UNIVERSIDAD DE CUENCA

Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación

Carrera de Matemáticas y Física

«Recursos didácticos para la enseñanza-aprendizaje de los temas de Álgebra Vectorial en Tercero de Bachillerato de la Unidad Educativa "Fausto Molina" de la parroquia rural Tarqui del cantón Cuenca»

Trabajo de Titulación previo a la obtención
del Título de Licenciada en Ciencias
de la Educación en Matemáticas y Física

Autora:

Paola Lorena Robles Montero

C.I.: 010651403-7

Tutora:

Mg. Sonia Janneth Guzñay Padilla

C.I.: 010214041-5

Cuenca, 06 de julio de 2019

RESUMEN

El impacto de la tecnología en la educación se ha considerado tan significativo como su aplicación en la sociedad actual, de manera que se ha hecho parte sustancial del proceso de enseñanza y aprendizaje, no únicamente para facilitarlo, sino además para complementarlo; sobre todo si tomamos en cuenta la asignatura de Álgebra Vectorial para tercer nivel de Bachillerato, cuyos contenidos respaldan la solvencia para su uso. Sin embargo, el alcance de las tecnologías no refleja la realidad de todos los sectores del país, más específicamente del área rural en las que aún se divisan problemas de adquisición, manejo y ejecución de estas tecnologías. Es por esta razón por la que se precisa contar con propuestas educativas diferentes que cumplan con el mismo papel de facilitar y complementar el aprendizaje de Álgebra Vectorial, por lo que se ha decidido construir material concreto apto para representar gráficamente los temas, permitiendo que los estudiantes no solamente visualicen el contenido, sino que sean capaces de palparlo, moverlo o hasta, incluso, elaborarlo por sus propios medios, mientras se garantiza la obtención del aprendizaje.

Palabras clave: *TIC (Tecnologías de la Información y Comunicación). Cognitivismo. Material concreto. Recursos didácticos.*

ABSTRACT

The impact that technology has made into education has been considerated very significant, identical to its relevance into the current reality, in a form that it has became a substantial part in the teaching-learning process, not only for making it easier, but also for complementing it; above all if we realize the subject of Vector Algebra for third level of high school education, whose contents search to give greater weight using the technological resources. However, the extent of technology doesn't reflect the whole country reality, specifically in rural areas because in them there are still issues about technologies acquisition, handling and execution. Because of this, it gets more necessary to have new and different educational proposals that comply with the main objectives: to ease and to complement the Vector Algebra learning, so it has been decided to build concrete material, suitable to represent graphically all the themes exposed, letting students to visualize the content and make them capable of palpating, moving or creating the material by themselves, guaranteeing the reach of the learning.

Key words: *ICT* ***(****Information and Comunication Technology). Cognitivism. Scale model. Didactic resources.*

Contenido

Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio Institucional

Paola Lorena Robles Montero, en calidad de autora y titular de los derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación «Recursos didácticos para la enseñanza-aprendizaje de los temas de Álgebra Vectorial en Tercero de Bachillerato de la Unidad Educativa "Fausto Molina" de la parroquia rural Tarqui del cantón Cuenca», de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN, reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, 10 de mayo de 2019

Paola Robles

Paola Lorena Robles Montero

C.I: 010651403-7

Cláusula de Propiedad Intelectual

Paola Lorena Robles Montero, autora del trabajo de titulación «Recursos didácticos para la enseñanza-aprendizaje de los temas de Álgebra Vectorial en Tercero de Bachillerato de la Unidad Educativa "Fausto Molina" de la parroquia rural Tarqui del cantón Cuenca», certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autora.

Cuenca, 10 de mayo de 2019.

Paola Robles

Paola Lorena Robles Montero

C.I: 010651403-7

DEDICATORIA

En primer lugar, le dedico este trabajo a la persona más importante de mi vida, a quien siempre estaré muy agradecida de tener; al ser más hermoso, noble, comprensivo, dulce, inteligente, lleno de virtudes y con el corazón más grande: mi madre. A ella, porque no sólo me dio la vida sino porque me ha ayudado a vivirla; porque ha sido mi más grande apoyo, porque siento que merece mucho más de lo que tiene; pero, sobre todo, porque la amo más de lo que puedo describir.

A mi abuelita Carmen porque ella ha significado un modelo de vida gracias a sus consejos, sus experiencias, su trabajo y esfuerzo; y porque ella ha querido verme mejorar como persona y futura profesional. A mi abuelito Mario por hacerme recordar que la compasión y la reminiscencia forman parte de nuestras vivencias y por cómo su música –con su saxofón o su acordeón– me ha acompañado. A mi abuelito Max, porque desde muy pequeña estuvo para mí en todo momento; no importaba el lugar donde me encontraba ni la hora que era, él iba a estar ahí, sin falta, para acompañarme y no dejarme sola. Y asimismo, con mucha pena en el corazón, se lo dedico a mi abuelita Blanca, quien ha sido, es y siempre será mi principal motivación; por haberme regalado sus sonrisas, sus abrazos y sus besos; porque sé que ella se habría complacido al descubrir que he seguido avanzando y que jamás me he dado por vencida.

Igualmente, a mi padre Tony, y a mi hermano Tilo Antonio, de quien espero ser un buen ejemplo para su vida; esperando, así, que él pueda cumplir sus propios sueños. Y, por último, se lo dedico a la gente que, como yo, ha soñado, ha llorado y ha luchado hasta ver sus sueños convertidos en realidad; porque ellos logran ver todo en color incluso cuando el mundo se vuelve más oscuro; porque saben que, con un poco más de tiempo, todo estará bien; porque la felicidad no la encuentran en la meta, sino el camino. Y porque la felicidad empieza desde ya.

AGRADECIMIENTOS

Quiero dar gracias a Dios, principalmente, que me ha bendecido con salud y todo lo necesario para mi vida; porque me ha dado la capacidad de pensar, de reflexionar y de seguir adelante, sin detenerme.

Quiero, nuevamente, agradecer a mi familia entera. A mis padres, Lorena y Tony, por su amor, apoyo y comprensión; a mi hermano, Tilo Antonio, porque ha sido una compañía única. A mis abuelitos: Carmen, Mario y Max ya que sus palabras me han ayudado a crecer; a mi abuelita Blanca, porque sé que desde el cielo me cuida y guía cada uno de mis pasos. También, a todos mis tíos y tíos políticos a quienes quiero muchísimo: a Eulalia, Armando, Richard, Marla, Ángel y Carlos. A mis primos: Carolina, Esteban, Paulina, Kasandra y a los que no tengo cerca. Aprovecho para expresar un enorme sentimiento de gratitud a mi prima Catherine quien, en sus momentos libres, me ayudó con la elaboración y culminación de este trabajo.

No podía dejar de agradecer a mis compañeras y compañeros con quienes compartí muchos momentos buenos y malos, sobre todo a mis amigos Eddy y Tati, quienes me han comprendido, han tratado de apoyarme y motivarme, me han llenado de positivismo y han visto lo mejor en mí, incluso cuando nadie más lo ha hecho. A mis amigos Pachi, Andrés, Xime y Jenny con quienes compartimos lindos recuerdos. También, agradecer a aquellos que ya no están más en mi vida, pero sí en mi corazón.

Finalmente, me gustaría brindar un agradecimiento enorme a los docentes de la Carrera de Matemáticas y Física, en especial a la Mg. Sonia Guzñay, quien me brindó su conocimiento, su tiempo y su paciencia para guiarme de la mejor manera durante este proceso; además de haber sido una docente excepcional y por ser un modelo de perseverancia y de excelencia.

INTRODUCCIÓN

La elaboración de recursos didácticos para la enseñanza-aprendizaje de determinados temas, contenidos o asignaturas, demuestra que, en el campo educativo las opciones de mejora de los procesos y las metodologías se han visto ampliadas y perfeccionadas hasta llegar a adaptarlas a contextos específicos ideales para contrarrestar cualquier tipo de obstáculo que interfiera en la adquisición de conocimientos en las aulas de clase. Bajo este concepto, para los temas de Álgebra Vectorial que se estudian en el Tercero de Bachillerato, es fundamental contar con todo tipo de recursos didácticos –ya sean: tecnológicos, concretos, impresos, audiovisuales, virtuales, entre otros– adecuados para facilitar y complementar el aprendizaje de los estudiantes debido a que muchos de estos temas presentan ciertas dificultades de comprensión y/o visualización.

En nuestra era actual, los recursos tecnológicos han llegado a desplazar en gran magnitud a muchos otros medios, técnicas o metodologías, los cuales, en muchos ámbitos de la vida cotidiana, se han considerado imprescindibles de aplicar, llegando incluso a ocupar un papel notable dentro de la educación en la que se ha impuesto como uno de los factores más influyentes para consolidar la información que se imparte. Es así como muchos actores del proceso educativo reconocen el enorme apoyo de la implementación de las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje, sobre todo para el Álgebra Vectorial pues, a través de estas tecnologías, se pueden viabilizar los vectores, sus gráficos, medidas, posiciones, operaciones, etc., lo que proporciona una mejor visualización y su posterior comprensión tanto para el maestro como para el estudiante.

Sin embargo, se ha comprobado que la utilización de las TIC no siempre ha resultado cien por ciento favorable para los docentes debido a diversas razones, destacando la complicada aplicación de estos medios en las zonas rurales tanto por el poco alcance de las redes, el desconocimiento de su utilización, falta de capacitación para manejar software o programas matemáticos, poca disponibilidad de tiempo, etc.; por lo que se procura profundizar en otros recursos que presenten igual o mayor eficacia y novedad para el aprendizaje del Álgebra Vectorial como, por ejemplo, el empleo de material concreto, el cual simboliza los contenidos a trabajarse tornándolos más demostrativos puesto que transforman lo abstracto en algo concreto, como son: Operaciones con Vectores, el Espacio Vectorial R^3, Componentes, Producto Escalar, Producto Vectorial, Producto Mixto, etc.

A través de este trabajo se podrá encontrar a detalle cómo ocuparse del proceso de enseñanza-aprendizaje, la aplicación de ciertos recursos didácticos, sus ventajas y desventajas, cómo adecuar las diferentes opciones a distintos ámbitos, qué herramientas educativas son necesarias y útiles; pero, sobre todo, el diseño y desarrollo de material concreto.

Capítulo I

1. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

1.1. IMPORTANCIA DE LA ADAPTACIÓN DE LAS TEORÍAS EDUCATIVAS EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA VECTORIAL

Las ciencias matemáticas y todas sus ramas siempre se han figurado como una de las disciplinas más complejas de enseñar y aprender –tanto para docentes inexpertos como para los expertos– dada la notable dificultad de sus contenidos especialmente para la educación de niños y adolescentes, todo esto producido incluso por la heterogeneidad de los estudiantes en el aula de clases, aunque su aplicación sea inminente y necesaria para todo ser humano. Por este motivo, muchos expertos han coincidido en que su instrucción no ha sido del todo satisfactoria debido a que no logra ser efectiva ni significativa.

Es así que, desde hace varios años atrás, se ha pretendido renovar la típica metodología de enseñanza y añadir nuevas propuestas reformatorias, y se han incorporado las denominadas Teorías del Aprendizaje, es decir, aquellas perspectivas didácticas asociadas a la adquisición sistemática de la información, el conocimiento, los contenidos, etc., que produzcan un cambio duradero en el individuo para obtener nuevas habilidades, destrezas o valores mediante la experiencia y/o el estudio; llegando finalmente a descubrir cómo encausarlas y aplicarlas a la educación, tomando como base los pensamientos de diversos autores que han estudiado la realidad integral de los estudiantes embarcándose tanto en la parte intelectual como en la emocional; y, asimismo, aplicar estas caracterizaciones a la enseñanza específica del Álgebra Vectorial para los adolescentes.

El aprendizaje del Álgebra Vectorial implica el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, numérico, abstracto, gráfico, espacial, entre otros, construido en base a las capacidades intrínsecas del alumno que le permita adquirir y ampliar aquellas concepciones que vayan más allá de los conocimientos matemáticos como tales para relacionarlos con diferentes contextos o situaciones de aprendizaje más prácticos. Es por esto que se cree necesario contemplar cómo se construye el pensamiento matemático en los jóvenes, qué tipo de factores inciden, cuáles son las principales características que se deben tomar en cuenta para su correcta aplicación en la asignatura, cómo se retienen los conocimientos a esa edad, etc., todos esos cuestionamientos que coadyuvan a conocer más a fondo la realidad de los estudiantes en cuanto a su aprendizaje algebraico.

Siguiendo esta secuencia, y según lo que relata De Zubiría (2011), para alcanzar un aprendizaje categórico el proceso debe enfocarse en el alumno como participante activo, mientras que la labor del docente correspondería a ser la de facilitador o guía, que sea capaz de brindar estrategias nuevas que consienta a los estudiantes: el descubrimiento de principios, la solución de problemas reales, la colaboración con sus compañeros, la organización y el compartir ideas o experiencias, construyendo su propio aprendizaje desde lo que propiamente conocen o han vivido; notando, además, que las nuevas percepciones pasan por una fase de asimilación y otra de acomodación que provoca el crecimiento de la información, en virtud de sus esquemas cognitivos inherentes.

De esta manera, el papel de la Psicología Educativa –de la cual se desprende la Teoría Cognitivista– se hace presente con más solidez dentro de la educación pues profundiza plenamente en los procesos de enseñanza y aprendizaje del Álgebra Vectorial, llevando a distinguir los puntos esenciales para lograr una buena enseñanza en las aulas de clase –tales como: edad, capacidades motoras y mentales, manipulaciones educativas, resultados académicos, atención, organización, materiales, entre otros factores–, con el fin de conseguir captar el cambio de conducta de los estudiantes acorde a sus cualidades y la solución idónea para combatirlo (González-Pérez & Criado del Pozo, 2009).

1.2. NOCIONES GENERALES DEL COGNITIVISMO EN EL PROCESO EDUCATIVO

En los últimos años, la noción de Cognitivismo[1] ha despertado mucho interés entre los teóricos educativos quienes han considerado que uno de los principales constituyentes de un buen aprendizaje recae en la aceleración de los procesos cognitivos, esto es, en el mejoramiento del pensamiento, la representación del conocimiento y la memoria, es decir, que permite relacionar las actividades mentales con los estímulos y sus respuestas (Arancibia, Herrera & Strasser, 2008), mismos que conllevan a una práctica individualizada, vinculada cien por ciento con la construcción del conocimiento por parte del propio estudiante, en el que se manifiesta la dinámica e interés mediante estrategias de descubrimiento y creación, además del planteamiento de cuestionamientos para luego solucionarlos; mientras que el maestro solo actúa como guía u orientador en este transcurso pedagógico.

Es precisamente el estudio relativo al conocimiento y su desarrollo en el que se centra el Cognitivismo, el cual nace bajo la propuesta de la *Psicología de la Gestalt*[2] que señala que el aprendizaje se da mediante procesos de organización y reorganización cognitiva en el que el individuo adquiere un rol activo y participativo; en el que también se buscaba procesar y

[1] Teoría considerada como una de las ramas del Constructivismo, y totalmente desligada del Conductismo, que se encarga del estudio de la cognición –relativo al conocimiento-.
[2] Gestalt: palabra de origen alemán que significa *forma*.

organizar los estímulos que ratificaran la adquisición total y uniforme de los contenidos, enfatizando la forma en que los seres humanos se apropiaban de la información. Estas conjeturas eran algo que el Conductismo no era capaz de abarcar en su totalidad. (Arancibia et al., 2008)

Como ya se explicó, el Cognitivismo denota las bases para el Constructivismo, debido a la notoriedad que alcanza la construcción del conocimiento en este tipo de aprendizaje. Como lo señala Woolfolk (2010) “los conocimientos se adquieren al construir una representación del mundo externo […] y son precisos de acuerdo con el grado en que reflejan la forma en que realmente son la cosas en el mundo externo”. Por ello, la Teoría Cognitivista adquiere una significación gradual como parte de las Teorías del Aprendizaje dado que profundiza su estudio en la cognición del ser humano, optimizando su creatividad, crítica y reflexión, en contraposición de la participación pasiva y poco significativa del Conductismo, lo que concede un desarrollo más extenso de las potencialidades; así como también, priorizando el factor social que involucra el aprendizaje, por medio del cual se acentúan los procesos cognitivos internos que permiten que se dé el Constructivismo, consintiendo que el propio alumno se haga responsable de lo que aprende.

Tras estas afirmaciones, la Teoría Cognoscitiva, contrariamente a lo que profesa el Conductismo, “se dedica a estudiar procesos tales como la percepción, memoria, atención, lenguaje, razonamiento y resolución de problemas, es decir, los procesos involucrados en el manejo de información por parte del sujeto” (Arancibia et al., 2008), poniendo énfasis en el perfeccionamiento de la cognición humana y en cómo se desarrolla la inteligencia. En específico, la Teoría Cognoscitiva idónea para el aprendizaje de Álgebra Vectorial encuentra sus fundamentos en las propuestas de Jerome Bruner, que describiremos a continuación.

1.2.1. TEORÍAS DE JEROME BRUNER Y SU RELACIÓN CON EL PROCESO COGNITIVO

Para Jerome Bruner (1915), psicólogo estadounidense y uno de los teóricos precursores del Cognitivismo, el aprendizaje debe estar encaminado específicamente a la mejora de la cognición del ser humano en forma particular, es decir, cada quien realiza un procesamiento activo de la información atendiendo convenientemente a su propio proceso de instrucción que coloca a la motivación, la reflexión, la predisposición a aprender y el refuerzo[3] como componentes principales en la adquisición del conocimiento, sobre todo si ahondamos en los temas de Álgebra Vectorial, cuyo aprendizaje se debe cumplir precisamente con los pasos de este sistema.

1.2.1.1. LA TEORÍA DEL DESCUBRIMIENTO DE BRUNER Y SU RELACIÓN CON LA IMPLEMENTACIÓN DE MATERIAL CONCRETO PARA ÁLGEBRA VECTORIAL

Si hablamos de que las estructuras tecnológicas dotan de alta capacidad cognoscitiva, los modelos de manipulación como maquetas, materiales plásticos o de madera y demás (sobre todo si éstos se construyen con medios del propio entorno), concretan un mayor beneficio en la búsqueda del conocimiento del Álgebra Vectorial pues actúan de guía para potencializar la creatividad, la participación activa, la manipulación, la exploración, la investigación[4], etc., ya que, de esta manera, el alumno percibe con todo detalle las mediciones específicas, los componentes, las operaciones, lo concerniente al estudio de los vectores y, especialmente, sus aplicaciones –todo esto, a diferencia de las TIC, en el que el educando puede no solo visualizar sino también palpar, construir, manejar–. A través de este procedimiento, cada quien se convierte

[3] Estos principios conforman las cuatro etapas de una secuencia estructurada que establecen la *Teoría de la instrucción* de Bruner (1966).

[4] Bruner (1966) propone que el alumno, en base a lo que conoce o investiga, sea capaz de ir más allá e incrementar su comprensión; a esta propuesta la denominó *Aprendizaje por descubrimiento*.

en el gestor de su propio aprendizaje mientras encadena una interacción profunda con su entorno espacial y social. De esta forma, se pone de manifiesto que todo fenómeno didáctico tiene un componente matemático esencial que mantiene a los alumnos interesados y trabajando en actividades que los fortalecen y unen como grupo, basándose más en lo que tienen en común que en lo particular.

1.3. TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LA COMUNICACIÓN (TIC) EN EL ÁMBITO EDUCATIVO.

1.3.1. IMPLEMENTACIÓN EN LAS ZONAS RURALES

La incursión de las tecnologías de la información y comunicación al día a día de los seres humanos ha significado un cambio significativo en la forma de interacción interpersonal, de relacionarse con el entorno, de comprender la realidad y aprender de ella; en otras palabras, ha transformado –o inclusive, ha facilitado– totalmente la forma de vivir tanto para la comunidad urbana como para la rural, por lo que ahora se pretende adecuar las tecnologías a cada uno de los ámbitos de desarrollo personal y colectivo, tomando muy en cuenta el campo intelectual y académico, forjando de esta manera una simbiosis mutua que desemboca en la creación de un nuevo individuo capaz de habituarse a un nuevo mundo con características esencialmente digitales.

No es difícil descubrir que en la era actual, desde edades muy tempranas, las personas se involucran con los avances tecnológicos y los hacen parte de su vida; como se percibe en la gran mayoría de los niños que en sus pocos años saben perfectamente cómo manejar una computadora, una *tablet*, un *smartphone* o cualquier otro tipo de dispositivo digital. Es así que, si bien la era actual está encaminada a utilizar la tecnología como parte vivencial y de desarrollo de las personas, se considera altamente importante –y como punto de partida– su incorporación en el campo de la educación, dentro del cual se han colocado a las TIC como recurso promotor de un modelo constructivista de enseñanza-aprendizaje de Álgebra Vectorial que permita a los docentes formar a sus estudiantes de tal manera que puedan desenvolverse a cabalidad en las ramas matemáticas, sus relaciones y aplicaciones, y que les sea de utilidad en un futuro próximo, en el que se verifique su adaptabilidad hacia el progreso tanto académico como personal.

No obstante, la aparición de la tecnología ha abierto una brecha digital[5] que ha acaecido en una división de estructuras sectoriales determinadas por el grado de accesibilidad de cada una de ellas a la infraestructura y los servicios de informática y comunicaciones, que ha suscitado cierto tipo de desigualdad social que no ha permitido un avance homogéneo ni sistémico de la comunidad y, así, un desajuste en el avance de la educación. En otras palabras, ciertos grupos rezagados de la sociedad, específicamente aquellos del área rural, no pueden contar con la utilización de las TIC –o es deficiente su uso– debido al poco desarrollo generado en estas zonas, ya sea por su ubicación, por el poco alcance de las redes, o de la escasa capacitación para manejarlas, por lo que el proceso de enseñanza-aprendizaje de Álgebra Vectorial debe adecuarse a estas situaciones para lograr los mismos o mejores resultados.

[5] Expresión utilizada a raíz de la incursión de las tecnologías en la sociedad actual que hace referencia a "la separación que existe entre las personas (comunidades, estados, países…) que utilizan las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) como una parte rutinaria de su vida diaria y aquellas que no tienen acceso a las mismas y que aunque las tengan no saben cómo utilizarlas." (Serrano & Martínez, 2003)

1.3.2. IMPORTANCIA DEL USO DE LAS TIC EN EL APRENDIZAJE DE ÁLGEBRA VECTORIAL

El Cognitivismo ofrece un sinnúmero de metodologías aptos para la enseñanza eficaz y, por ende, para el aprendizaje significativo; resaltando aquellas que no solamente ponen de relieve el interés y motivación de los alumnos sino que, además, destacan la creatividad, la flexibilidad, la capacidad de síntesis, el dinamismo o el propio interés del maestro; tras esto, surgen inventivas innovadoras y actuales como juegos, dinámicas, actividades lúdicas, construcción de material concreto, o utilización de herramientas tecnológicas. En este punto nos centraremos en estas últimas.

Es de conocimiento general que la implementación de la tecnología de hoy en día no significa sólo un camino de mejoramiento y optimización de la enseñanza en las ramas matemáticas, sino que implica un involucramiento notable de los educandos dada su total atracción y manejo de este tipo de herramientas contemporáneas. Santos (citado por Parra & Díaz, 2014) piensa que la educación es un campo en el que el impacto de las Tecnologías de la Información y la Comunicación no ha pasado desapercibida, y mucho menos cuando se trata de ramas de la Matemática, de tal forma que ha llegado a revolucionar la forma de enseñar y orientar el conocimiento e interacción formativa de los estudiantes dada la importante aceptación de su ejecución, apto para todos los niveles educativos.

En Álgebra Vectorial, es importante la utilización de las TIC debido a que, a través de este medio, se puede viabilizar los vectores, sus gráficos, medidas, posiciones, operaciones, etc., proporcionando una mejor visualización que permite al maestro facilitar la comprensión de los contenidos por parte de los alumnos para su posterior captación y aplicación. Sin embargo, se ha comprobado que la utilización de las TIC no siempre ha resultado cien por ciento favorable para los docentes por lo que se procura buscar alguna forma para mejorarlas; así como también, profundizar en otros recursos que presenten igual o mayor eficacia y novedad para el aprendizaje del Álgebra Vectorial como, por ejemplo, el empleo de material concreto.

A más de esto, es importante considerar que las TIC, al ser una herramienta innovadora que se ha adherido a la práctica tecnológica-educativa del docente, y a la que últimamente se le ha atribuido una jerarquía superior en comparación con otras técnicas, no siempre se manifiesta sencilla de aplicar y exterioriza una serie de limitantes relacionados con su adquisición, aplicación o dominio, mismos que obstaculizan su adecuada incorporación en el proceso pedagógico, lo que disminuye la probabilidad de mejoras, avances o cumplimiento de objetivos; y que es necesario profundizar, analizar y solucionar.

1.3.3. LIMITANTES PARA EL USO DE LAS TIC EN EDUCACIÓN

En los últimos años, muchos estudios efectuados a nivel internacional han identificado que las dificultades que se desligan de su aplicación (en países como España, por ejemplo) tienen que ver, entre otros, con tres factores determinantes: la falta de capacitación de los profesores para manejar estos programas, la poca disponibilidad de tiempo para acceder a ellos y la ausencia de recursos tecnológicos en las aulas de clase (Barrantes, Casas & Luengo, 2011, p. 87).

Asimismo, según Díaz Barriga (2014), en el caso latinoamericano, se ha constatado la deficiencia técnica y didáctica que muestran los docentes hacia la introducción de dichas tecnologías debido a su incapacidad, desconocimiento y a las condiciones poco favorables para su uso, y acota:

> En la región latinoamericana, con base en los análisis de los expertos en el tema, se encuentra un claro rezago no sólo en las posibilidades de acceso en condiciones de equidad a dichas tecnologías,

> sino también en relación a sus usos pedagógicos. Al parecer, en las condiciones actuales, […] en nuestra región las TIC pasarán a ser un factor más de desigualdad que perpetúe el círculo de exclusión social y educativa en que se encuentran atrapados muchos de nuestros niños y jóvenes. (párr. 2)

1.3.3.1. DESVENTAJAS RELACIONADAS CON EL DOCENTE

El docente realiza un papel fundamental en la instrucción de Álgebra Vectorial de sus alumnos pues se encarga no sólo de enseñar sino también de motivar, guiar, hacer despertar su imaginación y creatividad, generar pensamiento crítico y racional para formar a sus estudiantes y desenvolver su pensamiento matemático. En este caso, la aplicación de las TIC no significa solamente una nueva modalidad de enseñanza y aprendizaje muy efectiva que cumple con los fines estipulados, sino que además permite ir más allá del proceso educativo, plasmando retos tanto para el estudiantado como para los profesores. Es aquí cuando se desvela una gran dificultad de las TIC en la educación la cual tiene que ver con la falta de competencia y conocimientos de los maestros para su implementación, conocimientos que vayan más allá de lo básico; muchas veces los docentes no consiguen optimizar la habilidad de ajustar sus propuestas metodológicas a las características de las tecnologías, por lo que se puede decir que hay poca preparación de los docentes para su manejo. Al tener poca preparación, los docentes empiezan a sentirse inseguros acerca de su utilización debido a que se enfrentan a ciertos alumnos que probablemente conozcan más sobre ellas. (Barrantes et al, 2011)

En cierto modo, la falta de capacitación de los docentes no permite que sientan seguridad con respecto a la aplicación de las TIC por lo que prefieren simplemente no utilizarlas y continuar manteniendo sus propias prácticas educativas; desde esta perspectiva, el hecho de que las instituciones educativas se equipen con la más alta tecnología y con los aparatos más modernos y avanzados, carece de relevancia, pues no contarían con personal lo suficientemente capacitado.

1.3.3.2. DESVENTAJAS RELACIONADAS CON LA INFRAESTRUCTURA

Uno de los principales factores que inciden en el óptimo desarrollo de una buena práctica docente es la adecuación de recursos didácticos idóneos, favorables y de calidad. De este tipo de recursos se han destacado las tecnologías, sobre todo por ser novedosas y llamativas, pero, para su implementación, es menester contar con equipamiento moderno y desarrollado. Uno de los obstáculos presentados en este aspecto está relacionado con el acceso limitado de los profesores a los recursos informáticos, no de forma general, sino dentro de los centros educativos; este impedimento se debe a varias razones, una de ellas tiene que ver con un problema de disponibilidad de artefactos de calidad (tanto hardware como software) y que no sean fácilmente accesibles; así como también, recurre la falta de recursos económicos que presentan ciertos establecimientos para adquirir este tipo de materiales, a más de la falta de personal capacitado que ya se mencionó anteriormente; por tal razón, los directivos de las instituciones educativas deciden que no es conveniente adquirirlos.

1.3.3.3. OTRO TIPO DE DESVENTAJAS

Otras de las razones que limitan el uso eficaz de las TIC en educación se relacionan con el factor tiempo; muchos de los docentes que han formulado situaciones didácticas en las que puedan implementar las TIC en sus clases y cuentan con el material para ponerlo en práctica, simplemente encuentran una gran dificultad en el tiempo ya que muchas horas clase –que normalmente duran entre 40 y 45 minutos– no son suficientes. De este punto, los docentes han manifestado que frente a las clases tradicionales, las TIC requieren de mucho tiempo, no sólo dentro de las aulas de clase, sino también al momento de la preparación debido a la búsqueda de información, la preparación del material e incluso, la planificación y organización, por lo que sus tiempos se sobrecargan y no alcanzan a culminar sus propósitos diarios y anuales. (Barrantes et al, 2011)

Respecto a otra limitante, no podíamos dejar de mencionar el complicado acceso de las tecnologías a las zonas rurales, por lo que se considera a esta área un tanto excluida de las regiones más aventajadas, aquellas en las cuales el alcance de las redes es sumamente mayor. Al ser el internet un sistema de comunicación donde se conectan varios usuarios, es necesario contar con instalaciones físicas que consigan expandirse para vincular a la mayor cantidad de gente posible; en el caso de las zonas urbanas, este acceso brinda mayores oportunidades con la instalación de las fibras ópticas, los cables tendidos o transmisión inalámbrica, es decir, diversas alternativas para el usuario de acuerdo a su comodidad y presupuesto. Empero, las regiones rurales marginales no cuentan con estas facilidades puesto que la infraestructura en general es escasa dado su aislamiento geográfico, por lo que el avance de la tecnología encuentra un gran problema en este sentido, sobre todo si se refiere a costos y mantenimiento. Desde este punto de vista, vale decir que la tecnología se ha apoderado en un grado superior de las zonas urbanas que de las rurales por lo que es más usual observar que ese haya incluido estos recursos a todo tipo de actividades diarias de las grandes ciudades, infiriendo que en el ámbito de la educación no es diferente; mientras que en los sectores más alejados resulta poco probable que el estilo de vida sea similar al urbano, y se deduce pues que en el campo escolar su adaptabilidad es aún más inverosímil.

1.3.3.4. CASO LOCAL

En nuestro país, el gobierno ha adoptado políticas radicales de innovación de la educación entre las cuales se encuentran la incursión de las TIC en las metodologías, estrategias y técnicas de instrucción pedagógica en todas las asignaturas (incluida el Área de Matemáticas), para lo cual dotaron a muchas instituciones de infraestructura, salas de audiovisuales, equipamiento y artefactos tecnológicos tales como: aulas virtuales, pizarras digitales, ordenadores portátiles, etc., llegando aun a la creación de las denominadas *Unidades Educativas del Milenio*[6], cuyo objetivo principal, según lo dicta la página del Ministerio de Educación (2017) es brindar una educación de calidad, mejorando las condiciones de escolaridad y acceso, y garantizando un trato igualitario entre todas las niñas y niños que llegan a estudiar.

Para mejorar la implementación de las TIC en la educación en el Ecuador no sólo era necesario proporcionar instalaciones modernas y equipos avanzados sino, además, ofrecer cursos y talleres de capacitación sobre estos recursos a docentes y directivos institucionales de tal manera que logren apropiarse de ellos y puedan ser capaces de utilizarlos en las aulas de clase, logrando adecuar sus técnicas de enseñanza a las nuevas tecnologías mediante la creación de ambientes de innovación y mayor interacción entre ellos y sus alumnos, y en el que se pueda concretar la construcción propia del conocimiento a través de los medios técnicos y modernos; esto correspondería a la meta principal del gobierno al incluir las TIC en la educación, sin embargo, no siempre se cumple.

Tal y como lo señalan Gonzales, Trelles & Mora (2017) en sus investigaciones realizadas en la ciudad de Cuenca, se ha determinado que la incorporación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación por parte de las instituciones educativas y los maestros no está designada ciento por ciento al proceso educativo como tal, es decir, para apoyar sus

[6] El plan de implementación de las Unidades Educativas del Milenio se creó a partir del año 2007 como parte de la política gubernamental que pretendía mejorar la calidad de la educación pública, sobre todo en los sectores rurales, para lo cual se construyeron nuevos edificios totalmente equipados, con tecnología avanzada y recursos pedagógicos modernos y adecuados. (Ministerio de Educación [MINEDUC], 2007, citado por Gonzales, Trelles & Mora, 2017)

metodologías de enseñanza, sino más bien para cumplir otros objetivos que exigen los estatutos procedimentales educativos en el país.

Además, más del 75% de los encuestados consideran que el impacto de las TIC en la educación es altamente significativo para los estudiantes ya que motiva a la adquisición de nuevos conocimientos y mejoran la captación de los conceptos. En cuanto al nivel de acceso a los recursos informáticos en la institución, un gran porcentaje de docentes lo califica como deficiente, sobre todo cuando se trata del uso de pizarras digitales, escáner o reproductores de audio y video; mientras que, con un porcentaje de apenas entre el 18 y 20% califican como óptimo el acceso a salas de audiovisuales, proyectores móviles, computadores e internet. (Gonzales et al., 2017)

Finalmente, si reflexionamos frente a todo lo expuesto, se consideraría un tanto infructuosa una educación sin TIC especialmente en la época contemporánea y considerando, como factor importante, la dificultad del aprendizaje del Álgebra Vectorial para los jóvenes de Tercero de Bachillerato; sin olvidar que son un recurso didáctico de alto potencial que favorecen las enseñanzas y facilitan los aprendizajes aunque no hayan sido creadas con un fin meramente educativo. Sin embargo, es ineludible no mencionar que, para su correcta implementación, todavía falta un largo camino por recorrer, mayormente en las zonas rurales; es así que se prevé acabar con la brecha digital presente en la actualidad mientras se solucionan estas desventajas, de modo que se garantice un acceso libre de desigualdad en las instituciones educativas, donde todos pueden contar con similares oportunidades, mediante la implementación de otro tipo de recursos alternativos a las TIC que puedan complementar –de igual o mejor manera que las tecnologías- el proceso pedagógico, para alcanzar una educación de calidad y el cumplimiento de todos los objetivos escolares.

1.4. ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA VECTORIAL A TRAVÉS DE RECURSOS DIDÁCTICOS

Muchos expertos en educación, desde hace aproximadamente sesenta años atrás, han persistido en la idea de que el proceso de enseñanza y aprendizaje de las ciencias lógicas –y en mayor parte abstractas–, como el Álgebra Vectorial, la Geometría o la Aritmética, era dificultosa e insuficiente debido a la poca retención de información que exteriorizaban los estudiantes, por lo que se llegó a deducir que la complejidad de estas asignaturas, tanto para los docentes como para los alumnos, era cuantiosa y se ha visto la necesidad de darle un cambio a la forma de trabajarlas. Tras pasar por las fases en que la educación buscaba enfocarse en un solo protagonista, es decir, darle prioridad solo al docente y luego solo al alumno, finalmente se descubrió que lo ideal era vincular los tres componentes pedagógicos esenciales: docente, estudiante y contenido matemático.

