UNIVERSIDAD DE CUENCA

Facultad de Filosofía Letras y Ciencias de la Educación

Carrera de Matemáticas y Física

“Elaboración de un Objeto de Aprendizaje para la enseñanza de temas de la asignatura de Cálculo Diferencial de la carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca”

Trabajo de titulación previo a la obtención del título de Licenciado en Ciencias de la Educación en Matemáticas y Física.

Autor:

Lenin Enrique Huaraca Ulloa

CI: 0103129714

lenin1386@hotmail.com

Tutor:

Msc. Tatiana Gabriela Quezada Matute

CI: 0104932504

Cuenca-Ecuador

27-Agosto-2019

RESUMEN

El presente trabajo de titulación denominado Elaboración de un Objeto de Aprendizaje para la enseñanza de temas de la asignatura de Cálculo Diferencial de la carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca tiene como objetivo crear un OA (Objeto de Aprendizaje), para alcanzar un aprendizaje significativo en los estudiantes de la carrera de Matemáticas y Física, en la asignatura de Cálculo Diferencial. El OA contiene videos, animaciones, evaluaciones, etc., que se encuentran albergados dentro de una plataforma llamada Exelearning,

Para realizar este proyecto de titulación se plantearon tres capítulos de desarrollo. En el primer capítulo se muestra la dificultad del cálculo diferencial y la teoría pedagógica, además la importancia de las Tic en la educación y el concepto de Objeto de Aprendizaje.

El segundo capítulo tiene como objetivo demostrar que los estudiantes poseen dificultad en comprender temas de la asignatura de cálculo diferencial. Se analizó la información obtenida mediante las encuestas realizadas a los futuros docentes de la carrera de Matemáticas y Física mediante los datos obtenidos y la revisión documental.

En el tercer capítulo se desarrolla el Objeto de Aprendizaje que presenta conceptos e información relacionada al Cálculo Diferencial, en temas de derivadas, máximos y mínimos, teorema de valor medio y problemas de optimización.

La metodología utilizada en el trabajo es cuantitativa, las técnicas utilizadas, son la encuesta, con su instrumento el cuestionario y la revisión documental, con las cuales se pudo demostrar la existencia de un problema al momento de aprender la asignatura de Cálculo Diferencial.

Palabras claves: Objeto de aprendizaje. Cálculo diferencial. Aprendizaje significativo. Enseñanza.

ABSTRACT

The present work of titling called Elaboration of a Learning Object for the teaching of themes for the assignature of Differential Calculus of the Mathematics and Physics career of the University of Cuenca has an aim to create an OA (Learning Object), to achieve a meaningful learning in students of the degree of Mathematics and Physics, in the subject of Differential Calculus. The OA contains videos, animations, evaluations, etc., which are housed within a platform called Exelearning,

In order to develop this titling project we proposed to implement three chapters of development. The first chapter shows the difficulty of differential calculus and pedagogical theory, as well as the importance of Tic in education and the concept of the Learning Object.

The second chapter aims to demonstrate the difficulty of students in understanding different topics in the subject of differential calculus. We analyze the information obtained through the surveys made to the future teachers in the field of study of Mathematics and Physics through the data obtained and the documentary review.

In the third chapter, we develop the Learning Object that presents concepts and information related to the Differential Calculus, in topics of derivatives, maximum and minimums, medium value theorem and optimization problems.

The methodology used in the work is quantitative; the techniques used are the survey, with its instrument the questionnaire and the documentary review, with which it was

possible to demonstrate the existence of a problem when learning the subject of Differential Calculus.

Keywords: Learning object (OA). Differential calculus. Significant learning. Teaching.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio Institucional

Cláusula de Propiedad Intelectual

Lenin Enrique Huaraca Ulloa autor/a del trabajo de titulación **"Elaboración de un Objeto de Aprendizaje para la enseñanza de temas de la asignatura de Cálculo Diferencial de la carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca"**, certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor/a.

Cuenca, 27 de agosto, 2019

Lenin Enrique Huaraca Ulloa

C.I: 0103129714

CERTIFICADO

Yo, LENIN ENRIQUE HUARACA ULLOA, certifico que todo el contenido del presente trabajo es de exclusiva responsabilidad del autor.

…………………………………..

DEDICATORIA

A mi madre y a mi padre por todo lo que han hecho por su hijo.

Lenin Huaraca

AGRADECIMIENTO

A mis hermanos Alan y Edgar, mi hermana Linda por su apoyo incondicional.

A la Msc. Tatiana Quezada por su gran voluntad y amabilidad, sin ella este sueño no sería posible.

A mis grandes amigos Richard Portugal y Juan Farez por su amistad y aprecio.

Al Ing. Xavier González por sus concejos.

A los docentes de la Carrera de Matemáticas y Física por las enseñanzas recibidas.

Lenin Huaraca

INTRODUCCIÓN

Una de las problemáticas que se daría a menudo en la educación superior es que los docentes no estarían familiarizados con el uso de las Tic en esta era de la información. Según Rivera (2016) manifiesta "en la actualidad los métodos de enseñanza aprendizaje tradicional no están siendo eficientes para los estudiantes comprendan los contenidos discutidos en el aula de clase con un buen nivel de entendimiento" (p. 3). Por tal razón surge la necesidad de diseñar una herramienta de aprendizaje como es el Objeto de Aprendizaje (OA), que permita apoyar el proceso de enseñanza aprendizaje del cálculo diferencial.

Los Objetos de Aprendizaje tienen múltiples beneficios en la educación: logra adaptarse a cualquier plataforma de educación virtual, ser utilizado varias veces y en diferentes temáticas. En los estudiantes permite que su objetivo de aprender cierto tema, hacerlo en el menor tiempo posible, esto debido a la flexibilidad de manipulación que posee el OA.

El OA es un instrumento digital que facilita el estudio del Cálculo Diferencial, ya que se puede crear clases entretenidas donde el estudiante no tenga fatiga mental, por lo que posee videos tutoriales, juegos, animaciones y evaluaciones, los cuales lo puede realizar las veces que sea necesario para obtener un aprendizaje significativo.

La herramienta para crear el OA es el software llamado Exelearning, que es una plataforma digital de fácil interacción y no hace falta tener conocimientos de programación y es un programa de libre acceso.

CAPÍTULO I

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

1.1 EL CONSTRUCTIVISMO

El modelo pedagógico constructivista tiene sus bases en la filosofía, sociología y educación. Proviene del verbo latín construir “struere” que significa dar estructura. La idea central de la enseñanza constructivista en el aula radica en que el estudiante construya su aprendizaje a base de conocimientos anteriores.

Hernández en palabras de Jonassen (2008) menciona que:

> El modelo constructivista busca que las actividades en el aula sean activas y que los estudiantes no estén de una forma pasiva atendiendo. El ambiente de aprendizaje constructivista se puede diferenciar por las siguientes características; (1) El ambiente constructivista en el aprendizaje; (2) Las múltiples representaciones de la realidad evaden las simplificaciones y representan la complejidad del mundo real; (3) El aprendizaje constructivista se enfatiza en construir conocimiento dentro de la reproducción del mismo; (4) El aprendizaje constructivista resalta tareas auténticas de una manera significativa en el contexto; (5) El aprendizaje constructivista proporciona entornos de aprendizaje como entornos de la vida diaria; (6) Los entornos de aprendizaje constructivista fomentan la reflexión en la experiencia. (Hernández, 2008, p.28)

De aquí se entiende que este método busca crear entornos de aprendizaje que se puedan ligar a la vida real. Esto se evidencia al tomar ejemplos de problemas matemáticos y contextualizarlos con el diario vivir, enfatizando que el estudiante tenga como producto final una educación valiosa. Por aprendizaje significativo se entiende que el estudiante relacionará los conceptos nuevos con conocimientos ya adquiridos, formando una base sólida de conceptos. Para que haya un aprendizaje significativo es necesario que el docente contextualice los ejercicios matemáticos tomados de los textos con la vida real y utilice herramientas para facilitar el aprendizaje de los estudiantes

1.1.1 EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO EN LAS MATEMÁTICAS.

En general las asignaturas como el cálculo diferencial e integral tienen prestigio de ser abstractas, por lo cual generan dificultad por sí mismas, esta conducta de inicio influye en el comportamiento de los estudiantes generándoles inseguridad, lo cual se refleja al momento de las pruebas y lecciones.

> Adquirir habilidad para formular, modelar y resolver problemas que involucren procesos de diferenciación, resulta de suma importancia, por cuanto ello facilita la comprensión de nuestra realidad y da sentido a la enseñanza en diferentes contextos, no solo en las aplicaciones propias de las Matemáticas sino en áreas del conocimiento como las Ciencias Naturales, las Ciencias Sociales y muchas otras que establecen relación interdisciplinaria con las Matemáticas. Por otro lado, el trabajo con situaciones problema, posibilita el desarrollo del pensamiento lógico matemático de los estudiantes y de sus competencias. Formular y resolver problemas que involucren derivadas, deberá ir de la mano con la implementación de otros procesos generales tales como: modelación de situaciones de la realidad; comunicar; razonar; comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. Esta implementación deberá hacerse de manera activa, constructiva, dinámica y creativa, con el propósito de que los estudiantes realicen aprendizajes verdaderamente significativos. (Nova García, 2016, pp. 4-5).

1.1.2 DIFICULTAD EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL.

El cálculo diferencial pertenece a una de las ramas de la matemática aplicada, por lo que tiene gran importancia su aprobación en cualquiera de las carreras que oferten esta asignatura, ya que sirve de conocimiento elemental para asignaturas más avanzadas como son: funciones de varias variables, ecuaciones diferenciales, etc.

Existen varias formas de resolver un ejercicio de matemáticas, específicamente sobre cálculo diferencial, aun así, la mayoría de los estudiantes presentan notables dificultades en la resolución de problemas y deducen que las mismas son difíciles, esto se puede dar por la ambigüedad que existen en ciertos libros por los planteamientos propuestos. Puesto que se tiene que representar funciones, estudiar variables, etc., es aquí donde se evidencia la dificultad del cálculo diferencial.

En esta asignatura no basta con utilizar las gráficas para la representación de respuestas de ejercicios propuestos, ya que es necesario que cada concepto sea comprendido por el estudiante y de la misma forma el resultado que obtenga lo pueda expresar por medio de una ecuación o fórmula. Gutiérrez, Buitrago y Ariza citando a Campos (2017) nos dice que existen tres formas de representar una respuesta.

- Representación numérica: se registran diferentes datos numéricos (datos medidos) en una tabla (tabulación), de acuerdo con las magnitudes involucradas en el fenómeno físico o experimental.
- Representación gráfica: se hace por medio de una curva que se traza en el plano cartesiano o en el plano polar, a partir de un registro de datos de las magnitudes involucradas.
- Representaciones algebraicas: a partir de los registros numéricos, se pueden construir expresiones algebraicas (ecuaciones) que se ajustan al comportamiento de las variables involucradas.

"En la actualidad, la matemática se ha convertido en una asignatura muy teórica, por lo que su desempeño académico en el área de las matemáticas de los estudiantes que ingresan a carreras que contiene matemática avanzada, lo cual no permite un adecuado aprendizaje del cálculo diferencial y tiene como consecuencia un alto índice de deserción, dicha afirmación se la va a corroborar en el capítulo número dos del presente trabajo”. (López, 2005, pp110-120)

1.2 LAS TIC EN LA EDUCACIÓN

Las Tics (tecnologías de la información y comunicación) en el ámbito educativo se basan en tres entornos básicos: la informática, la microelectrónica y las telecomunicaciones, de las cuales la informática es el medio más utilizado por los docentes para desarrollar entornos virtuales de aprendizaje para que el estudiante desarrolle su máximo potencial.

El docente busca la ayuda de las Tics para el desarrollo participativo de sus clases, pues “el aprendizaje virtual permite la interactividad, promueve la motivación en el estudiante, la mejora del conocimiento en un entorno flexible, lo cual facilita el formar mejores estudiantes con las habilidades necesarias para las nuevas exigencias laborables” (Pérez, 2006. p.5)

Principios de buenas Prácticas usando las Tic

En la siguiente tabla se expone las ventajas del uso de las Tics, de acuerdo con López (2007) citando a González y Sangrá (2004).

Tabla 1. Principios de Buenas Prácticas usando las TIC

Principio	Acción	Aplicación de la tecnología
Comunicación	Facilitar la comunicación y el contacto entre los estudiantes y el profesorado	Las tecnologías de comunicación asíncrona facilitan enormemente las oportunidades para relacionarse entre los estudiantes y el profesorado

Cooperación	Desarrollar la reciprocidad y la cooperación entre estudiantes	Igual que en el punto anterior, los sistemas de comunicación asíncrona mejoran la relación entre estudiantes, lo que retuerza la resolución de problemas en grupo, el aprendizaje colaborativo y la discusión de las tareas encomendadas.
Aprendizaje activo	Utilizar técnicas de aprendizaje activo	La tecnología está facilitando enormemente el learning by doing en lugar de la mera observación. Los mecanismos de búsqueda son utilizables de manera muy sencilla y la simulación de situaciones reales cada vez es más fácil de desarrollar.
Interactividad	Retroalimentar con rapidez	Las TIC aumenta posibilidad de conseguir una retroalimentación inmediata sobre el progreso en el aprendizaje.

Nota: Tomado de López (2007)

En palabras de Bates (2001):

> Los estudiantes por medio de un objeto de aprendizaje virtual pueden acceder a una enseñanza eficaz y de calidad en cualquier lugar del mundo con una conexión a internet, los materiales de aprendizaje multimedia bien diseñados pueden ser más eficaces que los métodos de enseñanza tradicionales, ya que los estudiantes pueden aprender más fácil y rápidamente mediante las ilustraciones, la animación, la diferente organización de los materiales, teniendo un mejor control de los materiales que se vayan a emplear para la enseñanza. (López, 20017, p. 8).

Las Tics reconocen tres desafíos fundamentales que deben ser enfrentados: El primero de estos desafíos es el diseño, mantenimiento y gestión de la infraestructura tecnológica. La sola adquisición e instalación de los diversos dispositivos (computadores, impresoras, concentradores, impresoras, redes, servidores, accesos a Internet) no es suficiente para asegurar el acceso y la disponibilidad de recursos digitales en el establecimiento. El segundo desafío está centrado en las competencias docentes que se requieren para la integración curricular de las tecnologías en el centro educativo. El tercer desafío radica en la provisión de recursos y contenidos digitales que favorezcan el uso e integración pedagógica. (Low, Pelgrum y Plomp, 2008, p. 66)

1.2.1 LA WEB 2.0 Y LA EDUCACIÓN.

“El término web 2.0 fue acuñado por Tim O’Reilly en el año 2004 para referirse a una segunda generación en la historia de la web, cuya definición se basa en la creación y desarrollo de comunidades de usuarios y en una gama especial de servicios, como redes sociales, blogs, wikis o folksonomías, que fomentan la colaboración y el intercambio ágil de información entre usuarios.” (Fernández, fecha, p. 183).

La Web 2.0 ha ido evolucionando desde una página de lectura hasta simuladores que nos permiten experimentar con ejercicios matemáticos que se pueden aplicar en la vida real, además, si un estudiante no se encuentra seguro de la resolución del ejercicio puede pedir asesoramiento al docente o a sus compañeros que están conectados por medio de un ordenador, creando así la participación de los estudiantes y una clase virtual dinámica.

Ahora bien, se podría decir que el principal objetivo de crear una herramienta virtual de aprendizaje es el de generar contenido educativo y el de compartir con sus usuarios. La forma de trabajo de una Web educativa es por ensayo-error, es decir, el estudiante realiza el ejercicio y si tiene alguna equivocación el docente la corrige para que el usuario se dé cuenta cual fue su error, de esta manera se obtendría un aprendizaje significativo.

Según de la Torre (2006) y Alfhuguett (2008) se obtienen beneficios como:

Procesos más dinámicos: ya que puede analizar, construir, compartir, publicar o restringir sus aportes e ideas. Además, se abren espacios para el desarrollo de la creatividad, la estética y, por supuesto, el mejoramiento de las destrezas en el manejo de las herramientas tecnológicas.

