualquier otra raíz es recomendable que la potencia del radicando sea igual al índice de la raíz para poder simplificarlos.





Obtengamos la raíz cubica de $8c^3$

$8c^3 = (2)^3(c)^3$ su raíz cubica es $\sqrt[\cancel{3}]{(2)^{\cancel{3}}(c)^{\cancel{3}}} = 2c$

Obtengamos la raíz cubica de $27c^6$

$27c^6 = (3)^3(c^2)^3$ su raíz cubica es $\sqrt[\cancel{3}]{(3)^{\cancel{3}}(c^2)^{\cancel{3}}} = 3c^2$

Observemos los siguientes ejercicios y obtengamos la regla para factorizarlos

Suma de cubos	*Forma factorizada*
$a^3 + b^3 =$	$(a+b)(a^2 - ab + b^2)$
$64x^3 + y^3 =$	$(4x+y)((4x)^2 - (4x)y + y^2)$
$27 + z^9 =$	$(3^3 + z^3)((3^3)^2 - (3^3)(z^3) + (z^3)^2)$

Conjuntamente con su docente, escriba los pasos para factorizar la suma de cubos.

....

....

....

....

....

....

Observemos los siguientes ejercicios y obtengamos la regla para factorizarlos

Diferencia de cubos	*Forma factorizada*
$x^3 - y^3 =$	$(x - y)(x^2 + xy + y^2)$
$27w^3 - y^3 =$	$(3w - y)((3w)^2 + (3w)y + y^2)$
$z^6 - 8 =$	$(z^2 - 2)((z^2)^2 + (z^2)2 + 2^2)$

Conjuntamente con su docentes, escriban los pasos para factorizar la diferencia de cubos

....

....

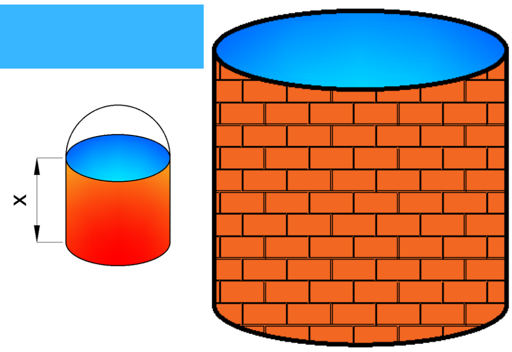
....

....

....

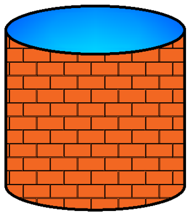
....

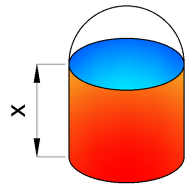
Tarea en clase



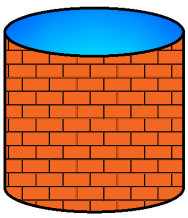
Un pozo de agua ocupa un volumen de 125 metros cúbicos , si el volumen de la cubeta está dado por la expresión $8x^3$, siendo "x" la altura de la cubeta .

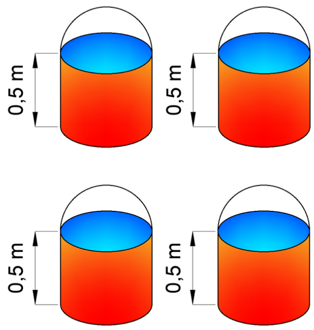
Si se extrae 1 cubeta ¿Cuál es el volumen restante del pozo de agua ?
Factorice la expresión obtenida.



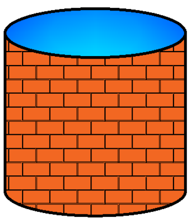


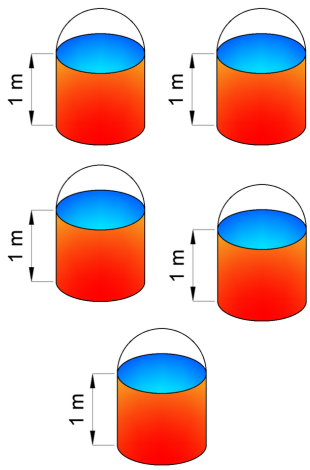
Si la altura de la cubeta es 0.5 metros y se extraen 4 cubetas ¿Cuál es el volumen del pozo de agua ?





Si la altura de la cubeta es 1 metro y se extraen 5 cubetas ¿Cuál es el volumen del pozo de agua ?



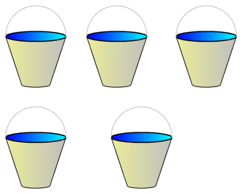


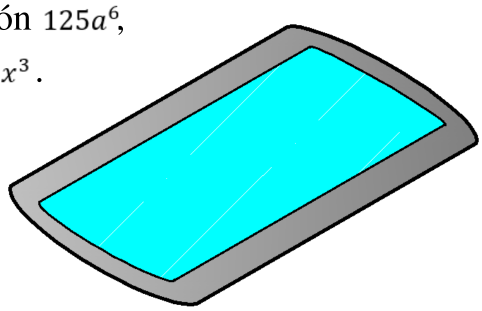
Para la casa

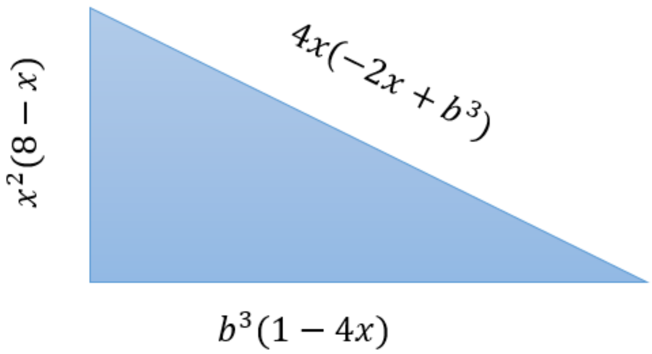
La piscina mostrada ocupa un volumen dado por la expresión $125a^6$, se decide extraer cinco cubetas que ocupa un volumen de $\frac{1}{5}x^3$.

*¿Cuál es el volumen restante?

*Factorice la expresión resultante.







Calcule el perímetro del siguiente triangulo, luego de ello factorice la expresión obtenida.

$$c^9 + \frac{1}{216}$$

$$\frac{1}{8}e^3 - \frac{1}{27}x^6$$

CONTESTE

FACTORIZACION DE SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS		
POSITIVO	NEGATIVO	INTERESANTE

Respondamos lo siguiente, referente a la clase Factorización " suma y diferencia de cubos"

Me gusto trabajar con mi equipo..................... ¿por qué?...
....
....

Comprendió el tema dado en clase.................

Comentarios sobre esta clase.
....
....
....
....
....

Gracias por haber utilizado la guía

Albert Einstein decía: Si buscas resultados distintos, no hagas siempre lo mismo.