Al fusionar a los absolutos actores educativos, el proceso didáctico en su totalidad adquiere mayor protagonismo y se empieza a proponer nuevas metodologías que tomen en cuenta el contenido que se quiere enseñar y los modos más correctos de hacerlo y que, a su vez, se proyecte en la efectiva adquisición del conocimiento. Para ello, enfoques como el Cognitivismo apuesta por ideas nuevas que dejen atrás la simple *clase magistral* del docente, muy concurrente en sus horas de clase, en las que únicamente se dedicaba a llenar de información a sus estudiantes[7], limitando el razonamiento, el pensamiento o la creatividad, tan necesarias en el aprendizaje de Álgebra Vectorial.

[7] Paulo Freire denominaba a este tipo de práctica Educación Bancaria pues, metafóricamente, consideraba que el docente depositaba conocimientos en los estudiantes, similar al depósito de dinero en los bancos.

Las nuevas ideas a las que se hace mención buscan generar la mayor participación posible de los estudiantes, que se involucren más dinámicamente en sus tareas y actividades, que sean los propios alumnos quienes descubran el por qué y para qué de las cosas: como por ejemplo: cómo obtenemos los vectores, en dónde los aplicamos, o incluso que lleguen a conceptualizarlos, operarlos, graficarlos, etc.; de tal forma que, como profesa el Cognitivismo, se permita el desarrollo de sus capacidades mentales para que se procese la información de una manera más óptima y se comprenda mejor el mundo externo del que surgen.

Resulta altamente efectivo el uso de instrumentos de enseñanza, innovadores, interesantes, creativos, que generen motivación, que estimulen las habilidades, capacidades y destrezas de los estudiantes pero, sobre todo, que resulten efectivos en su implementación.

1.4.1. IMPORTANCIA DE LA UTILIZACIÓN DE MATERIAL CONCRETO EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE ÁLGEBRA VECTORIAL

El estudio del Álgebra Vectorial promueve un alto nivel de desarrollo cognitivo, motor, espacial y perceptual y, dadas las limitaciones que se perciben en la incorporación de las TIC en las aulas de clase (que ya se detallaron en temas anteriores), para los docentes, resulta indispensable contar siempre con alternativas adecuadas para responder a las exigencias de la educación, como la utilización de recursos didácticos y material concreto que mejoran la calidad educativa y la correcta enseñanza de esta asignatura en bachillerato. Al hablar de la utilización de recursos didácticos nos referimos más concretamente al proceso utilizado para hacer más sencilla la adquisición de conocimientos de manera que estimule y coadyuve la asimilación de conceptos de vectores y así avanzar al siguiente paso que es su aplicación verificada en la construcción de material concreto.

Estas maquetas son instrumentos construidos con distintos materiales que transmiten los conceptos de Álgebra Vectorial a una base moldeable, permanente, que los alumnos puedan tocar, girar, observar con más detenimiento, que presenten retos para ellos, que les permitan vivir experiencias personales sin las cuales no aprovecharían la información. La utilización de materiales manipulativos estimula el desarrollo tanto físico como intelectual del conocimiento algebraico ya que los problemas matemáticos se rehacen en situaciones reales, claras y objetivas; el trabajo corporal se junta con el mental y ayuda a elaborar ideas para la práctica de vectores: resolver problemas, comparar medidas, observar sus direcciones, ángulos, dimensiones, realizar operaciones o evidenciar su utilización en Física; con lo que se pretende lograr un modelo de aprendizaje lo más apegado posible a la realidad o contexto del alumno; a más de que motiva, atrae y genera reflexión (Muñoz, 2014).

Este tipo de recursos, llamativos y efectivos, simbolizan los contenidos a trabajarse tornándolos más demostrativos puesto que transforman lo abstracto de los temas de Álgebra Vectorial en algo concreto, como son: Operaciones con Vectores, el Espacio Vectorial R^3, Componentes, Producto Escalar, Producto Vectorial, Producto Mixto, etc., de modo que se exterioriza la intervención de cada alumno mediante el trabajo, la colaboración y la cooperación; la predisposición por aprender y el interés; permitiendo que cada estudiante se cuestione a sí mismo sobre lo que asimila, lo que desemboca en un aprendizaje permanente y significativo, que relaciona el Álgebra Vectorial con situaciones de la vida real.

1.4.1.1. DISEÑO DE MATERIAL EDUCATIVO PARA LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA VECTORIAL

Cuando las dificultades de aprendizaje de Álgebra Vectorial empiezan a exponerse entre los estudiantes, resulta de vital importancia que el docente a cargo busque la mejor manera de contrarrestarlas, y es precisamente en estas instancias cuando la labor del profesor adquiere una mayor relevancia, dentro y fuera del aula, puesto que empezará a regenerar sus metodologías educativas tomando en cuenta los factores internos y externos que están malogrando su enseñanza, los inconvenientes que generen incomprensión de los temas, los obstáculos presentados, las cualidades de los alumnos que más necesitan ayuda, las complicaciones de los contenidos, el manejo de los tiempos, su habilidad inherente para idear nuevas reformas y mejoras en sus estrategias, con la finalidad de que los arquetipos propuestos trasciendan en una efectiva enseñanza y aprendizaje seguro; en otras palabras, el docente se embarca en un trayecto sistemático de *diseño del material* del que va hacer uso posteriormente. Al respecto, Prendes, Martínez & Gutiérrez (2008) manifiestan:

> Cuando hablamos de diseñar estamos haciendo referencia a ese proceso en el que tomamos decisiones en relación con las características que va a tener el producto, es decir, es un proceso situado entre la *decisión de hacer algo*, en este caso un material para la enseñanza, y el *producto* ya terminado. En el proceso de diseño se van resolviendo problemas intentando darles las soluciones más sencillas y apropiadas teniendo en cuenta, entre otros, las características de los potenciales usuarios y los objetivos que guían el proceso. (p. 82)

En el caso de este trabajo, las propuestas de diseño pueden encontrarse dosificados en la construcción de material concreto; para ello, la necesidad de los docentes de empaparse totalmente sobre la creación, construcción, funcionamiento y aplicación de estos recursos para emplearlos en sus respectivas áreas alcanza una magnitud colosal para evitar caer nuevamente en la neutralización de los procedimientos didácticos, todo esto con el objeto de enfrentar retos que perjudiquen la calidad de la educación.

La elaboración de material de este tipo exterioriza una correcta implementación de la modalidad educativa cognitivista debido a que, como señala Brandão (2015), se pone de manifiesto tres aspectos fundamentales en la impartición de contenidos matemáticos: *funcional*, ya que se aplica a la resolución de problemas adaptados a la realidad, además de servir como base para estudios posteriores; *integrador*, puesto que supone una relación entre los conocimientos previos de los estudiantes y los que está por adquirir; y *propedéutica*, debido a que posibilita aprendizajes más avanzados, así como también la correlación de saberes de todo ámbito y su transmisión a tareas prácticas. En consecuencia, es así como se llega a converger en las aspiraciones propias de la educación la cual, al ser una construcción conjunta, propone recursos fundamentados "en el diálogo, en la cooperación, en la contextualización e interdisciplinariedad, en el aprendizaje significativo y la relación entre la enseñanza secundaria y la educación profesional". (Brandão, 2015)

La relevancia del uso de distintas estrategias, metodologías, recursos, técnicas, etc., que reivindica esencialmente la organización de los procesos de enseñanza y aprendizaje de Álgebra Vectorial, confluye en la obligación de formar un estudiante inteligente, motivado, competente, hábil para resolver problemas, entre otras cualidades. Cuando al educando se le presentan escenarios de desarrollo intelectual y académico en los que se sienta más cómodo y adaptado, estará en absoluta libertad de desenvolverse con mayor dinamismo y vivacidad, será capaz de fortalecer sus esquemas intuitivos, su cognición, su pensamiento, su razonamiento, pues se le estará introduciendo en un contexto de continuo progreso a partir de las herramientas que se le ofrece hoy en día y sus condiciones de uso que son, sobre todo, provechoso para cumplir sus logros de aprendizaje, incluidos aquellos en el campo del Álgebra Vectorial. Asimismo, en el terreno pedagógico, el alumno estará en posibilidad de organizarse a sí mismo junto con los conocimientos adquiridos y por adquirir, llegará a relacionar conceptos vectoriales con los procesos y las estructuras, estará preparado para reflexionar sobre lo que aprende y a aplicarlo en nuevos aprendizajes, es decir, logrará forjarse como un ser humano con el potencial de seguir creciendo en total libertad y autonomía. Y así lo explican Clements y Battista (1992) “los profesores no pueden esperar que los estudiantes aprendan por imitación o mediante claras explicaciones, sino a partir de lo que han encontrado por ellos mismos” (citado por Camargo, 2011); esto significa que a través del descubrimiento, la exploración y la experimentación conseguirán conocer el mundo que les rodea y comprenderlo, de la manera en la que perciba más independencia.

Como lo indican Rodriguez & Ricardo (2007):

> En nuestra opinión, preparar al hombre para la vida significa mostrarle desde el aula los vínculos existentes entre las ramas del saber y el mundo que lo rodea para hacerlo partícipe [de él]. Esta es una forma de contribuir a que el aprendizaje se haga efectivo, es decir, que el proceso docente educativo se vea como un todo, donde sus componentes –lo académico, lo laboral y lo investigativo- tienen una integración sistémica. (p. 423)

La práctica educativa está en constante evolución; es como una larga autopista cuyas rutas emergentes, más pequeñas y sinuosas (enseñanza), demandan llegar a un solo destino (aprendizaje), fortaleciendo al estudiante no sólo en su rol de aprendiz, sino también en el de ser humano.

1.5. DESARROLLO DE LA EDUCACIÓN DENTRO DEL CONTEXTO RURAL

La realidad de las instituciones educativas en las zonas rurales "tiene como soporte el medio y la cultura rural, con una estructura pedagógico-didáctica basada en la heterogeneidad y multinivelaridad de grupos de distintas edades, capacidades, competencias curriculares y niveles de escolarización, y con una estructura organizativa y administrativa singular, adaptada a las características y necesidades inherentes al contexto donde se encuentra ubicada" (Boix, citado por Sepúlveda & Gallardo, 2011) y, ante esta enunciación, la escuela rural puede presentar varias peculiaridades en cuanto a sus docentes y/o a sus estudiantes, esto es, a su educación en general.

Primeramente resulta imprescindible mencionar que los planteles de las zonas rurales[8] se caracterizan por adecuarse a su contexto y contar con su propio sistema organizativo y administrativo dado que el número de alumnos que van a la escuela no es excedente; es por esto que llegan a ser comunidades educativas pequeñas, donde existe mucha convivencia y familiaridad entre sus habitantes.

Como lo denota Luis López (2006) en la educación rural constantemente se han percibido ciertos factores que han limitado el enaltecimiento de la calidad educativa de ese sector, entre los que se destacan: el déficit de atención educativa, la deserción del sistema educativo[9], la situación

[8] Entendiéndose como zonas rurales aquellas relativas a los campos, alejados de la población urbana, lugares habitualmente de difícil acceso, cuyas familias se dedican a trabajos relacionados con la agricultura o la ganadería, sectores donde están muy acoplados a la naturaleza, con edificaciones pequeñas, poca gente y, en su mayoría, de bajos recursos económicos. Sin embargo, en la actualidad, muchas de estas áreas han intentado exteriorizarse de tal manera que, poco a poco, ya pueden llegar a formar parte de la urbanización gracias a los medios de comunicación, mayor encadenamiento vial y de transporte. Asimismo, la educación también cuenta con sus propias disposiciones; por ello, es viable encontrar que en los colegios hayan especializaciones agronómicas, o más bien, ese tipo de especializaciones donde los adolescentes estudien materias que puedan aplicar a su entorno. (López, 2006)

[9] En varias ocasiones, los estudiantes, al terminar la educación primaria, deciden abandonar sus estudios para incursionar en las labores del campo. Algunos, con más edad, resuelven viajar a las ciudades para ocuparse de empleos no calificados.

de los docentes[10], precariedad de dotación y acceso a servicios que puedan mejorar la calidad de la educación (como biblioteca o laboratorios, por ejemplo), monotonía y descontextualización de metodologías de enseñanza, entre otros.

Para evitar acarrear con estas problemáticas, se considera necesario diseñar una planificación educativa que sea capaz de transformar y mejorar los puntos negativos de la escuela rural; que permita optimizar el trabajo de los directivos que toman las riendas de ciertas instituciones para lograr, así, la calidad en la educación que tanto se pretende, inclusive en las zonas donde se considera mayor dificultad de una buena práctica docente.

La búsqueda de la calidad de la educación pretende mantenerse innovando en cuanto a la aplicación de nuevas metodologías y estrategias que permitan alcanzar, de forma efectiva y significativa, los conocimientos que los maestros imparten en sus horas de clase. Desde esta perspectiva, la educación en las zonas rurales también se ha unido a la implementación de recursos novedosos que faciliten el proceso educativo –incluso si la aplicación de estos recursos se considera más un problema que el aprendizaje y la comprensión mismos-, ya que se pretende formar un conjunto de escolaridad donde predomine la igualdad y la equidad sin importar si las instituciones son rurales o urbanas, para demostrar en definitiva que el fin mismo de la educación es brindar la misma calidad y calidez educativa a todos los sectores del país.

1.5.1. USO DE LAS TIC EN ZONAS RURALES

En la actualidad, el gobierno se ha encargado de dotar con equipamiento tecnológico a varias de las instituciones educativas de zonas rurales, por lo que los directivos de estos planteles hacen

[10] Una gran cantidad de docentes que se encargan de las escuelas rurales muchas veces son novatos, con poca o nada de experiencia, y esto puede generar escasa atención por las necesidades de estos estudiantes lo cual propaga desmotivación, aislamiento y políticas negativas de trabajo.

parte de sus planificaciones anuales, ofrecer la capacitación necesaria para que los docentes hagan uso de estos nuevos recursos.

La peculiaridad de establecer TIC en las zonas rurales, tiene mucho que ver con el factor motivación de los alumnos quienes, al contar con aparatos que no están a su entera disposición en su vida fuera de la escuela, llega a captar su completa atención por conocer, palpar, entretenerse y aprender, sobre todo, gracias a su uso. Por otro lado, las TIC dejan abierta la posibilidad de perfeccionar la labor del docente quien va a necesitar de capacitación continua –de forma individual o grupal-, de esta manera, el profesor demostrará que aún se mantiene en su papel de aprendiz lo que lleva consiga beneficios propios y colectivos.

1.5.2. USO DE MATERIAL CONCRETO EN ZONAS RURALES

De igual manera, una nueva metodología de enseñanza, moderna, provechosa y sencilla, es la utilización de material concreto en las instituciones educativas rurales. Su construcción y posterior aplicación engloba el manejo de todas las capacidades, habilidades, creatividad y tácticas tanto del profesor como de sus alumnos. Al hacer uso del material didáctico, no solamente están revelando su aprendizaje al transformar el contenido abstracto en concreto, sino que además pueden percatarse de la utilidad de estos conocimientos pues lo relacionan con sucesos reales. Asimismo, este material, estará desarrollado con elementos de su propio contexto rural lo que significará que estarán en capacidad de construir sus propios materiales cuando lo necesiten.

Capítulo II

2. METODOLOGÍA Y RESULTADOS

En este capítulo se detallará cómo se ha logrado obtener la información necesaria para corroborar la existencia del problema, así como también lo correspondiente a su posible mejora (la propuesta como tal). Para ello, se empezará por mencionar el proceso que se ha seguido hasta obtener los datos estadísticos buscados (los cuales se presentarán en tablas, gráficas, figuras, etc.) mismos que serán interpretados de manera que logren darle un mayor significado a lo que se propone mejorar, partiendo, así, con las bases cruciales del desarrollo del trabajo.

Teniendo esto último en cuenta, se considera que el objetivo del trabajo como tal es elaborar material didáctico (tanto como recursos concretos, maquetas, etc.) que puede funcionar con más versatilidad para la enseñanza y aprendizaje en las zonas rurales, desplazando el uso de las TIC que en estos sectores resultan un tanto escasos o improbables de aplicar con absoluta facilidad – recordando, además, que estas tecnologías son casi indispensables para la impartición de clases de los temas correspondientes a Álgebra Vectorial en Tercer nivel de Bachillerato dada su abstracción y difícil comprensión–; por lo que el material propuesto puede funcionar como recurso facultativo con iguales o mejores características.

2.1. METODOLOGÍA

El capítulo inicia con la tabulación de las encuestas realizadas a los estudiantes, acompañada de cortas explicaciones para cada pregunta (o grupo de preguntas, según la similitud de éstas); con ellas se busca que se dote de información bastante general, sobre el uso de las TIC tanto en el ámbito educativo como en la vida diaria, lo que poseen y lo que no, y su fácil o difícil adquisición e implementación; así como también su pensamiento ante el uso de material concreto para las clases de Álgebra Vectorial. Las preguntas que se desplegaron de estos cuestionarios fueron dirigidas a los actores del proceso educativo para descubrir si en las zonas rurales se avala la existencia del problema; así como también la efectividad, confianza, alcance y seguridad de la ejecución de la solución que se propone.

Debido a que se trata de una Institución Educativa con una demanda de alumnos de bachillerato asequible en su totalidad, no fue necesario sacar una muestra debido a que las encuestas se emitieron en forma colectiva y sin mucho consumo de tiempo; únicamente se requirió la presencia de los alumnos, unos pocos minutos y su disposición. Con el respectivo permiso de las autoridades de la institución, se visitaron los cuatro paralelos de Tercer Nivel de Bachillerato del colegio, los cuales corresponden a las especialidades de Ciencias (2) y Mecánica (2), contando con un total de 99 alumnos.

Por otro lado, para una realización más completa y favorable de este trabajo, se consideró conveniente no solamente aplicar la encuesta a los docentes del área de Matemáticas y Física de la institución, sino además llevar a cabo una pequeña entrevista (inmediatamente después de que hayan respondido la encuesta) con ellos, con el propósito de conseguir información aún más detallada sobre las TIC y el material didáctico para las clases de Álgebra Vectorial.

Las preguntas de esta entrevista pretenden adquirir testimonio individualizado del proceso de enseñanza-aprendizaje de Álgebra Vectorial en Tercero de Bachillerato mediante el uso de recursos didácticos, empezando desde la perspectiva de un docente quien, en su experiencia, es capaz de explicar lo que ha percibido en cada una de sus clases, reconociendo: semejanzas y diferencias encontradas en la enseñanza con y sin recursos pedagógicos; las ventajas y desventajas de ambos; la facilidad o complejidad de la implementación de material concreto; la facilidad o complejidad de la implementación de TIC en instituciones de las zonas rurales, entre otros factores. Tras estos puntos, el docente manifiesta su creencia sobre el potencial de cada recurso, cuál puede ser más útil para la buena enseñanza o cuál es mejor para el alumno.

Una vez considerado estas disposiciones, a continuación se visualizarán los datos informativos requeridos, sintetizados, analizados y organizados (cada uno con su tabla o gráfica respectiva) de tal forma que genere un entendimiento correcto de lo que se busca exponer.

2.2. ENCUESTAS A ESTUDIANTES. TABULACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

a) *¿Cuál o cuáles de estos recursos tecnológicos posee?*

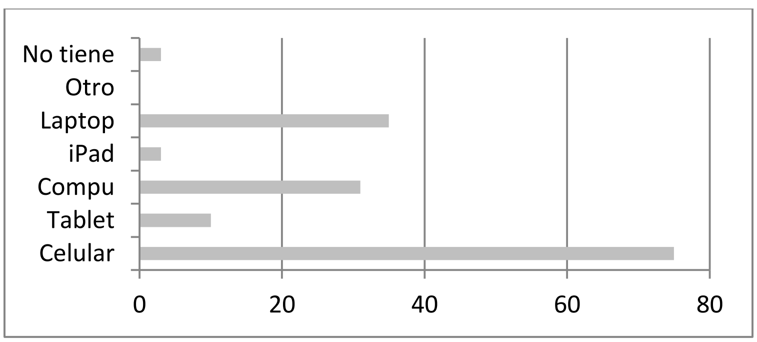


Figura 1. Tipo de recurso tecnológico que posee

b) *¿Con qué finalidad usa los recursos tecnológicos que posee?*

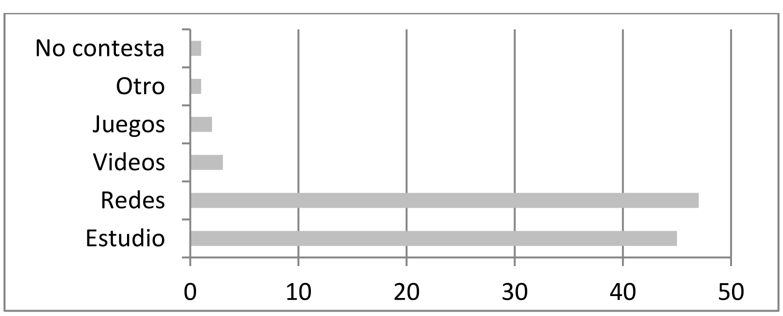


Figura 2. Finalidad de uso del recurso tecnológico

Como podemos notar en la Figura 1, la gran mayoría de los estudiantes poseen ciertos recursos tecnológicos, el celular como el primordial, seguido de la laptop y la computadora. Son sólo unos pocos que no cuentan con nada. En este caso, podemos considerar entonces que los alumnos sí tienen mecanismos que podrían facilitar y ayudarles en su estudio porque, si nos fijamos en la Figura 2, una gran porción de estudiantes utilizan los recursos que poseen para esto (estudio), pero también lo usan para su diversión (redes sociales) por lo que se tendría como una gran ventaja la posesión de las tecnologías, además de que pueden trabajar con ellas. Y, por otro lado, la frecuencia de uso de los recursos se reparte entre las opciones que se muestran en la Figura 3, en otras palabras, los estudiantes utilizan los aparatos muchas y algunas veces, y siempre (dejando una mínima cantidad para el nunca). A raíz de estos datos se deduce que los aparatos tecnológicos forman parte del diario vivir de los estudiantes y han tratado de irlos adaptando a sus vidas.

c) *¿Con qué frecuencia usa recursos tecnológicos dentro de su hogar?*

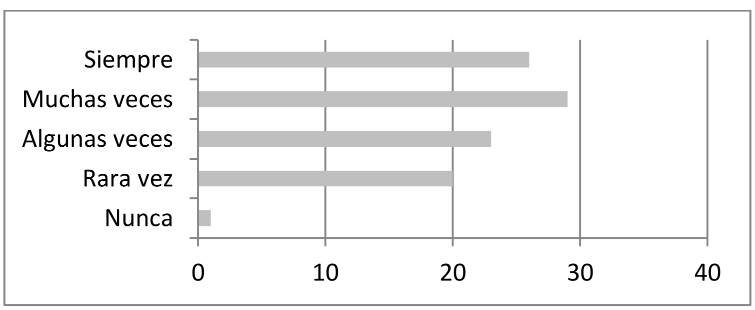


Figura 3. Frecuencia de uso del recurso tecnológico en el hogar

d) *¿Cuenta usted con acceso a internet en su vivienda?*

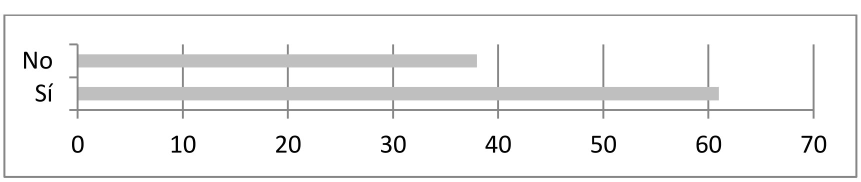


Figura 4. Acceso a internet en la vivienda

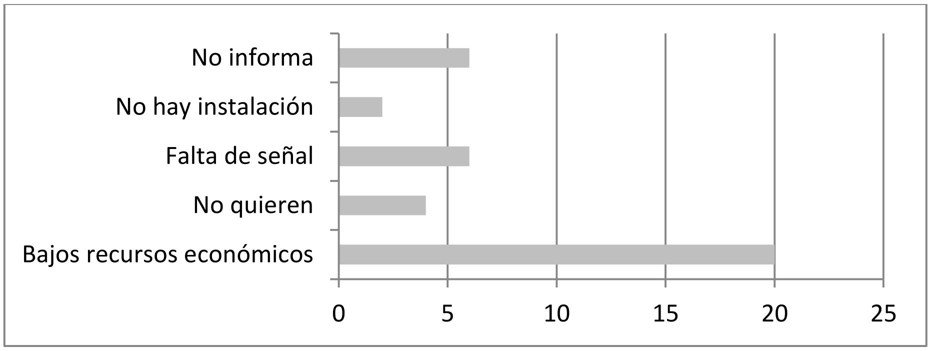


Figura 5. Principales razones por las que no cuenta con internet en la vivienda

En la Figura 4, se presenta la tabulación de los datos correspondientes a la pregunta de si los estudiantes cuentan o no con internet en sus viviendas; se puede notar entonces que aproximadamente dos tercios de los encuestados sí tienen este servicio mientras los restantes no. Tras esta información, sería importante señalar aquellos estudiantes que se encuentran desaventajados en cuanto a la posesión de internet en sus hogares que, si bien no son la mayoría, sí llegan a ser un número considerable. Como indica la Figura 5, las principales razones por las que estos estudiantes no cuentan con internet son, en primer lugar, por los bajos recursos económicos de sus familias; esto nos revela que, evidentemente, la economía de las familias de estas zonas sí influye mucho en cuanto a la adquisición de ciertas pertenencias que se consideran útiles para complementar el trabajo educativo y cotidiano de sus hijos, sobre todo cuando se busca mejorar las tecnologías y completarlas con programas o software adecuados. Por otra parte, también se presentan contrariedades relacionadas con la falta de señal o la difícil instalación, lo cual corroboraría que, para estas zonas rurales, mucha gente no puede encargar su estudio o su trabajo a la utilización de las tecnologías.

e) *¿Con qué frecuencia usa internet en su hogar?*

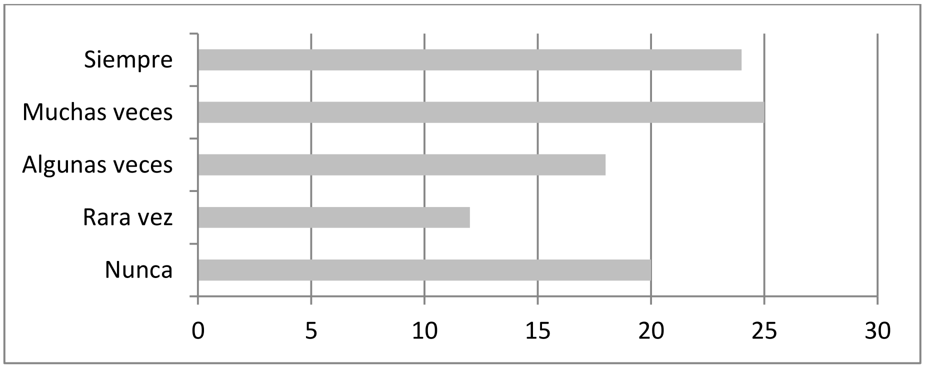


Figura 6. Frecuencia de uso de internet en el hogar

De igual manera, también se cuestionó a los estudiantes acerca de la frecuencia de uso del internet en sus hogares; como muestra la Figura 6, la información se encuentra repartida muy similarmente entre las distintas opciones y, a diferencia de los recursos tecnológicos de la pregunta 3, un gran número de encuestados se identificó con el "Nunca" como frecuencia de uso de internet, por lo que se llegaría a concluir que el internet (no en todos los casos) es una herramienta utilizada pero no primordial por lo que no se podría contar exclusivamente con ella como un factor importante de estudio. Asimismo, si tomamos en cuenta la Figura 7 que indica la intensidad de la señal de aquellos que sí tienen internet, también nos encontraríamos con una desventaja grande ya que una enorme cantidad de encuestados determina su señal como "buena" o "media", lo que no convendría para el estudio, sabiendo que los programas o software necesitan una excelente señal para ser trabajados con absoluta facilidad y eficiencia.

f) *¿Cómo describiría la intensidad de la señal de internet en su vivienda?*

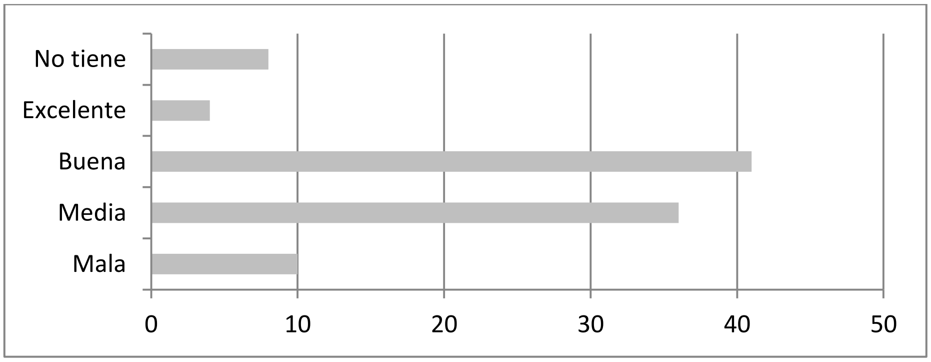


Figura 7. Intensidad de la señal en la vivienda

Tras lo que se ha visto en estos gráficos, no es cien por ciento factible trabajar con la utilización de recursos tecnológicos e internet en las viviendas de los estudiantes (entiéndase esto como tareas en línea, graficadores, deberes que requieran el uso de algún aparato o tecnológico, etc.) debido a que no todos cuentan con estas facilidades y, en lugar de significar una ayuda para la comprensión de los contenidos, resultaría una obstáculo más.

A continuación, se analizará la situación de las TIC de los estudiantes dentro de la Institución Educativa.

g) *Dentro de la institución, ¿cuenta usted con acceso libre a internet?*

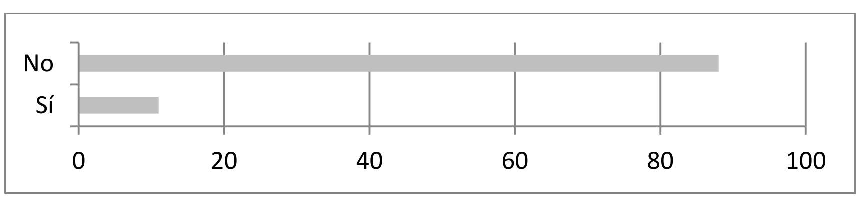


Figura 8. Acceso a internet en la institución

h) *¿Con qué frecuencia usted usa internet dentro de la institución?*

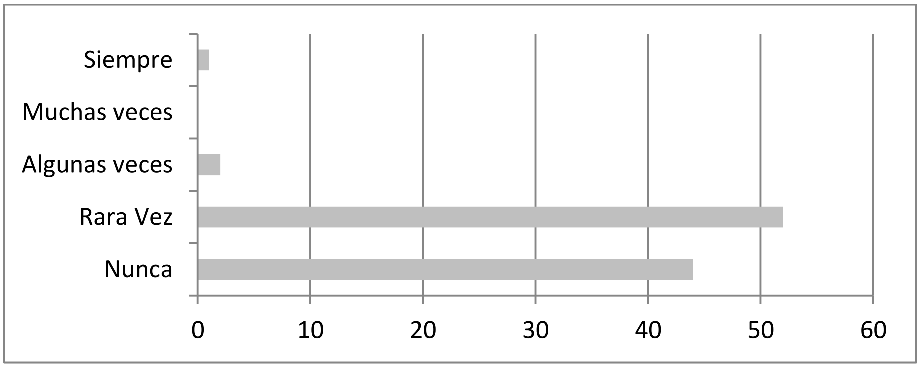


Figura 9. Frecuencia de uso de internet en la institución

Tal y como observamos en la Figura 8, más del 80% de los estudiantes no cuentan con libre acceso a internet dentro del Establecimiento por lo que, de igual forma, según la Figura 9, la frecuencia de uso fluctúa entre "rara vez" y "nunca". Analizando esta información se concluye que los estudiantes no pueden trabajar por su cuenta con los recursos tecnológicos dentro de la institución por lo que el proceso educativo se ve imposibilitado dadas las dificultades encontradas. Los pocos estudiantes que contestaron que sí disponen de internet eran debido a sus propias pertenencias, es decir, que ellos poseen planes en su celular o contratan esta clase de servicios. En este caso y según los estudiantes, se puede decir que el trabajo del docente no podría ajustarse al apoyo de este tipo de elementos, si se conoce además que la situación de ellos no es igualitaria; por este motivo, tratar de acoplarse puede resultar una labor mucho más complicada que el propio aprendizaje.