El estudiante es el centro del proceso: inevitablemente se vuelve el protagonista de su propio desempeño ya que todas las actividades giran en torno a sus capacidades. El docente se convierte en un guía o mediador y el estudiante debe apropiarse de su nuevo papel en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Se erradica la actitud pasiva de los estudiantes: esta cualidad se encuentra íntimamente ligada con la anterior, ya que tradicionalmente el estudiante era sujeto adiestrable que recibía un cúmulo de información proporcionado por el docente quien era el que "le enseñaba", mientras que las concepciones contemporáneas enmarcan a estudiantes constructores de aprendizaje y a docentes que los guían en el proceso.

Acceso ilimitado a la información: por medio de este tipo de herramientas los estudiantes y los docentes tienen la posibilidad de adquirir información de primera mano, básicamente de todos los temas deseados.

1.2.2 LAS TIC EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL.

Las Tic podrían ayudar a la innovación en el proceso de enseñanza aprendizaje de cálculo diferencial, en diversas modalidades como la virtual, ya que posibilita el trabajo colaborativo, el cual potencia la construcción del conocimiento en una comunidad de aprendizaje. Se promueve espacios de reflexión y son opuestos a clásica transmisión del conocimiento.

Diversos recursos TIC pueden ser usados para apoyar el proceso de enseñanza y aprendizaje en cálculo, entre ellos software educativo y buscadores. Los primeros abren la posibilidad de representar modelos, gráficas y cálculos que antes solo eran posibles con la imaginación y con lápiz y papel, ahorrando tiempo en cálculos. Los segundos facilitan los procesos de búsqueda en Internet. De la gran cantidad de recursos TIC disponibles en matemático existente se especificarán los dos usados en la investigación. (Astudillo Juan, 2012, p.3-6)

Las TIC usadas en el proceso de aprendizaje, posibilitan de manera más efectiva la atención a las diferencias individuales, propiciando una mayor explotación de las capacidades de cada cual, no sólo pensando en los más talentosos y creativos, sino también en aquellos discapacitados por razones anatómicas o funcionales.

El uso de las Tic como medio complementario en la instrucción del cálculo diferencial, puede llegar a convertirse en una alternativa posible para lograr una asimilación eficaz de gran parte de la información adecuada sobre el tema en cuestión si son aprovechados los múltiples beneficios que poseen.

- Diseño e implementación rápidos con grandes facilidades de modificación.
- Fácil navegación que agiliza el acceso a gran cantidad de información.
- Se puede hacer uso de bases de datos y documentos relacionados con el tema.
- Uso de multimedia para amenizar el aprendizaje individualizado.
- El desarrollo de aplicaciones y otros materiales se realiza rápidamente.

• La posibilidad de colaboración disminuye el tiempo dedicado a lograr un resultado.

• Requiere poca inversión para su inicio y bajos costos de desarrollo.

• Elimina la barrera de las distancias y acelera las tareas.

(Sabina, Y., Toledo, V., 2005, pp. 2-4)

1.3 OBJETOS DE APRENDIZAJE

Los Objetos de Aprendizaje (OA) son piezas individuales auto contenidos y reutilizables de contenido que sirven con fines instruccionales. Los OA deben estar albergados y organizados en metadatos de manera que el usuario pueda identificarlos, localizarlos y utilizarlos para propósitos educacionales en ambientes basados en Web (Almeida, 2017, p. 2).

Según el Comité de Tecnologías de aprendizaje (LTSC Liaoning Technology Standars Committee 2000-2006) afirma lo siguiente: “Los OA se definen como cualquier entidad digital o no digital, que puede ser utilizada, reutilizada o referenciada durante el aprendizaje apoyado en la tecnología. Como ejemplos de aprendizaje apoyados por la tecnología se incluyen: los sistemas de entrenamiento basado en computadoras” (Almeida, 2017, p. 2).

Interpretando los párrafos anteriores es que el recurso multimedia OA se puede adaptar a cualquier plataforma de educación virtual, garantizando el uso efectivo de las Tic, tanto para docentes como para estudiantes, dado que facilita la búsqueda de los materiales que se utilizan durante las experiencias virtual y uso de las plataformas de aprendizaje.

El objeto de aprendizaje es un recurso o material digital de aprendizaje y está compuesto por tres elementos muy importantes que son: contenidos, actividades de aprendizaje, y elementos de contextualización que pueden ser consultados a través del internet.

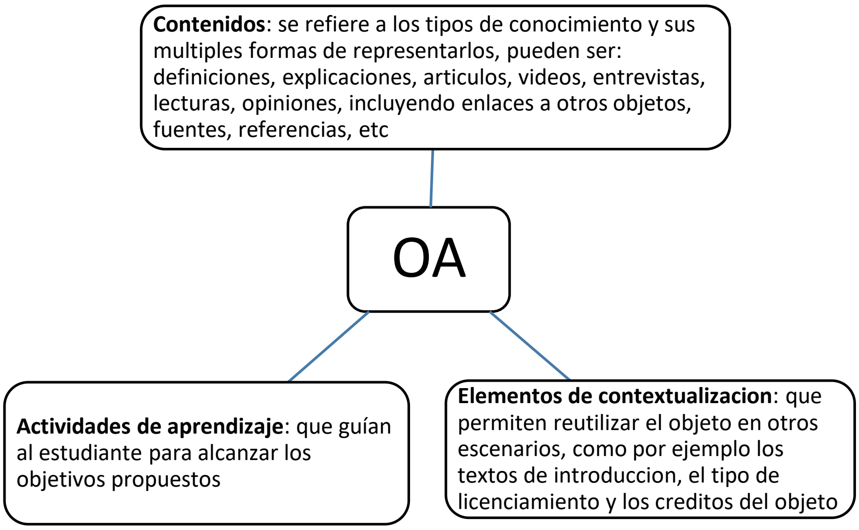


Figura 1: Componentes internos de OA. Ministerio de Educación Nacional Colombiano (2006)

Los Objetos de Aprendizaje son utilizados como:

- Recursos didácticos.
- Redes de objetos para gestión de conocimiento.
- Recursos para el uso del estudiante.

Un OA puede ser utilizado varias veces en diferentes temáticas, el trabajo y el tiempo se reducen a partir de un OA se puede obtener un nuevo objeto de aprendizaje y evita que los docentes vuelvan a crear recursos que ya existen. Esta herramienta digital de aprendizaje sirve para: el soporte educativo, para el dominio de aptitudes y procesos, también otorga al estudiante aprendizaje significativo, puede hacer retroalimentación en el proceso enseñanza aprendizaje, proporciona una gran ayuda para solucionar problemas.

El OA constituye el núcleo del apoyo al proceso de enseñanza aprendizaje. Desde el punto de vista didáctico constituyen medios que necesitan ser bien concebidos desde un objetivo para lograr la intención que se quiere. (Tamayo Cuenca, 2015, p. 4)

Lo que Tamayo quiere decir es que en un OA están presente actividades interactivas, las cuales fortalecen las estrategias de aprendizaje que sean utilizadas por el docente para enseñar cualquier asignatura en este caso Cálculo Diferencial, dentro del aula de clases generando habilidades, conocimientos y actitudes de exploración.

Según Zapata; (2005)

> La ausencia de metodologías técnicas, documentales y psicopedagógicas comunes y aceptadas que garanticen los objetivos, interoperabilidad, durabilidad y reutilización de los materiales curriculares basados en las redes". Ahora Francisco Mora nos dice que tales problemáticas se originan por el modo en que se presentan los contenidos de un curso. Por tanto, un OA elaborado adecuadamente, puede facilitar, paulatinamente, mejoras en la educación. (p.10)

1.3.1 EXELEARNING

Exelearning es una herramienta de código abierto que facilita la creación de contenidos educativos como los Objetos de Aprendizaje, sin la necesidad de tener conocimientos avanzados sobre programación. Este software permite la incorporación de diferentes recursos multimedia como imágenes, animaciones, videos, audios entre otras cosas. Lo novedoso de esta tecnología es su flexibilidad; ya que, puede ser editado los contenidos de los cuales forma un Objeto de Aprendizaje, ser utilizado en todos los dispositivos digitales en cualquier momento del proceso de enseñanza-aprendizaje. El software Exelearning se encuentra albergado en el siguiente sitio web: http://exelearning.net/.

“Exelearning es un programa libre y abierto para crear contenidos educativos de una manera sencilla”. (Exelearning, 2019)

1.3.2 LOS OA PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE MATEMÁTICAS

La incorporación de los OA en el proceso de enseñanza - aprendizaje con la orientación permanente de los docentes, motiva a los estudiantes por aprender favoreciendo la apropiación del conocimiento al potenciar las habilidades matemáticas de interpretación, modelación de situaciones matemáticas y ejecución de procedimientos o estrategias para dar solución a distintos problemas en el área de cálculo diferencial, lo cual fortalece el desarrollo de competencias genéricas tanto para su vida profesional como personal. De igual manera la inclusión de OA como medicación didáctica. (Martínez, 2018, p. 13)

CAPÍTULO II

MÉTODOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

2.1 METODOLOGÍA

La investigación de campo permitió recolectar datos con el objetivo de determinar la dificultad que tienen los estudiantes de la Carrera de Matemáticas y Física en comprender ciertos contenidos de la asignatura de Cálculo Diferencial y elaborar una propuesta pertinente que permita dar solución. Se utiliza un enfoque cuantitativo, las técnicas utilizadas, son la encuesta, con su instrumento el cuestionario y la revisión documental.

2.2 ENCUESTA

2.2.1 POBLACIÓN

La investigación de campo fue dirigida a los estudiantes de tercero y quinto ciclo de la Carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca, porque son aquellos que cursaron la signatura de Cálculo Diferencial.

Se les aplicó una encuesta de doce preguntas de opción múltiple y lo realizaron 57 estudiantes, siendo ellos el total de la población. No fue necesario un muestreo de datos. La información obtenida fue analizada mediante tablas y gráficos estadísticos.

2.2.2 ESTRUCTURA DE LA ENCUESTA

La encuesta consta de tres partes: la primera parte contiene preguntas sobre las dificultades que poseen los estudiantes cuando cursaron la asignatura de Cálculo Diferencial; la segunda se relaciona con los recursos didácticos y el uso de las TIC dentro del salón de clases y la parte final, concierne al conocimiento y uso de un Objeto de Aprendizaje.

2.2.3 ANÁLISIS DE LA ENCUESTA

1. **En este instante, ¿Qué nivel de compresión considera usted que posee de la asignatura de Cálculo Diferencial?**

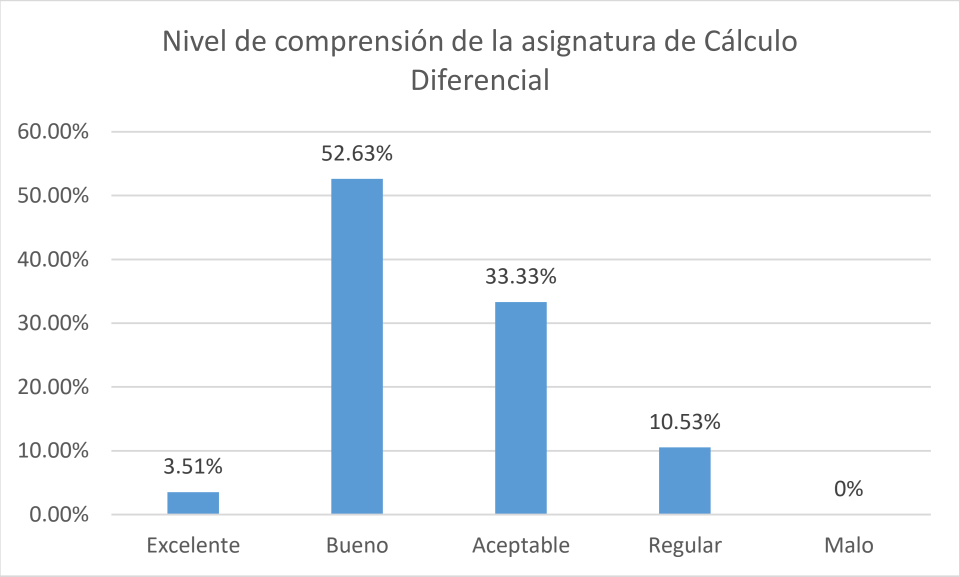


Figura 2. Nivel de comprensión de la asignatura de Cálculo Diferencial. (Fuente propia)

La figura 2 señala que las opciones de aceptable y regular fueron escogidas por veinte y cinco estudiantes, los cuales suman un porcentaje de 43,86 %, lo que indica que la asignatura no está asimilada correctamente. Lo ideal sería que todos los estudiantes estén en un nivel de excelente.

2. **Señale con una "X". Para usted la asignatura de Cálculo Diferencial resultó:**

Tabla 2. Dificultad en la asignatura de Cálculo Diferencial

Categorías	**Encuestados**	**Porcentaje (%)**
Complejo	17	29,82
Entendible	38	66,67
Fácil	2	3,51
TOTAL	57	100

Fuente propia

Respecto a la dificultad de la asignatura de Calculo Diferencial la mayoría de los estudiantes infieren que las clases fueron entendibles y un 29,82 % que son complejas. Sin embargo, esto es solo una apreciación de ellos, la única forma de saber que entendieron los temas de la asignatura en cuestión es realizando una prueba de conocimientos u observar sus calificaciones tal como se muestra en la tabla 3 en la página 40.

Ahora bien:

Si su respuesta fue compleja indique el por qué con uno de los siguientes ítems.

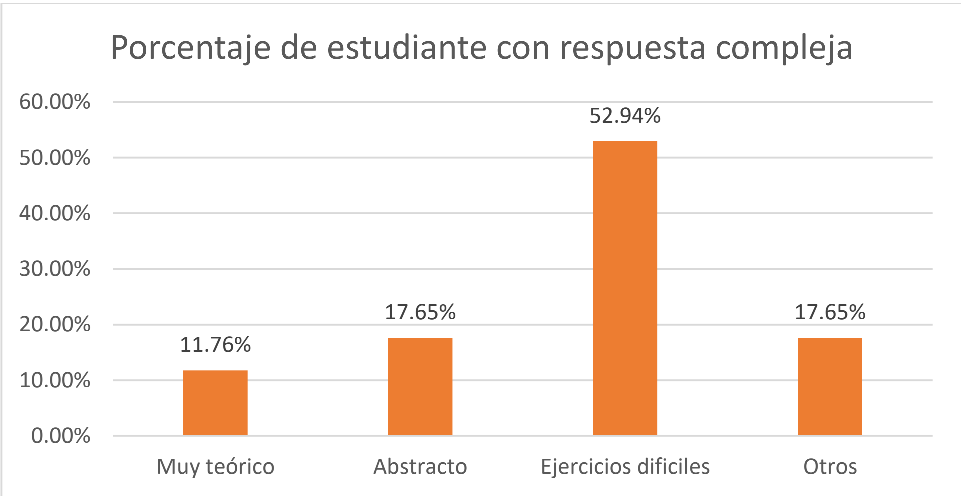


Figura 3. Porcentaje de estudiantes con respuesta compleja. (Fuente propia)

De los 17 estudiantes que eligieron la opción Compleja, el 52,94 % se inclinan a que la materia de Cálculo Diferencial contenía ejercicios difíciles; es decir, ejercicios que no son prácticos y que no representan la realidad de las personas.

3. **Señale con una "X". ¿Qué recursos educativos ayudarían a mejorar su comprensión en el tema de límites y derivadas?**

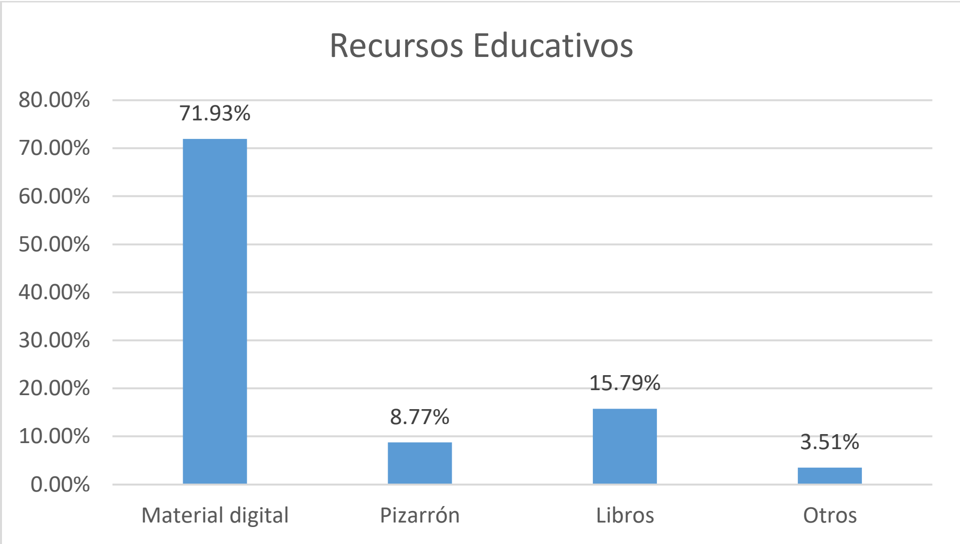


Figura 4. Recursos Educativos. (Fuente propia)

El estudio de límites y derivadas resulta ser complejo por sus conceptos y ejercicios, para poder dar una solución y que los estudiantes puedan comprender de mejor manera dicha asignatura lo ideal sería que se realice material digital; ya que, cuarenta y un estudiantes seleccionaron esta opción que es el 71.93% de la población estudiada.