De la misma manera, como describe la Figura 10, la intensidad de la señal dentro de la Institución tampoco es la ideal puesto que los encuestados determinan la señal como "media" y "mala", teniendo solo un poco de alumnos que la describen como "buena" y ninguno como "excelente"; y así, como se dijo anteriormente, no convendría utilizarlo para el estudio dado que los software matemáticos y los graficadores requieren de una señal muy buena para que las actividades sean correctas y adecuadas.

i) *¿Cómo describiría la intensidad de la señal de internet dentro de la institución?*

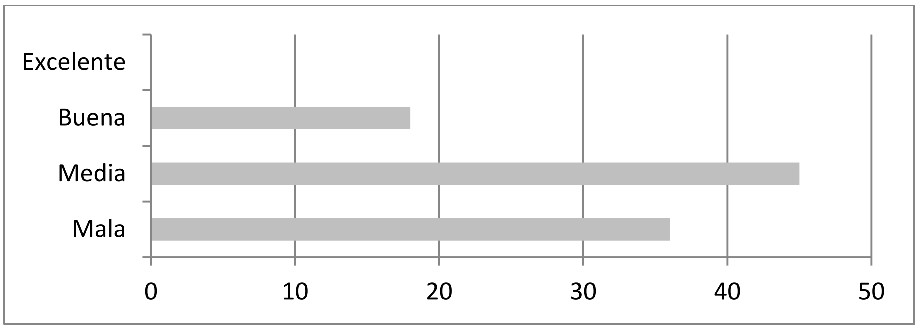


Figura 10. Intensidad de la señal en la institución

j) *¿Con qué frecuencia usted usa recursos tecnológicos dentro de la institución?*

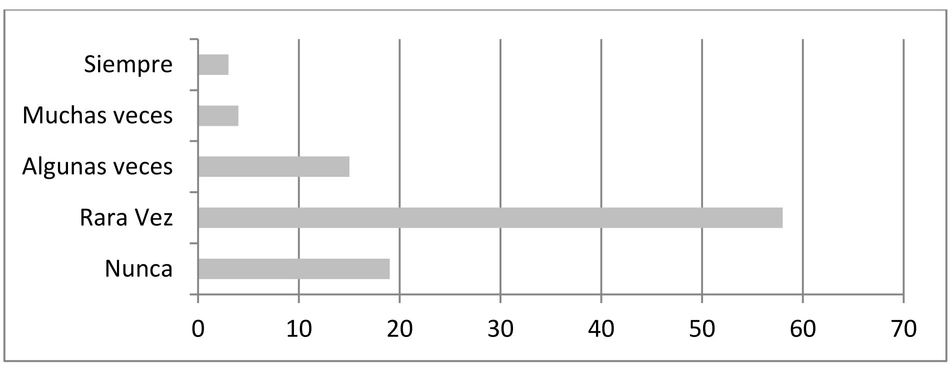


Figura 11. Frecuencia de uso de recursos tecnológicos en la institución

Por otro lado, a los estudiantes no se les permite el uso de sus propios recursos dentro del establecimiento educativo debido a que pueden llegar a distraerse con ellos en lugar de prestar atención a las clases y ésa es la razón por la que, como indica la Figura 11, "rara vez" o "nunca" es la frecuencia en la que usan sus mecanismos; y esto repercute en el proceso de educación debido a que no cuentan con el uso individual de las tecnologías para aprender. Por esta razón, el docente no puede trabajar con ellos de forma personalizada y no se considera que esto sea lo ideal, puesto que el propósito mismo de la aplicación de las TIC es que la instrucción sea exclusivo para cada estudiante ya que así se puede construir un aprendizaje significativo e incluso permitir que descubran cómo aprender por sí mismos.

k) *¿En qué grado puede usted manejar los recursos tecnológicos por su cuenta?*

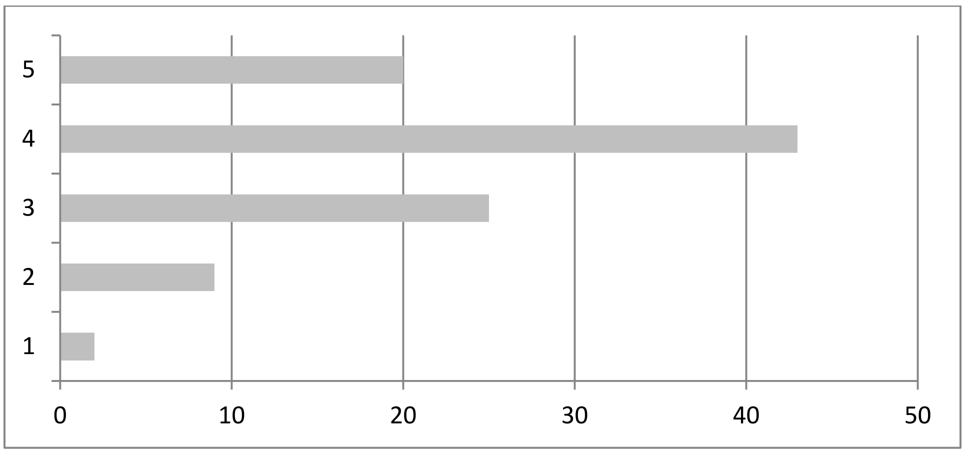


Figura 12. Manejo de los recursos tecnológicos

En este apartado, tomamos en cuenta la facilidad o dificultad que tienen los estudiantes para manejar los recursos tecnológicos por su cuenta y, tal como lo muestra la Figura 12, la mayoría de los estudiantes no tiene mucho problema para utilizar estos mecanismos, por supuesto que no lo hacen a la perfección pero podría decirse que sí se sienten cómodos con ellos. Esto es importante destacar porque, en el caso en que se requiera la implementación de las TIC para el estudio (tanto dentro como fuera de la institución), no se necesitaría demasiada capacitación puesto que ellos sabrían cómo manejar los programas matemáticos, cómo buscar nuevos software educativos, cómo implementarlo en el estudio, cómo graficar, etc., sin necesitar demasiada ayuda del docente, sino simplemente por su propia práctica.

l) *¿Cuál es su nivel de motivación frente al uso de tecnologías para el aprendizaje de Matemáticas?*

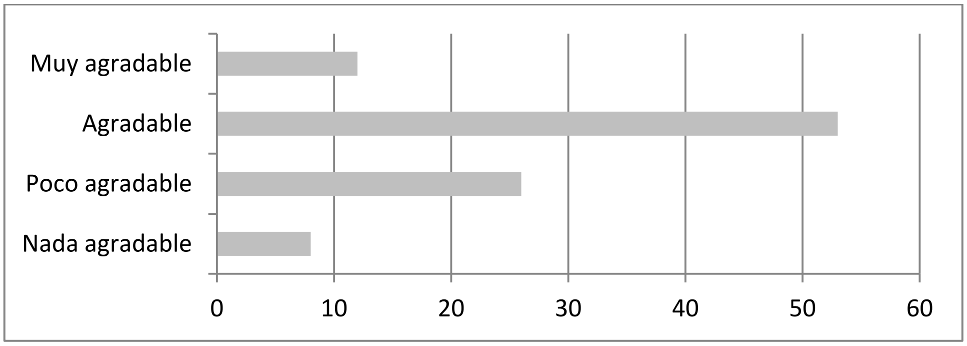


Figura 13. Motivación ante el uso de recursos tecnológicos

Como nos muestra la Figura 13, la motivación que sienten los estudiantes ante el uso de las TIC para Matemáticas varía, sin embargo, se puede encontrar que lo sienten como "agradable" la mayoría de ellos. En este caso, se comprobaría la gran utilidad de las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje puesto que es un elemento que agrada a los estudiantes dada su novedad, por lo que los estudiantes se sienten motivados ante su uso, dejando de lado su complicada implementación.

No obstante, si nos fijamos en la Figura 14, las TIC puede ayudar a facilitar la comprensión de los contenidos en un nivel medio y medio alto, como detallan los encuestados. Se concluye, entonces, que, con una buena adquisición y utilización de las tecnologías, la comprensión de Matemáticas resultaría mucho mayor sin las dificultades de las que se habla, por lo que llegaría a ser un elemento importante dentro del proceso de educación.

m) *El uso de las TIC, ¿puede facilitar su comprensión en los temas de Matemáticas?*

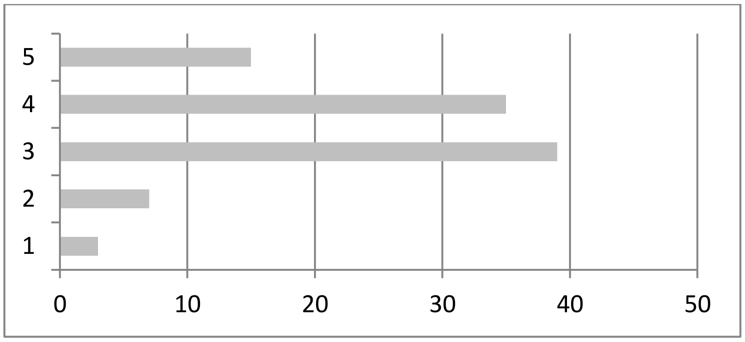


Figura 14. Facilidad de comprensión frente al uso de las TIC

A partir de esta pregunta, nos enfocaremos en lo que piensan los estudiantes frente a la implementación de material didáctico como propuesta de mejora ante las dificultades halladas con el uso de las TIC y se determinará si cuenta o no como apoyo pedagógico para el docente.

n) *¿Qué nivel de comprensión de Matemáticas cree usted que adquiere ante el uso de material didáctico?*

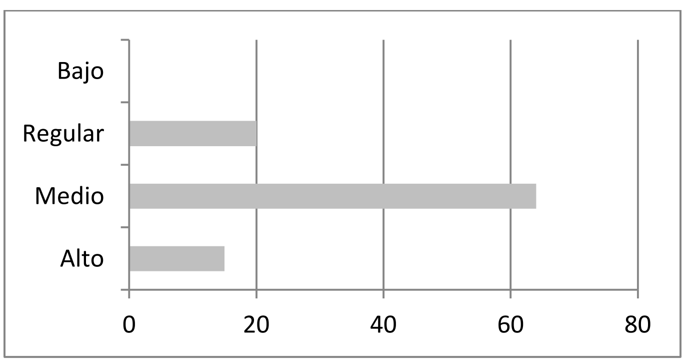


Figura 15. Nivel de comprensión ante el uso de material didáctico

Al igual que con las TIC, y según se puede observar en la Figura 15, los estudiantes ven en los recursos didácticos (maquetas o material concreto) un mecanismo pedagógico importante para sus actividades pues consideran que, en un nivel medio y medio alto, pueden posibilitar una mejor comprensión de los temas, por lo que se podría decir que la construcción de material concreto sería una muy buena alternativa para el estudio al ser más fácil del aplicar y menos costosa.

Además, si tomamos en cuenta el factor motivación, la Figura 16 nos permite descubrir que un número considerable de estudiantes se siente altamente y medianamente satisfecho ante el uso de material didáctico, por lo que se deduce que, con un buen trabajo y buena aplicación del material, los estudiantes podrían ver en él un excelente modo de mejorar sus conocimientos, partiendo del hecho de que trabajan activamente ya sea de forma individual o grupal.

o) *¿Se siente satisfecho ante el uso de material didáctico durante el proceso de aprendizaje?*

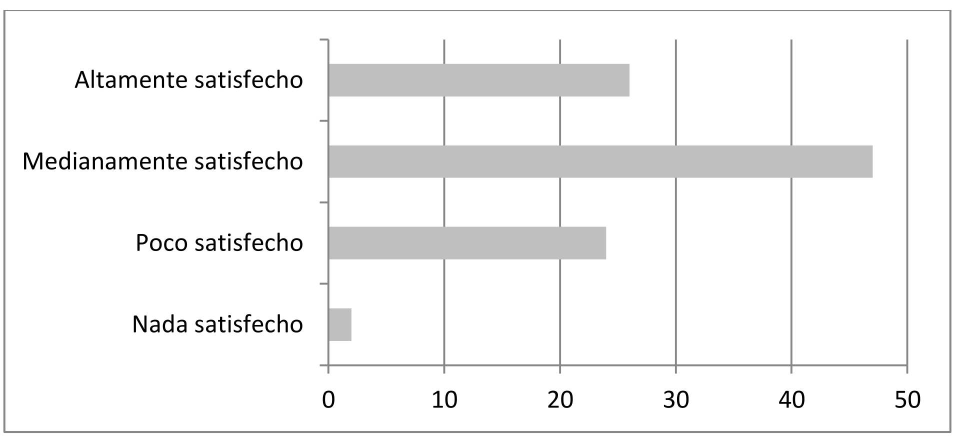


Figura 16. Satisfacción ante el uso de material didáctico

p) *¿Qué opina acerca de la implementación de material didáctico para Matemáticas?*

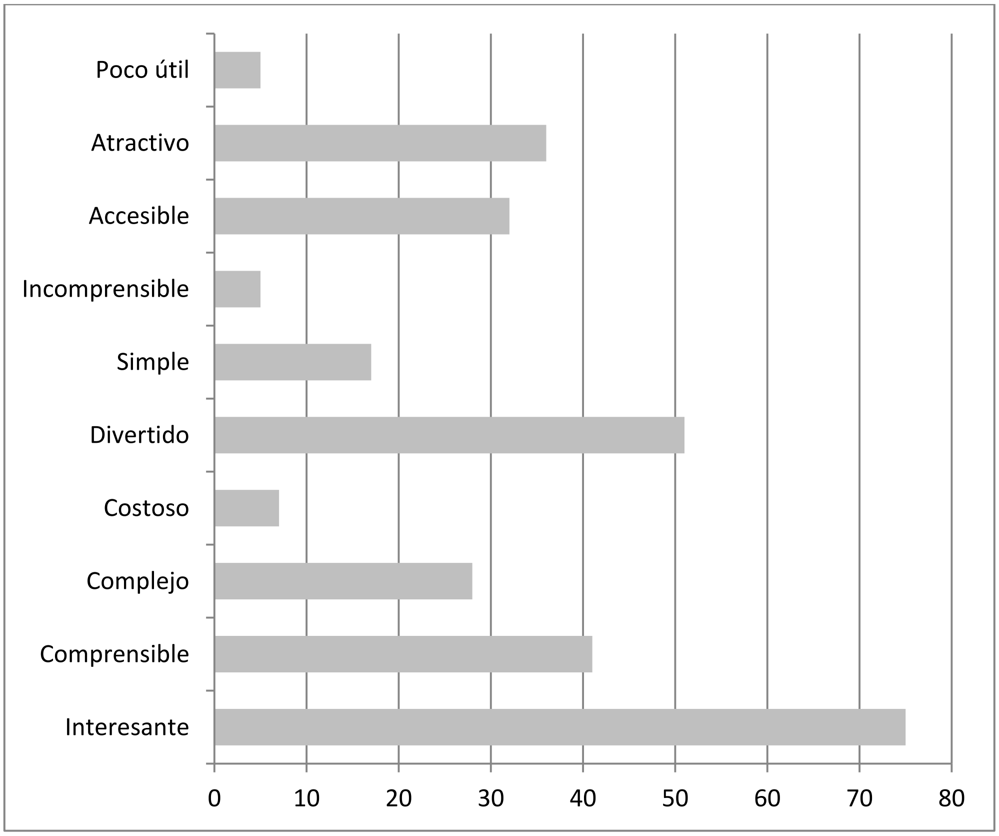


Figura 17. Características del material didáctico

Las dos siguientes preguntas de la encuesta se realizaron para conocer lo que los estudiantes piensan o sienten ante el uso de material concreto. La Figura 17 permite dictaminar las características que más se destacan del material mismo y, como se observa, los encuestados piensan que el material es atractivo, interesante, divertido y comprensible (que son las características que tienen más votos); ante esto comprobamos, nuevamente, que la implementación de material didáctico significa un gran avance para el aprendizaje de los estudiantes puesto que, la mayoría de las particularidades que ven en él, son positivas.

Asimismo, la Figura 18 nos permite especificar las principales habilidades que el estudiante piensa que desarrolla por el uso de este tipo de recurso educativo. Es así como evidenciamos que el estudiante puede involucrarse activamente en el descubrimiento de la información requerida y, así, construye su propio aprendizaje permitiendo que se desarrollen en ellos destrezas primordiales para su estudio.

q) *¿Qué habilidad cree usted que es la que más desarrolla ante el uso de material didáctico?*

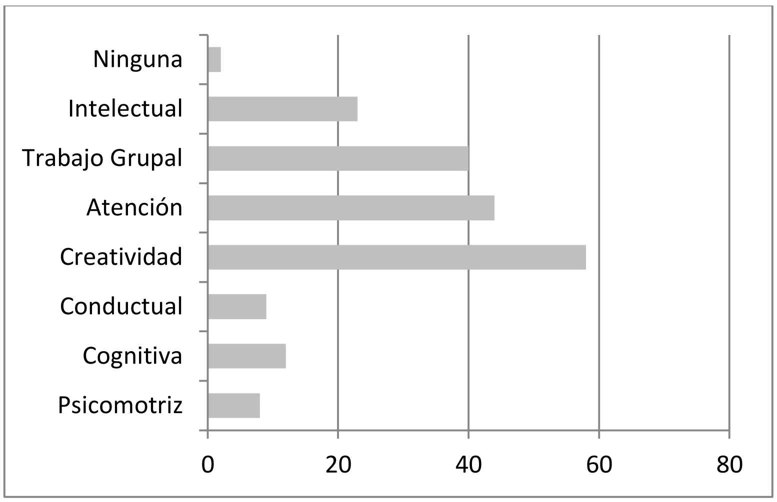


Figura 18. Habilidad a desarrollarse gracias al uso de material didáctico

r) *¿Cree que puede construir material concreto por usted mismo?*

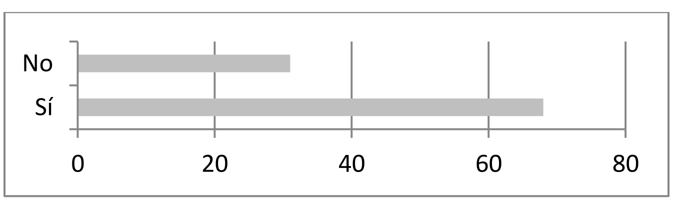


Figura 19. Facilidad de construcción de material concreto

Y, finalmente, la última pregunta de la encuesta nos ayuda a resolver si los estudiantes son capaces de crear material didáctico por sí mismos y, como se observa en la Figura 19, la gran mayoría de ellos han contestado afirmativamente. La capacidad de los alumnos en construir material tiene una relevancia muy grande debido a que por esto se conoce la viabilidad de lo que se aplica, es decir, permite reconocer el correcto manejo de la herramienta didáctica al poder elaborar más artefactos (tanto en cuestión de cantidad para el trabajo individual en clases; u otro tipo de artefactos que sirvan como complemento a lo que ya se tiene) e, incluso, para construir piezas que puedan sustituirse en el material en el caso que se pierdan o deterioren.

2.3. ENCUESTAS A DOCENTES DEL ÁREA. TABULACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

Las encuestas que se presentaron a los docentes no difieren mucho de las de los alumnos en la mayoría de interrogantes. Fueron cuatro los docentes de Matemáticas y Física que participaron en esta actividad, por tal razón, no se ha de presentar un gráfico, sino simplemente los datos correspondientes a cada pregunta.

a) *¿Cuál o cuáles de estos recursos tecnológicos posee?*

En esta pregunta se mostraron las mismas opciones que en el de los estudiantes: celular, computadora, laptop, tablet, iPad, otro(s) y no posee. Los cuatro docentes coincidieron con el celular y la computadora; además de que dos de ellos incluyeron laptop. Se considera, entonces, que los docentes sí poseen recursos con los que puedan trabajar en tareas relacionadas a la educación.

b) *¿Con qué finalidad usa los recursos tecnológicos que posee?*

Todos los docentes indicaron que la finalidad de estos recursos es para la enseñanza como tal; se incluye también que dos señalaron la opción de videos como parte del proceso educativo; y otros dos, asimismo, colocaron en su respuesta a las redes sociales.

c) *¿Con qué frecuencia usa recursos tecnológicos dentro de su hogar?*

En esta pregunta, tres de los docentes eligieron la opción "siempre", relativo a la frecuencia de uso de los recursos tecnológicos; solamente uno señaló la opción "algunas veces".

Este grupo de preguntas nos ayuda a determinar si los docentes, desde sus casas, haciendo uso de los recursos que poseen, y su creatividad, pueden preparar alguna de sus clases de una forma más elaborada y adecuada para generar mayor comprensión e interés en los estudiantes, ya que todos cuentan al menos con lo más básico (que es un celular y una computadora), lo usan con gran frecuencia y, esencialmente, tienen a la enseñanza como uno de los objetivos principales para su empleo. Entonces, se puede confirmar que, por parte de los docentes, las TIC pueden considerarse como un apoyo pedagógico externo al aula de clases; es decir, que se puede trabajar con ellas con tareas para la casa y/o el desarrollo de actividades que los docentes preparan con anticipación (como imágenes, impresiones, videos, entre otros).

d) *¿Cuenta usted con acceso a internet en su vivienda?*

Todos los docentes respondieron que sí.

e) *¿Con qué frecuencia usa internet en su hogar?*

Al igual que en la pregunta *c)*, tres docentes indicaron que utilizan siempre el internet; y solo uno de ellos eligió la opción "algunas veces".

f) *¿Cómo describiría la intensidad de la señal de internet en su vivienda?*

En este caso, tres de los docentes describieron la señal de su internet como "buena"; mientras que uno utilizó la opción "media".

Nuevamente, nos percatamos de que el internet puede funcionar como un apoyo más para el proceso educativo, pero centrándose en el docente. En otras palabras, es él quien puede apoyarse de las TIC para optimizar su trabajo; sin embargo, al contrastar con la realidad de sus estudiantes, no se considera aún un recurso indispensable dentro del aula de clases, mas puede significar una ayuda extra para el trabajo externo.

A continuación, se analizará la situación de las TIC para el docente, dentro de la Institución Educativa:

g) *Dentro de la institución, ¿cuenta usted con acceso a internet?*

Dos docentes señalaron que sí cuentan con internet dentro de la institución; sin embargo, los otros dos respondieron que no, argumentando que la calidad del internet no es la adecuada y que el acceso a éste no es libre ni sencillo.

h) *¿Con qué frecuencia usted usa internet dentro de la institución?*

La respuesta a esta pregunta fue completamente dividida ya que uno de ellos indicó que "nunca" usa el internet; otro, "rara vez"; otro, "algunas veces"; y otro, "muchas veces".

Hemos notado que, dentro de la institución, no todos los docentes deciden trabajar con internet ya que consideran que no es un recurso sencillo de utilizar dada la mala señal y el escaso acceso; y esto se evidencia en la frecuencia de uso, en la que ninguno de los docentes coincidió pues hubo respuestas muy dispersas que no reflejaban una rutina en sus labores pedagógicas. Por lo tanto, el internet no es siempre un elemento con el que se pueda trabajar sin apuros, puesto que impide el desarrollo continuo del proceso educativo, determinando también la difícil aplicación de éste para los estudiantes.

i) *¿La institución cuenta con recursos tecnológicos suficientes para el uso de los docentes?*

Tres docentes manifestaron que la institución no cuenta con los recursos suficientes para su aplicación. Sólo uno indicó que sí.

j) *¿Con qué frecuencia usted usa recursos tecnológicos dentro de la institución?*

En este caso, dos de los cuatro docentes señalaron que “rara vez” usan este tipo de recursos; otros dos que los usan “muchas veces”.

Tras estas respuestas, se deduce que los docentes, mayoritariamente, no sienten mucha afinidad hacia el uso del internet para sus clases, por los motivos que se han indicado ya; es por eso que el internet no se percibe como un instrumento de la cotidianeidad educativa. Pero, a pesar de todas estas dificultades, se observa que uno de los docentes puede encontrar diferentes formas para aplicarlo, aunque muy posiblemente utilizando sus propios medios. Es así que se puede decir que, con el tiempo, podría considerarse un recurso mucho más provechoso, siempre y cuando se encuentre solución a cada una de las desventajas que el internet presenta.

k) *¿En qué grado cree usted que está capacitado para el manejo de los recursos tecnológicos por su cuenta? (Siendo 1 muy difícil y 5 muy fácil)*

Asimismo, los docentes no coinciden totalmente en esta pregunta; para uno es un “4”; para otro es un “2”; y para los otros dos es un “3”.

Se considera muy necesario matizar esta pregunta ya que expresa la capacidad de los docentes para manejar los recursos; esto en caso de que, al obtenerse una respuesta negativa, se tenga que recurrir a la capacitación de los docentes en las Tecnologías de Información y Comunicación; sobre todo, para aprender a controlar programas matemáticos o software educativos que sean aptos tanto para ellos como para los estudiantes. Evidentemente, se podría señalar que no todos los docentes se encuentran lo suficientemente capacitados, ya que sus respuestas afirman que el control que tienen sobre las TIC no es el correcto.

l) *¿Qué tipo de recursos o software educativo conoce para impartir sus clases?*

Ésta fue una pregunta abierta, por lo que los docentes podían escribir todos aquellos programas que conocían: tres de ellos coincidieron todos con *Geogebra* al ser el programa matemático más conocido en el medio educativo. Otros apuntaron programas como *Desmos* o *Autocad*. Algunos igualmente señalaron ciertas páginas web como *Vitutor*, *Fisicolab*, *Laboratorio Virtual de Física*, etc.; así como también *Youtube*, simuladores, entre otros.

Muchos de estos programas son los más conocidos y sencillos, pero no son los únicos; es así que se considera que, con una investigación más exhaustiva, se podrían conocer muchos más programas en línea, programas de computadora, páginas web, o distintos software que engloben las enseñanzas y faciliten su trabajo; sin embargo, su poco manejo de las TIC y del internet sea lo que probablemente les limite a esta búsqueda de elementos educativos.

m) *¿En qué grado considera que el uso de las TIC puede facilitar la enseñanza de Álgebra Vectorial?*

De las alternativas presentadas, dos docentes creen que el uso de las TIC para esta asignatura “es indispensable” por lo que señalaron dicha opción; mientras tanto, otros dos docentes creen que facilita o “sirve sólo para ciertos temas”.

De estas respuestas se puede decir que el uso de las TIC para Álgebra Vectorial sirve, quizás en ciertos temas más que en otros; pero indudablemente es una herramienta válida y positiva en la práctica de la asignatura; y no únicamente porque facilita la explicación, sino porque también mejora la comprensión.

A partir de esta pregunta, nos enfocaremos en lo que piensan los docentes frente a la implementación de material didáctico como propuesta de mejora ante las dificultades halladas con el uso de las TIC y se determinará si cuenta o no como apoyo pedagógico para sus clases.

n) *¿Qué tipo de recursos didácticos usa para impartir sus clases?*

A elección del docente estaban las alternativas: tecnológico, concreto, otro(s), todos los anteriores y ninguno. Dos docentes indicaron que lo que más usan son los concretos, y los otros dos establecieron que usan todo tipo de recursos.

o) *Para usted, ¿en qué nivel el uso de recursos didácticos facilita la comprensión de la asignatura por parte de los estudiantes? (Siendo 1 lo más bajo y 5 lo más alto)*

Los docentes creen que el uso de material didáctico puede facilitar en lo más alto la comprensión de la asignatura por parte de los alumnos; sólo uno de los docentes considera que el material concreto puede como no puede ayudar en el proceso al señalar la opción 3.

p) *¿Qué piensa sobre el uso de material didáctico para las clases de Álgebra Vectorial?*

Ésta también se desarrolló como una pregunta abierta con las que los docentes pudieran expresar los motivos por los que consideran beneficioso –o no– el uso de material concreto. Muchos concuerdan en que este tipo de material mejora o facilita la comprensión y el aprendizaje, despierta el interés en los alumnos, permite observar sucesos de una forma más real, captan: movimientos, formas y demás puntos que a simple vista son más complicados de percibir. En otras palabras, los maestros consideran muy beneficioso el uso de algún tipo de material; siendo, para ellos, el más correcto aquel que cuente con menos desventajas.

Se puede decir, ante esto, que los docentes intentan apoyarse de algún tipo de recurso para impartir sus clases; no solamente de material didáctico, sino también del tecnológico y de otros tipos. Entonces, el hecho de que ellos estén siempre a la vanguardia, contando con algunas nuevas herramientas que conviertan las clases en algo más divertido y efectivo para los estudiantes, hace que el pensamiento de utilizar material didáctico sea una prioridad, sin importar el tipo de recurso.

q) *¿El material que usted usa lo brinda la institución?*

Para este cuestionamiento, se brindaron las opciones de “sí”, “algunas veces” y “no”. Tres docentes argumentaron que “algunas veces”; mientras que uno dijo que “no”.

r) *¿El material que usted usa lo construyó por su propia cuenta?*

Asimismo, al igual que la pregunta anterior, se brindaron las opciones de “sí”, “algunas veces” y “no”; pero esta vez, tres docentes argumentaron que “sí”; mientras que uno dijo que “algunas veces”. Las respuestas de estas dos preguntas mencionan un asunto que no se puede dejar pasar, la facultad de los docentes a conseguir material didáctico adecuado. Si bien, el uso de las TIC cuenta con sus limitantes que el material concreto bien puede cubrir, este último también cuenta con ciertas desventajas entre las que sobresale la consecución de los materiales. Las instituciones educativas, sobre todo las de las zonas rurales, no siempre poseen las herramientas necesarias para brindarlas al maestro, por lo que éste busca distintas alternativas. Basándonos en lo que respondieron, la Institución no siempre ayuda con lo que necesitan, por lo que ellos han solucionado estas dificultades construyendo su propio material. Justamente se ha podido deducir, así, que los docentes pueden ser absolutamente capaces de elaborar recursos aptos haciendo uso de sus habilidades y conocimientos.

s) *¿Qué habilidad cree usted que es la que más desarrolla el estudiante con el uso de material didáctico?*

De todas las habilidades presentadas, las escogidas fueron: creatividad, habilidad intelectual, trabajo grupal, habilidad psicomotriz, habilidad cognitiva y atención. Los docentes relacionan la aplicación del material didáctico al desarrollo de estas habilidades para los estudiantes, las cuales, como se ve, son primordiales en el proceso de enseñanza-aprendizaje; por tal razón, desde su perspectiva, el uso del material conviene en gran medida para el mejoramiento de las habilidades del alumno y, por consiguiente, el mejoramiento de su estudio.

t) *¿Cuáles son las principales ventajas que presenta el uso de material concreto?*

De todas las opciones presentadas, los docentes coincidieron en que las principales ventajas del material didáctico son: mejorar la abstracción y mejorar la comprensión, añadiendo en uno de ellos, inclusive, que despierta el interés.

u) *Según su criterio ¿cuáles son las principales limitantes del uso de material concreto?*

De la misma forma, se presentaron ciertas opciones como limitantes del material concreto, de las cuales los docentes eligieron: tiempo, difícil adaptación y falta de material.

Estas respuestas sólo afirman lo que se ha venido exponiendo a lo largo de este trabajo, deduciendo que tanto como existen ventajas también se encuentran sus limitantes. El material concreto ayuda mucho a mejorar ciertas habilidades de los estudiantes, tanto como para trabajo individual como grupal; para dentro y fuera del aula; para esta asignatura y para muchas otras más, destacando así su cualidad de interdisciplinar; no obstante, para su aplicación, se debe buscar ciertas soluciones a factores que, de alguna u otra manera, significan un obstáculo, pero que, a diferencia de las TIC, son más sencillas de resolver, como por ejemplo: organizar ciertas horas clase para usar el material y no desperdiciar demasiado tiempo; usar la creatividad para adaptar actividades fáciles pero que engloben los temas en cuestión; así como también, trabajar en materiales –o en su búsqueda– capaces de generar mayor compromiso en los estudiantes, sin importar la magnitud o calidad de éstos puesto que, incluso un pequeño pedazo de papel, puede servir de mucho si es usado de la manera correcta.

2.4. ENTREVISTAS A LOS DOCENTES DEL ÁREA. ANÁLISIS DE INFORMACIÓN

A continuación de la encuesta que contestaron los docentes, se procedió a realizarles algunas preguntas más definidas para reiterar su pensamiento y que nos permita identificar lo más factible o lo más idóneo en el aula de clases. Para esta actividad, se obtuvo el testimonio de tres docentes quienes, desde su posición, supieron declarar lo que piensan en cuanto al desenvolvimiento de las clases de Álgebra Vectorial, qué recurso creen que es más necesario para efectuar correctamente una clase de esta asignatura, cuál es el más importante según su postura, las TIC o el material concreto, por cuál se decantarían ellos, advirtiendo su contexto.

La primera docente manifestó que la aplicación de las TIC no se ejecuta tanto en el aula de clases o para hacerla parte de la asignatura, sino más bien lo utilizan como capacitación para los estudiantes y para desarrollar simulacros de pruebas para el examen Ser Bachiller debido a que los estudiantes en Tercero de Bachillerato se enfocan más en esta situación. Por otro lado, las TIC también están presentes en la visualización de videos que tampoco se relacionan a la materia, sino más bien son como agentes de motivación para antes o después de las clases. Asimismo, declaró que el uso de material concreto no se limita sólo a los recursos elaborados o a las herramientas construidas, sino es un sinnúmero de elementos que pueden ser de mucha ayuda, desde: escuadras, juego geométrico, calculadora, hasta los recursos concretos elaborados con distintos materiales y que pueden acoplarse a varios temas.

El segundo docente expresó que ambos recursos, los tecnológicos y los concretos, son de mucha ayuda y que lo ideal sería llegar a enlazarlos para formar un todo más significativo y viable. Aclaró que los recursos formados por material concreto son prácticamente indispensables ya que refuerzan los contenidos y permiten que los alumnos afiancen sus conocimientos; sin embargo, indicó que los recursos tecnológicos son más exactos y más fáciles de utilizar y transportar. Consecuentemente, y según el contexto en el que se desarrollan en la institución, aseguró que es mucho más práctico utilizar material concreto antes que las TIC, argumentando además que los alumnos tienden a motivarse con piezas construidas y novedosas.

Y, finalmente, la última docente reveló que, según su opinión, ambos recursos eran igual de importantes, puesto que impulsan las habilidades en determinados ámbitos. Ella afirmó que utilizaría mucho las TIC si ella y los alumnos contaran con el internet adecuado ya que para ella es más fácil. Por otro lado, explicó que le gusta el material concreto porque son elementos útiles y necesarios para el trabajo en el Laboratorio, ya sea para actividades en grupos o en forma individual; para ella, también, es importante el material concreto puesto que refleja el trabajo activo y de descubrimiento de los alumnos ya que se les puede mandar a hacer a ellos mismos los materiales necesarios.

2.5. CONCLUSIÓN

En conclusión, y basado en la información otorgada por docentes y estudiantes, la aplicación de las TIC en su contexto rural significa una alternativa que desencadena muchas limitantes que difícilmente pueden resolverse, más allá de todas las ventajas que ésta pueda presentar. Por ello, se ha verificado que el uso de material concreto para las clases de Álgebra Vectorial representa una elección más óptima, más precisa, más apropiada que, de igual manera, repercute en las mentes de los alumnos al generar interés, mayor desenvolvimiento de cualidades, el descubrimiento de contenidos y habilidades, y mejora en la comprensión de la asignatura; tomando en cuenta que sus restricciones son más simples de solucionar. Es así que la propuesta que se plantea ante esta situación, misma que pretende mejorar varias de las problemáticas encontradas, se encamina hacia la elaboración de material concreto acoplado a la realidad de los estudiantes de este establecimiento educativo del área rural; un material sintetizado, simple y, a la vez, práctico; procurando solventar todos los requerimientos asociados al proceso de enseñanza-aprendizaje, que lleven a los docentes a desenvolverse de forma sobresaliente en el aula y que sus alumnos logren un estudio valioso, que les sea de utilidad para otros campos y que realcen su afán de aprender en forma divertida, didáctica y significativa.

Capítulo III

3. PROPUESTA

3.1. INTRODUCCIÓN

Como se ha venido extendiendo a lo largo de todo el documento, la importancia del uso del material didáctico para la enseñanza-aprendizaje del Álgebra Vectorial adquiere mayor significado tras conocer todas las ventajas y adversidades dentro del contexto educativo que tanto preocupan a los protagonistas del proceso, quienes, a más de esto, siempre están en la búsqueda de mejoras que faciliten sus respectivas labores.

La propuesta que se ha planteado en esta oportunidad está determinada tanto por factores que no están explícitamente dentro de la actividad educativa pero que influyen a gran escala en la misma, así como por aquellos cien por ciento relacionados a la educación. Algunos de estos factores se describen así:

- Medio en el que se encuentra la institución en la que se trabaja la propuesta, que en este caso es el medio rural.
- Situación socioeconómica de los estudiantes.
- Edad y año escolar de los alumnos, en este caso Tercero de Bachillerato.
- Desventajas de otro tipo de recursos (como los tecnológicos) comparados con la del material didáctico propuesto para este tema.
- Es un material que presenta mayor facilidad para ser sustituido en caso de pérdida o daño.

- El material funciona como apoyo externo a los contenidos del texto del estudiante de Matemáticas para Tercero de Bachillerato.

Lo que se indicó anteriormente puede considerarse como algunas de las cualidades más destacadas del material didáctico que se propone, lo que supuso las prerrogativas primordiales para elegirlo como propuesta o posible mejora de la problemática.

3.2. ESTRUCTURA DE LA PROPUESTA

La propuesta final está conformada por un set de material concreto formado por 5 piezas, su correspondiente manual de uso y un texto de actividades realizadas con el material.

3.2.1. MANUAL DE USO

El manual de uso es un pequeño texto dirigido a los docentes y alumnos en el que se muestra muy detalladamente las piezas del set, sus gráficos, su explicación específica y demás contenidos como: descripción, funcionamiento, finalidad y aplicación. El manual que se ha elaborado cuenta, en primer lugar, con una introducción que facilitará la comprensión y manejo del mismo, para dar paso luego a la visualización de cada pieza o elemento con el que se trabajará. Se puede mencionar que no se incluyeron actividades para ejemplificar la aplicación de cada pieza debido a que ya forman parte del texto de actividades que se ha creado con ese fin mismo.

3.2.2. TEXTO DE ACTIVIDADES

Este texto de actividades, a modo de guía didáctica, es un pequeño compendio de varias tareas de enseñanza-aprendizaje a elaborarse dentro del aula de clases. Esta obra recrea y explica diferentes alternativas para ser trabajadas con el material concreto según el tema en cuestión. Los temas que se trabajan corresponden a los contenidos del Álgebra Vectorial obtenidos del texto del estudiante de Matemáticas de Tercero de Bachillerato que entrega el Ministerio de

Educación; cabe mencionar que, en estos textos, el estudio del Álgebra Vectorial corresponde a la unidad de Geometría.

El texto de actividades elaborado cuenta, en primer lugar, con una pequeña presentación que da inicio a las actividades. Se notará que cada tema está separado, es decir, cada uno mostrado con un color diferente y el título respectivo; también se hallará el objetivo de dicho tema y, seguidamente, los subtemas con los que se trabajará. Para cada subtema se proponen diferentes tareas para el docente, que pueden o no contar con el uso del material; cada tarea está enfocada para explicar muy estrictamente los pasos a seguir para empezar y desarrollar la clase, incluso calculando la posible duración de cada actividad. De igual manera, todo este proceso viene acompañado por imágenes del material que indican cómo proceder ante cada tarea; tras haberlas desarrollado, se encontrarán unos cuadros que sobresalen de los demás; éstos corresponden a definiciones o expresiones matemáticas importantes que deben ser tomadas en cuenta por el docente y los alumnos. Algunos de los subtemas requieren ser reforzados con el uso de ejemplos, por lo que también se encontrarán resueltos algunos de ellos; además, se diferenciará un apartado denominado “Actividades” que corresponde a la resolución de los ejercicios propuestos en el texto de los alumnos, y uno llamado “Actividades del estudiante” el cual es una serie de preguntas previas enviadas a los estudiantes como tarea en casa, o como parte de la anticipación de la clase.

Los temas y subtemas que forman parte de la propuesta son los siguientes:

1. Vectores
    1.1. Vectores fijos
    1.2. Equipolencia de vectores

1.3. Vectores libres

2. Operaciones con vectores

 2.1. Adición de vectores. Propiedades

 2.2. Multiplicación por un número real. Propiedades

3. El espacio vectorial R^3

4. Componentes

 4.1. Operaciones con componentes. Adición y Multiplicación por un escalar

 4.2. Combinación lineal de vectores

 4.3. Componentes de un vector determinado por dos puntos

 4.4. Punto medio de un segmento

5. Producto Escalar

 5.1. Definición

 5.2. Propiedades del Producto Escalar

 5.3. Expresión analítica del Producto Escalar

 5.4. Módulo de un vector y ángulo entre dos vectores

6. Producto Vectorial y Mixto

 6.1. Definición del Producto Vectorial

 6.2. Propiedades del Producto Vectorial

 6.3.Definición del Producto Mixto

 6.4. Propiedades del Producto mixto

3.3.3. VALIDACIÓN DE LA PROPUESTA

UNIVERSIDAD DE CUENCA
FACULTAD DE FILOSOFÍA LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

RÚBRICA PARA LA EVALUACIÓN DE MATERIALES DIDÁCTICOS

Trabajo de titulación: Recursos didácticos para la enseñanza-aprendizaje de los temas de álgebra vectorial en tercero de bachillerato de la Unidad Educativa Fausto Molina de la parroquia Rural Tarqui del cantón Cuenca.

Estudiante Responsable: Paola Lorena Robles Montero

N°	ASPECTOS GENERALES	INDICADOR	VALORACIÓN		
			SI	NO	NA
1	ESTRUCTURA Y ORGANIZACIÓN	Los materiales guardan relación y correspondencia con los contenidos que se pretenden enseñar.	X		
		Su presentación despierta y mantiene el interés.	X		
		El material didáctico es versátil		X	
		En su elaboración existe una variedad de materiales	X		
		Su cofección es prolija y agradable visualmente		X	
		El material ayuda a despertar la posibilidad de análisis y reflexión.	X		
2	ENFOQUE Y OBJETIVO	Se podría reproducir con facilidad.	X		
		Con el material se pueden proponer distintas actividades que fomenten el aprendizaje	X		
		El material ayuda a relacionar los temas a impartir con el mundo real	X		
		Puede ser utilizado por otros docentes/grupos.	X		
		Facilita la incorporación de otros materiales y recursos en el proceso didáctico.	X		
		El material ayuda a desempeñar un papel activo en el proceso de aprendizaje	X		
	APROBADO		X		

SUGERENCIAS

Cuenca, 17 de abril del 2019

Mgt. Patricio Guachún
Evaluador 1

Mgt. Tatiana Quezada
Evaluador 2

CONCLUSIONES

Este trabajo de titulación *«Recursos didácticos para la enseñanza-aprendizaje de los temas de Álgebra Vectorial en Tercero de Bachillerato de la Unidad Educativa "Fausto Molina" de la parroquia rural Tarqui del cantón Cuenca»*, nos ha dejado varios puntos importantes que se deben tomar en cuenta.

En primera instancia, la evolución de la educación ha dejado el camino libre para adaptar distintos tipos de recursos didácticos que signifiquen una ayuda pedagógica para el docente y facilite el aprendizaje reconociendo la dificultad hallada en los temas de Álgebra Vectorial. Sin embargo, se ha demostrado que no todo recurso –especialmente los tecnológicos– sean los más adecuados, en especial si se toma en cuenta el contexto donde se los aplica, a pesar de que pueden ser muy efectivos en el desarrollo de los contenidos.

Se ha verificado que las TIC presentan muchas dificultades de implementación, aplicación y manejo en las zonas rurales, por lo que se cree indispensable intentar desplegar nuevas estrategias o técnicas pedagógicas que cumplan un papel similar o superior a las tecnologías.

Se determinó que optar por la utilización de material concreto sería una posible solución ante estas limitantes ya que se destaca por ser llamativo, manipulable, efectivo, más demostrativo, de fácil transporte y de adaptación más simple; ya que, a diferencia de las TIC, las dificultades del material son más sencillas de resolver. Además permite que los estudiantes amplíen los contenidos asimilados a través del Aprendizaje por Descubrimiento, facultando su propia construcción de conocimientos debido a que transforma lo abstracto de los temas de Álgebra Vectorial a una base concreta con la que puedan ser capaces de visibilizar y evaluar más detenidamente.

Con la aplicación de las encuestas y las entrevistas, se pudo conocer la realidad del estudiantado y profesorado dentro de su Institución Educativa determinada en un contexto rural: se interpretó que no todos los estudiantes cuentan con los recursos necesarios e individualizados para concretar el uso de ciertos implementos tecnológicos, por lo que esta alternativa no era la más apropiada para su educación; se pudo descubrir también que la preferencia de los estudiantes para sus clases recaía en la adecuación de material concreto como parte del proceso pedagógico debido a que les resultaba interesante, sencillo, comprensible y, principalmente, más fácil de obtener, construir y utilizar.

Asimismo, muchos de los docentes piensan que todo recurso didáctico es beneficioso para la asignatura como tal y la educación en general; son muy conscientes de las ventajas y desventajas que presentan cada tipo de recurso, aseverando que siempre hay alguna manera de evitarlos. Su testimonio indicó que, para el caso específico de su institución, es mejor la implementación de material concreto; aunque esperan que en un futuro se puedan incorporar todo tipo de recursos para formar un todo más significativo.

Todas estas ideas aseveran que, la construcción del material concreto como propuesta didáctica, es lo más útil, no únicamente para el docente al momento de impartir sus clases, sino también para los estudiantes en su labor de comprenderlas debido a que muchos de estos recursos están diseñados para emplearlos en temas como: Operaciones con Vectores, el Espacio Vectorial R^3, Componentes, Producto Escalar, Producto Vectorial, Producto Mixto, etc., ya sea para la explicación de la parte teórica o para la explicación de ejercicios.

El material es ideal para el trabajo individual y/o grupal de los alumnos pues se les ayuda a desarrollar su imaginación, su creatividad y su capacidad de construcción, y con esto pueden adentrarse en el complejo mundo del Álgebra Vectorial y aprender con más simplicidad; asimismo, es ideal para el docente quien puede hacer uso de sus habilidades para tornar este recurso en uno práctico y que, además, le sirva para crear nuevos materiales aptos para todo tipo de temas de su asignatura.

RECOMENDACIONES

Para seguir en vías de propuestas educativas innovadoras adecuadas para el correcto proceso de enseñanza y aprendizaje, vinculados con el tema desarrollado en este trabajo, se recomienda lo siguiente:

En primer lugar, tomando en cuenta que este trabajo se enfocó en una Institución Educativa de la parroquia Tarqui, la cual se encuentra en las zonas rurales del cantón, sería importante abarcar más sectores de la localidad, ya sean en áreas rurales más apartadas o en las urbanas. Para esto, se recomendaría hacer un estudio de la validación de las TIC en esos sectores para comprobar su alcance (zonas rurales más apartadas) o para compararlas con las ya utilizadas (zonas urbanas) y, de esa manera, averiguar qué tipo de obstáculos presentan y si son o no aptas para la educación de los estudiantes en la asignatura de Álgebra Vectorial –aunque también pueden utilizarse en otras asignaturas–.

Por otro lado, sería muy útil además utilizar la observación como parte de la Metodología para recopilar información importante debido a que, a través de esta técnica, el o los investigadores pueden ser testigos directos de cómo se va desarrollando la educación, por lo que, desde su propia perspectiva, pueden analizar los datos más convenientemente y proponer mejoras más efectivas, contextualizadas y que signifiquen una mejora contundente del problema.

Finalmente, sería trascendental que los actores del proceso educativo, esto es, autoridades, docentes, estudiantes, padres de familia, entre otros, consideren implementar ciertos recursos tecnológicos con mayor agilidad dentro de las instituciones educativas, dado que este tipo de recurso es casi indispensable pues es de mucha ayuda para la comprensión, el trabajo, el desarrollo de actividades dentro y fuera del aula, etc., con el mayor control posible; sin embargo, se debería procurar no apartar los materiales concretos puesto que, al igual que las TIC, son de mucha ayuda para el docente y los alumnos ya que ayuda a potencializar otro tipo de habilidades.

REFERENCIAS

Arancibia, V., Herrera, P., Strasser, K. (2008). *Manual de psicología educacional. (6ª. Ed.).* Ediciones UC.

Barrantes Casquero, G., Casas García, L. M., & Luengo González, R. (2011). Obstáculos percibidos para la integración de las TIC por los profesores de Infantil y Primaria en Extremadura. *Píxel-Bit. Revista de Medios y Educación*, *39*, 83-94.

Brandão Santos Cade, M. (2015). Material Didáctico de Matemática en la Educación de Jóvenes y Adultos: desafíos, perspectivas. *Revista Lusófona de Educação, (29),* 161-182.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Cambridge: Harvard University Press.

Camargo Uribe, L. (2011). El legado de Piaget a la didáctica de la Geometría. *Revista Colombiana de Educación*, (60), 41-60.

De Zubiría, Julián. (2011). *Los modelos pedagógicos. Hacia una pedagogía dialogante. Tercera Edición.* Bogotá. Editorial Magisterio.

Díaz Barriga, F. (2009). OEI *Foro TICS y Educación:* ***Las TIC en la educación y los retos que enfrentan los docentes.*** **México: UNAM. Recuperado de:** http://www.oei.es/historico/metas2021/expertos02.htm

Gonzales, N., Trelles, C., Mora, J. (2017). Manejo Docente de las Tecnologías de la Información y Comunicación. *INNOVA Research Journal*. *2*(4), 61-72.

González-Pérez, J., Criado del Pozo, M. (2009). *Psicología de la Educación para una enseñanza práctica.* Editorial CCS.

López Ramírez, L. (2006). Ruralidad y educación rural. Referentes para un Programa de Educación Rural en la Universidad Pedagógica Nacional. *Revista Colombiana de Educación*, (51), 138-159.

Ministerio de Educación del Ecuador. (2016). *Matemática: Texto del estudiante. 3ero de Bachillerato.* Quito. Editorial Don Bosco.

Parra, O., Díaz, V. (2014). Didáctica de las Matemáticas y Tecnologías de la Información y la Comunicación. *Revista Educación y Desarrollo Social*. *8*(2), 60-81.

Prendes Espinosa, M., Martínez Sánchez, F., & Gutiérrez Porlán, I. (2008). *Producción de Material Didáctico: los objetos de Aprendizaje. Ried*. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia, *11*(1), 81-105.

Rodriguez, M. L., & Ricardo, L. (2007). The holistic model for the teaching-learning process of Geometry in architects of the Cuban school/El modelo holístico para el proceso de enseñanza-aprendizaje de Geometría en arquitectos de la escuela Cubana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(3), 421+. Recuperado de: http://go.galegroup.com/ps/i.do?p=IFME&sw=w&u=ucuenca_cons&v=2.1&it=r&id=GALE%7CA200844616&asid=537a3c579347c51f116ffe2cd74ca0f8

Sepúlveda Ruiz, M., & Gallardo Gil, M. (2011). La escuela rural en la sociedad globalizada: nuevos caminos para una realidad silenciada. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 15* (2), 141-153.

Serrano, A., Martinez, E. (2003). *La Brecha Digital: Mitos y Realidades*. México: Editorial UABC. Recuperado de: www.labrechadigital.org

Woolfolk, A. (2010). *Psicología Educativa. 11ª. Edición.* México. Pearson Educación.

ANEXOS

UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA, LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

ENCUESTA PARA ESTUDIANTES DE TERCERO DE BACHILLERATO DE LA UNIDAD EDUCATIVA "FAUSTO MOLINA" (TARQUI)

OBJETIVO: La presente tiene como propósito recolectar, de forma ordenada, objetiva, sistemática y autónoma, información requerida sobre la adquisición y aplicación de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) para la educación, así como también el uso de material didáctico en el área de Matemáticas, con el fin de contar con los datos necesarios para la elaboración del Trabajo de Titulación denominado «Recursos didácticos para la enseñanza-aprendizaje de los temas del Álgebra Vectorial en Tercero de Bachillerato en la Colegio Técnico "Fausto Molina" de la parroquia rural Tarqui del cantón Cuenca».

Se le recuerda que la información que usted proporcione a través de este instrumento será absolutamente confidencial y se hará uso de ella solamente para fines educativos.

INDICACIONES: A continuación, se plantean algunas preguntas que deberán ser contestadas con objetividad, seriedad y honestidad. Por favor, en cada una de ellas marque solamente una opción de respuesta (a menos que la pregunta le indique lo contrario). De antemano, se agradece infinitamente su participación en esta encuesta, lo cual resultará de gran ayuda.

1. ¿Cuál o cuáles de estos recursos tecnológicos posee? (Puede marcar más de una opción):

Celular ☐ Computadora ☐ Laptop ☐

Tablet ☐ iPad ☐ Otro (señale) _________

No posee ☐

2. ¿Con qué frecuencia usa recursos tecnológicos dentro de su hogar?

Nunca ☐ Rara vez ☐ Algunas veces ☐

Muchas veces ☐ Siempre ☐

3. ¿Con qué finalidad usa los recursos tecnológicos que posee?

Estudio ☐ Redes sociales ☐ Videos ☐

Juegos ☐ Otro (señale) _____________

4. ¿Cuenta usted con acceso a internet en su vivienda?

Sí ☐ No ☐

Si la respuesta es no, indique el por qué: ___________________________________

5. ¿Con qué frecuencia usa internet en su hogar?

Nunca ☐ Rara vez ☐ Algunas veces ☐

Muchas veces ☐ Siempre ☐

6. ¿Cómo describiría la intensidad de la señal de internet en su vivienda?

Mala ☐ Media ☐ Buena ☐ Excelente ☐

7. Dentro de la institución, ¿cuenta usted con acceso a internet?

Sí ☐ No ☐

Si la respuesta es no, indique el por qué: ___________________________________

8. ¿Con qué frecuencia usted usa internet dentro de la institución?

Nunca ☐ Rara vez ☐ Algunas veces ☐

Muchas veces ☐ Siempre ☐

9. ¿Cómo describiría la intensidad de la señal de internet dentro de la institución?

Mala ☐ Media ☐ Buena ☐ Excelente ☐

10. ¿Con qué frecuencia usted usa recursos tecnológicos dentro de la institución?

Nunca ☐ Rara vez ☐ Algunas veces ☐

Muchas veces ☐ Siempre ☐

11. ¿Cuál es su nivel de motivación frente al uso de tecnologías para el aprendizaje de Matemáticas?

Nada agradable ☐ Poco agradable ☐

Agradable ☐ Muy agradable ☐

12. ¿En qué grado puede usted manejar los recursos tecnológicos por su cuenta? (Siendo 1, muy difícil; y 5, muy fácil)

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐

13. El uso de las TIC, ¿puede facilitar su comprensión en los temas de Matemáticas? (Siendo 1, no facilita; y 5, facilita altamente)

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐

14. ¿Qué nivel de comprensión de Matemáticas cree usted que adquiere ante el uso de material didáctico?

Alto ☐ Medio ☐ Regular ☐ Bajo ☐

15. ¿Se siente satisfecho ante el uso de material didáctico durante el proceso de aprendizaje?

Nada satisfecho ☐ Poco satisfecho ☐

Medianamente satisfecho ☐ Altamente satisfecho ☐

16. ¿Cree que puede construir material concreto por usted mismo?

Sí ☐ No ☐

17. ¿Qué opina acerca de la implementación de material didáctico? (Puede escoger hasta 3 opciones)

Interesante ☐ Divertido ☐ Accesible ☐

Comprensible ☐ Simple ☐ Atractivo ☐

Complejo ☐ Incomprensible ☐ Poco útil ☐

Costoso ☐ Otro (señale) ______________

18. ¿Qué habilidad cree que es la que más desarrolla ante el uso de material didáctico? (Puede escoger hasta dos opciones)

Psicomotriz ☐ Creatividad ☐ Atención ☐

Cognitiva ☐ Trabajo grupal ☐ Intelectual ☐

Conductual ☐ Ninguna ☐ Otro (señale)

____

UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA, LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

ENCUESTA PARA DOCENTES DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA DE LA UNIDAD EDUCATIVA "FAUSTO MOLINA"

OBJETIVO: La presente tiene como propósito recolectar, de forma ordenada, objetiva, sistemática y autónoma, información requerida sobre la adquisición y aplicación de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) para la educación, así como también el uso de material didáctico en la enseñanza-aprendizaje de contenidos del Álgebra Vectorial correspondientes a la asignatura de Matemáticas con el fin de contar con los datos necesarios para la elaboración del Trabajo de Titulación de mi autoría denominado «Recursos didácticos para la enseñanza-aprendizaje de los temas del Álgebra Vectorial en Tercero de Bachillerato en el Colegio Técnico "Fausto Molina" de la parroquia rural Tarqui del cantón Cuenca».

Se le recuerda que la información que usted proporcione a través de este instrumento será absolutamente confidencial y se hará uso de ella solamente para fines educativos.

INDICACIONES: A continuación, se plantean algunas preguntas que deberán ser contestadas con objetividad, seriedad y honestidad. Por favor, en cada una de ellas marque solamente una opción de respuesta (a menos que la pregunta le indique lo contrario). De antemano, se agradece infinitamente su participación en esta encuesta, lo cual resultará de gran ayuda.

1. ¿Cuál o cuáles de estos recursos tecnológicos posee usted? (Puede marcar más de una opción):

Celular ☐ Computadora ☐ Laptop ☐

Tablet ☐ iPad ☐ Otro (señale) _________

No posee ☐

2. ¿Con qué frecuencia usa recursos tecnológicos dentro de su hogar?

Nunca ☐ Rara vez ☐ Algunas veces ☐

Muchas veces ☐ Siempre ☐

3. ¿Con qué finalidad usa los recursos tecnológicos que posee?

Enseñanza ☐ Redes sociales ☐ Videos ☐

Juegos ☐ Otro (señale) ______

4. ¿Cuenta con acceso a internet en su vivienda?

Sí ☐ No ☐

Si la respuesta es no, indique el por qué: ________________________________

5. ¿Con qué frecuencia usa internet en su hogar?

Nunca ☐ Rara vez ☐ Algunas veces ☐

Muchas veces ☐ Siempre ☐

6. ¿Cómo describiría la intensidad de la señal de internet en su vivienda?

Mala ☐ Media ☐ Buena ☐ Excelente ☐

7. Dentro de la institución, ¿cuenta con acceso a internet?

Sí ☐ No ☐

Si la respuesta es no, indique el por qué: _________________________________

8. ¿Con qué frecuencia usa internet dentro de la institución?

Nunca ☐ Rara vez ☐ Algunas veces ☐

Muchas veces ☐ Siempre ☐

9. ¿La institución cuenta con recursos tecnológicos suficientes para el uso de los docentes?

No ☐ A veces ☐ Sí ☐

10. ¿Con qué frecuencia usa recursos tecnológicos dentro de la institución?

Nunca ☐ Rara vez ☐ Algunas veces ☐

Muchas veces ☐ Siempre ☐

11. ¿En qué grado cree usted que está capacitado para el manejo de los recursos tecnológicos por su cuenta? (Siendo 1, muy difícil; y 5, muy fácil)

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐

12. ¿Qué tipo de recursos o software educativo conoce para impartir sus clases?

____

____

____

13. ¿En qué grado considera que el uso de las TIC puede facilitar la enseñanza de Álgebra Vectorial?

No sirve ☐ Sirve muy poco ☐

Sirve sólo para ciertos temas ☐ Sirve para muchos temas ☐

Es indispensable ☐

14. ¿Qué tipo de recursos didácticos usa para impartir sus clases?

Tecnológicos ☐ Concretos ☐

Otros (señale) ☐ Todos los anteriores ☐

______________ No usa ☐

15. Para usted, ¿en qué nivel el uso de recursos didácticos facilita la comprensión de la asignatura por parte de los estudiantes? (Siendo 1 lo más bajo, 5 lo más alto)

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐

16. ¿Qué piensa sobre el uso de material didáctico para las clases de Álgebra Vectorial?

____

____

____

17. El material que usted usa, ¿lo brinda la institución?

Sí ☐ A veces ☐ No ☐

18. ¿El material que usted usa lo construyó por su propia cuenta?

Sí ☐ A veces ☐ No ☐

19. ¿Qué habilidad cree usted que es la que más desarrolla el estudiante con el uso de material didáctico? (Puede escoger hasta dos opciones)

Psicomotriz ☐ Creatividad ☐ Atención ☐

Cognitiva ☐ Trabajo grupal ☐ Intelectual ☐

Conductual ☐ Ninguna ☐ Otro (señale)

____

20. ¿Cuáles son las principales ventajas que presenta el uso de material concreto? (Puede escoger hasta dos opciones)

Accesible ☐ Fácil de construir ☐ Fácil aplicación ☐

Mejora la comprensión ☐ Mejora la abstracción ☐ Menos costoso ☐

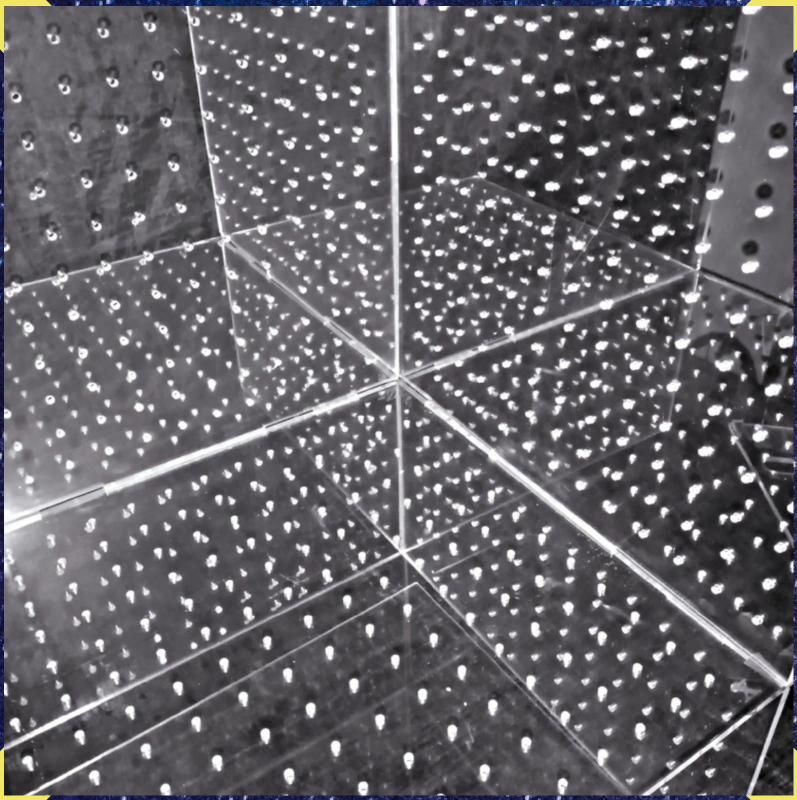
Otro (señale) __________

21. Según su criterio, ¿cuáles son las principales limitantes del uso de material didáctico?

Tiempo ☐ Difícil adaptación ☐ Poca contextualización ☐

Mala aplicación ☐ Difícil planificación ☐ Otro (señale) ____________

RECURSOS DIDÁCTICOS PARA LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE ÁLGEBRA VECTORIAL



Paola Robles M.

RECURSOS DIDÁCTICOS PARA LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE ÁLGEBRA VECTORIAL

Universidad de Cuenca
Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación
Carrera de Matemáticas y Física

DIRECTORA:

Mg. Sonia Guzñay

AUTORA:

Paola Lorena Robles Montero

Universidad de Cuenca
RECURSOS DIDÁCTICOS PARA LA ENSEÑANZA - APRENDIZAJE DE ÁLGEBRA VECTORIAL
Cuenca - Ecuador, 2019
Robles, P.

RECURSOS DIDÁCTICOS PARA LA ENSEÑANZA DE ÁLGEBRA VECTORIAL

Introducción

A raíz de los problemas encontrados en el proceso de enseñanza – aprendizaje del Álgebra Vectorial dada su abstracción, complejidad y difícil comprensión, a más de las escasas alternativas para solucionarlos, se ha decidido incluir diferentes tipos de recursos didácticos adecuados para facilitar su estudio; tomando en cuenta, además, que el contexto donde se desarrolla esta situación no puede contar con todas las condiciones para un efectivo uso de herramientas tecnológicas, las cuales significan, hoy en día, uno de los materiales más importantes y útiles tanto en la educación como en la cotidianeidad.

Por esta razón se ha buscado una manera más idónea de llegar a los estudiantes y que resulte tan eficaz e interesante como la tecnología, sin dejar de lado su capacidad para mejorar la comprensión de la asignatura; así, se decidió optar por el diseño y la construcción de material concreto que se convertiría en el mejor complemento de una buena educación.

Es así que el presente texto sobre el uso y aplicación de los Recursos Didácticos para la enseñanza de Álgebra Vectorial para los estudiantes de Tercero de Bachillerato ha sido elaborado con la finalidad de mostrar, explicar, describir y aplicar los distintos materiales construidos como posible solución a los problemas de dicha asignatura debido a que estos medios fortalecen las habilidades y conocimientos tanto de los docentes como de los educandos (sobre todo a tratarse de una rama de las Matemáticas), proporcionando diversas experiencias, dando mayor relevancia al trabajo grupal, incrementando el desarrollo cognitivo y, especialmente, permitiendo que los estudiantes estén más preparados para descubrir su propio aprendizaje a través de la manipulación y aplicación de los materiales.

A partir de esta observación, se han establecido ciertos objetivos que se deben tener en cuenta para el correcto empleo de este texto y son:

- Conocer a detalle los materiales concretos elaborados de manera que la ejecución de cada uno de ellos sea lo más exacto y correcto para complementar óptimamente las explicaciones que dicta el profesor en clase.

- Determinar las distintas competencias que se despliegan con la aplicación de cada recurso, de tal forma que se permita que los estudiantes obtengan un conocimiento significativo derivado del Aprendizaje por Descubrimiento a través de cada material didáctico.

- Distinguir los materiales que puedan ser más útiles, sencillos y necesarios para ciertos temas según el criterio del docente para, así, elaborar una planificación cualificada y oportuna para cada clase y evitar pérdidas de tiempo.

- Fomentar el perfeccionamiento de las habilidades y competencias de los estudiantes a través del uso de material concreto en el aula de clase para Álgebra Vectorial, con la guía del maestro y la ayuda del trabajo grupal.

- Ampliar la creatividad del docente al conocer y emplear los materiales didácticos elaborados con el fin de que obtenga la capacidad de crear nuevos y más adecuados recursos.

- Destacar el valor que posee el material concreto en el proceso de enseñanza – aprendizaje para Álgebra Vectorial, con el fin de que se convierta en un recurso frecuente en el aula de clases dadas sus condiciones pertinentes, su sencilla adquisición y su trascendental aplicación.

Estructura del texto

Este texto ha sido elaborado para ampliar el manejo y aplicación tanto de los materiales didácticos construidos como de sus respectivas actividades. Por ello, se ha dividido el texto en dos partes:

a) La primera parte corresponde al Manual de uso de los materiales didácticos.
b) La segunda parte corresponde al desarrollo de actividades en base a los temas de la asignatura.

PRIMERA PARTE: MANUAL DE USO

Esta parte del texto corresponde a la explicación detallada de cada uno de los materiales elaborados para el desarrollo de la asignatura de Álgebra Vectorial. Así, los aspectos generales de los que se dispondrá para cada elemento del set, se especifica a continuación:

- Gráfico: Representaciones fotográficas del material y las partes que lo componen.

- Descripción: Características detalladas del recurso y sus componentes para ofrecer una idea general. Determinación o enumeración de los materiales que se usan para elaborarlo, cómo está construido, etc. Explicación de la importancia del uso de dicho recurso en ciertos temas y el criterio para su selección; especificación de las habilidades a desarrollar para un correcto uso.

- Funcionamiento: Explicación sobre cómo se utiliza cada recurso, la ejecución de cada componente y sus funciones propias, y sus procesos.

- Finalidad: Aclaración del objetivo, meta o razón por la que se utiliza determinado recurso, es decir, la justificación para usarlo por sobre otros.

- Aplicación: Utilización del recurso en distintas asignaturas como Física, Geometría o alguna otra del área de Matemáticas.

MANUAL DE USO

Pieza #1: Sistema de referencia

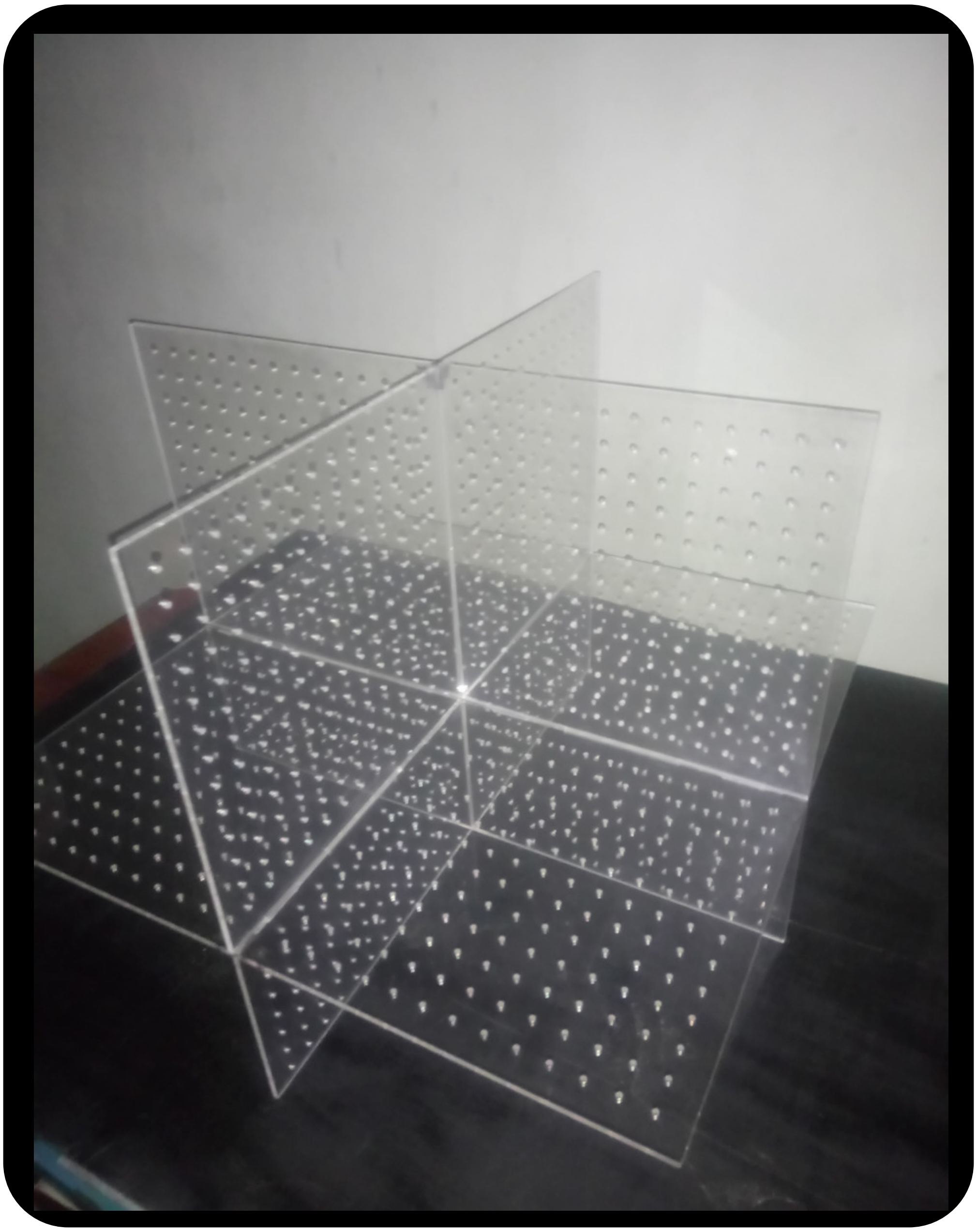
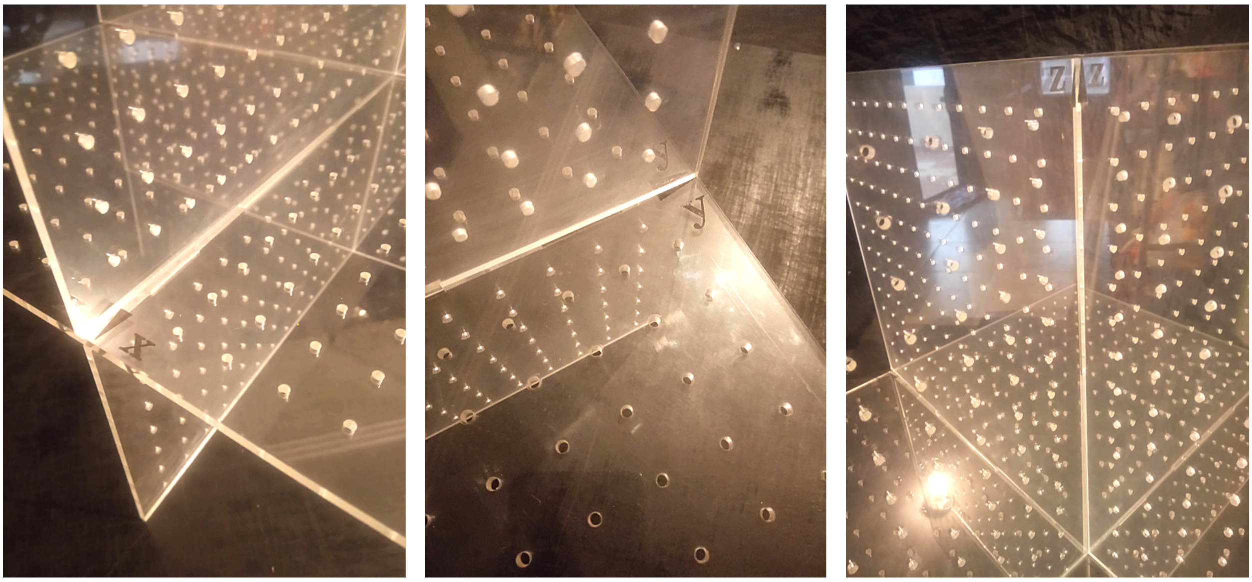


Figura 1. Sistema de referencia

Descripción

Este recurso es una estructura armable que representa el sistema de referencia XYZ (véase la Imagen 1) y cuenta con los planos que se forman con los tres ejes principales +X, +Y y +Z (se puede observar en la Imagen 2(a), (b) y (c), respectivamente), y los otros tres que corresponden a los ejes -X, -Y y -Z. Cada eje se encuentra segmentado en 13 unidades (1 unidad = 2 cm) por lo que la longitud de cada eje es de 26 cm; a excepción del eje -Z que se elaboró con una longitud de 14 cm (7 unidades).