4. **Señale con una "X". ¿Qué tan frecuente utiliza el docente las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) para impartir sus clases?**

TIC: son todos aquellos recursos, herramientas y programas que se utilizan para procesar, administrar y compartir la información mediante diversos soportes tecnológicos.

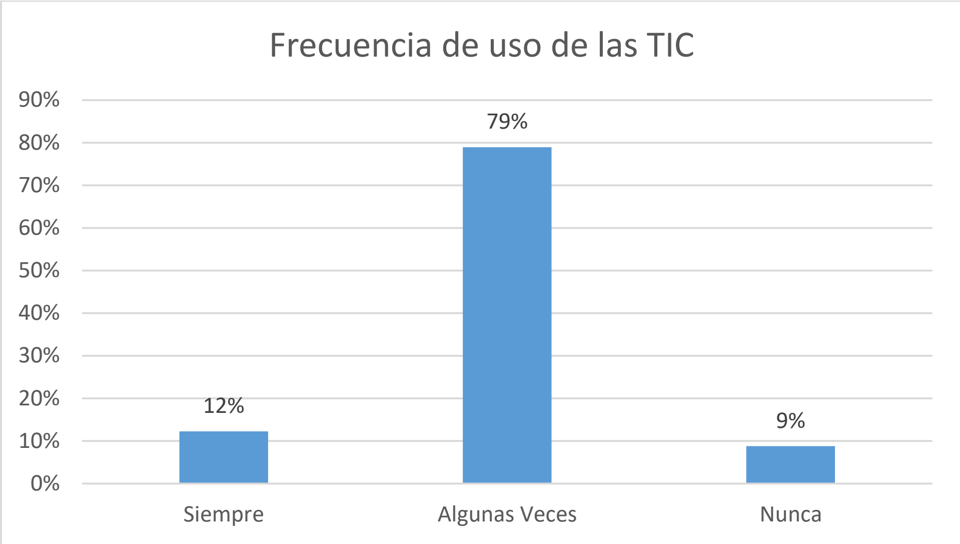


Figura 5. Frecuencia de uso de las TIC. (Fuente propia)

En la figura 5 se observa la frecuencia en que el docente hace uso de las TIC al impartir sus clases. Un total de 45 estudiantes (un 79%) indica que solo Algunas Veces el educador utiliza esta herramienta digital para enseñar. Lo ideal sería que una buena parte se ayude de las TIC para el proceso enseñanza-aprendizaje.

5. Señale con una "X". ¿En qué momento de la clase el docente utilizó las Tics?

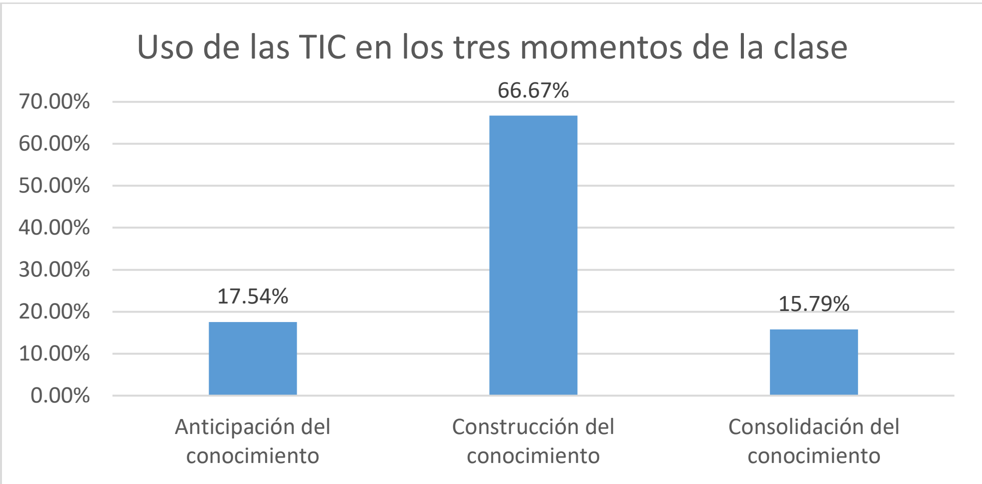


Figura 6. Uso de las TIC en los tres momentos de la clase. (Fuente propia)

En el gráfico precedente se observa que el docente utilizó las TIC para la Construcción del Conocimiento de sus clases con un porcentaje del 66.67 %; en algunos casos se pudo usar en la Anticipación de Conocimientos con un 17. 54 % y en la

Consolidación de Conocimientos tenemos un 15.79 %. Con los ítems que están bajo el 50 % se trata que el docente utilice el material digital al igual que las demás etapas de la creación del conocimiento.

6. **Señale con una "X". ¿Utiliza usted algún software o programa educativo para la resolución de ejercicios referentes a Calculo Diferencial?, si su respuesta es Sí, especifique cuál es.**

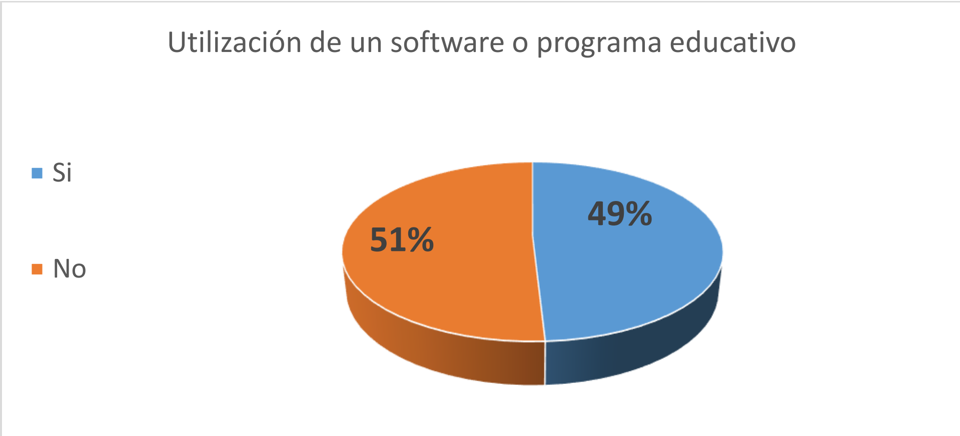


Figura 7. Utilización de un software o programa educativo. (Fuente propia)

Como se observa en la figura 7 más del 50 % de los estudiantes no utilizan programas educativos para aprender y resolver problemas de Calculo Diferencial, debido a que en las clases que se toman referentes a utilización de software se enseña lo elemental, como la creación de un objeto y la animación del mismo y no en base a las asignaturas de matemáticas avanzadas como es el Cálculo Diferencial.

7. **Señale con una "X". Está familiarizado con el concepto de Objeto de Aprendizaje.**

Concepto de un Objeto de Aprendizaje:

"Los objetos de aprendizaje (OA) son recursos digitales, pedagógicos y metodológicos, es una herramienta tecnológica que puede ser aplicada a nuestra realidad tales como: videos, animaciones, diagramas, audio, imágenes y en su conjunto"

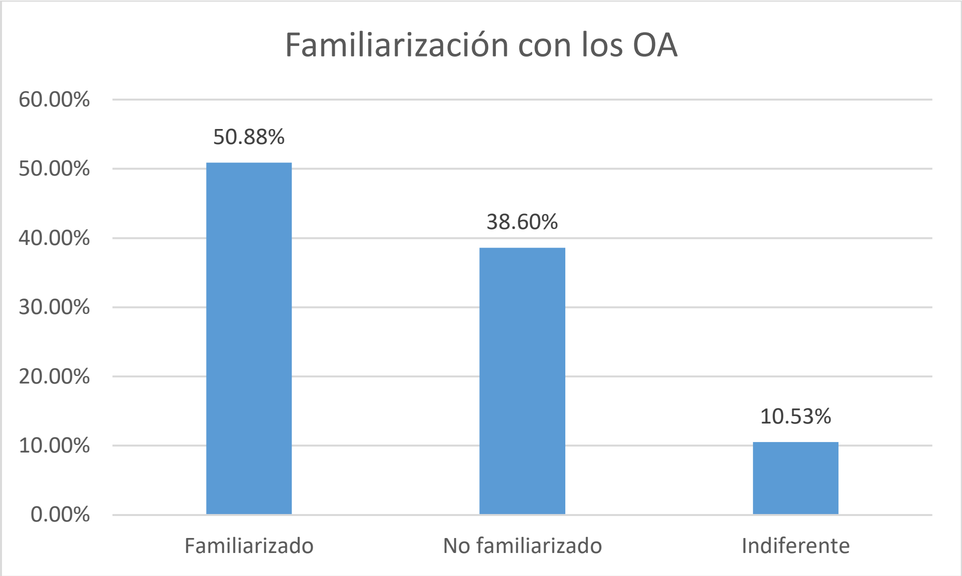


Figura 8. Familiarización con los OA. (Fuente propia)

La figura 8 muestra que un total de 28 estudiantes, casi el 50 % de la población estudiada desconocen el concepto de Objeto de Aprendizaje, lo cual, es importante para el desarrollo del trabajo de titulación.

8. **¿Usted ha recibido formación específica sobre el concepto y la producción de un Objeto de Aprendizaje?**

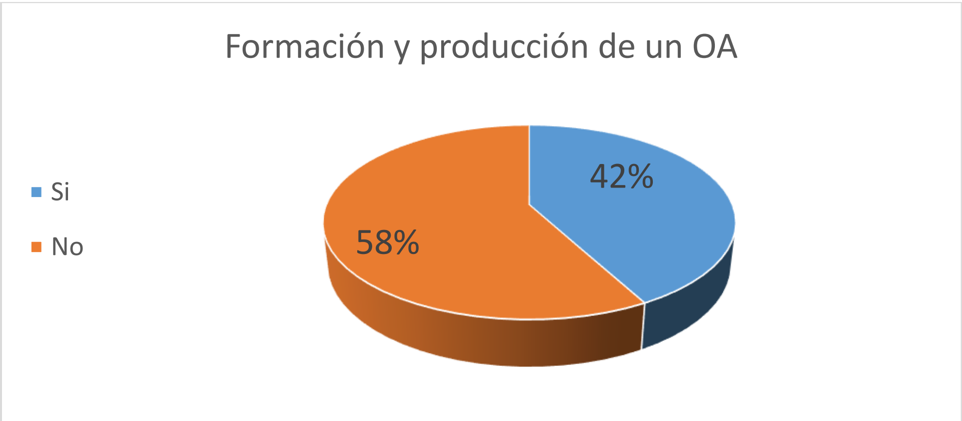


Figura 9. Formación y producción de un OA. (Fuente propia)

Se observa en la figura 9 que un total de treinta y tres estudiantes que equivalen al 58 % no han recibido formación sobre el concepto y producción de un Objeto de Aprendizaje.

9. **Señale con una "X". ¿Considera usted que la utilización de un Objeto de Aprendizaje por parte del docente le ayudaría a mejorar la comprensión de los contenidos de Calculo Diferencial?**

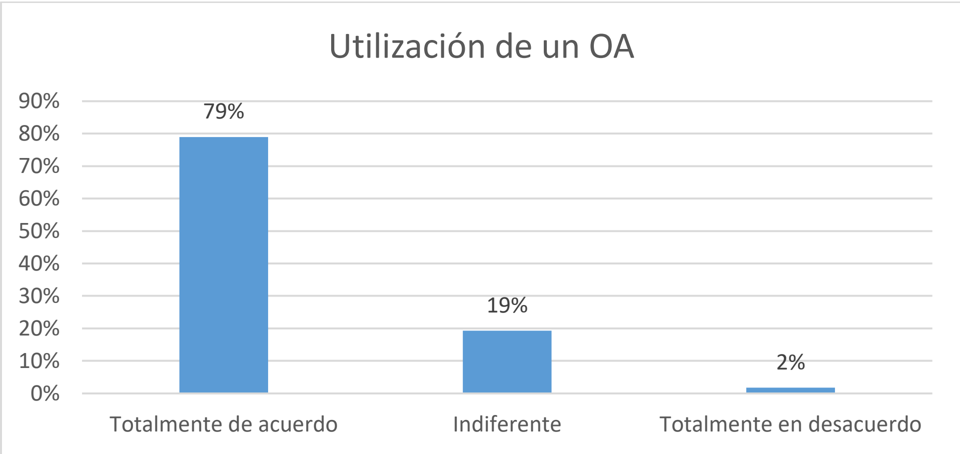


Figura 10. Utilización de un OA. (Fuente propia)

Analizando la figura 10 se obtiene que cuarenta y cinco (un 79 %) estudiantes están Totalmente de acuerdo con la utilización de Objetos de Aprendizaje para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje en la asignatura en cuestión. Esto demuestra que la mayoría de la población aprueba el uso de un OA como una herramienta digital didáctica para aprender Cálculo Diferencial.

10. **Señale con una "X", puede seleccionar más de una opción.**

Si usted tomara un curso virtual de Calculo Diferencial en un Objeto de Aprendizaje, ¿Qué herramientas de aprendizaje le gustaría que tuviera?

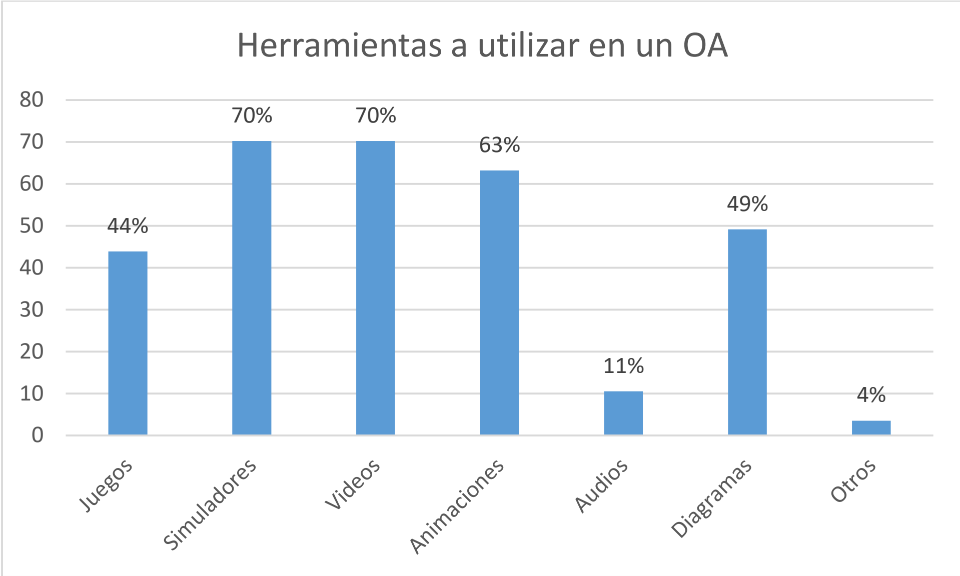


Figura 11. Herramientas a utilizar en un OA. (Fuente propia)

Los estudiantes de la carrera de Matemáticas y Física sugieren que un Objeto de Aprendizaje debe contener Animaciones con un 63 % del total de la población estudiado, al igual que el 70 % debe tener Videos y Simuladores. También los encuestados tienen la percepción que es factible utilizar Juegos dentro del aprendizaje.