(a) (b) (c)

Figura 2. Ejes principales del Sistema de Referencia

Los planos de este instrumento están construidos con acrílico, material resistente y delgado y se encuentran segmentados con unos pequeños agujeros en cada intersección sobre cada plano, por los cuales se puede atravesar un hilo para amarrarlos y, así, colocar los vectores; o, en su defecto, las varillas de sostenimiento.

Para su construcción únicamente es necesario armar los planos con los que se vaya a trabajar, haciendo que entre ellos formen ángulos de 90°. Ahora, para la ubicación de los vectores, se escoge el que determine el módulo pedido y, eje por eje, se coloca el vector, tomando en cuenta las componentes en X, en Y y en Z.

La construcción de este recurso es bastante elemental, con instrucciones claras y sencillas, para que lo pueda construir desde el docente hasta el propio estudiante. Además, al ser un recurso armable y ligero, puede ser de fácil transporte, que sustituye otros recursos como el pizarrón, las gráficas de los textos o hasta las aplicaciones digitales.

Su tamaño, que ronda los $26 \times 26 \times 26$ cm en su octante positivo (XYZ), es ideal para que se observe ampliamente por toda la clase durante cada explicación. De igual forma, se facilita la resolución de muchas actividades o ejercicios con un alcance extenso que consiente hasta preguntas de los estudiantes dada la posibilidad de enseñar más detalles y procesos puesto que, con este material, se traspasa –y, en ciertos casos, maximiza– lo que los estudiantes observan en sus textos, es decir, pasa de un contexto abstracto a uno mucho más concreto y explícito.

Es un recurso motivador debido a que se trata de un material didáctico estructurado que puede llegar a promover el interés y la atención de los estudiantes en la clase debido a que aumenta la curiosidad sobre su uso. También puede alimentar la creatividad del estudiante ya que, al ser simple de utilizar y entender, favorece el trabajo propio, activo y en grupo, de los educandos, sobre todo al contribuir en el Aprendizaje por Descubrimiento. Ante esto, se nota que los estudiantes llegan a encontrar un progreso cognitivo superior ante el manejo y la manipulación del recurso en relación con los contenidos.

Puede usarse varias veces debido a su condición de durabilidad. Además, no requiere equipo electrónico y/o digital extra. Asimismo, son útiles para varios temas y asignaturas distintas, dentro del área de Matemáticas, y de distintos niveles educativos.

Con este material se puede trabajar en forma general en el aula, con trabajo grupal entre los estudiantes o, inclusive, en forma individual, puesto que puede ser construido en menor escala por los propios alumnos al reemplazar los materiales por unos más pequeños y prácticos como placas de cartulina, cartón, etc., con sus intersecciones agujereadas. Gracias a esto, los costos pueden llegar a ser muy bajos ya que los materiales están más disponibles, especialmente, en la zona rural en la que se desarrolla.

Funcionamiento

Al armar los planos de este instrumento se crea un sistema de referencia de 8 octantes (o menos, según qué planos se construyan), en el que se puede colocar o representar de forma gráfica los vectores en R3 que se pidan; para esto, se puede atravesar un hilo que estará amarrado desde los vectores, y estará dirigido a cada intersección de cada plano (XY, XZ, YZ, etc.); o, también, se colocan unas varillas muy delgadas de madera con el fin de disponer de una señalización de asistencia para que las posiciones de los vectores queden más exactas.

Se grafica el vector o los vectores pedidos –ya sea que estén dados por sus componentes o en forma canónica– tomando en cuenta que el primer vector unitario y/o la componente en x siguen el eje X, en positivo o negativo, como indique su correspondiente signo. De igual manera con el resto de vectores unitarios.

Finalidad

Con este recurso se pretende tener una base fija para la representación de los vectores en el espacio –es decir, con las tres dimensiones definidas– para lograr que los estudiantes visualicen en todas las perspectivas y capten más ampliamente la posición exacta de cualquier vector que parta desde el origen, haciendo que plasmen las imágenes abstractas de los libros a un medio concreto. Además, por medio de este artefacto se logra reconocer expresiones que, incluso desde el plano, resultaron ser complicados para los estudiantes y que ahora, en el espacio, adquieren un mejor significado, como: vector libre, vector posición, vectores base en R3, sistema de referencia, componentes o coordenadas en tres dimensiones, entre muchas otras expresiones más. Este mecanismo sustituye aplicaciones tecnológicas como GeoGebra, Maplesoft, Freehand, las tarjetas gráficas con aceleración 3D para computadoras, entre otras, que cumplen ciertas funciones importantes para representar vectores pero, que a su vez, muestran cierta complejidad al adquirir y/o manejar. En palabras diferentes, este recurso configura una especie de graficador de vectores que se puede encontrar en la realidad, en contraposición con los programas digitales.

Aplicación

Este tipo de estructura funciona como un espacio vectorial en R3 por lo que puede utilizarse en temas de Matemáticas de Tercero de Bachillerato como: a) Vector Posición, b) Vectores Base o Vectores Unitarios de R3, c) Adición de Vectores, d) Combinación Lineal de Vectores, e) Componentes de un Vector determinado por dos puntos, f) Punto medio de un segmento. Igualmente, la base estructural es un soporte gráfico para enseñar todos los temas de Vectores para Física, tanto en R2 como en R3.

Pieza #2: Primer set de vectores

Figura 3. Primer set de Vectores

Descripción

Este recurso es, en realidad, un conjunto de piezas que representan los vectores libres en los que se distinguen sus tres componentes: el módulo, la dirección y el sentido; simbolizados muy comúnmente como una flecha. Debido a que son el instrumento más importante de este texto, se ha decidido crear varios de ellos con distintos tamaños, colores y diseños para utilizarlos en diferentes temas o contenidos; sobre todo, cuando se pretende utilizarlo en la *Pieza #1: Sistema de Referencia*, en el cual, evidentemente, es lo que hacía falta para hacer un uso cien por ciento correcto de este material.
En otras palabras, estas dos piezas son, entonces, el suplemento perfecto entre ellos.

Por otra parte, y como ya se indicó anteriormente, los vectores, especialmente aquellos que se construyen con otro tipo de diseño, se los utiliza para temas diversos y que han sido específicamente confeccionados para adaptarse a las condiciones de dichos temas. Es así que, para una buena práctica, se han planificado tres diseños de vectores que se describirán a continuación.

Se dispuso, entonces, que el primer diseño sea el más elemental y que se adapte a la Pieza #1. Se tratan de unas flechas de madera, con un ancho de 1 cm. La particularidad que presenta este diseño es que su origen (es decir, la parte contraria a la de la saeta) se adapta al sistema de referencia debido a la presencia de una pequeña barra delgada que puede colocarse más correctamente a la base estructurada. Se ha determinado un total de 21 vectores (entre ellos, 6 que corresponden a los unitarios) cuyas longitudes y colores están determinados en la siguiente tabla (con 3 ejemplares de cada color):

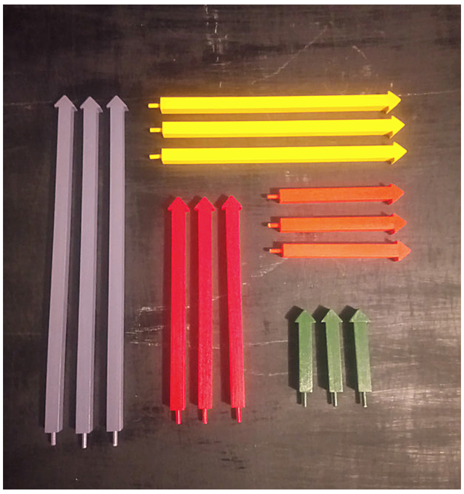


Figura 4. Primer diseño de vector

UNIDAD	LONGITUD	COLOR
1 unidad	2 cm	Azul
3 unidades	6 cm	Verde
5 unidades	10 cm	Naranja
8 unidades	16 cm	Rojo
10 unidades	20 cm	Amarillo
13 unidades	26 cm	Violeta

El segundo diseño que se ha elaborado presenta una particularidad novedosa. Estos vectores consisten en una flecha de madera con determinada longitud pero que, en su interior, posee un pistón de 5 cm (que se desliza desde la parte inferior) que modifica la extensión del vector pues habilita la utilidad de incrementar o contraer su magnitud. Se ha decidido fabricar 5 ejemplares para cada longitud de vector (con su respectivo color) cuyas magnitudes inicial y final se determinan así:

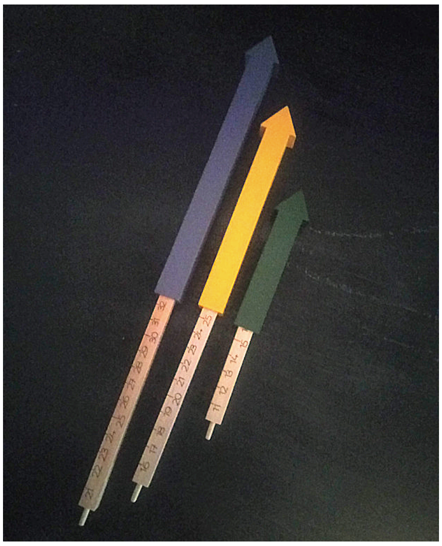


Figura 5. Segundo diseño de vector

LONGITUD DEL VECTOR	LONGITUD TOTAL	COLOR
10 cm	15 cm	Azul
15 cm	20 cm	Verde
20 cm	25 cm	Naranja

Finalmente, el tercer diseño de vector se ha fabricado con piezas armables (a manera de legos en vertical) que están compuestos por diferentes fragmentos del mismo tamaño que se apilan el uno con el otro para generar distintas longitudes de vectores. Solamente el primer fragmento cuenta con una saeta, la cual otorga la representación de este material como un vector. Se cuentan con tres vectores, cada uno de ellos formados por tres fragmentos de 3 cm y uno superior de 4 cm con la saeta integrada, obteniendo una longitud total de 13 cm; no obstante, si se requiere un mayor tamaño, se apilan más fragmentos o, en su defecto, se merman fragmentos si se busca un vector de menor tamaño.

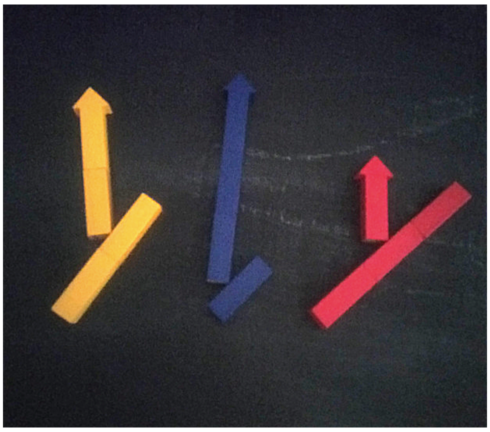


Figura 6. Tercer diseño de vector

En estos vectores se ha colocado en su extremo superior un pequeño gancho a través del cual se amarrará un hilo, para luego ubicarlo en las intersecciones del sistema de referencia. Este recurso, en general, brinda a los estudiantes la oportunidad de analizar las diferentes situaciones mediante observación de la estructura puesto que llegan a integrar los conocimientos habidos y por haber. A pesar de que este recurso reemplaza, en una base estructural, lo que se observa en los textos, puede, incluso, complementarse con otro tipo de materiales gráficos como: carteles, pizarrón, material impreso, etc; además de que es de fácil transporte y manejo debido a que es ligero.

Puede ser un recurso sustituible, inclusive en sus tres diseños. La construcción del primer tipo de vector no resulta compleja ya que puede fabricarse con cualquier tipo de material (ya sea: tubitos de cartulina, alambre, tubitos de hierro y un sinnúmero de posibilidades). En el caso del segundo vector, puede susituirse con algún tipo de antena de televisión que ya no se utilice; al igual que los vectores del tercer tipo, que pueden reemplazarse con juguetes de lego, si es que lo amerita. Asimismo, se les puede pedir a los estudiantes que construyan algunos vectores sobre todo si se quiere trabajar individualmente; o también en la cuestión de que se requiera un número mayor de vectores.

Las longitudes de los vectores varían de tal manera que se ajustan perfectamente si se quiere trabajar con la clase en general, cuando se quiere trabajar en grupos de estudiantes o si se quiere trabajar en forma individual.

Con este material, se traslada –y, en ciertos casos, maximiza– lo que los estudiantes observan en sus textos, es decir, pasa de un contexto abstracto a uno mucho más concreto y explícito. Además es un recurso motivador debido a que se trata de un material didáctico estructurado que puede llegar a promover el interés y la atención de los estudiantes en la clase debido a que aumenta la curiosidad sobre su uso; sin requerir de equipo electrónico y/o digital extra.

Funcionamiento

- Los vectores del primer caso no requieren ser armados puesto que ya están enteros; por tal razón, lo único que se puede hacer es escoger el vector que se pide tomando en cuenta la magnitud y se lo ubica en el sistema de referencia, aprovechando que estos simplemente se colocan, por lo que resulta más sencillo representarlo a través de sus componentes. Al momento de ubicarlo correctamente, se determinará el vector representado en tres dimensiones.

- Los vectores del segundo y tercer caso son útiles para temas en donde no necesariamente se pida alguna representación gráfica (para lo que se deba utilizar la Pieza #1) sino, más bien, para aquel contenido en el que se destaquen esencialmente los vectores libres. Por ejemplo, el módulo de los vectores es muy fácil de visibilizar, comparar y ejecutar en ambos casos: para el segundo, el pistón que se encuentra en la parte inferior del vector funciona con el simple hecho de deslizarlo hacia el interior y el exterior, como una antena de televisión, según el módulo que se quiera formar. Por otro lado, en el tercer caso, los vectores se van armando a partir de la unión de varios fragmentos, semejante a los legos, como lo solicita la magnitud del ejercicio.
  No obstante, los ejemplares del segundo diseño puede facilitar la ubicación del vector, sobre todo cuando se trabaja con componentes y no con magnitudes.

Finalidad

En primera instancia, se decidió crear tres diseños diferentes de vectores con el fin de adaptarlos para distintos temas, contenidos, aplicaciones e, incluso, el grado de dificultad en su empleo. Además, los vectores, ineludiblemente, son el núcleo de este texto, por lo que era imprescindible no contar con una representación tangible de su estructura.

- Los vectores del primer diseño, al ser los más básicos, tiene como principal finalidad ser otro complemento de la pieza #1, es decir, su función es la de representar un vector en tres dimensiones cuando se conoce su magnitud; entonces, con este tipo de vector se podría descubrir las componentes que los identifica mediante observación de la estructura o ejecutando diferentes métodos analíticos aprendidos.

- Los vectores del segundo diseño cuentan con una funcionalidad muy importante debido a que también pueden utilizarse en la base estructurada del sistema de referencia pero, a diferencia del primer caso, con este tipo de vector se puede llegar a conocer la magnitud conocidos los componentes que lo conforman. Para esto, se ubica el vector en los componentes dados y se desliza el pistón para que se ajuste correctamente.

- Finalmente, los vectores del tercer diseño se han fabricado para utilizarlo en temas como Multiplicación de un Escalar por un Vector, con el propósito de comparar las magnitudes y diferenciarlas.

Aplicación

En este apartado es trascendental señalar que se decidió efectuar tres diseños diferentes para adaptarlos a temas concretos. Con el primer y segundo diseño, que pueden ser complementarios de la Pieza #1, se puede aplicar a los mismos temas indicados: a) Vector Posición, b) Vectores Base o Vectores Unitarios de R3, c) Adición de Vectores, d) Combinación Lineal de Vectores, e) Componentes de un Vector determinado por dos puntos, f) Punto medio de un segmento; así como también para enseñar todos los temas de Vectores para Física, tanto en R2 como en R3, gracias a la base estructural que sirve como soporte gráfico.

En el caso del tercer diseño se construyó específicamente para el tema de Multiplicación de un escalar por un vector, con el propósito de diferenciar sus magnitudes, así como también, las cantidades escalares y vectoriales.

Pieza #3: Graduador

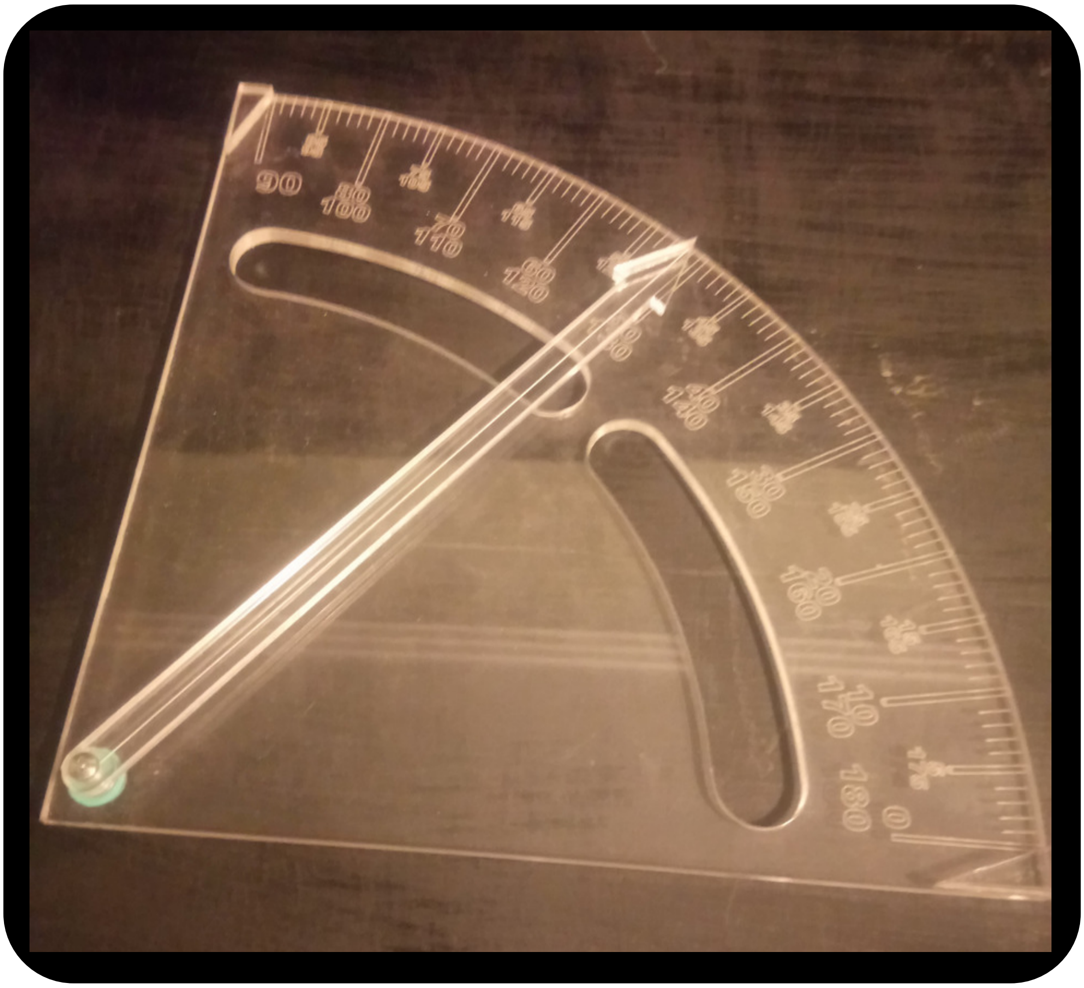


Figura 7. Graduador para vectores

Descripción

Este recurso es un implemento que se ha elaborado como un graduador para medir los ángulos que se forman entre vectores y puede actuar individualmente o también colocarlo como un complemento en la pieza #1. Esta herramienta, a diferencia de los graduadores comunes, no llega hasta los 180° sino únicamente hasta los 90°; y a más de esto, contiene una flecha deslizante sobre su superficie que ayuda a medir con mayor exactitud. Esta pieza se ha elaborado con acrílico, como el sistema de referencia, de manera que es muy ligero y manejable.

Es un recurso de asistencia que permite desarrollar las técnicas de demostración, de resolución de ejercicios, observación y comprobación.

Este equipo se puede operar y manejar con facilidad puesto que es una pieza pequeña.

Es un transportador construido especialmente para este tipo de contenido, sin embargo, puede reemplazarse con los graduadores comunes aunque con mayor dificultad de que la medición sea igual de precisa.

Funcionamiento

Este material funciona de la misma manera que los graduadores comunes, es decir, se coloca entre los vectores a medirse y, con la flecha deslizante que se encuentra en medio del la pieza, se puede ajustar y medir su ángulo con mayor precisión.

Finalidad

Con la elaboración de esta pieza se pretende tener un refuerzo para ciertos temas donde se usan ángulos entre vectores, es decir, mediante demostraciones gráficas, analíticas y con el uso del material concreto. Este recurso ayuda en actividades de asistencia para el aprendizaje del alumno dado que el estudiante, al resolver ejercicios o solucionar problemas que tienen que ver con ángulos entre vectores, se puede llegar a comprobar estas tareas debido a la manipulación, observación y demostración desarrollados con la aplicación del recurso.

Aplicación

Este recurso se ajusta excelentemente en temas como: a) Producto Escalar, b) Propiedades del Producto Escalar, c) Módulo de un Vector y Ángulo entre dos Vectores, d) Producto Vectorial.
En Física se aplica en temas como Trabajo.
En Geometría se pueden demostrar distintos teoremas.

Pieza #4: Segundo Set de Vectores

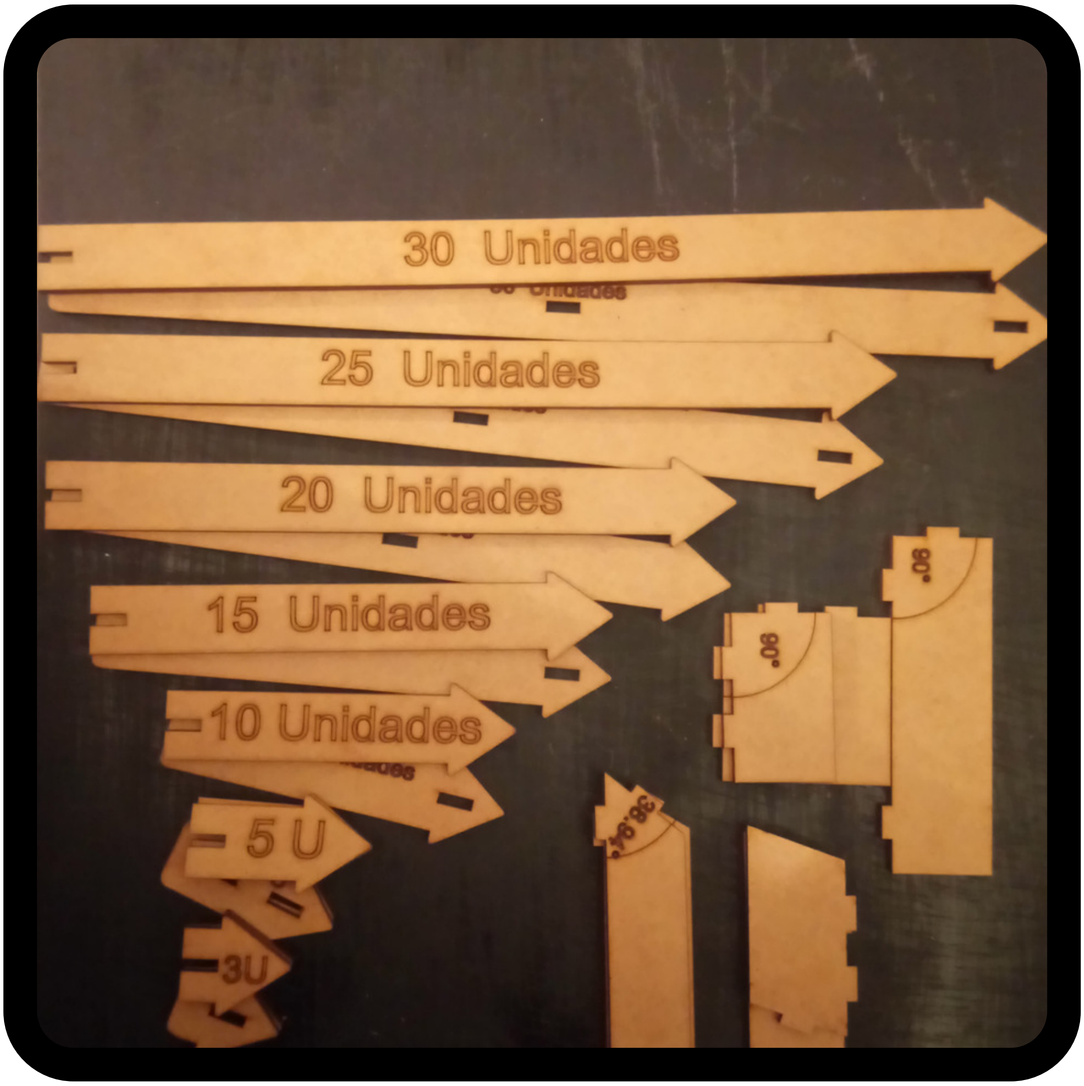


Figura 8. Segundo set de Vectores

Descripción

El material que se presenta aquí se trata de un segundo conjunto de piezas conformados por vectores, simbolizados, igualmente, por flechas y de distintos tamaños; así como también por algunos planos, es decir, cuadriláteros (paralelogramos) de cierta medida angular entre sus lados no paralelos. Pueden ser utilizados en el sistema de referencia o externamente, en forma aislada. Todas estas piezas han sido construidas de madera muy ligera para que sea de fácil transporte.

Los vectores de este set presentan las siguientes longitudes: dos de 30 cm, dos de 25 cm, dos de 20 cm, dos de 15 cm, dos de 10 cm, cuatro de 5 cm y cuatro de 3 cm; mientras que los planos están determinados por las siguientes medidas: 3 x 10 cm, 5 x 5 cm, 5 x 3 cm (todos estos con un ángulo de 90°); además, están los planos cuyos lados forman ángulos de 70°, 60° y 52° (para todos estos paralelogramos, los lados miden 3 x 10 cm); y, finalmente, un plano de 5 x 3 cm, cuyo ángulo tiene un valor de 70°.

Se han construido dos ejemplares de vectores de cada tamaño debido a que el primero cuenta con una abertura en la parte inferior para incrustarlo sobre otro vector; mientras que el segundo se ha elaborado con algunas aberturas a lo largo de su longitud para que puedan encajarse con los planos, según corresponda.

Funcionamiento

Para que estas piezas entren en funcionamiento, deben ir unidas de manera que los vectores coincidan con dos de los lados no paralelos del cuadrilátero, tomando en cuenta el ángulo que estos formen.

Finalidad

La elaboración de este material se ha realizado con la finalidad de comprender los temas de Producto Vectorial y Producto Mixto, y en ciertos casos, los de Producto Escalar. Para Producto Vectorial se debe recordar que la magnitud del vector resultante es igual al valor del área del paralelogramo; con esto, puede facilitarse la obtención de ese valor y comprobarlo mediante los métodos analíticos que se aprenden; para Producto Mixto se puede trabajar de la misma manera, pero considerando ya no sólo el área del cuadrilátero, sino el paralelepípedo que llegaría a formar; mientras que, para Producto Escalar, se puede hacer uso de los ángulos del plano y, asimismo, comprobar la validez de las expresiones.

Aplicación

Como se indicó en el párrafo anterior, este recurso se ajusta excelentemente en temas como: a) Producto Escalar, b) Producto Vectorial y c) Producto Mixto.

Pieza #5: Varillas de sostenimiento

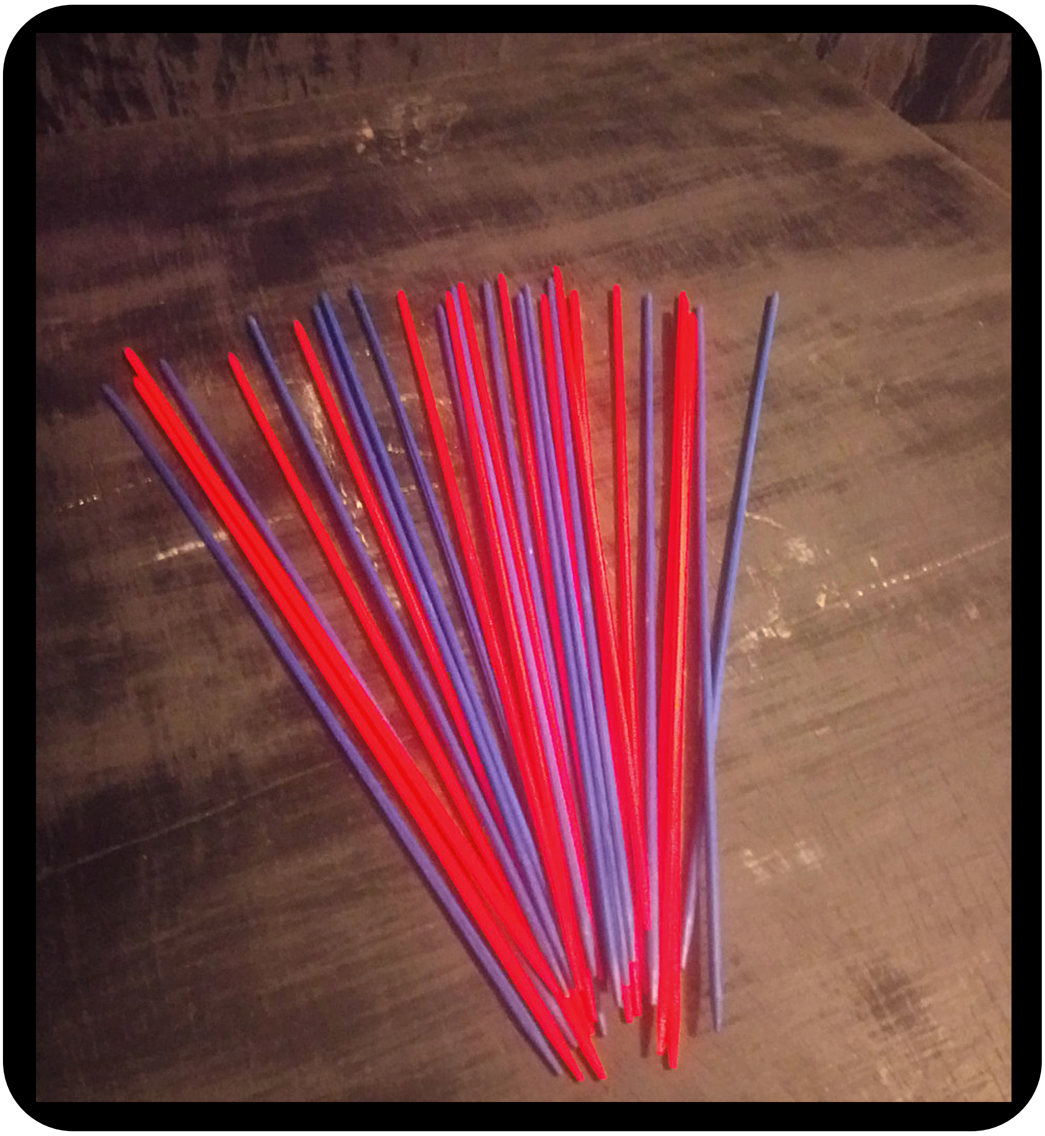


Figura 9. Varillas de sostenimiento

Descripción

Este recurso puede servir como un proceso alternativo, complementario de la pieza del sistema de referencia. Se trata de varias varillas de madera de aproximadamente 30 cm de longitud, agrupadas de dos colores: azul y rojo. Sirven como apoyo de los vectores que se ubican en el sistema de referencia para un mejor soporte de ellos, según lo requieran los ejercicios.

Debido a que se tratan de varillas de madera pueden llegar a ser ligeros y de fácil traslado y, al tratarse de una pieza complementaria, es sencillo de reemplazar en caso de que se rompa o se pierda. Por esto, pueden ser los mismos estudiantes quienes cuenten con este tipo de piezas propias. Siguiendo esta línea, en el caso de que se trabaje con grupos de estudiantes, se pueden encontrar más de estas varillas con el fin de contar con la cantidad necesaria para todos los grupos, o individualmente.

Funcionamiento

Las varillas se han dividido en dos colores para darles dos funcionamientos distintos:
Los de color azul sirven como apoyo o soporte de los vectores, es decir, se incrustan en los agujeros de cada intersección de manera que sostengan los vectores con los que se está trabajando. Los de color rojo, más que como soporte, ayudan a determinar los puntos de intersección basados en cada componente; es decir, ayudan a señalar y destacar los puntos en el espacio mediante las componentes.

Finalidad

La importancia de este material radica en el hecho de que ha sido requerido con el fin de reincidir un factor para que los estudiantes encuentren más sencillamente las componentes e intersecciones en cada plano, fáciles de explicar por el docente y de entender por los estudiantes. En otras palabras, este recurso facilita la ubicación del vector al hacerlo paso por paso debido a que las varillas sirven de soporte; además de que, gracias a esto, se determinará la ubicación del vector con mayor precisión en sus tres componentes.

Aplicación

Debido a que éste es un complemento de la *Pieza #1: Sistema de Referencia* se puede usar en todos los temas indicados, especialmente, en lo que se necesite utilizar el sistema de referencia y los vectores en el espacio.

SEGUNDA PARTE: ACTIVIDADES DE APLICACIÓN

Esta segunda parte del texto corresponde al desarrollo de las actividades de aplicación del material elaborado para los temas de Álgebra Vectorial.

Está constituido por varias tareas que el docente debe realizar para una correcta explicación del contenido, ya sea con la utilización del material didáctico u otro tipo de recursos que faciliten la enseñanza. Cada tema presenta su respectivo objetivo y los subtemas a trabajarse con más detalle, enfocados en el docente; y, tras cada subtema, se encontrarán una serie de consejos y/o conclusiones necesarias para el aprendizaje de los alumnos; así como también, la resolución de ejercicios y demás ejemplos.

La utilización de los recursos va en concordancia con el programa de estudios de Matemática a seguir en Tercer Año de Bachillerato en los temas de Álgebra Vectorial. Para ello, se pide al docente que prepare el material con antelación a la clase y, de ser necesario, les pida a los estudiantes que preparen los suyos, al igual que se les solicite que participen activamente y colaboren con el docente y entre ellos, con el objetivo de que la realización de la clase sea apropiada.