11. Señale con una "X". ¿Qué contenidos sobre Cálculo Diferencial tuvo dificultades al momento de cursar la asignatura?

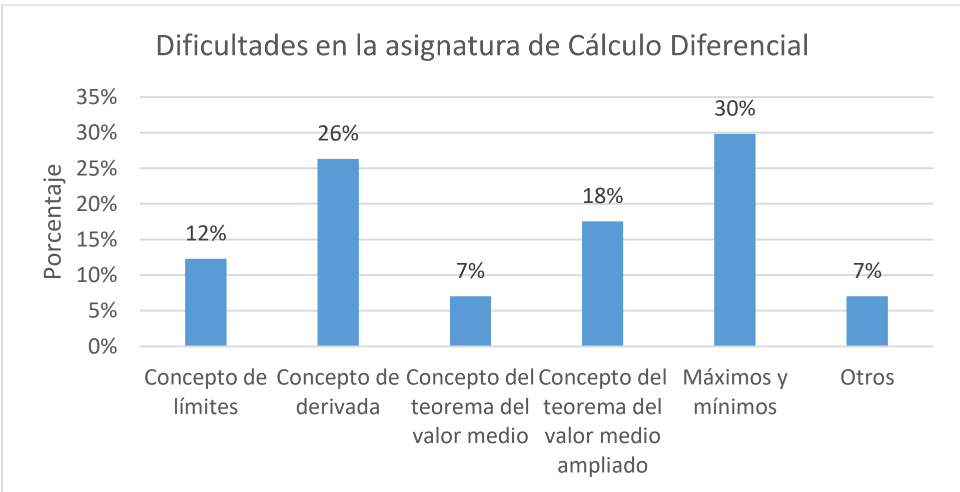


Figura 12. Dificultades en la asignatura de Cálculo Diferencial. (Fuente propia)

La asignatura de Cálculo Diferencial resulta ser compleja como abstracta por sus contenidos, ya sean por su composición teórica o sus ejercicios. Tal como se ve en la figura 12, quince estudiantes (un 26 %) seleccionaron la opción de Concepto de derivada que es la parte teórica, diecisiete estudiantes (un 30 %) optaron por Máximos y Mínimos. Este capítulo se les hace difícil a los estudiantes debido a que sus conceptos son complejos de asimilar, en tanto a sus ejercicios son incomprensibles; ya que no poseen la base matemática para entenderlos.

12. ¿En qué contenidos de la asignatura de cálculo diferencial el docente tardo más de lo esperado y usted tuvo síntomas de fastidio o fatiga?

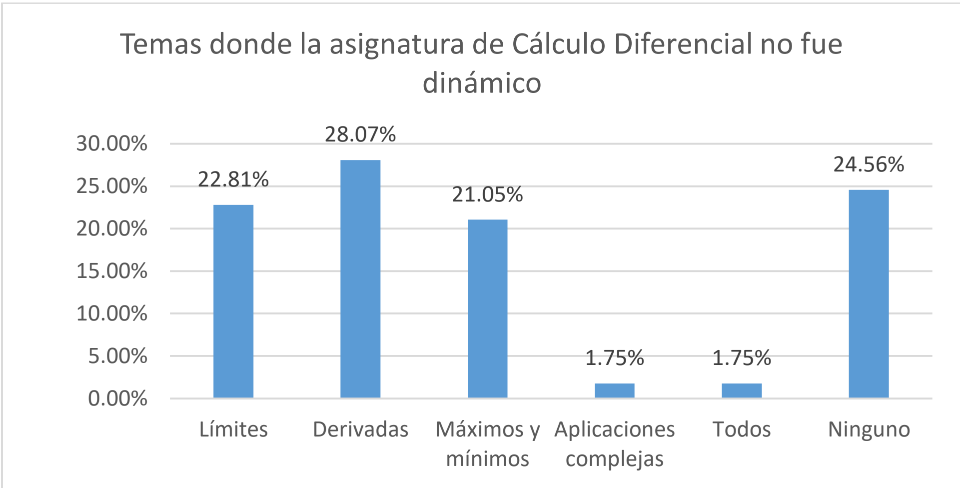


Figura 13. Temas donde la asignatura de Cálculo Diferencial no fue dinámico. (Fuente propia)

Con la siguiente pregunta se quiere llegar a identificar en que temas se puede utilizar recursos didácticos para hacer más dinámico y entendible los temas como: Límites, Derivadas junto con Máximos y Mínimos que son parte de un capítulo complicado de entender; ya que la comprensión de estos temas son base fundamental para aprender asignaturas posteriores como Cálculo Integral, Funciones de Varias Variables, Ecuaciones Diferenciales, etc.

2.2.4 ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA ENCUESTA

En las preguntas 1 y 2 se demuestra que el 60% aproximadamente de los estudiantes encuestados tienen un nivel de compresión de bueno y poseen dificultad en entender contenidos referentes a la asignatura de Cálculo Diferencial, debido a la falta de bases matemáticas y de contenidos no asimilados en los ciclos inferiores, que no permiten mejorar en el aprendizaje de cálculo avanzado. Tal como se evidencia en la figura y la tabla.

En la pregunta 4 muestra que la mayoría de estudiantes manifiestan la utilidad de usar un material didáctico digital dentro del estudio de ciertos temas de Cálculo Diferencial, debido a la facilidad que tienen en el uso de aparatos electrónicos como el celular y laptops en la vida cotidiana. El test afirma que la utilización de este material digital ayudaría en el proceso de enseñanza-aprendizaje, el cual permite a los educandos tener una mejor apreciación sobre la asignatura.

La utilización de las TIC por el docente al momento de impartir la clase según la pregunta 4, es **A veces** con un 79 %, sobre todo en la construcción del conocimiento. Lo ideal sería que se use en los otros dos momentos y que el profesor se apoye en las Tic la mayor parte del tiempo; ya que el uso de estas tecnologías permite que los educadores creen un ambiente de aprendizaje eficaz. La buena aplicación de las TIC motiva a los estudiantes, capta su atención e incita al pensamiento.

De acuerdo a las preguntas 7 y 8, alrededor del 50 % de los encuestados desconocen el concepto de Objeto de Aprendizaje y no han tenido una formación apropiada sobre la creación y producción de la misma.

Los estudiantes están totalmente de acuerdo en la utilización de un Objeto de Aprendizaje para mejorar la comprensión de la asignatura de Cálculo Diferencial; ya que este recurso multimedia al ser interactivo despierta el interés en aprender del educando. El OA presenta algunos beneficios por ser digital, puede ser modificado a conveniencia del profesor, no tiene costo, es fácil de usar y es accesible desde cualquier dispositivo electrónico en cualquier momento y lugar del mundo y, puede contener videos, animaciones, juegos, etc.

El estudio realizado demuestra según las preguntas 11 y 12, que un gran porcentaje de estudiantes no entienden o tienen dificultad en comprender los temas de Derivadas, Máximos y Mínimos junto con la Teoría de Valor Medio, debido a la falta de utilización de un material didáctico digital que les permita captar de una manera eficaz y entretenida.

2.3 REVISIÓN DOCUMENTAL

De la revisión documental se consiguió información específica sobre las evaluaciones de los estudiantes que cursaron la asignatura de Cálculo Diferencial en los diferentes periodos lectivos.

2.3.1 POBLACIÓN

Con el objetivo de verificar el problema se realizó la revisión de las notas de nueve ciclos de los estudiantes que cursaron la asignatura de la Cálculo Diferencial en los diferentes años lectivos, desde septiembre 2009 hasta febrero 2018, un total de 230 educandos. Dichas notas fueron entregadas por la Secretaría de la Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación y por lo tanto se mantendrá la identidad de los estudiantes en anonimato ya que lo importante es su análisis.

La información obtenida fue interpretada y redactada de la misma forma que la encuesta.

Tabla 3. *Evaluaciones sobre 100 de la asignatura de Cálculo Diferencial*

Calificativo	Notas	Estudiantes	Porcentaje (%)
Sobresaliente	90-100	19	8%
Muy Buena	80-89	45	20%
Buena	70-79	53	23%
Regular	60-69	76	33%
Reprobado	0-59	37	16%
Total		230	100%

Fuente Propia

2.3.2 ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA REVISIÓN DOCUMENTAL

Como se puede observar en la tabla 3, el promedio obtenido en Cálculo Diferencial que suma entre las categorías de Reprobado, Regular y Buena es del 72 %, pocos son los estudiantes que están dentro de las categorías de Muy Buena y Sobresaliente; por lo que no se puede asegurar que los estudiantes hayan comprendido completamente la asignatura.

Capítulo III

DESARROLLO DE LA PROPUESTA

3.1 DESARROLLO DEL OBJETO DE APRENDIZAJE

La propuesta contiene el desarrollo y dotación de un Objeto de Aprendizaje sobre temas de la asignatura de Cálculo Diferencial, los cuales son: derivadas, máximos y mínimos, teorema de valor medio y problemas de optimización, dirigida a los estudiantes de la carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca, también a personas que tengan interés en aprender y aplicar el cálculo diferencial o simplemente buscan fortalecer sus bases matemáticas.

El objeto de aprendizaje está compuesto por: quince videos sobre teoría, conceptos y ejercicios resueltos paso a paso sobre dicha asignatura para que el estudiante los analice en cualquier momento de su estudio, también contiene actividades y problemas propuestos que permiten al educando reforzar sus conocimientos y finalmente una autoevaluación, todo esto está albergado en una plataforma llamada Exelearning.

3.2 ESTRUCTURA DE LA PROPUESTA

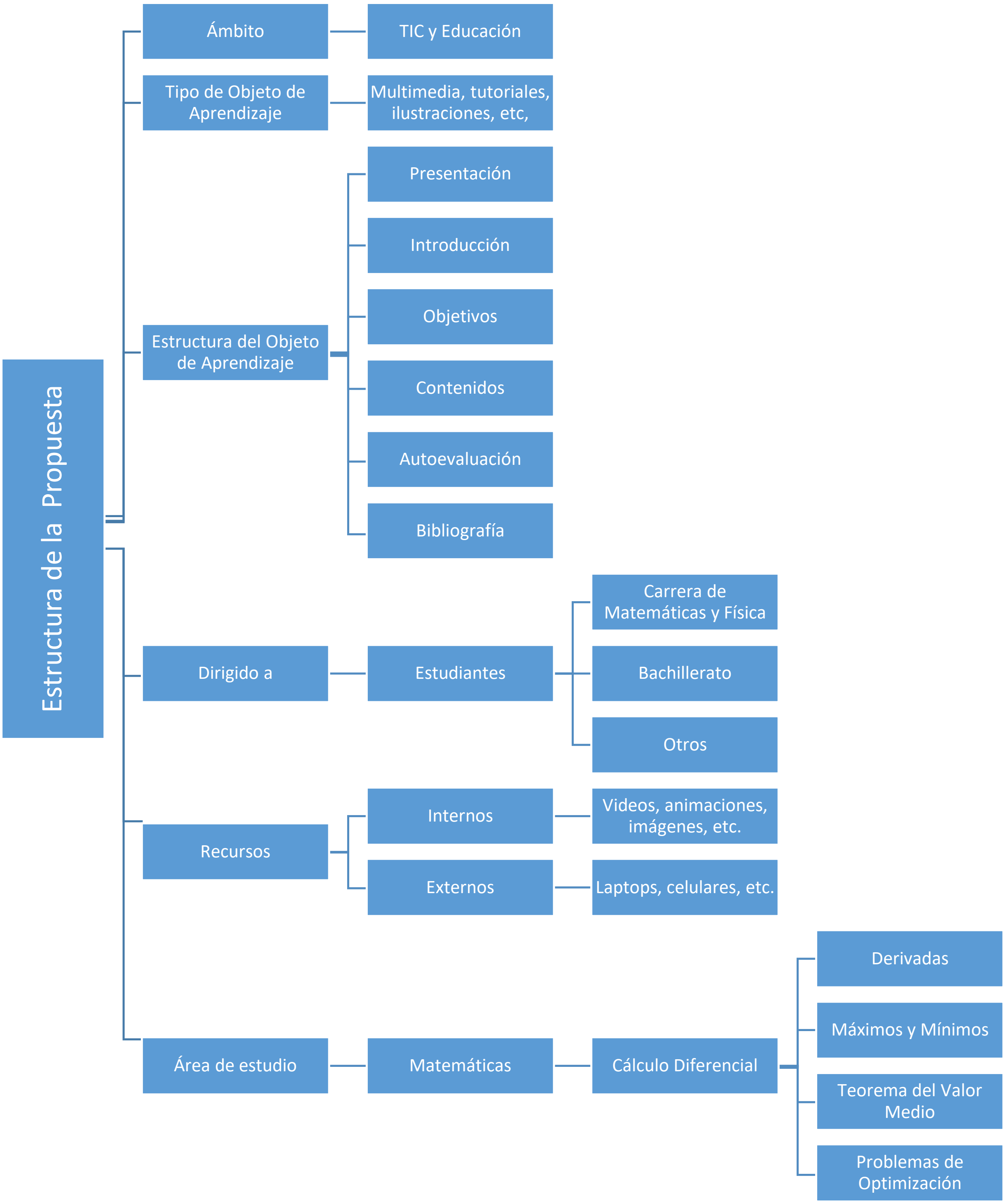


Figura 14. Estructura de la Propuesta

3.3 PROPUESTA

3.3.1 ESTRUCTURA DEL OBJETO DE APRENDIZAJE

La siguiente ilustración presenta el menú del OA, donde está contenido todos los recursos educativos como los videos, conceptos, actividades, etc., el mismo que facilita la navegación en las diferentes pantallas.

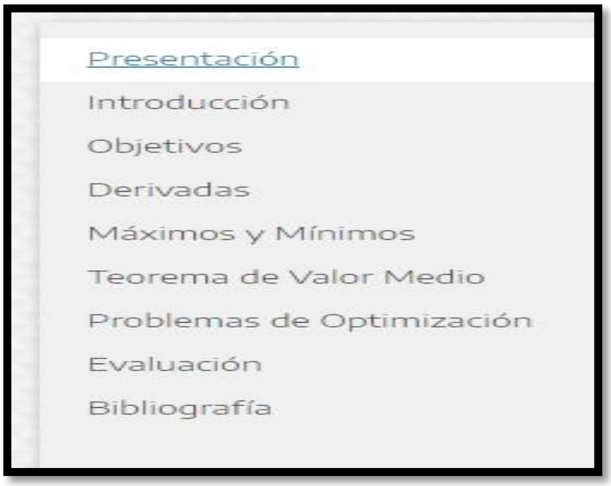


Ilustración 1. Menú

1. **Presentación.**

En esta sección se incluye los datos generales del Objeto de aprendizaje como: Institución, facultad y carrera; contenidos del OA, autor y coordinador.

Ilustración 2. Presentación.

2. Introducción.

En este componente se indica que contiene el OA como el número de clases y de videos que se crearon y diseñaron para el entorno virtual.

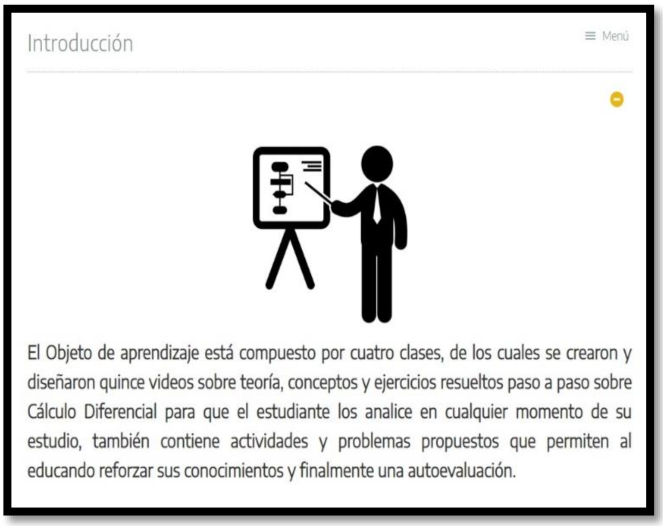


Ilustración 3. Introducción.

3. Objetivos.

En este apartado se detallan los objetivos que se pretenden alcanzar al término del uso del OA.

Ilustración 4. Objetivos.

4. Contenidos

Este componente contiene todo el desarrollo de los temas como las definiciones, teoría, ejercicios resueltos, actividades, etc., que en su mayoría está en videos (animaciones), de una forma clara para entender.

Los conceptos de cada tema desarrollados de forma dinámica para que el estudiante los pueda revisar cuando lo crea conveniente.