Es importante mencionar que este texto puede servir como complemento a las clases habituales del docente puesto que se ha armado de manera que esclarezca en qué situaciones se utiliza, cómo utilizarlo y aplicarlo; sin embargo, no estará estructurado como una receta para seguir al pie de la letra, sino a modo de sugerencia, por lo que el propio docente podrá identificar lo que sea más apto para los estudiantes dependiendo de las dificultades de los contenidos, las comodidades de aplicación, etc.

VECTORES

OBJETIVO

Diferenciar los vectores, su estructura, su funcionamiento y su representación de manera que se pueda trabajar con ellos en distintas actividades de aplicación, a través del uso de material elaborado y otros recursos educativos.

En esta unidad trabajaremos los siguientes temas:

- Vectores fijos
- Equipolencia de vectores
- Vectores libres

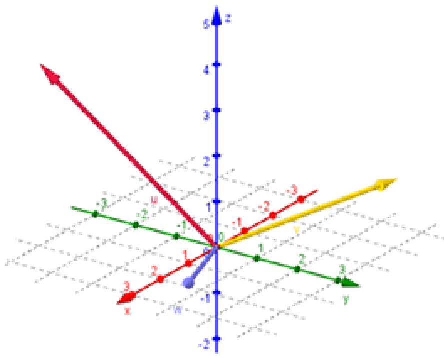


Figura 1. Imagen inicial de Vectores

Fuente: Universidad Tecnológica Nacional de Buenos Aires

Vectores fijos

Actividad del docente

Para comenzar, es necesario recordar que éste es un tema meramente introductorio, por lo que su explicación no necesita de mucha exploración. Por ello, se recomienda al docente recurrir a actividades como las siguientes:

- Se puede empezar con una lluvia de ideas propiciada por todos los estudiantes, ya sea, sólo de forma oral o con la ayuda del pizarrón. Para ponerlo en acción, se les hace a los alumnos preguntas como recordatorio de tipo:

Duración: 10 minutos

1. ¿Qué son las magnitudes vectoriales?
2. Ejemplifique algunas magnitudes vectoriales.
3. ¿Qué es un vector?
4. ¿Cómo se determina un vector fijo?
5. Defina lo que entiende por módulo, dirección y sentido.
6. ¿Cómo representamos geométricamente un vector?
7. ¿Cómo se designa o identifica un vector?

Se sugiere que el docente ponga en consideración lo siguiente:
a) Puede hacer las preguntas en forma oral hacia toda la clase y hacer que algún estudiante responda individualmente o que lo hagan todos en general, según se considere la facilidad de las preguntas.
b) Asimismo, se puede considerar responderlas con el uso del pizarrón ya sea: escribiendo las ideas, con gráficos o diagramas construidos, etc.
c) Como alternativa, se puede utilizar cualquiera de los vectores del set de material didáctico como apoyo visual y más completo.

A continuación, se presenta una referencia a las preguntas planteadas y las posibles respuestas que podrían dar los estudiantes; acompañadas por algunos ejemplos que pueden ser representados en el pizarrón o con el material, según sea lo más favorable:

1. ¿Qué son las magnitudes vectoriales?

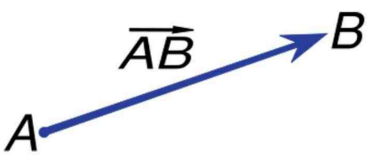
Las magnitudes vectoriales son aquellas cantidades que requieren de tres datos para quedar completamente determinados: módulo, dirección y sentido. (**)

2. Ejemplifique algunas magnitudes vectoriales:

Algunos ejemplos de cantidades vectoriales son: desplazamiento lineal, velocidad lineal, aceleración lineal, desplazamiento angular, velocidad angular, aceleración angular, fuerza, torque, momentum lineal, momentum angular, intensidad de campo gravitacional, intensidad de campo eléctrico, intensidad de campo magnético, y muchas otras más, sobre todo cualquiera relacionadas con contenidos de Física. (**)

3. ¿Qué es un vector?

Es la forma de representar matemáticamente las magnitudes vectoriales. (**)



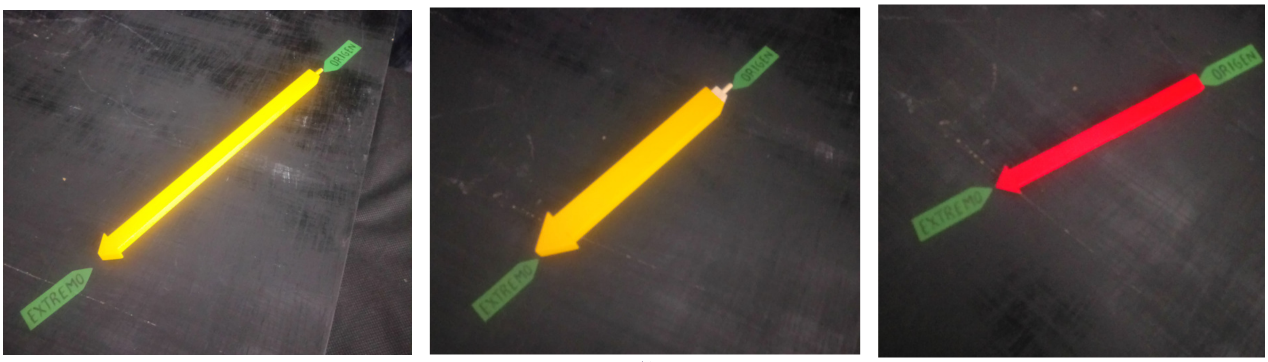
4. ¿Cómo se determina un vector fijo?

Un vector fijo une dos puntos del espacio a través de un segmento de recta, con un punto de origen y un extremo, y que cuenta con tres parámetros: módulo, dirección y sentido. (**)

(**) Avecillas, (2008). Libro de Física. Segundo Tomo

Ejemplo: Colocar el punto (2, 4, 3) y determinar el vector en el material concreto o en el pizarrón. Exponer los tres parámetros con el vector establecido.

Para la utilización del material concreto en esta pregunta (Figura 2) se puede simplemente señalar, en cada tipo de vector, la parte correspondiente a cada punto: las saetas de los vectores, llegarían a ser el punto de extremo; mientras que la pequeña punta de inserción en la parte inferior de los vectores del tipo 1 -como se muestra en (a)- y del tipo 2 -como se muestra en (b)- se reconoce como el origen; los mismo en la base del vector del tipo 3.



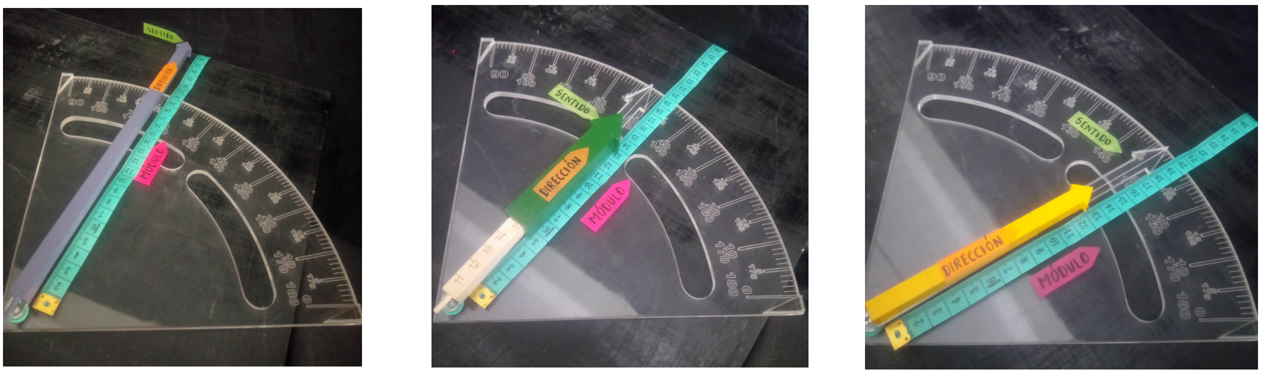
(a) (b) (c)

Figura 2. Vectores fijos

5. Defina lo que entiende por módulo, dirección y sentido:

El módulo es el tamaño o la magnitud del vector (número); la dirección del vector es la inclinación de la recta que se tiene como referencia y que une los puntos con los que se forma el segmento; y el sentido se define sobre la recta siguiendo la orientación considerada y está definida por la punta de la flecha. (***)

Utilizar tres vectores distintos (pueden o no ser del mismo diseño); demostrar los distintos tamaños, ubicarlos en distintas direcciones y cambiar el sentido. Puede usarse también este mismo proceso en el pizarrón graficando los vectores.
Con el material, se puede proceder como indica la Figura 3, seguida de su explicación:



(a) (b) (c)

Figura 3. Módulo, dirección y sentido de los vectores

(***) Recuperado en: https://www.fisic.ch/contenidos/elementos-matem%C3%A1ticos-b%C3%A1sicos/vectores/

En (a) se observa que:
i) Hay distintos tamaños de vectores, separados por colores, con los cuales se podrán comparar los módulos.
ii) Para explicar la dirección, se puede ubicar la flecha en cualquier ángulo e irlo cambiando gradualmente; o también se puede usar más de un elemento en distintos ángulos para diferenciar las direcciones que toma el vector.
iii) Mientras tanto, el sentido puede identificarse fácilmente con la saeta del vector; se puede voltear varias veces el vector (y con diferentes direcciones) para mejor entendimiento.

En (b) se destaca lo siguiente:
i) Este tipo de vector se adapta de manera muy simple al cambio de magnitud ya que cuenta con una extensión que regula su tamaño, por lo que se puede diferenciar y comparar dimensiones de manera rápida y fácil.
ii) Para la explicación de la dirección, se puede cambiar el ángulo en que se vaya colocando el vector.
iii) El sentido se distingue fácilmente con la saeta del vector, determinando a dónde indica o se dirige ésta.

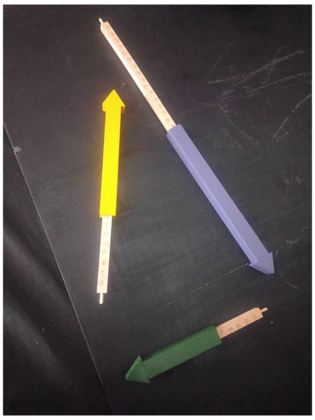
Con (c) se tiene que:
i) Con este diseño de vector la comparación de magnitudes también es sencilla de observar ya que se arma según las unidades que se desee poner, haciendo que se encuentre la diferencia de tamaño.
ii) Asimismo, para la dirección del vector, simplemente se varían los ángulos del vector.
iii) De la misma manera se procede para la explicación del sentido, debido a la orientación de su saeta.

6. ¿Cómo se representa geométricamente un vector?

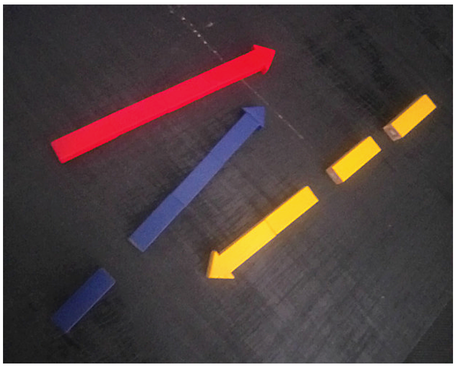
Un vector se lo representa por medio de una flecha que indica sus tres parámetros: la dirección es la línea del segmento que une los puntos; el sentido está definido por la saeta; y su módulo se determina por el tamaño o longitud que tendrá el segmento. (*)

Como ejemplo, al ser flechas muy básicas, el docente puede simplemente mostrar algunas muestras de vectores del set. Los ejemplares de vectores, basándose en el diseño elaborado, lucen como muestra la Figura 4, recordando que en (a) se indica el primer tipo de diseño, en (b) el segundo y en (c) el tercero:

(a)



(b)



(c)

Figura 4. Representación geométrica de un vector

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.

7. ¿Cómo se designa o identifica un vector?

Un vector se designa por la denominación de su segmento, es decir, por los puntos por los que está formado, con letras mayúsculas y una flecha sobre ellas. (**)

$$\overrightarrow{AB}$$

Participación del estudiante

Los estudiantes notarán que este primer tema es meramente introductorio y necesita de la activación de ciertos conocimientos previos que, en este caso, son sumamente sencillos.

Como se pudo ver en la primera de las actividades que planteó el docente, se realizaron algunas preguntas sobre el tema; para esto, los estudiantes deben escuchar cada una de ellas y recordar lo que han aprendido sobre vectores para poder responderlas.

1. ¿Qué son las magnitudes vectoriales?
2. Ejemplifique algunas magnitudes vectoriales.

Con las dos primeras preguntas, al ser esencialmente teóricas, se puede recurrir a la técnica de la lluvia de ideas, por la cual pueden expresar todo tipo de pensamientos que tengan sobre lo que son las magnitudes vectoriales y sus ejemplos, ya sean con ideas completas o con aquellas que sirvan para completar la información que se busca. Los estudiantes pueden participar diciendo:

- Las magnitudes vectoriales son diferentes a las escalares.
- Las magnitudes vectoriales son los vectores.
- Las magnitudes vectoriales cuentan con magnitud, dirección y sentido.
- Algunos ejemplos de magnitudes vectoriales pueden ser: la velocidad o la aceleración.

Todas estas ideas se manifiestan en forma oral y el docente puede escribirlas en el pizarrón, o simplemente mantenerse repitiéndolas para que, así, los estudiantes las relacionen y puedan armar un concepto ya establecido o más claro, pero, sobre todo, para recordar el contenido que se pide.

(**) Avecillas, (2008). Libro de Física. Segundo Tomo

3. ¿Qué es un vector?
4. ¿Cómo se determina un vector fijo?
5. Defina lo que entiende por módulo, dirección y sentido.
6. ¿Cómo se representa geométricamente un vector?
7. ¿Cómo se designa o identifica un vector?

A estas últimas preguntas, el alumno las puede relacionar con imágenes gráficas (en su cabeza) de cómo se ve un vector. Recordarán que los vectores se representan con flechas en las que se encuentran implementadas sus partes. Algunas de las ideas que pueden expresar al respecto son:

- Un vector está representada por flechas.
- Las partes de un vector son: módulo, dirección y sentido.
- El módulo es el tamaño de vector.
- La dirección tiene que ver con el ángulo, para dónde está dirigido el vector.
- El sentido permite demostrar si el vector es positivo o negativo.
- En la flecha, el módulo se representa según el tamaño que esta tiene; el sentido se representa con la saeta, observando hacia dónde apunta; y la dirección se observa en la línea de la flecha (línea imaginaria) que está dada por un ángulo.
- El vector tiene un origen y un extremo.
- El origen es el punto donde empieza el vector y el extremo es el final, termina con la saeta de la flecha.
- En forma matemática, un vector se designa con una letra mayúscula y una flecha en la parte superior.

Al relacionar todos estos pensamientos, los alumnos son capaces de conceptualizar y responder las preguntas planteadas. Tras esta actividad puede notarse que se plasman distintas técnicas educativas, destacándose la lluvia de ideas por medio de la cual se exponen todos los conocimientos sobre vectores que adquirieron los estudiantes permitiendo que, aquellos que no recuerdan lo suficiente o que conocen menos, puedan lograr aprender nuevamente y con ayuda no sólo del maestro, sino de sus propios compañeros.

Asimismo, si el docente pretende utilizar algún recurso en esta actividad, el estudiante debe relacionarlo con lo que conoce teóricamente.

- En la pregunta 4, en la que se colocó un punto en el espacio, se percatarán de que su ubicación es sencilla pero, sobre todo, muy visible, pues el punto señalado define correctamente las coordenadas con las cuales se podrá fijar el vector. Luego de esto, los estudiantes tendrán una visión más clara de cómo se observa el vector en el espacio, pero, principalmente, de la ubicación de su origen y la de su extremo.
- En la pregunta 5 se pretende observar y diferenciar módulos, direcciones y sentidos de los vectores, para lo cual se contará con todos los ejemplares de vectores mostrados para que sean fáciles de distinguir y señalar sus partes. Los estudiantes pueden comparar estos vectores y establecer las definiciones en ellos, es decir, controlar que lo que se determinó en el concepto se adapte a lo que se observa en el material. A simple vista, se notará la diferencia de los módulos (por las medidas del vector); se verificará que, la posición en la que se ubican, muestran distintos ángulos (línea imaginaria) en el espacio; e, igualmente, el sentido demostrado con la saeta de la flecha.

Por otro lado, las actividades en las que se destaca el uso de cada ejemplar de vectores, según su diseño, dejarán que los estudiantes descubran el diseño que más se adapte a sus necesidades. Tal y como se describió en las actividades del docente, cada uno de los diseños de vectores presenta características distintas que funcionan de varias maneras de forma que los estudiantes puedan comprender más eficazmente los contenidos.

- Con los dos primeros diseños de vectores, los estudiantes comprenderán la representación de vector en su totalidad. El módulo está representado con distintos colores, es decir, los vectores son de un color determinado según su tamaño, por lo que la diferenciación de vectores por su módulo se hará diferenciando colores; a más de que el segundo diseño contiene su propia regleta con la que se puede ajustar el tamaño; y, el tercero, se completa con unidades de “mini-vectores”. Asimismo, el ángulo en que éstos sean mostrados ayudarán a observar la dirección que siguen; y, la saeta presente en el vector les señalará el sentido.
- Finalmente, los estudiantes serán capaces de visualizar la forma de ver un vector en el espacio, puesto que se ha traspasado lo que se ha aprendido en el plano, lo que ellos consideran abstracto.

Actividad del docente

Para desarrollar el aprendizaje cognitivo de los alumnos, el docente puede originar una serie de tareas que activen las habilidades y afiancen su aprendizaje. Se sugiere que se realice lo siguiente:

Duración: 7 minutos

- Se necesitaría que el docente revise el set de vectores para organizarlos de tal manera que cada uno de ellos pueda ser entregado a cada alumno. En el caso de que no se ajuste la cantidad ideal, se propone que el docente, previamente, haya solicitado a sus alumnos que lleven a la clase algunos vectores elaborados con materiales caseros y simples.
- Con este material, se pretende que los alumnos visualicen, analicen y respondan las preguntas que se plantearon. Ellos, mediante su propio razonamiento, pueden ser capaces de comprender con mayor amplitud la utilidad de los vectores y su futura aplicación.

Participación del estudiante

En el caso que los estudiantes trabajen con sus vectores propios, podrán manipularlos por su cuenta para reforzar los conocimientos. Se propone que hagan lo siguiente:

- Determinar el tipo o diseño de vector con los que se están trabajando para comprender su funcionamiento y poder manejarlos más adecuadamente.
- Comparar las magnitudes o los módulos de estos vectores ubicando los tres en línea y verificando la diferencia entre ellos; ya sea comprobando las magnitudes establecidas en el manual de los vectores.
- Se recomienda también que los estudiantes ubiquen estos vectores en diferentes ángulos para comprobar las distintas direcciones que pueden tomar; igual que con el sentido, con las que se puede mantener la misma dirección y simplemente invertir el vector para cambiarlo.

Equipolencia de vectores

Actividad del docente

Para el desarrollo de este tema, siendo éste muy sencillo, es oportuno contar con el uso de material concreto. Se puede utilizar los tres tipos de maneras distintas, recurriendo a la creatividad del docente, pero se sugieren las siguientes actividades:

Duración: 10 minutos

- Se recomienda que, antes de explicar la definición de Equipolencia de Vectores, se trabaje algunos ejemplos con el material didáctico, de manera que sean los mismos estudiantes quienes descubran de lo que se trata. Se trabajará con las piezas de vectores.
- Para trabajar estos ejemplos, se debe buscar vectores que cumplan el concepto, sin importar el diseño. La Figura 5 muestra algunas formas de presentar estos vectores.

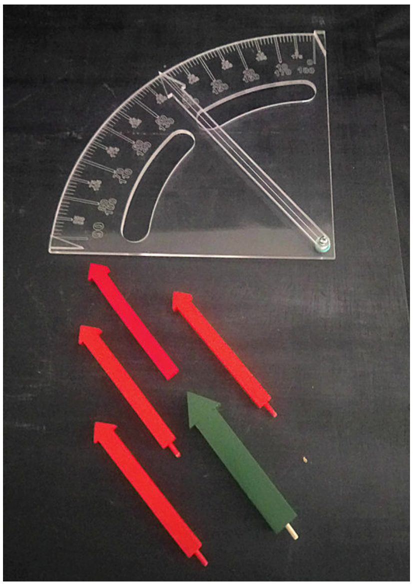


Figura 5. Vectores equipolentes

- Se entrega a los alummos (o grupos) dos vectores (fijarse que cumplan la definición). Ellos observarán, analizarán y, con preguntas guía del docente, descubrirán el concepto. Se recomiendan que sean preguntas sencillas pero funcionales. Aquí se muestran las posibles interrogantes junto con las posibles respuestas de los estudiantes.

1. ¿Cómo están posicionados los vectores?

Los tres vectores se encuentran en la misma posición: con la saeta hacia el mismo sentido y la misma dirección.

2. ¿Qué observa en cuanto al módulo de los vectores?

Se observa que los tres tienen el mismo módulo.

3. A partir de esto, ¿a qué conclusión llega?

Que los tres vectores se encuentran en la misma posición y tienen el mismo módulo; es decir, son iguales.

- Tras estas ideas de los alumnos se llega a la definición (*), que es:

Dos vectores son equipolentes si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

Participación del estudiante

En cuanto a este tema, se pretende que sean los propios alumnos quienes descubran su conceptualización a través de las ejemplificaciones que les brinde el docente. Pueden llegar a resolver estos preceptos si estudian muy detalladamente los elementos y a con ayuda de algunas preguntas de apoyo. Para alcanzar este objetivo, se sugiere que procedan así:

- Antes que nada, evitar mover los vectores con los que se trabaja debido a que su ubicación perfecta es indispensable para obtener una definición correcta.
- Visualizar detenidamente los vectores: el módulo, dirección y sentido de cada uno. Se puede utilizar cualquier tipo de herramienta didáctica, ya sea: regla, flexómetro, cinta métrica, graduador, etc.

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.

- Comparar estos parámetros, esto es, tomar en cuenta las semejanzas y/o diferencias entre los vectores, si existen. Para realizar esto, los alumnos pueden utilizar las herramientas con las que cuentan y determinar las dimensiones (la longitud de los vectores y el ángulo en el que está posicionados).
- Una vez notadas estas peculiaridades, especular qué es lo que desencadenan, cómo se podría armar un concepto, qué conclusiones obtuvieron.

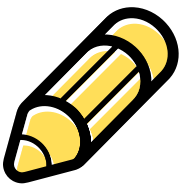
Además, se plantean preguntas que les pueden servir de guía para desarrollar el concepto, mismas que tienen que ver con la posición de los vectores, su módulo y, finalmente, sus conclusiones; por lo que las respuestas que los estudiantes pueden dar ante éstas se puede expresar así:

- La posición en la que se encuentran los vectores son exactamente iguales, esto es, están ubicados sobre líneas imaginarias paralelas o con el mismo ángulo; así como también, la saeta de los vectores señalan hacia el mismo lado, es decir, son sentidos iguales.
- Se observa, además, que los vectores tienen la misma longitud, en otras palabras, tienen módulos iguales.
- Se concluye, entonces, que los vectores tienen la misma magnitud, la misma dirección y el mismo sentido.

Luego de todas estas ideas propuestas por los propios alumnos tras la revisión exhaustiva de estos vectores, serán capaces de definir el tema pues ya habrán tenido las pautas necesarias para efectuar su propio apredizaje.

Actividad del docente

Como parte del estudio de este tema, es inminente demostrar que, dados cualquier vector y cualquier punto en el espacio, existirá un único vector con origen en ese punto y equipolente al vector; asimismo, un único vector con extremo en el punto y equipolente al vector. Para analizarlo, se procede a la utilización del material de la siguiente manera:



Duración: 5 minutos

- Con el sistema de referencia se ubica cualquier punto y cualquier vector.
- Se busca un vector que tenga el mismo módulo que el vector dado, para que pueda cumplir las condiciones de vector equipolente.
- Ubicar este nuevo vector, primero con origen en el punto dado; y, segundo, con extremo en el mismo punto.
- Finalmente, ubique cualquier otro vector de la misma forma que el anterior para, así, demostrar que no puede ser equipolente.

Participación del estudiante

Por otro lado, los estudiantes deben tomar muy en cuenta otra de las actividades que se plantearon y que están muy relacionadas con este tema. Debido a que se pretende demostrar una proposición, el docente sigue una serie de pasos y en el que hace uso del material didáctico.

- Se observará que se ha colocado un vector en el sistema de referencia en cualquier punto del sistema de referencia.
- Se ha ubicado un vector que se ajuste hasta el punto dado: primero con extremo en dicho punto y, segundo, con origen en el punto.
- Luego, para la comparación, se ha colocado otro vector en cualquier posición deseada.

El estudiante, una vez realizada y explicada la actividad por parte del docente, debe notar lo que han logrado observar. Para detallar más explícitamente lo que pueden llegar a ver, se recomienda que hagan lo siguiente:

- Se debe observar, en primer lugar, el punto y el vector que se han establecido en el sistema de referencia.
- Será necesario hacer un recordatorio mental del origen y extremo de los vectores para visualizar el vector que se debe "graficar" en el sistema de referencia, debido a que el nuevo vector que se ha graficado debe tener su origen en el punto y su extremo en el vector dados.
- Dado que se colocó otro vector al azar para poder compararlos, se deberá fijar cada elemento de estos dos; es decir, se comparan los puntos de origen y los extremos.
- Se reconocerá que ninguno de ellos es igual y que si se coloca otro de los vectores tampoco será igual.
- Por tanto, se concluye que dados un punto y un vector en el espacio, existirá solo un vector con origen en el punto y equipolente al vector; asimismo con un vector cuyo extremo esté en el punto dado y equipolente al vector.
- De esa manera se demostraría la validez de la proposición.

Es así que los estudiantes verificarán que las actividades llegan a ser muy funcionales, sobre todo si se realizan en el material; además, se permite que la visualización de estos vectores llegan a ser más notables y efectivas.

Vectores libres

La explicación de este tema se torna más sencilla debido a que está muy relacionado con el tema anterior, Equipolencia de Vectores, por lo que, como alternativa, se puede utilizar el material didáctico.

Duración: 5 minutos

- Ya conocida la definición de Vectores Equipolentes, se entrega a los alumnos grupos de tres vectores que cumplan las respectivas condiciones, como muestra la Figura 6:

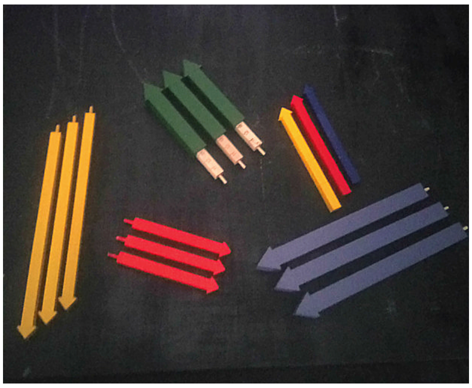


Figura 6. Vectores libres

Participación del estudiante

Con este contenido se pretende aglomerar y relacionar los contenidos ya estudiados e identificar las posibles utilidades de los temas anteriores.

Como parte de la primera actividad se cuenta con el apoyo visual del material. Se ha procedido de la misma manera que en el tema anterior, el cual fue trabajado y desarrollado por los mismos estudiantes para conocer su conceptualización. Ahora, se recordará la definición y la secuencia del tema anterior y se lo transportará al nuevo contenido, dejando nuevamente que sean ellos quienes experimenten y descubran lo que se está trabajando; Vectores Fijos, en este caso.

Como parte de la primera actividad se cuenta con el apoyo visual del material. Se ha procedido de la misma manera que en el tema anterior, el cual fue trabajado y desarrollado por los mismos estudiantes para conocer su conceptualización. Ahora, se recordará la definición y la secuencia del tema anterior y se lo transportará al nuevo contenido, dejando nuevamente que sean ellos quienes experimenten y descubran lo que se está trabajando; Vectores Fijos, en este caso.

En esta actividad, se trabajó con ejemplares de vectores equipolentes ordenados por grupos distintos. Es entonces que, al manipularlos, los estudiantes podrán distiguir que se están utilizando Vectores Equipolentes. El procedimiento que deben seguir los estudiantes sigue estos pasos:

- Igual que antes, se debe evitar mover los vectores con los que se trabaja, ninguno de ellos, debido a que su ubicación perfecta es indispensable para obtener una definición correcta.
- Se visualiza cómo están conformados los grupos de vectores y se descubre que hay tres vectores equipolentes en cada uno de ellos; sabiendo ya lo que son vectores equipolentes.
- Notar que los grupos de vectores equipolentes son diferentes entre sí; en otras palabras, los grupos de vectores son distintos, mas, los vectores dentro de cada grupo son exactamente iguales, es decir, son equipolentes.
- Una vez notadas estas peculiaridades y haber comparado los grupos de vectores, especular qué es lo que se desencadena tras esta reflexión, cómo se podría armar un concepto, qué conclusiones obtuvieron.

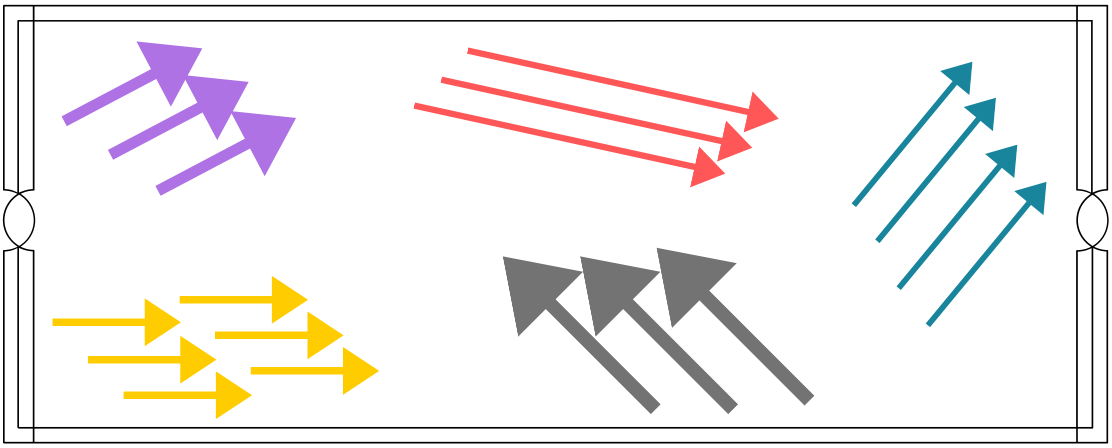
Es necesario comentar que la forma de desarrollar esta actividad depende de cómo haya decidido trabajar el docente, o sea, si puso los ejemplares de vectores para los estudiantes en forma individual o en forma grupal.

- Si se hizo lo primero, los estudiantes desde sus mesas de trabajo, pupitres o mesas pueden examinar el material y seguir los pasos que se detallaron en el párrafo anterior, sacando sus notas para organizar sus ideas y construir la definición.
- Si se hizo lo segundo y los estudiantes trabajaron en grupo, igualmente pueden examinar entre todos el material, siguiendo los pasos señalados; pero, en este caso, sería muy recomendable que intercambien ideas todos los miembros del grupo, que digan lo que cada uno observó y, en forma general, elaboren su propio concepto.

Actividad del docente

Duración: 5 minutos

- En el caso que no se quiera hacer utilizar el material, el docente puede trabajar con la siguiente alternativa.
- Puede hacerse con la gráfica de algunos ejemplos en el pizarrón, intentando ejemplificarlos de la manera más precisa y concreta, para que los alumnos logren identificar a lo que se quiere llegar.
- Se pueden hacer ejemplos con conjuntos de vectores que cumplan la definición de Vectores libres, así:



Participación del estudiante

En este mismo sentido, en el caso de que el docente decida no utilizar los ejemplares de vectores, se graficará en la pizarra modelos similares a los que se usó en los ejemplos concretos. El docente pondrá grupos de vectores equipolentes en el pizarrón y permitirá que los alumnos identifiquen de qué se puede tratar.

El proceso que siguen los estudiantes es bastante semejante al ya mencionado, con la única diferencia de que esta vez toda la clase, en forma general, podrán exponer sus ideas y socializarlas con todos. La finalidad de esta actividad radica en el hecho de que los estudiantes podrán activarse y participar más abiertamente al ver al resto de sus compañeros colaborando con sus conocimientos.

- Asimismo, los estudiantes deben empezar la actividad observando en detalle los vectores dibujados en la pizarra, su estructura, sus características, de manera que lleguen a tener ideas de lo que se está trabajando.
- Estas ideas servirán para socializarlas con los demás alumnos y, finalmente, obtener una definición sobre Vectores Fijos basándose en lo observado (cómo son los vectores de cada grupo, cuál es la diferencia entre los grupos, etc.).

Duración: 5 minutos

Actividad del docente

Otra alternativa que se puede añadir es que, en lugar de utilizar los vectores del set, se entreguen a los alumnos unas tarjetas que muestren las ilustraciones de los vectores libres, asimismo con distintas variantes, de manera que resulten más explícitas para el mejor entendimiento de ellos. Se presentan dos formas que puedan ser utilizadas, como se ve en la Figura 7 (en la página 197 podrá encontrar estos ejemplos maximizados), o el docente puede crear sus propios ejemplos:

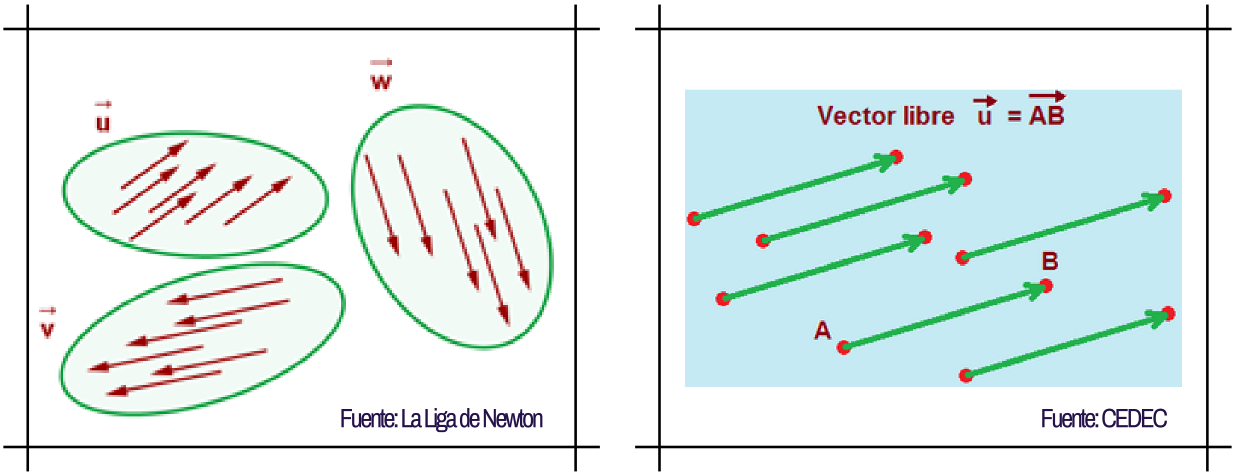


Figura 7. Otros ejemplos de Vectores libres

- Se puede recurrir a los propios alumnos para que analicen el material y descubran el concepto de Vectores Libres (*); o, en su defecto, el docente puede simplemente exponerlo y explicarlo. Entonces, se tiene:

Se denomina Vector Libre al conjunto de vectores fijos equipolentes a uno dado.