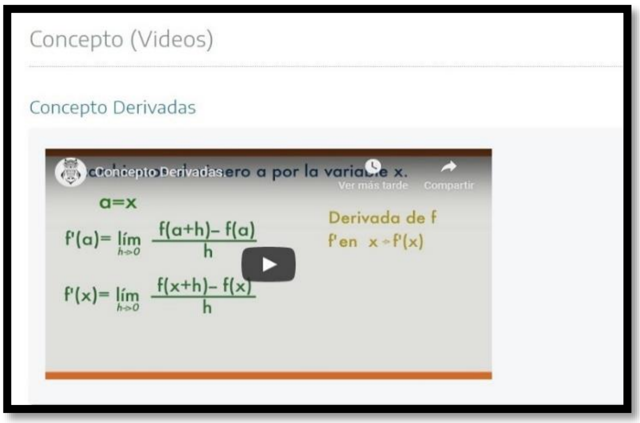


Ilustración 5. Conceptos.

Los ejercicos fueron desarrollados paso a paso donde el estudiante puede ver su solución y, si le surje dudas volverlos a ver.

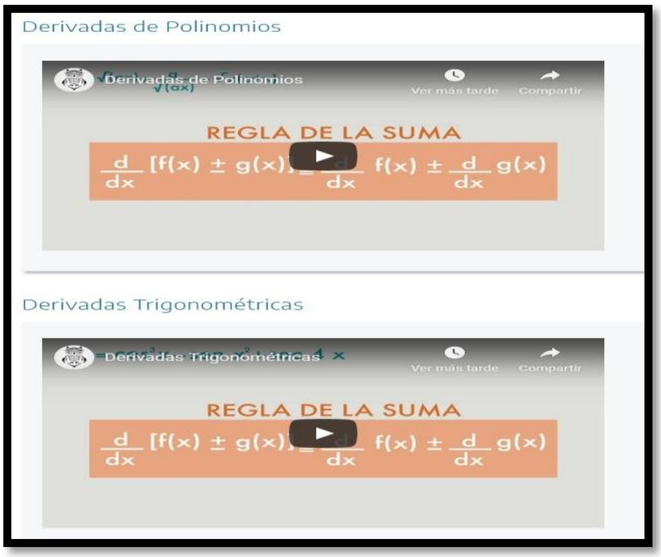


Ilustración 6. Ejercicios Resueltos.

Se presenta un conjunto de ejercicios propuestos para el estudiante, el mismo que será desarrollado en base a la teoría establecida en clase. Estos ejercicios comprenden preguntas y desarrollar ejercicios.

Ilustración 7. Actividades.

5. Evaluación.

En esta sección se ha creído conveniente incorporar un cuestionario que ayude al estudiante a fortalecer el aprendizaje de las cuatro clases estudiadas.

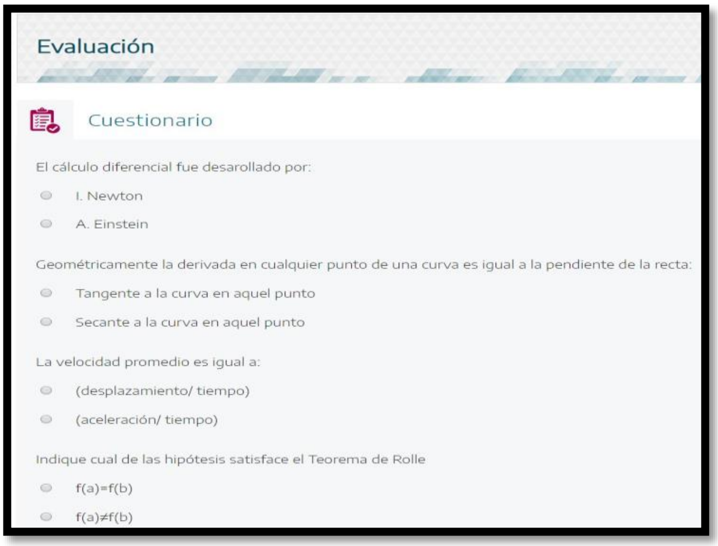


Ilustración 8. Autoevaluación.

6. Bibliografía.

Esta pantalla muestra los recursos bibliográficos que se utilizaron para desarrollar los contenidos y actividades del OA.

Ilustración 9. Bibliografía.

<u>Dirección web del Objeto de Aprendizaje:</u>

https://l2fxjfzazdt7drz7ld0s9q-on.drv.tw/tesis/

Vista del Objeto de Aprendizaje

Ilustración 10. Vista del OA

3.4 REGLAS DE DERIVACIÓN

- Función de una constante

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

- Función potencia

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

- Regla del múltiplo constante

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

- Regla de la suma y diferencia

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$$

- Regla del producto

$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

- Regla del cociente

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

Exponenciales y Logarítmicas

- $$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$
- $$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u.\frac{du}{dx}$$
- $$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u.lna.\frac{du}{dx}$$
- $$\frac{d}{dx}(log_a x) = \frac{1}{x\ lna}$$
- $$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

- $$\frac{dy}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

Trigonométricas

- $$\frac{dy}{dx}(sen\ x) = \cos x$$
- $$\frac{dy}{dx}(\cos x) = -sen\ x$$
- $$\frac{dy}{dx}(\tan x) = sec^2 x$$
- $$\frac{dy}{dx}(\csc x) = -\csc x \,.\, \cot x$$
- $$\frac{dy}{dx}(\sec x) = \sec x \,.\, \tan x$$
- $$\frac{dy}{dx}(\cot x) = -csc^2 x$$

Regla de la Cadena: Si g es derivable en g(x), entonces la función compuesta $F = f°g$ definida mediante $F'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$ es derivable en x, y F' está dada por el producto

$$F'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

CLASE I

DERIVADAS

NOTA: El cálculo diferencial, fundado por G. W. Leibniz (1646-1716) e I. Newton (1642-1727), surgió del problema geométrico del trazado de una tangente a una curva dada en punto dado (problema de la tangente). Hay que empezar por establecer una definición de la tangente a una curva aplicable de un modo general; pues la definición de que sea una recta que tiene con la curva solamente un punto común, el punto de contacto, ciertamente es acertada para la circunferencia y curvas análogas, pero no para curvas espirales.

Rothe, R., (1959). *Matemática Superior.* México: Editorial Labor, S. A.

¿Qué es una recta secante?

Una recta secante es aquella recta que corta una curva en dos puntos determinados.

¿Qué es la pendiente de una recta?

La pendiente de una recta es la tangente del ángulo que forma la recta con la dirección positiva del eje de abscisas.

¿Cómo se llama cada una de estas simbologías?

$$\frac{dy}{dx} \qquad\qquad f'(x)$$

--- --

La notación y' y f´(x), para la derivada, fueron introducidas por Lagrange, mientras que las formas dy/dx o df/dx se deben a Leibniz.

TEORÍA

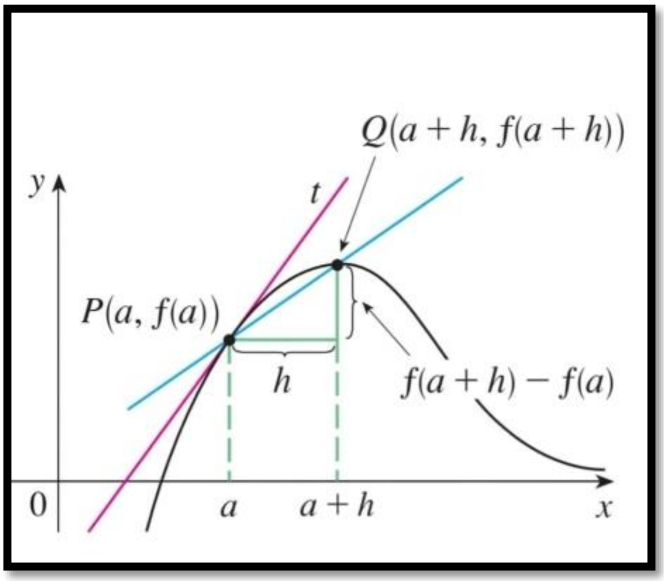


Figura 15. Cálculo de una Variable. Trascendentes Tempranas. *Stewart (2012).*

Tangentes

Definicion: La recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P\big(a, f(a)\big)$ es la recta que pasa por P con pendiente

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Siempre que este límite exista.

Derivadas

Definición: La derivada de una función f en un número $x = a$, denotado por $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Si este límite existe.

Interpretación Geométrica de la Derivada

Supongamos una secante que pase por el punto P y un punto próximo Q de la curva (figura 15). Hagamos que el punto Q se mueva sobre la curva aproximándose indefinidamente a P. La secante girará alrededor de P, y su posición límite es, por definición, la tangente a la curva en P.

Teorema. El valor de la derivada en cualquier punto de una curva es igual a la pendiente de la tangente a la curva en aquel punto.

Velocidades

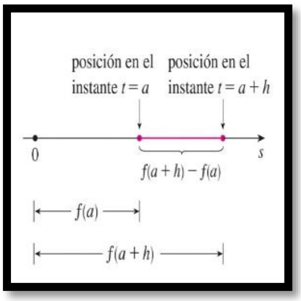


Figura 16. Cálculo de una Variable. Trascendentes Tempranas. *Stewart (2012)*

Suponga que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta, de acuerdo con una ecuación $s = f(t)$, donde **s** es el desplazamiento (distancia dirigida) del objeto respecto al origen, en el tiempo **t**. La función *f* que describe el movimiento se conoce como *función posición* del objeto. En el intervalo de tiempo $t = a$ hasta $t = a + h$, el cambio de posición es $f(a+h) - f(a)$, (figura 2). La velocidad promedio en este intervalo de tiempo es

$$velocidad\ promedio = \frac{desplazamiento}{tiempo} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Que es lo mismo que la pendiente de la recta secante PQ en la figura 1.

Suponga ahora que calcula las velocidades promedio sobre intervalos de tiempo $[a, a+h]$ más y más cortos. En otras palabras, haga que **h** tienda a cero. Entonces la **velocidad instantánea** $v(a)$ es el límite de estas velocidades promedio en el instante $t = a$

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Esto significa que la velocidad en el instante $t = a$ es igual a la pendiente de la recta tangente en P.

Ejercicio del video de derivadas de Polinomios

Derivar la siguiente función.

$$\boldsymbol{g(x) = \frac{1+2x}{3-4x} + x^3 + 2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1+2x}{3-4x}\right) + \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3-4x)\frac{d}{dx}(1+2x) - (1+2x)\frac{d}{dx}(3-4x)}{(3-4x)^2} + 3x^2 + 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3-4x)(0+2) - (1+2x)(0-4)}{(3-4x)^2} + 3x^2 + 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6-8x+4+8x}{(3-4x)^2} + 3x^2 + 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{10}{(3-4x)^2} + 3x^2 + 2$$

Ejercicio Resuelto

Derivar la siguiente función.

$$\boldsymbol{f(x) = 4x^3 + (3+5^2)^2 - 8}$$

Aplicamos la regla de la suma y diferencia a la función

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(4x^3) + \frac{d}{dx}(3+5x^2)^2 - \frac{d}{dx}(8)$$

Derivamos término a término utilizando las siguientes reglas de derivación:

$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ Para el primer término y segundo término, sin embargo el segundo término también aplicaremos la regla de la cadena $F'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$ y para el tercer término utilizaremos la regla de la función constante $\frac{d}{dx}(c) = 0$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^2 + 2(3+5x^2).\frac{d}{dx}(3+5x^2) - 0$$

El primer término pasa igual y derivamos $\frac{d}{dx}(3+5x^2)$, el último término es cero así que lo podemos omitir.

$$\frac{dy}{dx} = 12x^2 + 2(3+5x^2)(10x)$$

El primer término lo volvemos a escribir y luego efectuamos el producto en el segundo término.

$$\frac{dy}{dx} = 12x^2 + 20x(3+5x^2)$$

El resultado es el siguiente.

$$\frac{dy}{dx} = 12x^2 + 60x + 100x^3$$

Ejercicio del video de derivadas de Trigonométricas

Derivar la siguiente función.

$$\boldsymbol{f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\cot x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(sen\ x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\right)(\cot x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x - \frac{1}{2}csc^2x$$

Ejercicio resuelto

Derivar la siguiente función.

$$\boldsymbol{g(x) = sin\ ax + 3\ cos\ 2x}$$

Aplicamos la regla de la suma y diferencia a la función

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin ax) + \frac{d}{dx}(3\cos 2x)$$

Derivamos término a término utilizando las siguientes reglas de derivación:

En el primer término aplicaremos la derivada de la función coseno $\frac{dy}{dx}(\cos x) = -sen\, x$ y también la regla de la cadena $F'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$, en el segundo término aplicaremos la regla del múltiplo constante $\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$, al mismo tiempo la derivada de la función seno $\frac{dy}{dx}(sen\, x) = \cos x$ y finalmente también la regla de la cadena $F'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$.

$$\frac{dy}{dx} = \cos ax\,.\frac{d}{dx}(ax) - 3\sin 2x\,.\frac{d}{dx}(2x)$$

Derivamos los términos indicados $\frac{d}{dx}(ax)$ y $\frac{d}{dx}(2x)$

$$\frac{dy}{dx} = \cos ax\,(a) - 3\sin 2x\,(2x)$$

Realizamos los productos que se observan y nos da como resultado la siguiente función.

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}} = a\cos ax - 6\sin 2x$$

Ejercicio del video de derivadas Logarítmicas y Exponenciales

Derivar la siguiente función.

$$\boldsymbol{f(x) = \ln(6x^3) + 3e^{2x+1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\ln(6x^3)] + \frac{d}{dx}[3e^{2x+1}]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6x^3}(18x^2) + 3e^{2x+1}(2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{18x^2}{6x^3} + 6e^{2x+1}$$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}} = \frac{3}{x} + 6e^{2x+1}$$

Ejercicio resuelto

Derivar la siguiente función.

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = ln(x^3) - 4e^{2x}}$$

Aplicamos la regla de la suma y diferencia a la función

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\ln(x^3)] - \frac{d}{dx}(4e^{2x})$$

Derivamos término a término utilizando las siguientes reglas de derivación:

En el primer término aplicamos la regla de derivación logarítmica $\frac{dy}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}.\frac{du}{dx}$, donde $u = x^3$, en el segundo término aplicamos la regla de derivación exponencial $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u.\frac{du}{dx}$, donde $u = 2x$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3} \cdot \frac{d}{dx}(x^3) - 4e^{2x} \cdot \frac{d}{dx}(2x)$$

Derivamos los términos $\frac{d}{dx}(x^3)$ y $\frac{d}{dx}(2x)$ del primer y segundo término respectivamente.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3}(3x^2) - 4e^{2x}(2)$$

Expresamos de una mejor manera el primer término y realizamos la multiplicación en el segundo término.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{x^3} - 8e^{2x}$$

Simplificamos en el primer término y obtenemos como resultado la siguiente función.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x} - 8e^{2x}$$

Ejercicios propuestos:

Derivar las siguientes funciones.

1. $f(x) = 5x^4 + \left(a - \frac{b}{x}\right)^2$
2. $g(x) = xln\, x - e^{nx}$
3. $h(x) = \tan 3x + x \cos x$

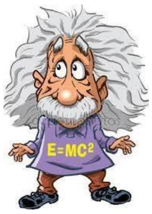
Respuestas

1. $f'(x) = 20x^3 + \frac{2ab}{x^2} - \frac{2b^2}{x^3}$
2. $g'(x) = 1 + \ln x - ne^{nx}$
3. $h'(x) = 3sec^2 3x + \cos x - x\, sen\, x$

NOTA: Si tienes alguna duda con la resolución de los ejercicios de derivadas te recomendamos que visites la siguiente página, que proporciona una excelente calculadora de derivadas y otros temas. La página te indica paso a paso la resolución del ejercicio.

http://um.mendelu.cz/maw-html/menu.php

HOJA DE TRABAJO



Nombre:--

Curso:--

Asignatura:---

Fecha:--

Ejercicios propuestos:

Derivar las siguientes funciones y señalar su respuesta

1	$f(x) = 5x^4 + \left(a - \frac{b}{x}\right)^2$
2	$f(x) = xln\,x - e^{nx}$
3	$f(x) = \tan 3x + x \cos x$
4	$f(x) = x^4 + \sin x$

Respuestas

1	$f'(x) = 1 + \ln x - ne^{nx}$
2	$f'(x) = 3sec^2 3x + \cos x - x\,sen\,x$
3	$f'(x) = 4x^3 + cosx$
4	$f'(x) = 20x^3 + \frac{2ab}{x^2} - \frac{2b^2}{x^3}$

Autoevaluación.

NOTA	TEORÍA	FÓRMULAS	EJERCICIOS
0	No entiendo los conceptos planteados en la clase	No deduzco de donde se obtienen las fórmulas	No puedo resolver los ejercicios
1	Entiendo vagamente los conceptos de la clase	Solo deduzco las formulas mediante la guía del video	Sigo los pasos pero no obtengo las respuestas correctas
2	Entiendo completamente los conceptos de la clase	Deduzco por mi propia cuenta de donde proviene las fórmulas de la clase	Resuelvo correctamente los ejercicios
3	Entiendo completamente los conceptos de la clase	Deduzco las formulas de la clase y además las comparo con las fórmulas utilizadas en cálculo diferencial	Resuelvo correctamente los ejercicios y además resuelvo problemas aplicados al cálculo diferencial

Resultados

Nota: A su resultado final súmele un punto si al final de la clase buscó información y ejercicios adicionales de fuentes físicas o sitios en internet.

De 0 a 3.- Repita todo el video y busque información adicional en la red.

De 3 a 6.- Repita la parte que no entiende y busque información adicional en la red.

De 6 a 9.- Pase al siguiente tema, pero refuerce las partes que no entiende con información adicional en la red.

10.- Felicitaciones, continúe así.

CLASE II

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

NOTA: El teorema de Fermat lleva ese nombre en honor de Pierre Fermat (1601-1665), un abogado francés que tomo a las matemáticas como un pasatiempo. A pesar de su condición de aficionado, Fermat fue uno de los dos inventores de la geometría analítica (Descartes fue el otro). Sus métodos para hallar rectas tangentes a las curvas y valores máximos y mínimos (antes de la invención del límite y de las derivadas) lo hicieron un precursor de Newton en la creación del Cálculo Diferencial.

Stewart, J., (2012). *Cálculo de una Variable. Trascendentes Tempranas.* México. Séptima edición.

¿Qué son los puntos de inflexión?

Un punto de inflexión en una curva es el que separa arcos que tienen su concavidad en sentidos opuestos.

¿Qué señala el teorema de Valor Extremo?

El teorema del valor extremo señala que una función continua sobre un intervalo cerrado tiene un valor máximo y uno mínimo.

¿Dónde puede ser de gran utilidad el encontrar los máximos y mínimos de una función?

Es de gran utilidad encontrar los valores de máximos y mínimos en los problemas de optimización, en los cuales se requiere encontrar la manera óptima para hacer algo.

TEORÍA

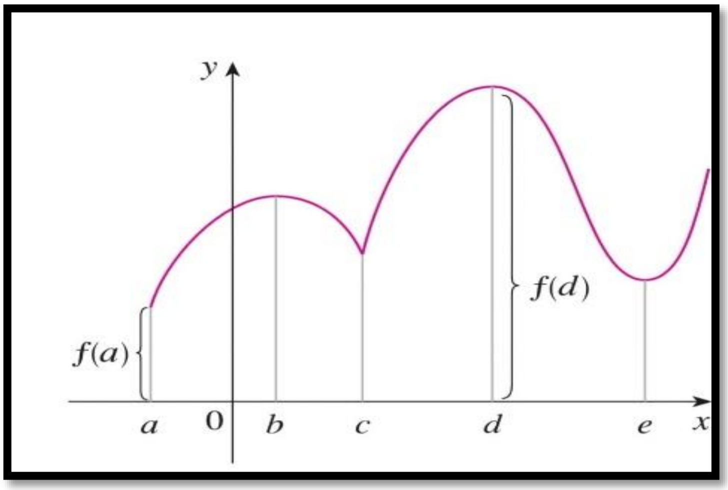


Figura 17. Cálculo de una Variable. Trascendentes Tempranas. *Stewart (2012)*

Máximos y Mínimos

Definición. Sea c un número en el dominio D de una función *f*. Entonces *f(c)* es el:

- Valor máximo absoluto de *f* sobre D si $f(c) \geq f(x)$ para toda x en D.
- Valor mínimo absoluto de *f* sobre D si $f(c) \leq f(x)$ para toda x en D.

Un máximo o mínimo absoluto se les llama a veces máximo o mínimo *global*. Los valores máximos y mínimo de *f* se llaman *valores extremos* de *f*.

En la figura 17 la función *f* tiene un máximo absoluto con x=d y un mínimo absoluto con x=a. Se observa en la figura 17 que $(d, f(d))$ es el punto más alto sobre la gráfica y $(a, f(a))$ es el punto más bajo.

Definición. El número $f(c)$ es un

- Valor máximo local de *f* si $f(c) \geq f(x)$ cuando x está cerca de c.
- Valor mínimo local de *f* si $f(c) \leq f(x)$ cuando x está cerca de c.

Si en la figura 17 restringimos nuestra atención al intervalo (a, c), entonces $f(b)$ es el más grande de estos valores de $f(x)$ y se llama *valor máximo local* de *f*. Por otra parte, $f(c)$ se llama *valor mínimo local* de *f* en el intervalo (b, d). La función *f* también tiene un mínimo local en x=e.

Teorema del Valor Extremo. Si *f* es continua sobre un intervalo cerrado [a, b], entonces *f* alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor minimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y d en [a, b].

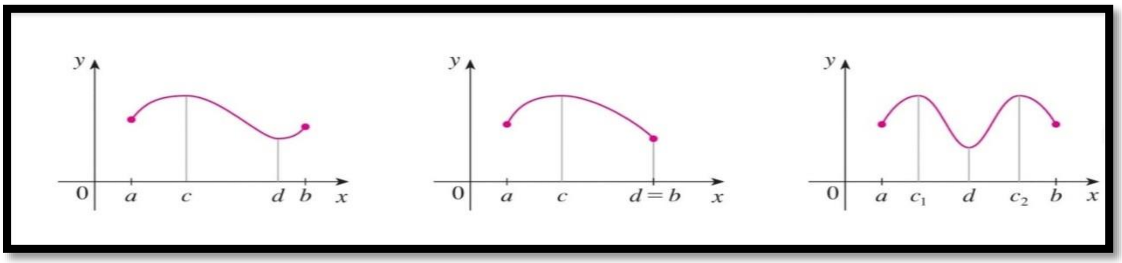


Figura 18. Cálculo de una Variable. Trascendentes Tempranas. *Stewart (2012)*

En la figura 18 se ilustra el teorema del valor extremo. Observe que dependiendo la función el valor extremo puede existir más de una vez.

Definición. Un *número crítico* de una función *f* es un número x=c en el dominio de *f* tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

Si *f* tiene un máximo o un mínimo local en x=c, entonces *c* es un numero critico de *f*.

Teorema del Intervalo Cerrado. Para hallar los valores máximo y mínimo absolutos de una función continua *f* sobre el intervalo cerrado [a, b]:

1. Encuentre los valores de *f* en los números críticos de *f* en (a, b).
2. Halle los valores de *f* en los puntos extremos del intervalo.
3. El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el más pequeño, el valor absoluto.

Ejercicio del video de Máximos y Mínimos

Resolver el siguiente ejercicio.

Encuentre los valores máximo y mínimo absoluto de *f* sobre el intervalo dado.
$\boldsymbol{f(x) = 12 + 4x - x^2}$ **,** $\boldsymbol{[0, 5]}$

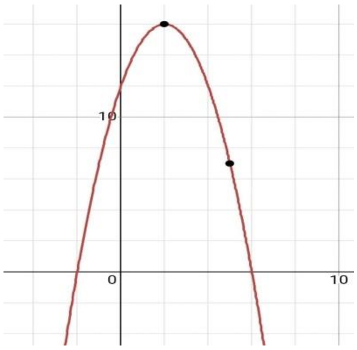


Figura 19. (Fuente propia)

Solución: Nos fijamos que la función es continua sobre el intervalo cerrado [0, 5], podemos utilizar el Teorema del intervalo cerrado.

Derivamos la función

$f'(x) = 0 + 4 - 2x$

Igualamos a cero la función obtenida, es decir

$f'(x) = 0$

$0 = 4 + 2x$

Encontramos el valor de x
$2x = 4$
$x = \frac{4}{2}$
$x = 2$

Puesto que $f'(x)$ existe para toda x, el único valor crítico de *f* ocurre cuando $f'(x) = 0$; esto es x=2. Observe este número crítico está dentro del intervalo [0, 5].

El valor de la función en el punto crítico es:

$f(x) = 12 + 4x - x^2$
$f(2) = 12 + 4(2) - (2)^2$
$f(2) = 16$

Los valores de la función en los puntos extremos del intervalo son:

$f(0) = 12 + 4(0) - (0)^2$
$f(0) = 12$

$f(5) = 12 + 4(5) - (5)^2$
$f(5) = 12 + 20 - 25$

$f(5) = 7$

Comparando los tres números, vemos que el valor máximo absoluto es $f(2) = 16$ y el valor mínimo absoluto es $f(5) = 7$

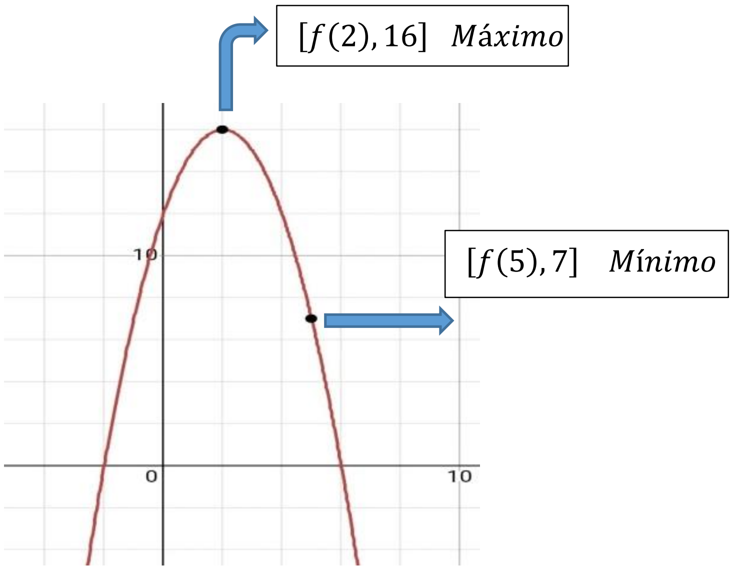


Figura 20. (Fuente propia)

Ejercicio Resuelto

Resolver el siguiente ejercicio.

Encuentre los valores máximo y mínimo absoluto de *f* sobre el intervalo dado.
$\boldsymbol{f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x+1}$, **[-2, 3]**

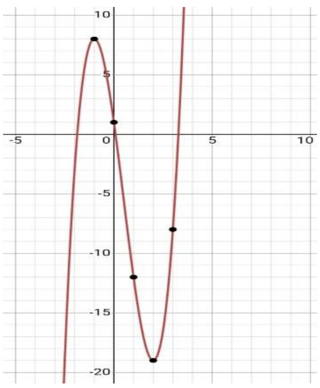


Figura 21. (Fuente propia)

Solución: Nos fijamos que la función es continua sobre el intervalo cerrado [-2, 3], podemos utilizar el Teorema del intervalo cerrado.

Derivamos la función

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

Igualamos a cero la función obtenida, es decir

$f'(x) = 0$

$0 = 6x^2 - 6x - 12$

Encontramos los valores de x

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-12)}}{2(6)}$$

$x_1 = 2$
$x_2 = -1$

Puesto que $f'(x)$ existe para toda x, los valores críticos de f ocurre cuando $f'(x) = 0$; esto es $x_1 = 2 \; y \; x_2 = -1$. Observe que estos números críticos están dentro del intervalo [-2, 3].

El valor de la función en los puntos críticos.

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$
$f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) + 1$
$f(2) = 16 - 12 - 24 + 1$
$f(2) = -19$

$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 1$
$f(-1) = -2 - 3 + 12 + 1$
$f(-1) = 8$

Los valores de la función en los puntos extremos del intervalo son:

$f(-2) = 2(-2)^3 - 3(-2)^2 - 12(-2) + 1$
$f(-2) = -16 - 12 + 24 = 1$
$f(-2) = -3$

$f(3) = 2(3)^3 - 3(3)^2 - 12(3) + 1$
$f(3) = 54 - 27 - 36 + 1$
$f(3) = -8$

Comparando los cuatro números, vemos que el valor máximo absoluto es $f(-1) = 8$ y el valor mínimo absoluto es $f(2) = -19$

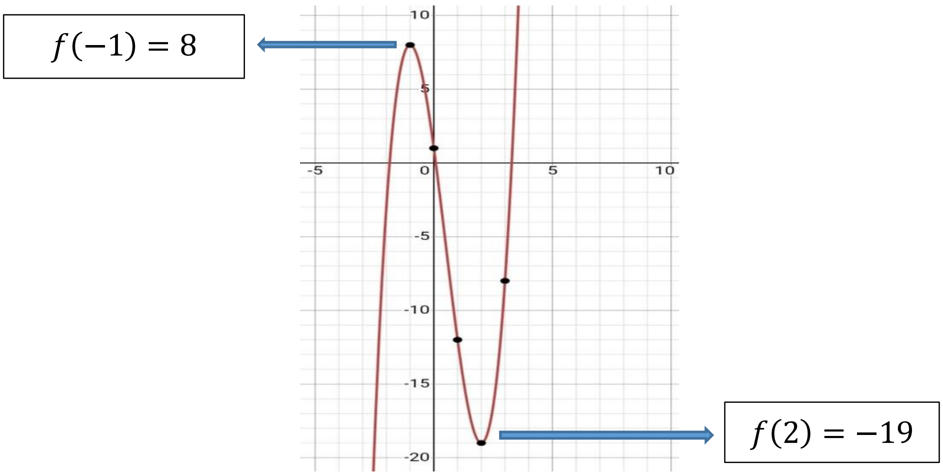


Figura 22. (Fuente Propia)

Ejercicios propuestos:

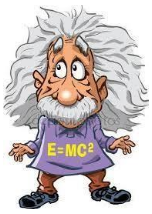
Encuentre los valores máximo y mínimo absoluto de *f* sobre el intervalo dado.

1. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1, [-2, 3]$
2. $f(x) = x + \frac{1}{x}, [0.2, 4]$

Respuestas

1. Máximo absoluto $f(-2) = 33$, mínino absoluto $f(2) = -31$
2. Máximo absoluto $f(0.2) = 5.2$, mínimo absoluto $f(1) = 2$

HOJA DE TRABAJO



Nombre:--

Curso:--

Asignatura:---

Fecha:--

Ejercicios propuestos:

Encuentre los valores máximo y mínimo absoluto de f sobre el intervalo dado.

1	$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1, [-2, 3]$
2	$f(x) = x + \frac{1}{x}, [0.2, 4]$

Respuestas

1	Máximo absoluto $f(-2) = 33$, minino absoluto $f(2) = -31$
2	Máximo absoluto $f(0.2) = 5.2$, mínimo absoluto $f(1) = 2$

Resolver el siguiente problema:

El telescopio espacial Hubble fue puesto en operación el 24 de abril de 1990, por el transbordado espacial Discovery. Un modelo para la velocidad del transbordador durante esta misión, desde el lanzamiento en t=0 hasta que los cohetes auxiliares de combustible sólido se desprenden en t=126 s, está dado por

$$\boldsymbol{v(t) = 0.0013202t^3 - 0.09029t^2 + 23.61t - 3.03}$$

(En pies por segundo). Con este modelo, estime los valores máximo y mínimo absolutos de la aceleración del transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares. Respuesta: Aceleración máxima$= 62.87$ $pies/s^2$, Aceleración mínima$= 21.52$ $pies/s^2$

Autoevaluación.

NOTA	TEORÍA	FÓRMULAS	EJERCICIOS
0	No entiendo los conceptos planteados en la clase	No deduzco de donde se obtienen las fórmulas	No puedo resolver los ejercicios
1	Entiendo vagamente los conceptos de la clase	Solo deduzco las formulas mediante la guía del video	Sigo los pasos pero no obtengo las respuestas correctas
2	Entiendo completamente los conceptos de la clase	Deduzco por mi propia cuenta de donde proviene las fórmulas de la clase	Resuelvo correctamente los ejercicios
3	Entiendo completamente los conceptos de la clase	Deduzco las formulas de la clase y además las comparo con las fórmulas utilizadas en cálculo diferencial	Resuelvo correctamente los ejercicios y además resuelvo problemas aplicados al cálculo diferencial

Resultados

Nota: A su resultado final súmele un punto si al final de la clase buscó información y ejercicios adicionales de fuentes físicas o sitios en internet.