- A continuación, se les pide a los alumnos que observen más detenidamente el material que se les entregó y, en grupos, analicen y conceptualicen la dirección, el módulo y el sentido del Vector Libre. La respuesta más próxima que se pueda obtener es la siguiente:

El Vector Libre, al tratarse de un conjunto de Vectores Equipolentes, y recordando la definición de estos últimos, se llega a la conclusión de que la dirección, el módulo y el sentido del Vector Libre coincide con la dirección, el módulo y el sentido de cualquiera de los vectores representantes que lo conforman. (*)

Participación del estudiante

Otra de las alternativas que se propusieron para el docente fue entregar unas tarjetas con los ejemplos plasmados en ellas; esto puede ser también realizado en forma individual para los alumnos, por lo que los estudiantes deberán hacer lo mismo que ya se ha indicado con anterioridad, debido a que el procedimiento es el mismo, lo único que cambia es la manera de enseñarse.

Ya que el propio docente puede exponer esta definición, se recomienda a los estudiantes que, en base a lo que descubrieron siguiendo los pasos que se describieron en estas actividades, sean ellos mismos quienes desarrollen el concepto de Vectores Fijos; sin necesidad de recurrir a la explicación del maestro, sino sólo con el apoyo de los recursos didácticos utilizados.

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.

OPERACIONES CON VECTORES

OBJETIVO

Aplicar los contenidos aprendidos sobre Vectores en dos dimensiones en conceptos más generales y reales, como es el caso de los Vectores en tres dimensiones, a través de la activación de conocimientos previos, con preguntas, representaciones didácticas, y el uso de material elaborado.

En esta unidad se trabajarán los siguientes temas:

- Adición de Vectores. Propiedades
- Multiplicación de un vector por un número real. Propiedades

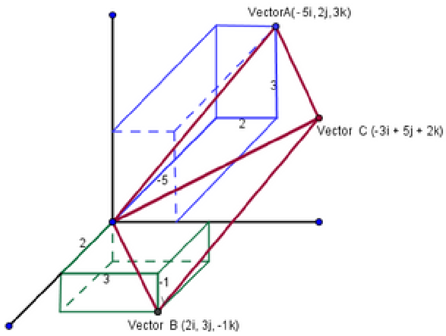


Figura 8. Imagen inicial de Operaciones con Vectores
Fuente: Ingeniería en Sistemas de UAT Matamoros

Adición de Vectores

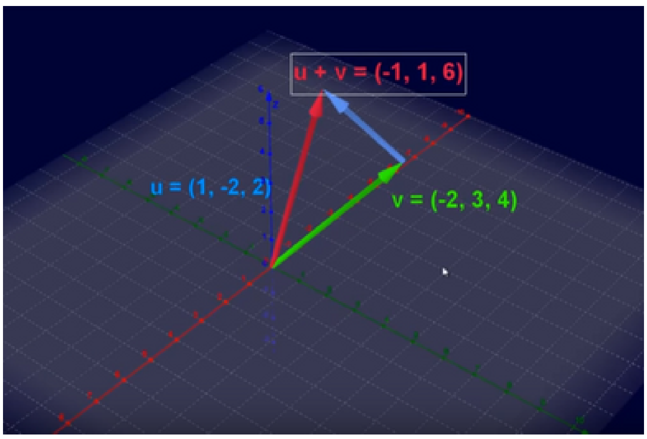


Figura 9. Captura del video explicativo
Fuente: Captura de Youtube

En primera instancia, se sugiere al docente que, previamente y por su cuenta, haya visualizado el siguiente video, con el fin de trasladar estas ilustraciones al material didáctico que se presentará en clase, tratando de adaptarlo de la manera más correcta y eficaz (Figura 9).
El link del video se presenta a continuación:
https://www.youtube.com/watch?v=zQ-GiHU_ckw&feature=youtu.be

Actividad del docente

Éste es uno de los temas más sencillos y, a la vez, más importantes de aprender. Por eso, para comenzar la clase se recomienda que el docente empiece con una pequeña adaptación a la vida real del contenido a estudiarse. A continuación, se muestra alguna opción que pueda serle útil:

Duración: 2 minutos

Para que un automóvil se dirija a determinado punto debe seguir distintas rutas que le permitan, no solamente acortar camino, sino que además le ahorre tiempo. Sin embargo, se debe tomar en cuenta que los automóviles no pueden seguir simplemente cualquier ruta, sino deben fijarse en el sentido en el que esas rutas se encuentran habilitadas. Ante esto, se ha determinado que sea una persona quien, caminando, se dirija hacia ese punto, por supuesto, de forma libre.
Mientras una persona camina, va describiendo sumas de vectores en las que los vectores son sumas de distancias con cierta dirección y sentido.

Participación del estudiante

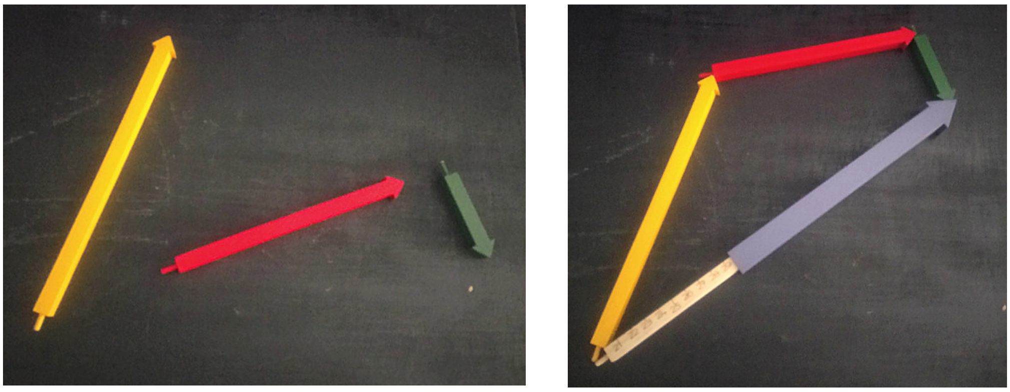
En este tema, el docente empezará con un pequeño ejemplo contextualizado de lo que significa Adición de Vectores. El estudiante debe reconocer los puntos destacados de la historia que son:

- Las direcciones que puede seguir el carro.
- El sentido que siguen las rutas por las que se encaminará el carro.
- La diferencia entre las rutas que sigue el carro y las que sigue la persona en forma libre.
- Cómo se puede determinar la adición de vectores en base a este ejemplo.

Actividad del docente

Asimismo, es necesario reactivar en los alumnos algunos conocimientos previos, los que se aprendieron en clases o años anteriores; sobre todo, se debe tomar en cuenta que la gran mayoría de esos conocimientos se presentaron en dos dimensiones. Por ahora, se utilizará el set de vectores para explicar contenidos básicos (véase la Figura 10).

Duración: 2 minutos



(a) (b)

Figura 10. Suma de vectores en dos dimensiones. Primer Método

Además, se puede realizar algunas interrogantes que serán respondidas por los alumnos, tomando en cuenta que son contenidos elementales que ya se aprendieron en años anteriores. Estas preguntas, entre otras, pueden ser las que se muestran a continuación:

1. ¿Cómo se suman los vectores geométricamente?
2. ¿De qué forma se traslada un vector a otro?

1. ¿Cómo se suman los vectores geométricamente?

Se empieza por ubicar el primer vector que parte desde el punto (0, 0, 0); seguidamente, se coloca el origen del segundo vector en el extremo del primero. Finalmente se une el origen del primer vector con el extremo del segundo para determinar el vector resultante.
También se cuenta con un segundo método, el del paralelogramo.

2. ¿De qué forma se traslada un vector a otro?

Se empieza ubicando los dos vectores desde el punto (0, 0, 0) y, después se traslada paralelamente uno de ellos hasta el origen del otro; luego se completa el paralelogramo y se determina el vector resultante que se coloca entre las dos intersecciones formadas por los dos vectores.

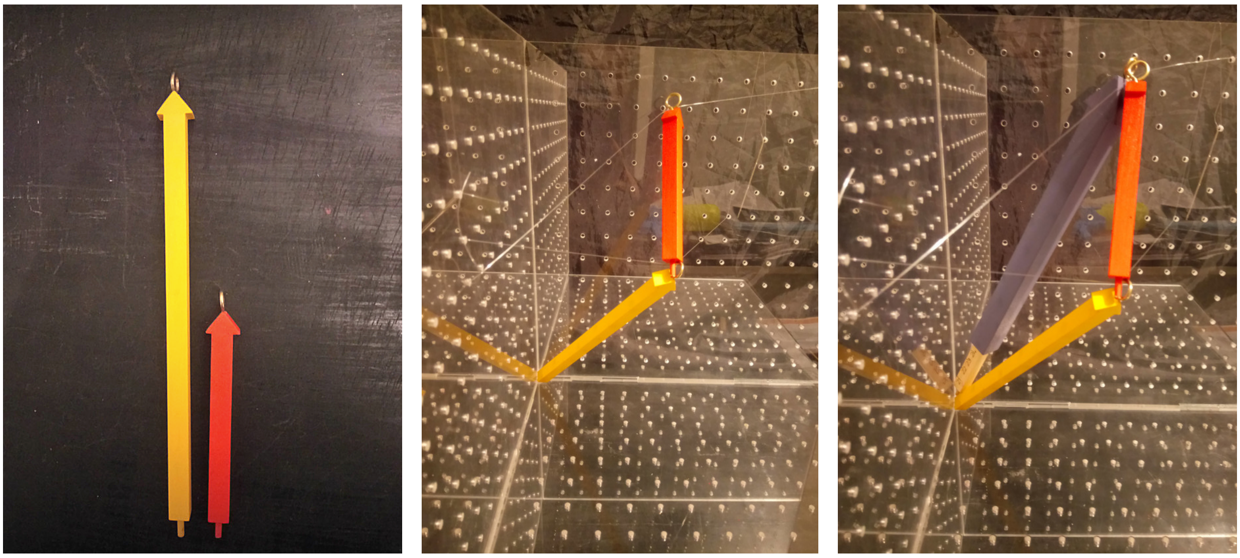
Durante la explicación de las respuestas de estas preguntas, el docente puede hacer uso del material didáctico construido, junto con el de los estudiantes, para aclarar ciertos puntos que puedan quedar disueltos, pero sobre todo, para profundizar aquellos que tienen que ver con la Adición de Vectores de forma gráfica.

El docente está en facultad de elegir el tipo de vector que mejor se adapte a la explicación; aunque se recomienda el primer diseño.

Duración: 8 minutos

Ante esto, se puede proceder así.

1. Se empieza con la elección de dos vectores cualesquiera, como indica la Figura 11(a). Se recomienda que sean distintos entre sí para mayor diferenciación.
2. Se colocan los vectores como se prefiera, es decir, con el sentido y dirección que se elija; así, se obtienen dos vectores que van a ser sumados. En (b) se puede observar este paso.
3. Se señala a los estudiantes cuál es el origen (extremo sin saeta) y final (extremo con saeta) de ambos vectores para que ellos puedan reconocer cómo colocarlos.
4. En (c) se muestra que se adicionan los vectores utilizando el primer método conocido: al final del primer vector se le enlaza el origen del segundo vector. Para esto, se traza el vector resultante que va dirigido desde el origen del primer vector hacia el final del segundo.



(a) (b) (c)

Figura 11. Adición de Vectores

Participación del estudiante

Una vez relacionados estos puntos destacados, se pide a los estudiantes que nuevamente recuerden lo que se aprendió en años anteriores sobre Adición de Vectores en dos dimensiones. El docente utiliza de forma muy básica el material concreto para activar estos conocimientos y, entonces, el estudiante procede así:

- El estudiante recordará cuál es el procedimiento para realizar la Adición de Vectores: en primer lugar, cuando se tienen dos vectores, la suma de ellos se realiza colocando el origen del segundo vector a partir del extremo del primer vector; después, se une el origen del primer vector con el extremo del segundo obteniendo, así, el vector resultante.
- También se utiliza el método del paralelogramo en el que se trasladan los vectores en forma paralela, formando específicamente eso, un paralelogramo.
- Estos aprendizajes se han traspasado de los textos y los cuadernos al material, puesto que, a más de observar el proceso, puede verificarse al manipular este recurso.

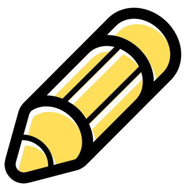
Con estos lineamientos, se pueden establecer unas interrogantes relativas al uso del material en el tema. Las preguntas que realiza el docente se muestran a continuación y los estudiantes deben poner mucho énfasis en los detalles para su correcta respuesta:

1. ¿Cómo se suman los vectores geométricamente?
2. ¿De qué forma se traslada un vector a otro?

- En primer lugar, la posición de los vectores a sumarse parte desde el punto (0, 0, 0).
- Se ubican ambos en el sistema de referencia.
- Se utilizan cualquiera de los métodos para adicionar vectores, usando los pasos que ya se describieron.

El docente ya sabe cómo representar el tema en el material concreto; los estudiantes deben simplemente coordinar sus aprendizajes con lo que observan en el material. Ellos se darán cuenta cómo luce el resultado de la operación, el vector resultante, en el espacio.

Propiedades



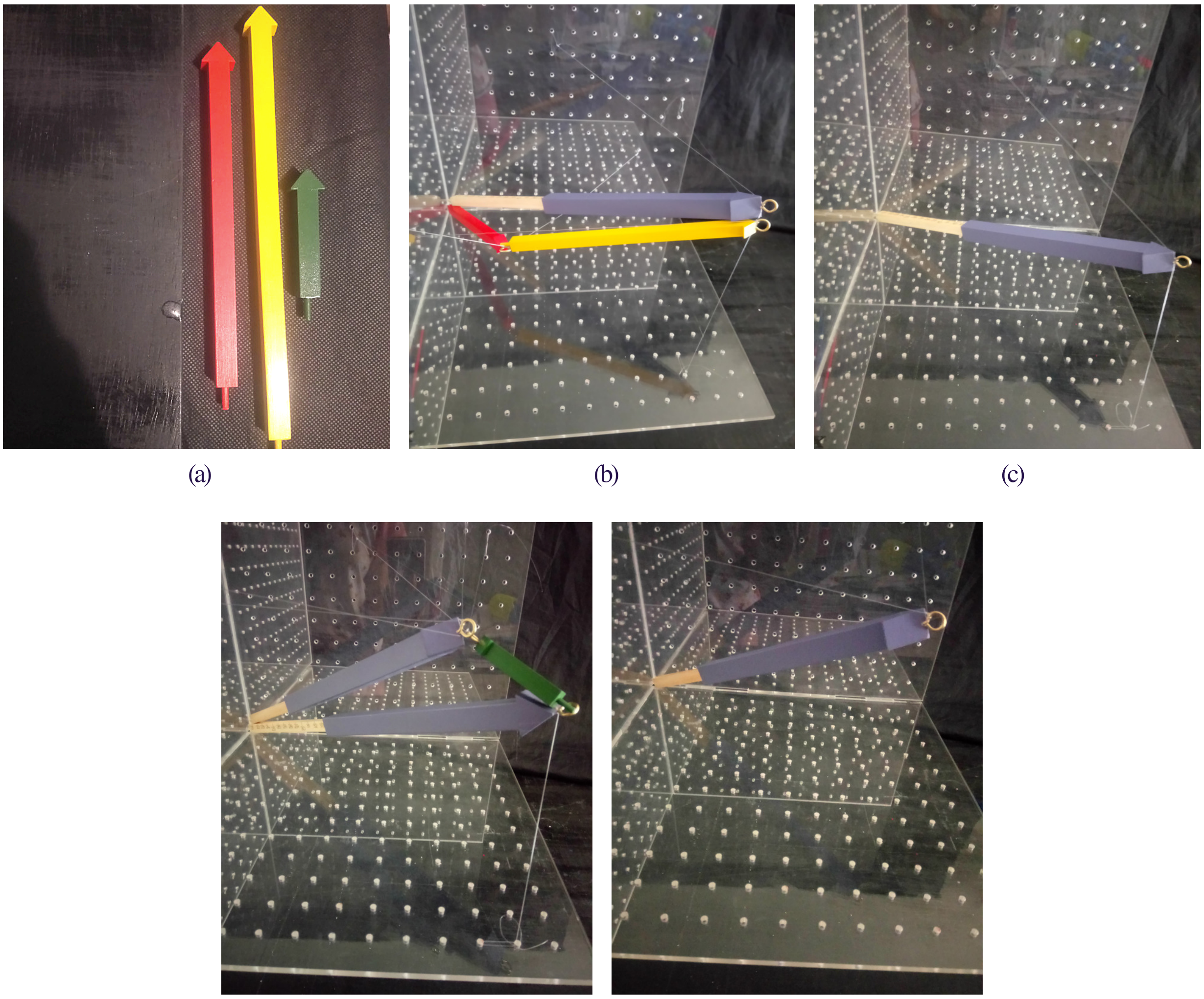
Duración: 30 minutos

Se continúa con las Propiedades de la Adición de Vectores, las cuales son cuatro: Asociativa, Conmutativa, Elemento Neutro y Elemento Opuesto. Se podría recomendar que este contenido sea, de igual forma, trabajado con el material; igualmente, se pretende que sean los propios alumnos quienes lo apliquen y demuestren.

- Los alumnos, en grupos (pueden hacerse cuatro grupos, uno para cada propiedad), deben seguir sus libros y poner en práctica lo que indica cada propiedad.
- Se debe trabajar en el material didáctico como se aprendió en prácticas anteriores, ubicando los vectores y realizando la adición de éstos (o lo que señale la propiedad) gráficamente.
- Comprobar si la propiedad se cumple o no con el ejemplo propuesto a continuación.
- Para esta ejecución, puede utilizarse cualquiera de los vectores del set. Incluso, podría usarse el sistema de referencia como apoyo si se considera necesario.

Asociativa

1. Siguiendo la Figura 12.1, la propiedad asociativa(*) enuncia que $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
2. En (a) se muestran los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ que se utilizarán en este proceso.
3. Para la primera parte, se puede ubicar el vector $\vec{u}$ y sumarle el vector $\vec{v}$, como se ilustra en (b), y se determina el vector resultante (c).
4. A esta, sumarle el vector $\vec{w}$, como indica (d); obtener la última resultante y establecer sus datos (e).



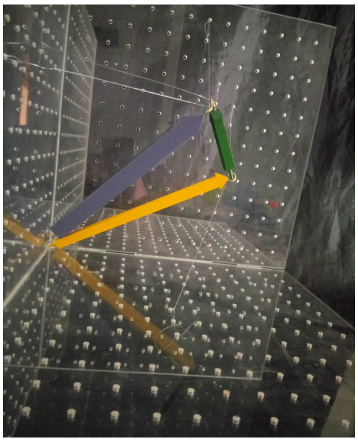
(a) (b) (c)

(d) (e)

Figura 12.1 Propiedad Asociativa de la Adición de Vectores. Primera Parte

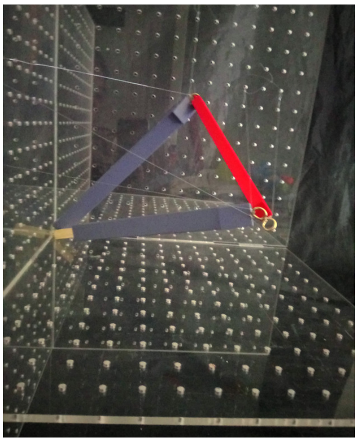
(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.

5. Para la segunda parte (véase la Figura 12.2), se puede empezar colocando el vector $\vec{v}$ y sumarle a este el vector $\vec{w}$, como se muestra en (f). Asimismo se determina el vector resultante. Se retiran los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y se queda sólo el resultante (g).
6. A esta resultante se le suma el vector $\vec{u}$, como se observa en (h); se obtiene la resultante final y se establecen sus datos (i).
7. Finalmente se comparan los datos de las resultantes finales de las dos partes y tienen que ser iguales. De esta manera se comprueba la propiedad.

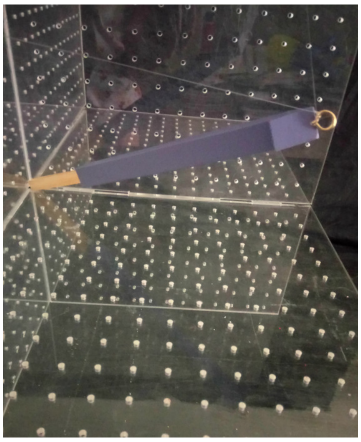


(f)

(g)



(h)



(i)

Figura 12.2 Propiedad Asociativa de la Adición de Vectores. Segunda Parte

Conmutativa

1. La propiedad conmutativa(*) enuncia que $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.
2. Se empieza eligiendo dos vectores del set (a). Para la primera parte se coloca el vector $\vec{u}$, como se observa en (b). Se le adiciona el vector $\vec{v}$, como se ve en (c) y se establece el vector resultante (d). Se obtienen sus datos guiándose en (e).
3. Para la segunda parte, se empieza ubicando el vector $\vec{v}$, como ilustra (f). En (g) se ve que a este vector se le adiciona el vector $\vec{u}$ y se halla la resultante (h). Se obtienen sus datos, para lo que pueden ayudarse en (i). Finalmente, se comparan los datos de ambos vectores resultantes los cuales deben ser iguales. De esta manera se comprueba la propiedad (Figura 13).

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.

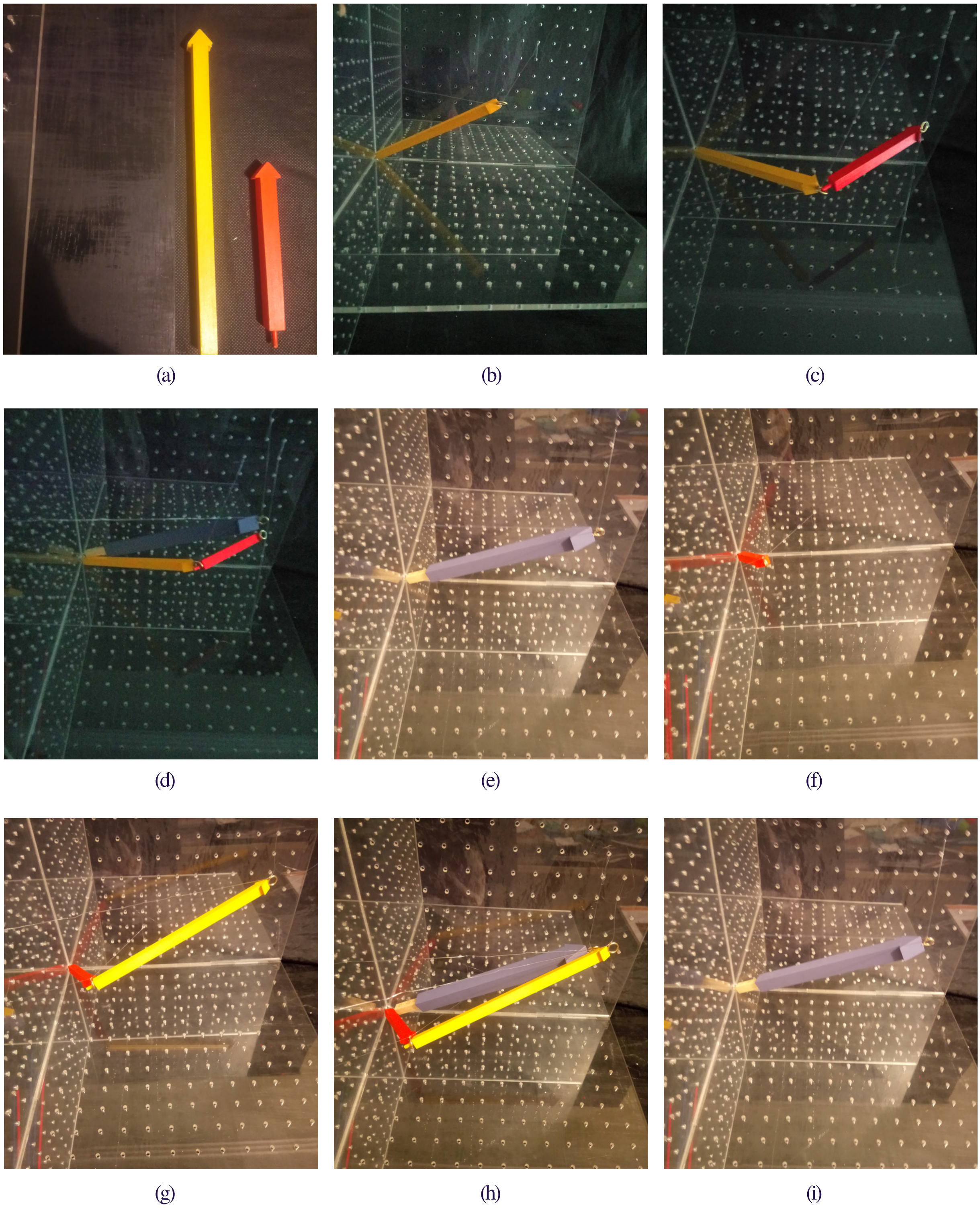


Figura 13. Propiedad Conmutativa de la Adición de Vectores

Elemento Neutro

Debido a que esta propiedad conlleva sumar un vector cualquiera más un vector nulo -el cual es un vector cuyos origen y extremo coinciden, y que tiene módulo cero-, el resultado sería el mismo vector. Por lo tanto, no es necesario comprobarlo pues su demostración es bastante explícita.

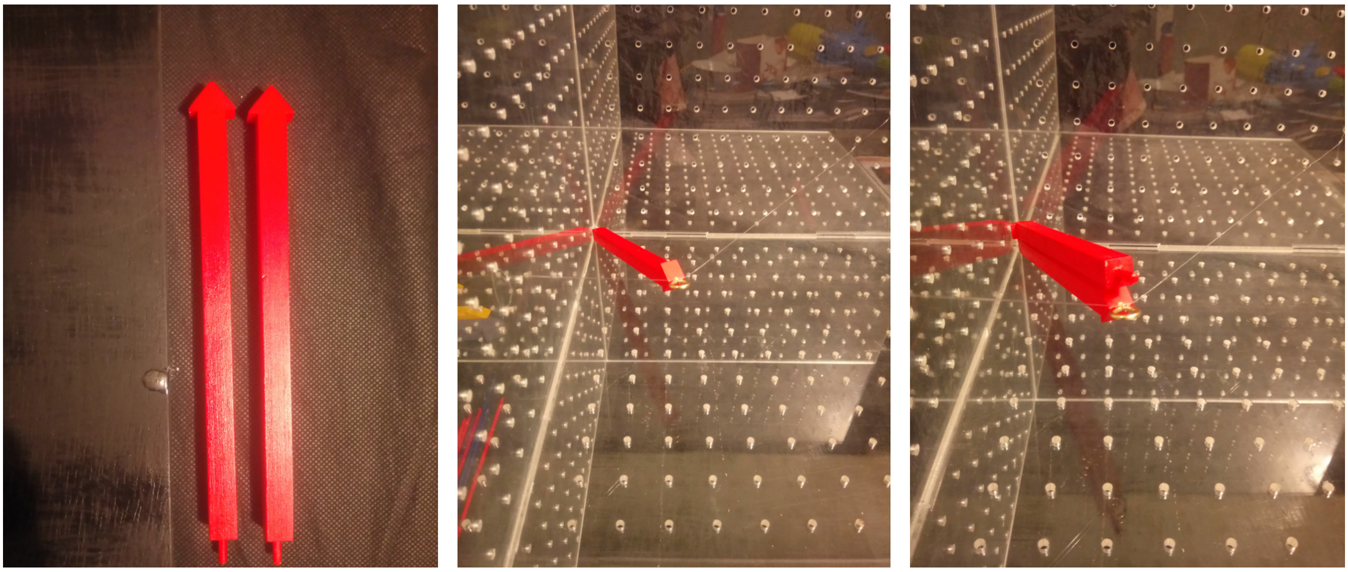
Hay algunas definiciones que son de suma importancia, por lo que se recomienda al docente hacer hincapié en ellas y resaltarlas. A continuación, se indica la definición de Vector Nulo (*).

> Se denomina Vector Nulo al vector cuyos origen y extremo coinciden, por lo que su módulo será nulo, es decir, igual a cero.

Elemento Opuesto

Para este caso se debe usar dos ejemplares del mismo vector, como se ve en la Figura 14(a).

1. La propiedad del Elemento Opuesto(*) enuncia que $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = 0.$
2. Primeramente, se ubica el vector $\vec{u}$, ilustrado en (b); y, enseguida, el vector -$\vec{u}$, como se muestra en (c).
3. Se podrá observar que ambos vectores coincidirán en módulo y dirección pero no en sentido.
4. Finalmente, se notará que la adición de ambos vectores culmina en un concepto ya conocido puesto que el origen del primer vector coincide con el extremo del segundo. Esta es una condición que cumple el vector nulo; por lo tanto, su módulo será nulo. Tras esta demostración se comprueba que la propiedad se cumple.
5. Puede realizarse la segunda parte de la ecuación si se considera necesario y, para hacerlo, se siguen los mismos pasos con el orden invertido.



(a) (b) (c)

Figura 14. Elemento Opuesto de la Adición de Vectores

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.

A continuación, se indica la definición de Vector Opuesto (*).

Se denomina Vector Opuesto al vector que tiene el mismo módulo y la misma dirección pero sentido opuesto.

Participación del estudiante

Por otro lado, en este apartado también se desarrollan las propiedades de la Adición pero, esta vez, no se estudiarán simplemente en forma analítica sino también en forma gráfica con la aplicación del material.

El docente ya cuenta con la guía sobre cómo ejecutar cada una de las propiedades; él puede exponerlas a sus estudiantes o difundir estos pasos para que sean éstos quienes lo ejecuten.

Si se hace lo primero, los estudiantes deben estar muy atentos a la exposición del docente y deducir su aprendizaje con los parámetros que se van a indicar:

- Cada propiedad que está señalada en el texto del estudiante, tiene su correspondiente expresión matemática el cual debe ser tenida en cuenta para poder trasladarlo a lo que se está observando en el material.
- El estudiante debe estar siempre atento sobre qué vector es cuál (se facilita mucho este trabajo al haber varios colores de vector) y vincularlas a la expresión matemática.
- Estas actividades han sido desarrolladas siguiendo lo que indica la expresión matemática, por lo que llegarían a ser esencialmente actividades de demostración. Es así que se le facilitaría al estudiante comprender lo que significan las propiedades, más allá de solo las fórmulas analíticas.
- El estudiante puede consolidar este aprendizaje reemplazando las expresiones matemáticas con ejemplos, de manera que tengan no sólo la comprobación gráfica sino también la analítica.
- Es muy importante señalar que cada propiedad sigue los mismos pasos para ser efectivas en la educación de los alumnos, por lo que ya no es necesario repetirlo.

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.

Tarea

Para la realización de las siguientes actividades se necesitan los modelos que los estudiantes construyeron con los materiales más favorables. El docente les puede guiar en su construcción tal y como se explica en el manual.

- Esta tarea consiste en una demostración que es parte del tema, en este caso, el elemento opuesto de la suma de vectores que puede usarse en la resta de vectores, aplicando el procedimiento mismo para trabajar la Adición de Vectores.

  - Se tienen dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Realice las siguientes operaciones:

    a) $\vec{u} + \vec{v}$

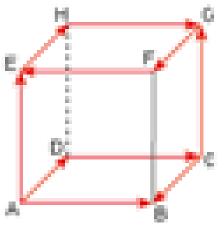
    b) $\vec{u} - \vec{v}$

- Realizar las actividades del texto.

En el caso de que los estudiantes no puedan realizar alguna de estas actividades, se presenta la solución para que el docente les guíe en la resolución. También puede hacerse uno de ellos en clase como ejemplo en caso de que se requiera.

ACTIVIDADES

1. En el cubo de la figura hay representados 10 vectores fijos diferentes. Agrúpalos en conjuntos de vectores equipolentes.



Se puede hacer un cubo con los vectores del set, como lo indica la figura.

Recordando que Vectores equipolentes son aquellos que tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido, tomamos en cuenta cada uno de estos parámetros entre vectores para agruparlos correctamente.

En primer lugar, al tratarse de un cubo, todos los vectores tienen el mismo módulo y las direcciones son iguales entre aquellos que forman caras opuestas. Y, para denotar el sentido, nos fijamos en la figura. Entonces.

Vector libre 1: $\overline{AB}$, $\overline{DC}$ y $\overline{HG}$

Vector libre 2: $\overline{FE}$

Vector libre 3: $\overline{AD}$ y $\overline{EH}$

Vector libre 4: $\overline{BC}$ y $\overline{GF}$

Vector libre 5: $\overline{AE}$ y $\overline{CG}$

2. ¿Cuántos vectores fijos distintos y cuántos vectores libres determinan los cuatro vértices de un rectángulo?

Aquí se expone un rectángulo formado por vectores y cuyos vértices son los puntos A, B, C y D.

Recordando que un Vector fijo es aquel segmento de recta formado por dos puntos, tenemos entonces que los vectores fijos son doce: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BA}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CA}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$, $\overline{DC}$, $\overline{DB}$ y $\overline{DA}$.

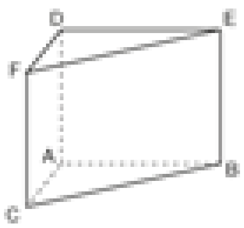
También, sabiendo que un Vector libre es un conjunto de vectores equipolentes, se tienen ocho que son:

Vector libre 1: $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$

Vector libre 2: $\overline{BA}$ y $\overline{CD}$

Vector libre 3: $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$	Vector libre 6: $\overline{DB}$
Vector libre 4: $\overline{DA}$ y $\overline{CB}$	Vector libre 7: $\overline{AC}$
Vector libre 5: $\overline{BD}$	Vector libre 8: $\overline{CA}$

3. Escribe los 30 vectores fijos distintos que determinan los seis vértices del prisma triangular de la figura. ¿Cuántos vectores libres lo determinan?



Aquí se expone un prisma formado por vectores y cuyos vértices son los puntos A, B, C, D, E y F.

Sabiendo ya lo que es un Vector fijo, tenemos entonces que los vectores fijos son:

Del vértice A: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ y $\overline{AF}$

Del vértice B: $\overline{BA}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{BF}$

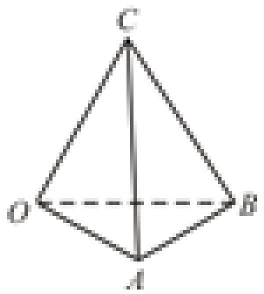
Del vértice C: $\overline{CA}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$, $\overline{CE}$ y $\overline{CF}$

Del vértice D: $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$, $\overline{DE}$ y $\overline{DF}$

Del vértice E: $\overline{EA}$, $\overline{EB}$, $\overline{EC}$, $\overline{ED}$ y $\overline{EF}$

Del vértice F: $\overline{FA}$, $\overline{FB}$, $\overline{FC}$, $\overline{FD}$ y $\overline{FE}$

4. ¿Cuántos vectores fijos distintos y cuántos vectores libres determinan los cuatro vértices de un tetraedro?



El análisis tanto de Vectores fijos como de Vectores libres ya se dio en preguntas anteriores.

Por lo tanto, los Vectores fijos son doce:

Del vértice O: $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$

Del vértice A: $\overline{AO}$, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$

Del vértice B: $\overline{BO}$, $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$

Del vértice C: $\overline{CO}$, $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$

Mientras que, los Vectores libres son doce y son cada uno de los vectores que conforman esta figura, uno por uno, debido a que todos tienen direcciones distintas y los sentidos opuestos.