De 0 a 3.- Repita todo el video y busque información adicional en la red.

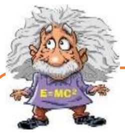
De 3 a 6.- Repita la parte que no entiende y busque información adicional en la red.

De 6 a 9.- Pase al siguiente tema, pero refuerce las partes que no entiende con información adicional en la red.

10.- Felicitaciones, continúe así**.**

CLASE III

TEOREMA DE VALOR MEDIO



NOTA: El teorema de Rolle fue publicado en 1961 por el matemático francés Michel Rolle (1652-1719), en un libro titulado Méthode pour resoudre les Egalitez. Fue un crítico de los métodos de su tiempo y calificó al cálculo como una "colección de falacias ingeniosas". Más tarde, sin embargo, se convenció de la esencial exactitud de los métodos del cálculo.

Stewart, J., (2012). *Cálculo de una Variable. Trascendentes Tempranas.* México. Séptima edición.

¿A qué es igual la velocidad promedio?

$$velocidad\ promedio = \frac{desplazamiento}{tiempo} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Explique el Teorema del Valor Extremo

Si *f* es continua sobre un intervalo cerrado [a, b], entonces *f* alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y d en [a, b].

¿Cuáles son los tres casos que demuestran el Teorema de Rolle?

Caso I. $f(x) = k$, *Caso II.* $f(x) > f(a)$, *Caso III.* $f(x) < f(a)$

TEORÍA

Teorema de Rolle. Si *f* es una función que satisface las siguientes tres hipótesis:

1. *f* es continua sobre el intervalo cerrado [a, b]
2. *f* es derivable sobre el intervalo abierto (a, b)
3. *f* (a)=*f* (b)

Entonces hay un número c en (a, b) tal que *f'*(c)=0

Se puede observar que se cumple el Teorema de Rolle en las siguientes figuras.

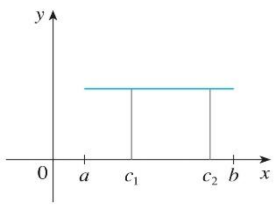


Figura 23

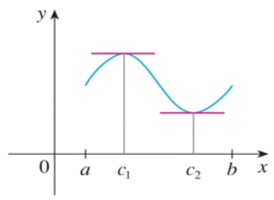


Figura 24

Figura 23-24. Cálculo de una Variable. Trascendentes Tempranas. *Stewart (2012)*

<u>Existen tres casos donde se demuestra el Teorema de Rolle.</u>

<u>Caso I</u>. $\boldsymbol{f(x) = k}$, una constante.

Entonces $f'(x) = 0$, por lo que el numero *c* puede tomar cualquier numero en (a, b), se puede ver en la figura 23.

<u>Caso II</u>. $\boldsymbol{f(x) > f(a)}$ Para alguna x en (a, b), como en la figura 24.

F tiene un valor máximo en [a, b], f (a) es igual a *f* (b) y es derivable en c en el intervalo (a, b). Por tanto, *f'*(c)=0.

<u>Caso III</u>. $\boldsymbol{f(x) < f(a)}$ Para algún x en (a, b), como en la figura 24.

F tiene un valor mínimo en [a, b], *f* (a) es igual a *f* (b) y es derivable en c en el intervalo (a, b). Por tanto, *f'*(c)=0.

<u>Teorema de Valor Medio</u>

Si *f* es una función que satisface las siguientes hipótesis:

1. *f* es continua sobre el intervalo cerrado [a, b]
2. *f* es derivable sobre el intervalo abierto (a, b)

Entonces un numero x = c en (a, b) tal que

$$\boldsymbol{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

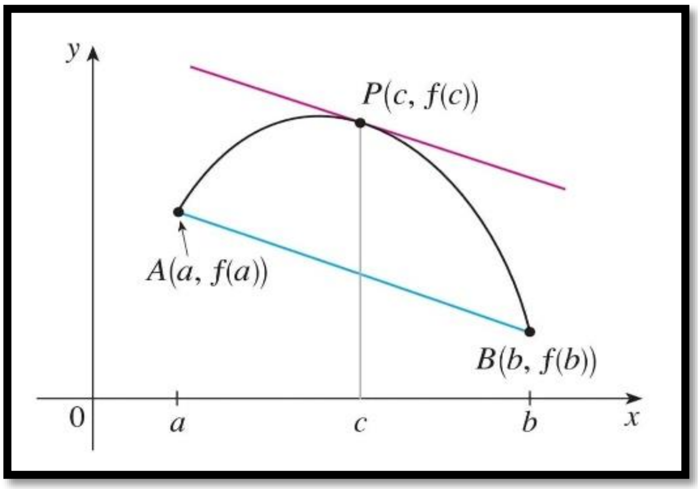


Figura 25. Cálculo de una Variable. Trascendentes Tempranas. *Stewart (2012)*

La figura 25 muestra los puntos A(a, *f* (a)) y B (b, *f* (b)) sobre la gráfica de una función derivable. La pendiente de la recta secante AB es $m_{AB} = \frac{f(a)-f(b)}{b-a}$ que es la misma expresión que en la parte de derecha de *f'(c)*. Dado que *f'(c)* es la pendiente de la recta tangente en el punto $(c, f(c))$, el teorema del valor medio, en la forma dada por la ecuación de *f'(c)*, indica que hay al menos un punto $P(c, f(c))$ sobre la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es la misma que la pendiente de la recta secante AB; es decir, que existe un punto P donde la recta tangente es paralela a la recta secante AB.

Ejercicio del video del Teorema del Valor Medio

Resolver el siguiente ejercicio.

Verifique que la función satisface las tres hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo dado. Después encuentre todos los números c que satisfacen la conclusión del Teorema de Rolle.

La función es $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x}$ **,** **[0, 9]**

Teorema de Rolle: si f es una función que satisface las siguientes tres hipótesis.

1. *f* es continua sobre el intervalo cerrado [a, b]
2. *f* es derivable sobre el intervalo abierto (a, b)
3. *f*(a)=*f*(b)

Entonces hay un número c en (a, b) tal que *f'*(c)=0

Graficaremos la función para visualizar mejor el problema propuesto.

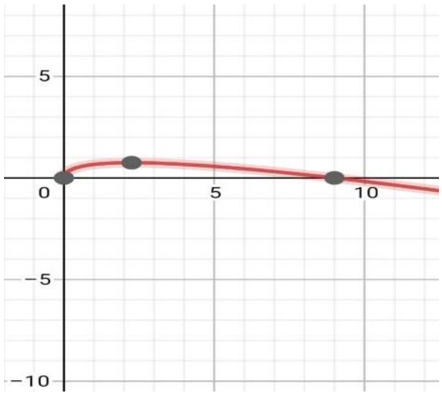


Figura 26. (Fuente propia)

Solución: cumple la **primera hipótesis**, es decir que la función es continua en el intervalo [0, 9]. Para confirmar esto su dominio es [0, ∞).

Derivamos la función original.

$$f'(x) = x^{1/2} - \frac{1}{3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{1}{3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3}$$

Nos fijamos que nos da otro polinomio, por lo tanto, cumple la **segunda hipótesis**.

Sustituimos los valores 0 y 9 en la función que nos da el problema.

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x$$

$$f(0) = \sqrt{0} - \frac{1}{3}(0)$$

$$f(0) = 0$$

$$f(9) = \sqrt{9} - \frac{1}{3}(9)$$

$$f(9) = 0$$

Observamos que se cumple la **tercera hipótesis** $\boldsymbol{f(a) = f(b)}$

Encontramos los valores de **c** que satisfacen la conclusión del Teorema de Rolle.

En la función derivada x=c

$$f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}} - \frac{1}{3}$$

Igualamos a cero la función obtenida, es decir

$$f'(c) = 0$$

$0 = \frac{1}{2\sqrt{c}} - \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$

$2\sqrt{c} = 3$

$\sqrt{c} = \frac{3}{2}$

$c = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$c = \frac{9}{4}$

Este valor se encuentra dentro del intervalo abierto (0, 9), en consecuencia $c = \frac{9}{4}$ satisface la conclusión del Teorema de Rolle.

Ejercicio resuelto

Resolver el siguiente problema.

Si $f(1) = 10$ y $f'(x) \geq 2$ para $1 \leq x \geq 4$ ¿Qué tan pequeño puede posiblemente ser $f(4)$?

Teorema del Valor Medio

$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Reemplazamos los datos que nos da el problema en la función del teorema del valor medio

$f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1)$

Despejamos $f(4)$

$f(4) = f(1) + f'(c)(4 - 1)$

$x = c$, entonces

$f'(c) \geq 2$

Sustituimos el valor de f (1) y de f'(c) en la función de f (4)

$f(4) = f(1) + f'(c)(4 - 1)$
$f(4) = 10 + 2(3)$

$f(4) = 16$

Lo más pequeño posible que puede ser $f(4)$ es 16

Ejercicios propuestos:

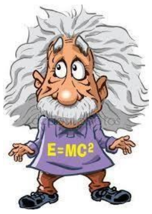
Verifique que la función satisface la hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo dado después encuentre todos los números x = c que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio.

1. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1, [0, 2]$
2. $f(x) = \sqrt[3]{x}, [0, 1]$

Respuestas

1. $c = 1$
2. $c = \frac{\sqrt{3}}{9}$

HOJA DE TRABAJO



Nombre:--

Curso:--

Asignatura:--

Fecha:---

Ejercicios propuestos:

Verifique que la función satisface la hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo dado después encuentre todos los números x = c que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio. Señale la respuesta correcta a cada problema.

1	$f(x) = 2x^2 - 3x + 1, [0, 2]$
2	$f(x) = \sqrt[3]{x}, [0, 1]$

Respuestas

1	$c = \frac{\sqrt{3}}{9}$
2	$c = 1$

Resolver:

Suponga $(0) = -3$ y $f'(x) \leq 5$ para todos los valores de x. ¿Qué tan grande puede ser $f(2)$?

Respuesta: el mayor valor posible para $(2)\ es\ 7$

Autoevaluación.

NOTA	TEORÍA	FÓRMULAS	EJERCICIOS
0	No entiendo los conceptos planteados en la clase	No deduzco de donde se obtienen las fórmulas	No puedo resolver los ejercicios
1	Entiendo vagamente los conceptos de la clase	Solo deduzco las formulas mediante la guía del video	Sigo los pasos pero no obtengo las respuestas correctas
2	Entiendo completamente los conceptos de la clase	Deduzco por mi propia cuenta de donde proviene las fórmulas de la clase	Resolve correctamente los ejercicios
3	Entiendo completamente los conceptos de la clase	Deduzco las formulas de la clase y además las comparo con las fórmulas utilizadas en cálculo diferencial	Resuelvo correctamente los ejercicios y además resuelvo problemas aplicados al cálculo diferencial

Resultados

Nota: A su resultado final súmele un punto si al final de la clase buscó información y ejercicios adicionales de fuentes físicas o sitios en internet.

De 0 a 3.- Repita todo el video y busque información adicional en la red.

De 3 a 6.- Repita la parte que no entiende y busque información adicional en la red.

De 6 a 9.- Pase al siguiente tema, pero refuerce las partes que no entiende con información adicional en la red.

10.- Felicitaciones, continúe así**.**

CLASE IV

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

NOTA: Algunas de las aplicaciones más importantes del cálculo diferencial son los problemas de optimización, en los cuales se requiere encontrar la manera óptima (la mejor) para hacer algo. Algunos ejemplos son: ¿Cuál es la aceleración máxima de un transbordador espacial?, ¿Cuál debe ser la forma de una lata que minimice los costos de fabricación?, etc.

Stewart, J., (2012). *Cálculo de una Variable. Trascendentes Tempranas.* México. Séptima edición.

¿Cómo se define a la derivada de una función?

Se define como el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando éste tiende a cero.

¿Qué es el criterio de la segunda derivada?

Es un método que utiliza la segunda derivada para determinar si existe un mínimo o un máximo relativo en una función.

¿Qué es un punto crítico?

Un punto crítico de una función de una variable real es cualquier valor en el dominio en donde la función no es diferenciable o cuando su derivada es 0.

TEORÍA

Prueba de la Segunda Derivada. Supongamos que *f''* es continua cerca de x = c.

a) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces *f* tiene un mínimo local en x = c.

b) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces *f* tiene un máximo local en x = c.

Ejercicio del video de Problemas de Optimización

Resolver el siguiente problema.

Las márgenes superior e inferior de un cartel son de 6 cm y los márgenes de los lados de 4 cm. Si el área de impresión sobre el cartel se fija en $384\ cm^2$, encuentre las dimensiones del cartel con la menor área.

Haremos un gráfico que nos ayude a visualizar mejor el problema.

Área

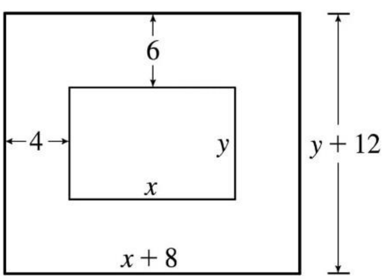


Figura 27. (Fuente propia)

Solución:
de la región interna

$A = x.y$

Despejamos la variable $\boldsymbol{y}$

$$y = \frac{384}{x}$$

Área total del gráfico

$$\boldsymbol{A(x) = (x + 8)(y + 12)}$$

Sustituimos el valor de $\boldsymbol{y}$ en la función del área total

$$A(x) = (x + 8)\left(\frac{384}{x} + 12\right)$$

$$A(x) = 384 + 12x + \frac{3072}{x} + 96$$

$$A(x) = 480 + 12x + \frac{3072}{x}$$

Derivamos la función obtenida.

$$A'(x) = 0 + 12 - \frac{3072}{x^2}$$

Encontramos los puntos críticos, es decir igualamos a cero la función obtenida

$$A'(x) = 0$$

$$0 = 12 - \frac{3072}{x^2}$$

$$\frac{3072}{x^2} = 12$$

$$x^2 = \frac{3072}{12}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{3072}{12}}$$

$$x = \pm 16$$

Tomamos el valor positivo, ya que se trata de longitudes.
Sustituimos el valor de +16 en la función de (***y***) para encontrar su valor.

$$y = \frac{384}{x}$$

$$y = \frac{384}{16}$$

$$y = 24$$

Para determinar si es un mínimo utilizaremos ***la prueba de la segunda derivada.***

Prueba de la segunda derivada: supongamos que f'' es continua cerca de x=c

a) si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en x=c
b) si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en x=c

Derivamos la función ya derivada anteriormente

$$A'(x) = 12 - \frac{3072}{x^2}$$

$$A''(x) = 0 + \frac{6144}{x^3}$$

Sustituimos el valor x=16 en la función obtenida

$$A''(16) = \frac{6144}{(16)^3}$$

$$A''(16) = \frac{3}{2} > 0 \quad Mínimo$$

Ya que $\frac{3}{2} > 0$ y según la prueba de la segunda derivada este valor nos da un mínimo.

Para obtener las dimensiones buscadas, de las siguientes expresiones obtenidas reemplazamos de su variable.

$$(x + 8)$$

$$16 + 8 = 24$$

$$(y + 12)$$

$24 + 12 = 36$

En consecuencia, las dimensiones del cartel con la menor área son 24 cm y 36 cm.

Ejercicio resuelto

Resolver el siguiente problema.

Encuentre las dimensiones de un rectángulo con perímetro de 100 metros, cuya área sea tan grande como sea posible.

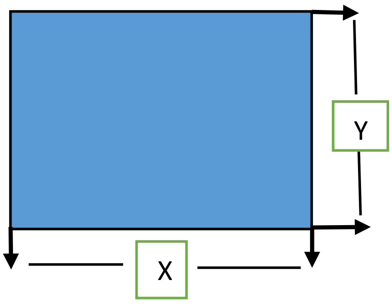


Figura 28. (Fuente propia)

Solución: graficamos el rectángulo y podemos escribir que sus dimensiones son (x) y (y), entonces su perímetro es:

$P = 2x + 2y = 100$

Despejamos la variable (y)

$$y = \frac{100}{2} - \frac{2x}{2}$$

$y = 50 - x$

El área total del rectángulo es:

$\boldsymbol{A = x \cdot y}$

Sustituimos el valor de (y) en la función anterior

$A = x(50 - x)$

La función que deseamos maximizar es:

$A(x) = 50x - x^2$

Derivamos la función

$A'(x) = 50 - 2x$

Encontramos los valores críticos

$A'(x) = 0$

$0 = 50 - 2x$

$2x = 50$

$x = 25$

Sustituimos el valor encontrado de (x) en (y) para encontrar su valor.

$y = 50 - 2x$

$y = 50 - 25$

$y = 25$

Aplicamos la prueba de la segunda derivada para saber si es un máximo.

$A'(x) = 50 - 2x$

$A''(x) = -2$

Ya que $-2 < 0$ y según la prueba de la segunda derivada este valor nos da un máximo.

En consecuencia, las dimensiones que maximizan el área de la figura son 25 cm y 25 cm.

Sustituimos los valores de (x) y (y) encontrados en la fórmula del área.

$A = x \cdot y$

$A = 25 \cdot 25 = 625m^2$

Nos fijamos que las dos dimensiones encontradas son iguales, por lo tanto, la figura es un cuadrado y no un rectángulo.

Ejercicios propuestos:

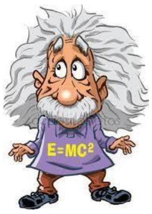
1. Encuentre dos números positivos cuyo producto es 100 y cuya suma es un mínimo.
2. Un agricultor quiere cercar un área de 1.5 millones de pies cuadrados en un terreno rectangular y luego dividirlo por la mitad, con una cerca paralela a uno de los lados del rectángulo.

¿Cómo puede el agricultor hacer esto para minimizar el costo de la barda?

Respuestas

1. Los números son 10 y 10.
2. 1000 pies por 1500 pies.

HOJA DE TRABAJO



Nombre:---

Curso:---

Asignatura:--

Fecha:---

Ejercicios propuestos:

Resolver los siguientes ejercicios y subrayar lo correcto.

1	Encuentre dos números positivos cuyo producto es 100 y cuya suma es un mínimo.
2	Un agricultor quiere cercar un área de 1.5 millones de pies cuadrados en un terreno rectangular y luego dividirlo por la mitad, con una cerca paralela a uno de los lados del rectángulo. ¿Cómo puede el agricultor hacer esto para minimizar el costo de la barda?

Respuestas

1	1000 pies por 1500 pies.
2	Los números son 10 y 10.

Autoevaluación.

NOTA	TEORÍA	FÓRMULAS	EJERCICIOS
0	No entiendo los conceptos planteados en la clase	No deduzco de donde se obtienen las fórmulas	No puedo resolver los ejercicios
1	Entiendo vagamente los conceptos de la clase	Solo deduzco las formulas mediante la guía del video	Sigo los pasos pero no obtengo las respuestas correctas
2	Entiendo completamente los conceptos de la clase	Deduzco por mi propia cuenta de donde proviene las fórmulas de la clase	Resolve correctamente los ejercicios
3	Entiendo completamente los conceptos de la clase	Deduzco las formulas de la clase y además las comparo con las fórmulas utilizadas en cálculo diferencial	Resuelvo correctamente los ejercicios y además resuelvo problemas aplicados al cálculo diferencial

Resultados

Nota: A su resultado final súmele un punto si al final de la clase buscó información y ejercicios adicionales de fuentes físicas o sitios en internet.

De 0 a 3.- Repita todo el video y busque información adicional en la red.

De 3 a 6.- Repita la parte que no entiende y busque información adicional en la red.

De 6 a 9.- Pase al siguiente tema, pero refuerce las partes que no entiende con información adicional en la red.

10.- Felicitaciones, continúe así**.**

CONCLUSIONES

- Se fundamenta teóricamente que los objetos de aprendizaje ayudan a alcanzar un aprendizaje significativo en los temas de Cálculo Diferencial, debido a la gran flexibilidad que presenta esta herramienta al momento de utilizarla.
- Alrededor del 70 % de los estudiantes tuvieron dificultad en aprender la asignatura de Cálculo Diferencial en la carrera de Matemáticas y Física, por ser una materia que contiene teoría compleja o por el planteamiento de sus ejercicios de razonamiento.
- Los estudiantes encuestados de la carrera de Matemáticas y Física, consideran que es factible que el profesor empleé los Objetos de Aprendizaje dentro de las clases, puesto que es un recurso interactivo e innovador.
- El objeto de aprendizaje, gracias al Exelearning, posee una interfaz amigable, en donde los educandos no tendrán dificultad alguna en poder utilizar esta herramienta digital, para facilitar el aprendizaje del Cálculo Diferencial.
- Los videos tutoriales utilizados dentro del OA, son herramientas que ayudan a complementar el trabajo del docente, ya que, debido a sus características digitales, permiten pausar, adelantar o rebobinar según las necesidades, convirtiéndose en una alternativa novedosa.
- El Objeto de Aprendizaje es una herramienta de ayuda que el docente puede utilizar para impartir las clases, más no como un substituto de éste.

RECOMENDACIONES

- Establecer dentro del plan curricular cómo crear y diseñar un Objeto de Aprendizaje, debido a su utilidad que puede dar para al estudiante al momento de aprender algún tema en específico y ayudar al profesor durante el proceso de enseñanza.
- Realizar tutorías sobre el manejo de las herramientas tecnológicas como: Exelearning, que es la plataforma que permite crear los Objetos de aprendizaje; Adobe After Effects, Adobe Illustrator entre otros programas, los cuales permiten crear imágenes, videos y animaciones de gran calidad que pueden ser implementados dentro del OA para logra un aprendizaje significativo. Se debe tener en cuenta que la creación y el diseño de las animaciones por un profesional es costoso.
- Construir un repositorio de Objetos de Aprendizajes y de otros recursos digitales en la carrera de Matemáticas y Física, el cual sea accesible para los docentes y estudiantes en cualquier momento.
- Aplicar un OA dentro de la carrera y en los colegios podría ayudar a alcanzar un aprendizaje significativo en los estudiantes, ya que es una herramienta novedosa, reutilizable y de fácil acceso.

BIBLIOGRAFÍA

Astudillo, Silva, J., & A. (2012). CbL-Cálculo: Curso b-learning para el apoyo de la enseñanza y aprendizaje de cálculo en ingeniería. RED - Revista de Educación a Distancia, (30), 1–17. Retrieved from http://search.ebscohost.com.ucuenca.idm.oclc.org/login.aspx?direct=true&db=fua&AN=83706003&lang=es&site=ehost-live

Colegio de autores. (2000) *Tendencias pedagógicas en la realidad educativa actual.* CEPES. Universidad de la Habana. Recuperado de: Lohttp://www.sld.cu/galerias/pdf/sitios/rehabilitacion-temprana/articulo._vigostki.pdf

Diaz, O. (2018). *Aplicación y usos de objetos de aprendizaje*. Recuperado de: https://www.ucc.edu.co/noticias/conocimiento/ciencias-de-la-educacion/aplicacion-y-usos-de-objetos-de-aprendizaje

Granville, A., (1963). Cálculo Diferencial e Integral. México: Editorial Hispano-Americana.

Gutiérrez, L., Buitrago M., Ariza, L. (2017). *Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica.* Revista Científica General José María Córdova. 15 (20), 137-153. doi: http://dx.doi.org/10.21830/19006586.170

Hernández, S. (octubre, 2008). El modelo constructivista con las nuevas tecnologías: aplicado en el proceso de aprendizaje. *Revista de Universidad y Sociedad del conocimiento.* 5(2), 26-35. Recuperado de: https://www.raco.cat/index.php/RUSC/article/viewFile/253968/340755

López, M. (noviembre, 2007) Uso de las TIC en la educación superior de México. Un estudio de caso. *Apertura*, 7(7), 63-81 Recuperado de https://www.redalyc.org/pdf/688/68800706.pdf

Martínez-Palmera, O., Combita-Niño, H., & De-La-Hoz-Franco, E. (2018). Mediación de los Objetos Virtuales de Aprendizaje en el Desarrollo de Competencias Matemáticas en Estudiantes de Ingeniería. Formación Universitaria, 11(6), 63–74. https://doi-org.ucuenca.idm.oclc.org/10.4067/S0718-50062018000600063

Mora, F. (mayo, 2012). *Objetos de Aprendizaje: Importancia en la educación superior.* Calidad en la educación superior. 1, 105-118. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/277270560_Objetos_de_aprendizaje_importancia_de_su_uso_en_la_educacion_virtual

Nova García, C. A. (2016). Propuesta didáctica para la enseñanza de la derivación implícita. Revista Katharsis, (22), 339–362. https://doi-org.ucuenca.idm.oclc.org/10.25057/25005731.824

Peña, Pedro. (2019). España. Exelearning. Recuperado de http://exelearning.net/caracteristicas/

Rivera Barrera, G., & Mauricio Echeverri, D. (2016). Diseño y elaboración de un entorno computacional edumathUH para el fortalecimiento del cálculo diferencial. Itinerario Educativo, 30(68), 51–64. Retrieved from http://search.ebscohost.com.ucuenca.idm.oclc.org/login.aspx?direct=true&db=fua&AN=122725511&lang=es&site=ehost-live

Rothe, R., (1959). Matemática Superior. México: Editorial Labor, S. A

Sabina, Y., Toledo, V., Mercedes, A. M., Lázaro, G. G., & José, A. P. R. (2005). Una herramienta de apoyo a la enseñanza del cálculo diferencial e integral a través de las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC). Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias, 14(3), 59–62. Retrieved from http://search.ebscohost.com.ucuenca.idm.oclc.org/login.aspx?direct=true&db=fua&AN=20902698&lang=es&site=ehost-live

Stewart, J., (2012). Cálculo de una Variable. Trascendentes Tempranas. México. Séptima edición.

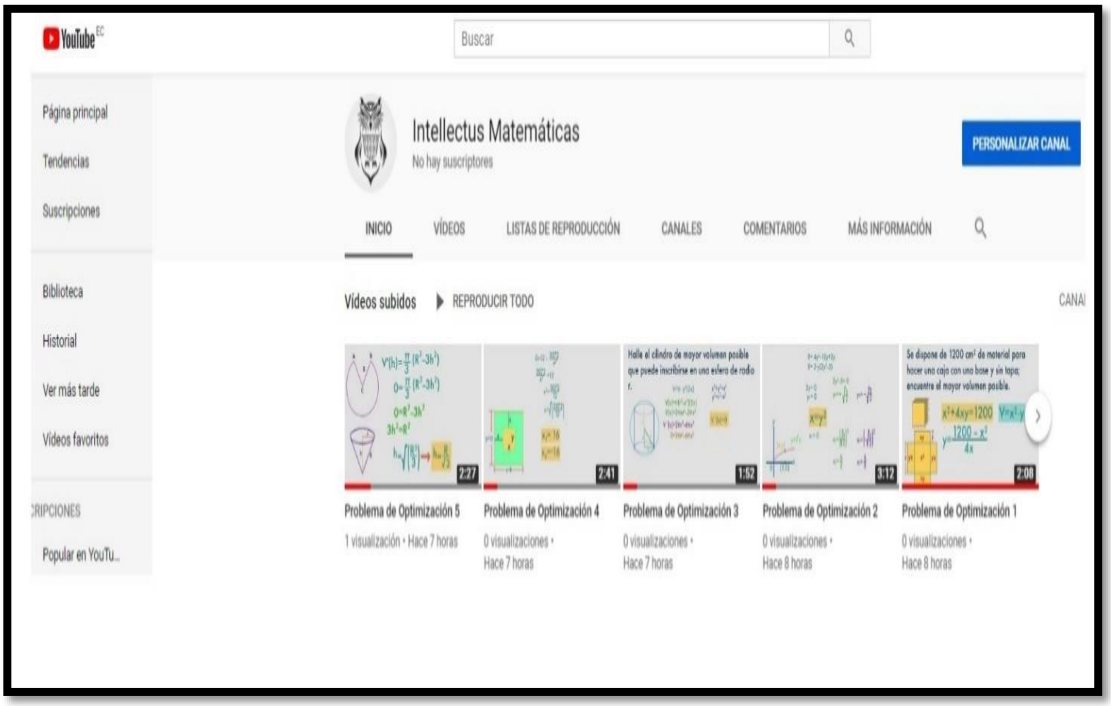
Torres. (mayo, 2018). *Psicologia Educativa y del Desarrollo*. Recuperado de https://psicologiaymente.com/desarrollo/aprendizaje-significativo-david-ausubel

ANEXOS

Anexo #1: Dirección web canal de YouTube

https://www.youtube.com/channel/UCLEacLRnI0oY1Ge12rehIZw

Anexo #2: Vista del canal



Vista del camal de YouTube

Anexo # 3: Encuesta

UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA, LETRAS Y CIECNCIAS DE LA EDUCACIÓN

Encuesta para desarrollar el trabajo de titulación

Señor o señorita estudiante, la siguiente encuesta servirá como información clave para la propuesta de creación de un Objeto de Aprendizaje para Calculo Diferencial.

Conteste las preguntas con responsabilidad y sinceridad.

La información proporcionada en esta encuesta será empleada exclusivamente para fines académicos.

Ciclo: … Fecha: …

Conteste el siguiente cuestionario, marcando la Respuesta a cada enunciado con una "X".

1. En este instante, ¿Qué nivel de compresión considera usted que posee de la asignatura de Calculo Diferencial?

Excelente	Bueno	Aceptable	Regular	Malo

2. Señale con una "X". Para usted la asignatura de Calculo Diferencial resultó:

Complejo	
Entendible	
Fácil	

Si su respuesta fue compleja indique el por qué con uno de los siguientes ítems.

Muy teórico	
Abstracto	
Ejercicios difíciles	
Otros	

Si es otros, especifique………………………………………………………..

3. Señale con una "X". ¿Qué recursos educativos ayudarían a mejorar su compresión en el tema de límites y derivadas?

Material digital	
Pizarrón	
libros	

Otros	

Si es otros, especifique……………………………………..

4. Señale con una "X". ¿Qué tan frecuente utiliza el docente las Tecnologías de la Información y Comunicación (TICs) para impartir sus clases?

   TIC: son todos aquellos recursos, herramientas y programas que se utilizan para procesar, administrar y compartir la información mediante diversos soportes tecnológicos.

Siempre	
Algunas Veces	
Nunca	

5. Señale con una "X". ¿En qué momento de la clase el docente utilizó las Tics?

Anticipación del conocimiento	
Construcción del conocimiento	
Consolidación del conocimiento	

6. Señale con una "X". ¿Utiliza usted algún software o programa educativo para la resolución de ejercicios referentes a Calculo Diferencial?, si su respuesta es **Sí**, especifique cual es.

Si	
No	

Nombre del programa: …

7. Señale con una "X". Está familiarizado con el concepto de Objeto de Aprendizaje.

   Concepto de un Objeto de Aprendizaje:
   "Los objetos de aprendizaje (OA) son recursos digitales, pedagógicos y metodológicos, es una herramienta tecnológica que puede ser aplicada a nuestra realidad tales como: videos, animaciones, diagramas, audio, imágenes y en su conjunto"

Familiarizado	
No Familiarizado	
Indiferente	

8. ¿Usted ha recibido formación específica sobre el concepto y la producción de un Objeto de Aprendizaje?

Si	
No	

9. Señale con una "X". ¿Considera usted que la utilización de un Objeto de Aprendizaje por parte del docente le ayudaría a mejorar la comprensión de los contenidos de Calculo Diferencial?

Totalmente de acuerdo	
Indiferente	
Totalmente en desacuerdo	

10. Señale con una "X", puede seleccionar más de una opción.
Si usted tomara un curso virtual de Calculo Diferencial en un Objeto de Aprendizaje, ¿Qué herramientas de aprendizaje le gustaría que tuviera?

Juegos	
Simuladores	
Videos	
Animaciones	
Audios	
Diagramas	
Otros	

Si es otros, especifique………………………………………………………

11. Señale con una "X". ¿Qué contenidos sobre Calculo Diferencial tuvo dificultades al momento de cursar la asignatura?

Concepto de limites	
Concepto de derivada	
Concepto del teorema del valor medio	
Concepto del teorema del valor medio ampliado	
Máximos y mínimos	
Otros	

Si es otros, especifique …………………………………………………

12. ¿En qué contenidos de la asignatura de cálculo diferencial el docente tardo más de lo esperado y usted tuvo síntomas de fastidio o fatiga?

……………………………………………………………………………………