Multiplicación de un vector por un escalar

Duración: 3 minutos

Actividad del docente
Se considera importante iniciar la explicación de este tema realizando preguntas muy básicas a los estudiantes, de forma general. Con estas respuestas, el docente irá poniendo en perspectiva hacia dónde puede ir el desarrollo de los conocimientos correspondientes a la Multiplicación de un vector por un escalar, según las nociones que tenga el estudiantado.

1. ¿Qué son las magnitudes escalares?
2. Ejemplos de cantidades escalares.
3. Diferencias entre cantidades escalares y vectoriales.

En los párrafos siguientes se muestran las interrogantes y lo que eventualmente puede ser contestado:

1. ¿Qué son las magnitudes escalares?

Las magnitudes escalares son aquellas que expresan una cantidad y su determinada unidad. (**)

2. Ejemplos de cantidades escalares.

35 kg (masa); 100 m (longitud); 60 km/h (rapidez); 2 s (tiempo); 37°C (temperatura); etc.

3. Diferencias entre cantidades escalares y vectoriales.

La diferencia entre cantidades escalares y vectoriales radica en que, estas últimas, cuentan con tres parámetros para definirlo completamente: módulo, dirección y sentido; mientras que las cantidades escalares sólo requieren de magnitud y su respectiva unidad. (**)

- Se ha decidido hacer estas cortas y simples preguntas como recordatorio de ciertos contenidos útiles para el desarrollo del tema; no obstante, la información de este apartado no necesita ser profundizada. En consecuencia, sólo puede ser un intercambio de ideas cortas y generales entre el docente y los alumnos.

(**) Avecillas, (2008). Libro de Física. Segundo Tomo

Participación del estudiante

Este tema se ha desarrollado de forma muy similar al anterior, aplicando, conjuntamente, la parte teórica con la parte práctica o gráfica a través del recurso educativo utilizado.

Para algunas de las actividades de esta operación se ha elaborado material exclusivo, no sólo para facilitar la comprensión del tema, sino para hacerla mucho más didáctica y divertida. Pero antes, se necesita establecer ciertas interrogantes para tener siempre presentes definiciones, diferencias, expresiones o ejemplos importantes para mejorar el desenvolvimiento en los nuevos temas.

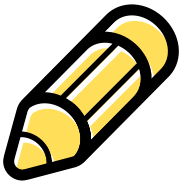
Las interrogantes planteadas son las siguientes:

1. ¿Qué son las magnitudes escalares?
2. Ejemplos de cantidades escalares.
3. Diferencias entre cantidades escalares y vectoriales.

Tal y como se trabajó en temas anteriores, cuando se trata de este tipo de actividades, los estudiantes deben recordar lo que aprendieron en años anteriores y expresar sus ideas para contestar las preguntas; individual o grupalmente, dependiendo de cómo lo decida el docente.

Las posibles ideas con las que pueden contribuir los estudiantes se desglosan así:

- Las magnitudes escalares son las que están expresadas por un número y una unidad.
- Las magnitudes escalares se diferencian de las vectoriales porque estas últimas necesitan de tres parámetros: magnitud, dirección y sentido; mientras que las primeras requieren sólo magnitud y su respectiva unidad.
- Algunos ejemplos de magnitudes escalares son: de longitud, de masa, de tiempo, de temperatura, entre otras. A este tipo de magnitudes se les agrega la cantidad seguida de la unidad correspondiente: metro (m), kilogramo (kg), grados celsius (°C), segundos (s), respectivamente; así como muchas otros ejemplos más.



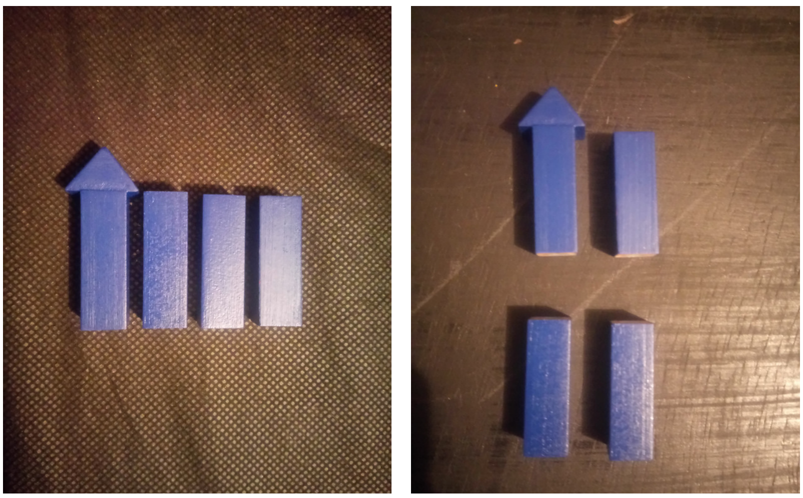
Duración: 12 minutos

Actividad del docente

La explicación de esta operación entre un escalar y un vector puede ser adaptado a la utilización del material elaborado específicamente para este objetivo.

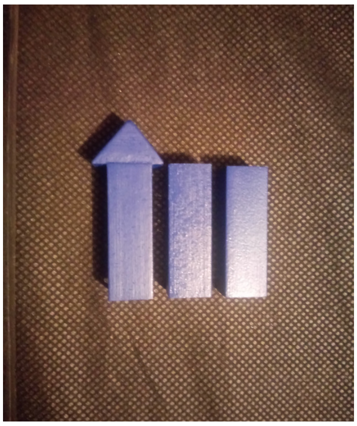
- Se ha construido el tercer diseño de vectores presente en el set para ejemplarizar este subtema.
- También pueden usarse distintos materiales que cumplan una función similar y sean más asequibles; especialmente si se quiere trabajar con un ejemplar individual para toda la clase.
- Se trabajará el siguiente ejemplo y se explicará el proceso a seguir.

1. Para efectuar la operación en sí, Multilplicación de un escalar por un vector se utilizará cualquiera de los elementos del tercer diseño de vectores del set y se lo desarmará (véase la Figura 15(a)).
2. Con (b) se puede tomar en cuenta que cada pequeña parte de la que está conformado este elemento representará un vector que, en este caso, puede ser denominado vector $\vec{u}$; es así que todos "mini vectores" serán iguales entre sí.
3. El ejemplo que se aplicará será $3\vec{u}$, como indica (c). El docente debe aclarar la diferencia entre el escalar y el vector, es decir, el "3" define el escalar que se multiplicará al vector $\vec{u}$.
4. Esta operación se realiza armando tres veces los "mini vectores"; así, el resultado sería el mismo vector $\vec{u}$ pero tres veces su "tamaño"; esto está indicado en (d).
5. Finalmente, los estudiantes deben analizar el vector que obtuvieron: su magnitud, su dirección y su sentido, y sacar sus conclusiones.



(a) (b)

Figura 15. Multiplicación de un escalar por un vector


(c)


(d)

- Tras estos pasos, se llega a la deducción (*) siguiente:

Un vector multiplicado por un escalar mantiene su dirección y lo que cambia es la magnitud y el sentido, dependiendo de la cantidad y del signo del escalar, respectivamente.

Participación del estudiante

El material que se ha elaborado para la explicación de este tema en específico constituye los ejemplares de vectores pertenecientes al tercer diseño. Con esto, los estudiantes entenderán cuál es el funcionamiento del contenido, con la viabilidad de tener mayor reforzamiento teórico y práctico para afianzar el aprendizaje.

Los estudiantes, tras la explicación del tema con la aplicación del material, podrán sacar ciertas conclusiones:

- Determinarán cómo se diferencia un escalar de un vector de una manera didáctica y visible.
- Se podrán comparar los resultados de los vectores que se someten a la operación; es decir, se verá gráficamente cómo luce un vector antes y después de realizar la operación.
- Los estudiantes tendrán la posibilidad de recrear varios ejemplos del tema al implementar los otros materiales disponibles.

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.

Propiedades

Duración: 20 minutos

Actividad del docente

Las propiedades de la Multiplicación de un vector por un escalar son: Distributiva Vectorial, Distributiva respecto a la suma escalar, Asociativa respecto al producto escalar y Escalar neutro. En este tema, el desarrollo de las propiedades de la operación en cuestión también pueden elaborarse a través del material empleado, para conseguir que los estudiantes trabajen y descubran cada precepto en torno al tema estudiado. En caso de no contar con el tiempo necesario, puede enviarse como tarea a su hogar.

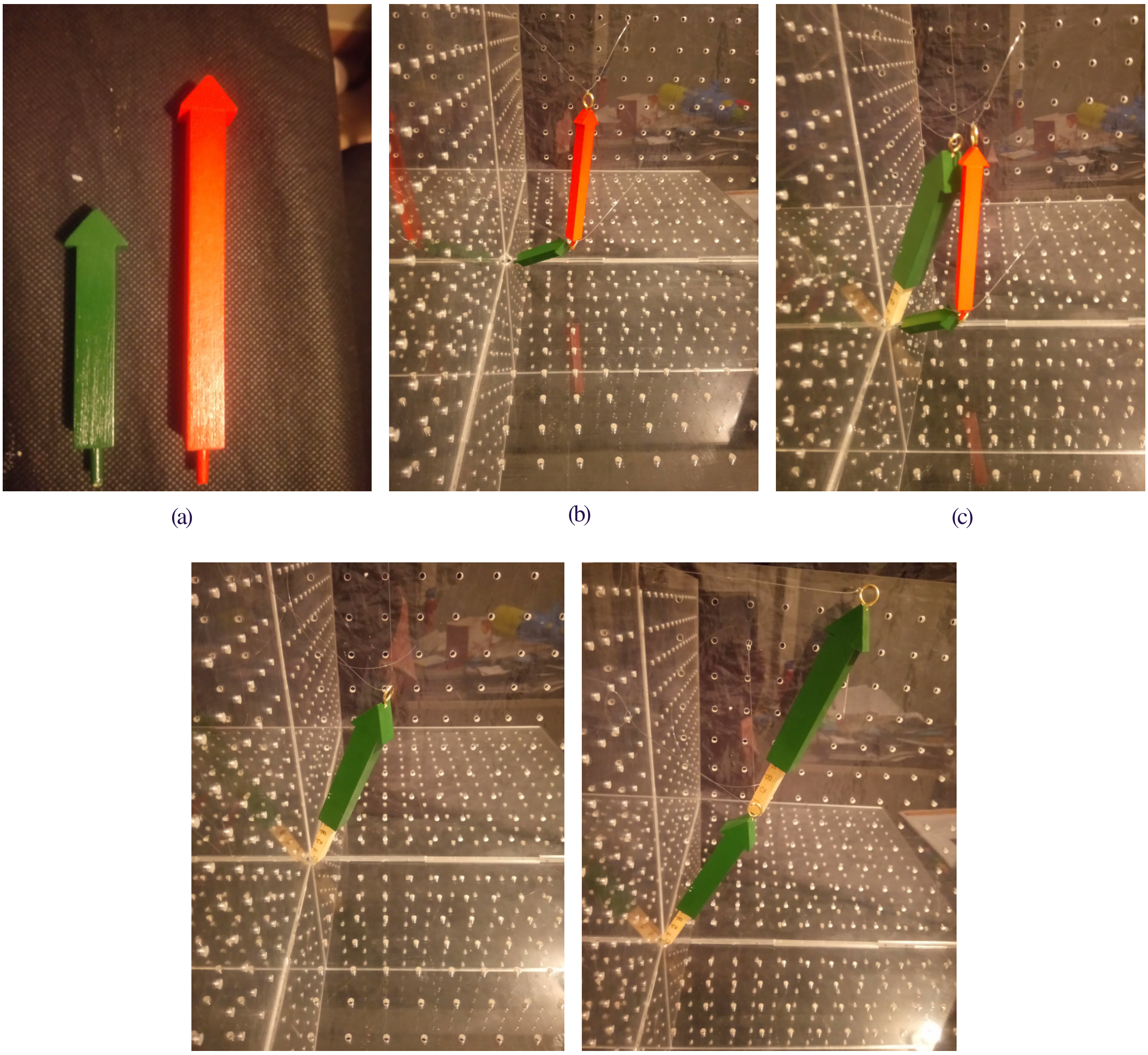
- Como primer paso, se podría dividir el curso en cuatro grupos, debido a que son cuatro las propiedades de la Multiplicación de un escalar por un vector que se estudian.
- El docente explica que cada grupo deberá ejemplificar una de las cuatro propiedades a través del material didáctico; entonces se otorga a cada uno de ellos una propiedad. Los miembros del grupo, con ayuda de sus textos y la guía del docente, tratarán de entender la propiedad y elaborarán un ejemplo aplicable al material didáctico.
- Una vez que todos los grupos cuenten con su respectivo ejemplo, se procede a compartirlo, aleatoriamente, con los otros grupos. Todos los alumnos deberán tratar de emular el ejemplo dado para descubrir la propiedad que se está exponiendo.
- Se repite este mismo procedimiento para las demás propiedades.

Para dar una idea general de cómo se puede trabajar este subtema con la aplicación de material didáctico, se propondrá un ejemplo y se resolverá poniendo en práctica cada una de las propiedades, haciendo uso de las piezas del set de vectores. Para esta ejecución, puede usarse cualquiera de los vectores del set y los escalares pueden ser dados al azar según se crea conveniente.

Distributiva Vectorial

1. La Propiedad Distributiva Vectorial(*) enuncia que $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.
2. Para la primera parte, es recomendable hacer un recordatorio de lo que se aprendió en la Adición de Vectores, para lo cual, se procederá a seleccionar dos vectores del set, como se muestra en la Figura 16.1(a). Seguidamente se colocará el vector $\vec{u}$ en el sistema de referencia y se le adicionará el vector $\vec{v}$, de la manera que ilustra (b).
3. Se determinará el vector resultante de esta adición (c); se trabajará solo con este (d) y se establecerá su módulo.
4. A este vector se le multiplicará por el escalar cuyo valor, en este caso, es de 2; es decir, se duplica su módulo y se obtiene el resultado (e).

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.

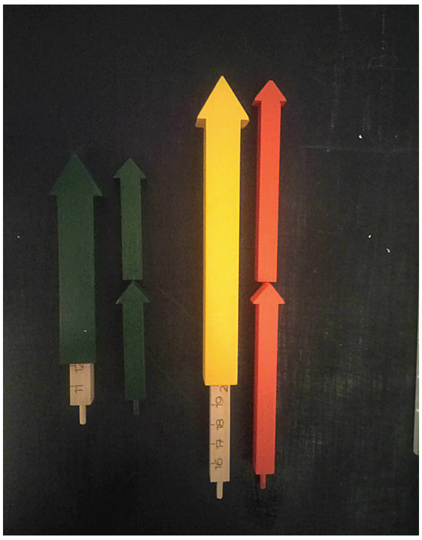


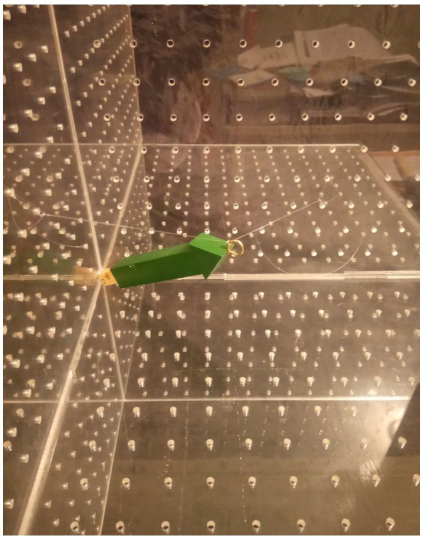
(a) (b) (c)

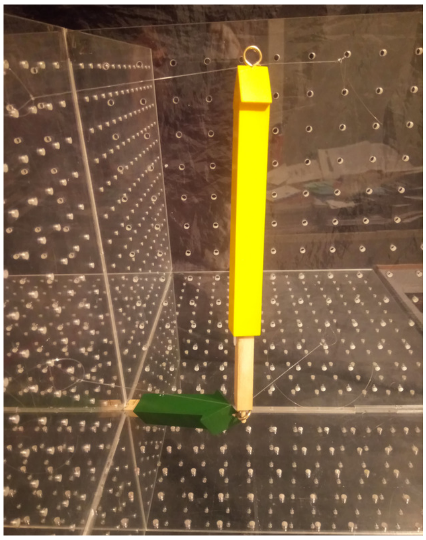
(d) (e)

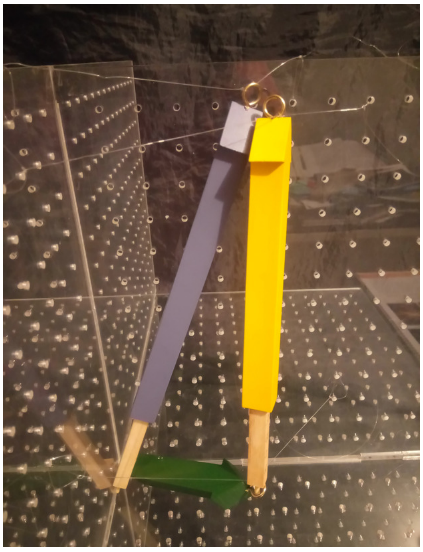
Figura 16.1 Propiedad Distributiva Vectorial. Primera Parte

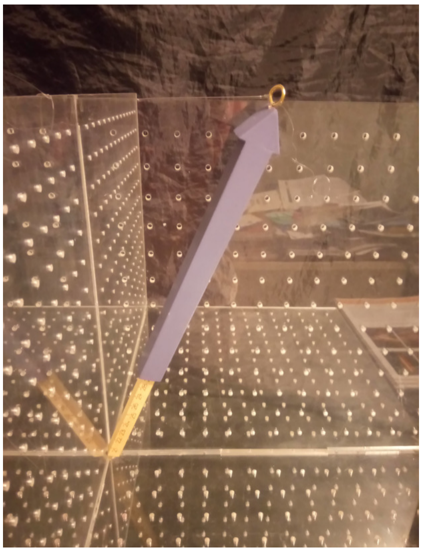
5. Para la segunda parte se empezará por obtener el módulo de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (para facilitar el proceso, se puede colocar en el sistema de referencia y se obtiene el vector que se ajusta según las coordenadas).
6. Una vez realizada esta acción, se opta por multiplicar cada uno de los vectores por el escalar dado y se determinan estos nuevos vectores $\overrightarrow{u_2}$ y $\overrightarrow{v_2}$, como lo ilustra (f).
7. Se adicionan estos últimos con el proceso ya conocido y se obtiene el vector resultante (véase la Figura 16.1(g), (h), (i) y (j)).
8. Finalmente se comparan los resultados obtenidos en ambas partes, los cuales deben ser los mismos; para ello se puede tomar (k) como referencia visual.


(f)


(g)


(h)


(i)


(j)

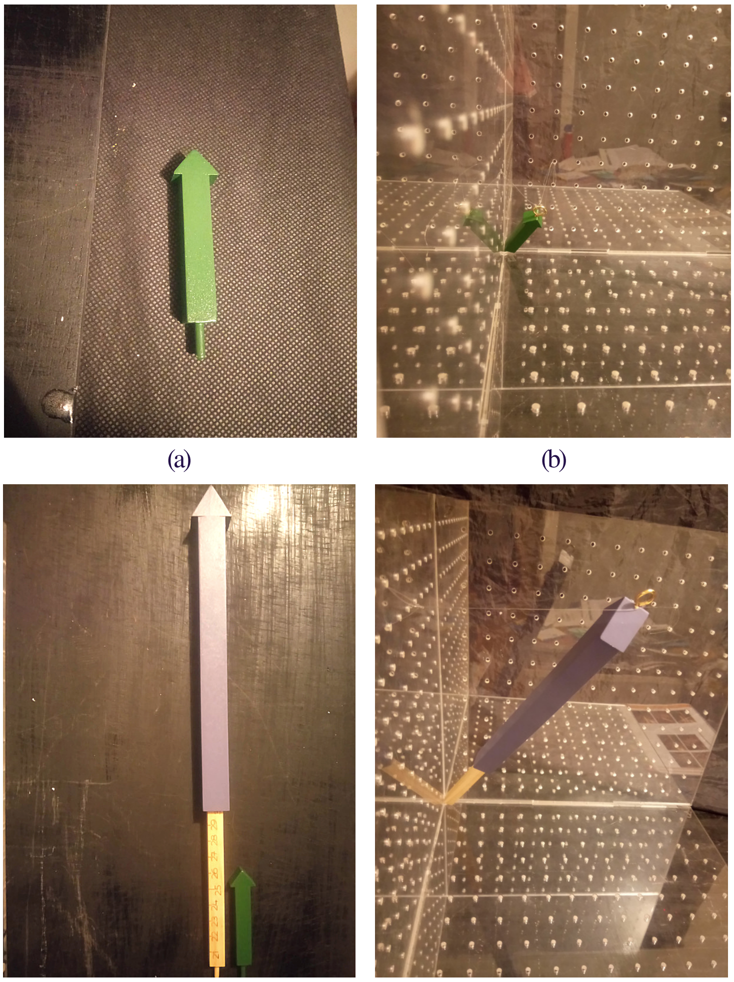

(k)

Figura 16.2 Propiedad Distributiva Vectorial. Segunda Parte

Distributiva respecto a la suma escalar

1. La Propiedad Distributiva respecto a la suma escalar(*) enuncia que $(k_1 + k_2)\vec{u} = k_1\vec{u} + k_2\vec{u}$
2. En la Figura 17.1(a) se observa que se ha seleccionado un vector con el cual se trabajará.
3. Para la primera parte, se empezará por obtener el módulo del vector $\vec{u}$ (para facilitar el proceso se puede colocar en el sistema de referencia y se obtiene el vector que se ajusta según las coordenadas, como (b) lo señala).
3. Se continúa sumando algebraicamente (operación analítica sencilla) las dos cantidades escalares y, una vez obtenidos este número, se lo multiplica por el vector que se obtuvo en el punto anterior (c).
4. Se obtiene un primer vector final del cual se establecerá su módulo (d).

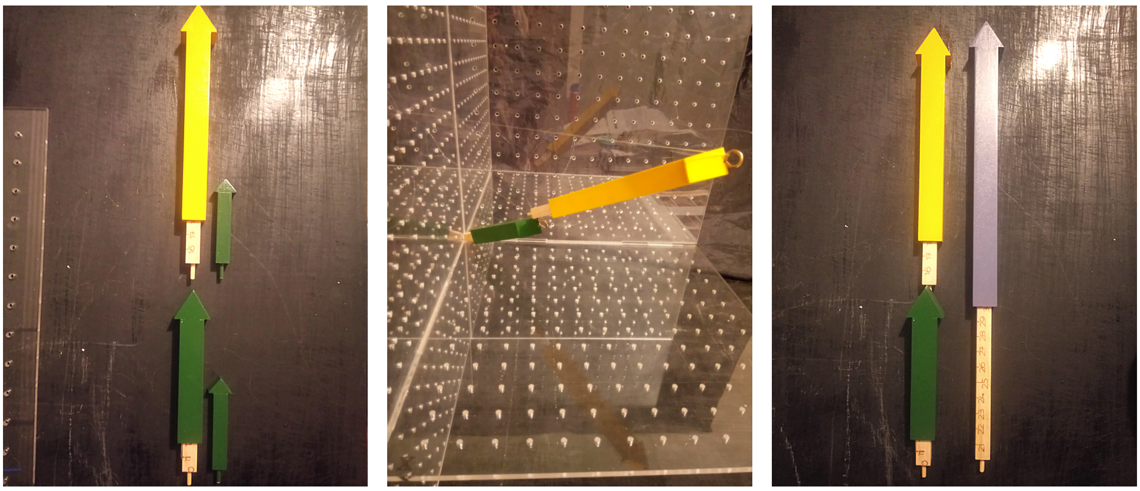
(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.



(a) (b) (c) (d)

Figura 17.1 Distributiva respecto a la suma escalar. Primera Parte

5. Para la segunda parte, se empezará por multiplicar cada escalar por el vector $\vec{u}$. Se recomienda realizarlo en forma analítica y no gráfica para mayor facilidad.
6. Se obtienen dos vectores nuevos, mismos que serán adicionados en el sistema de referencia siguiendo el procedimiento ya conocido; la Figura 17.2(e) muestra la ilustración respectiva. Se establece, finalmente, el vector resultante (g), producto de la adición anterior (f) y se comparan los resultados de ambas partes, los cuales deberán ser los mismos.

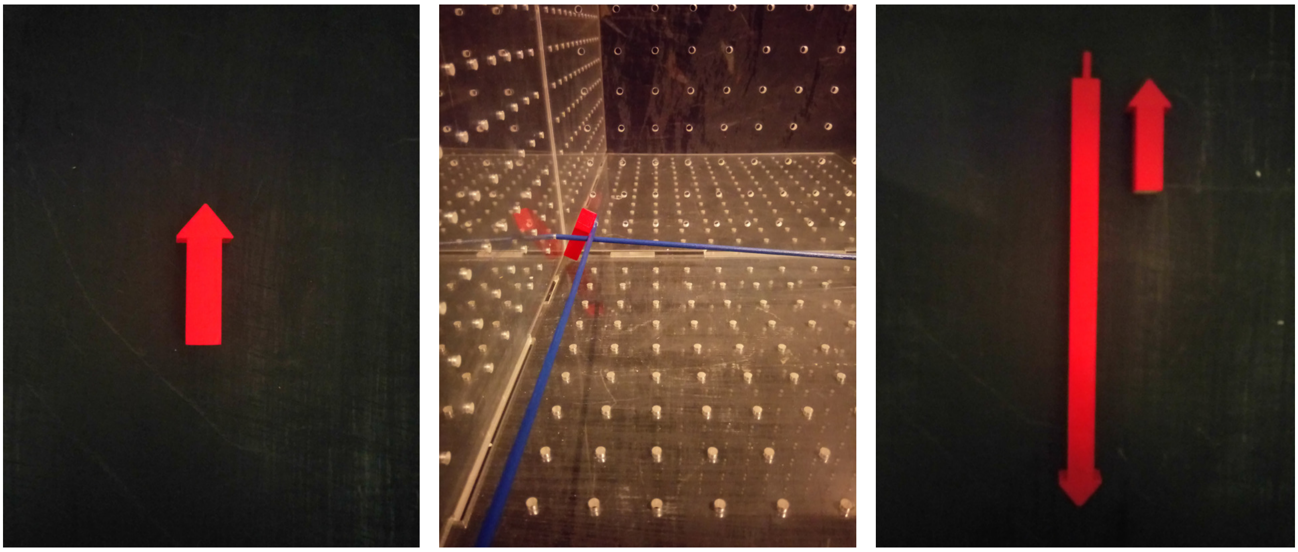


(e) (f) (g)

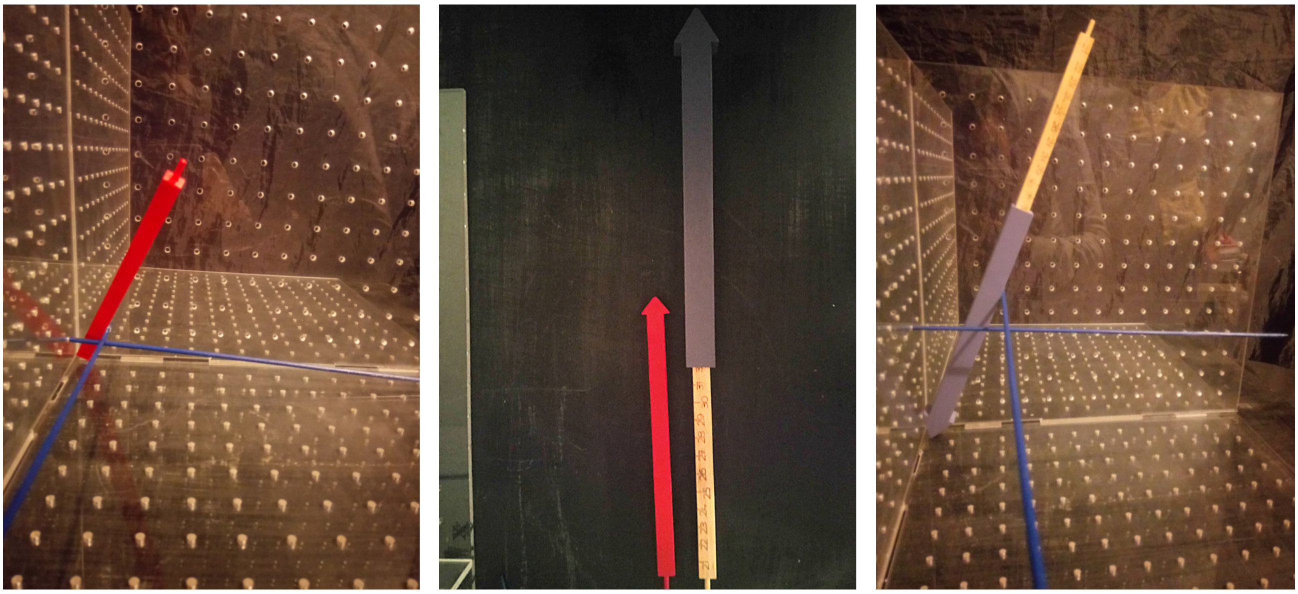
Figura 17.2 Distributiva respecto a la suma escalar. Segunda Parte

Asociativa respecto al producto escalar

En la Figura 18.1(a) se muestra lo que se propone usar: un vector de módulo, dirección y sentido aleatorios, obtenido del set y colocado en el sistema de referencia (b); mientras que las escalares pueden ser: k_1=2 y k_2 =-4.
1. La Propiedad Asociativa respecto al producto escalar(*) enuncia que $k_1(k_2\vec{u}) = (k_1k_2)\vec{u}$
2. Para la primera parte, se puede multiplicar el segundo escalar, k_2 , por el vector $\vec{u}$ con el proceso conocido, como se observa en (c) y (d).
3. En (e) se muestra el nuevo vector al que se le multiplica por el primer escalar, k_1 .
4. Así, se determina el primer vector final (f) que es el resultado de esta primera parte.



(a) (b) (c)

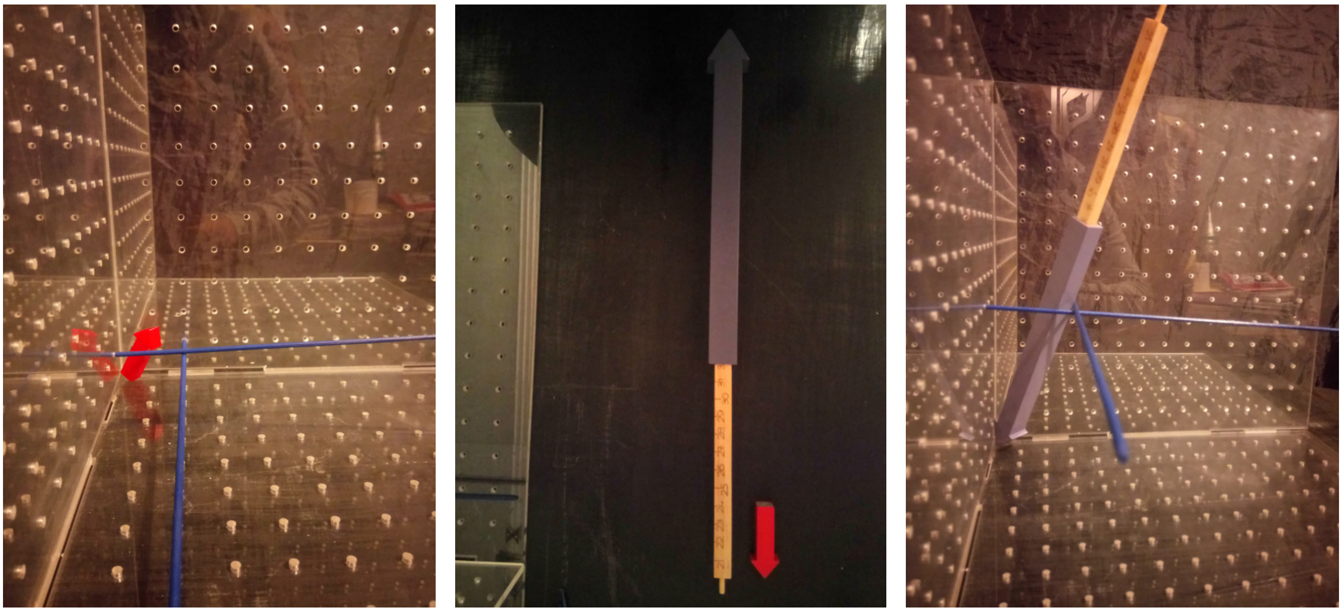


(d) (e) (f)

Figura 18.1 Propiedad Asociativa respecto al producto escalar. Primera Parte

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.

5. Para la segunda parte se puede multiplicar ambas cantidades escalares en forma analítica y no gráfica para mayor facilidad. Por ahora, puede fijarse en la Figura 18.2(g).
6. Este nuevo escalar se le multiplica por el vector $\vec{u}$, como se ilustra en (h) y se obtiene finalmente el vector final de esta parte (i). Se comparan los resultados de ambas partes, los cuales deberán ser los mismos.

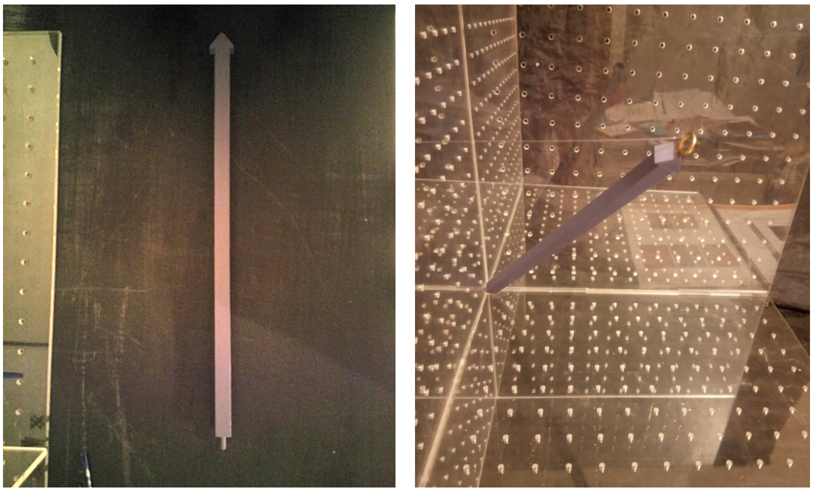


(g) (h) (i)

Figura 18.2 Propiedad Asociativa respecto al producto escalar. Segunda Parte

Escalar neutro

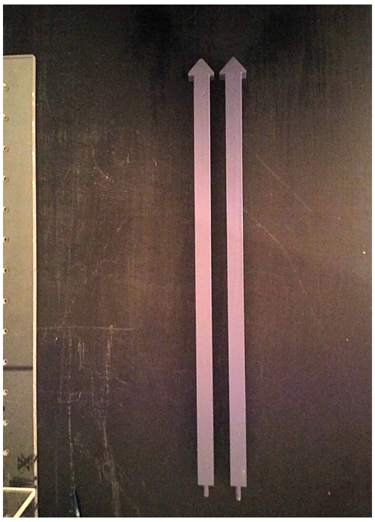
Se propone usar un vector de módulo, dirección y sentido aleatorios, obtenido del set y colocado en el sistema de referencia (véase la Figura 19(a)).
1. La Propiedad Escalar Neutro(*) enuncia que $1\vec{u} = \vec{u}$.
2. Se puede utilizar el vector $\vec{u}$ (b) y multiplicarlo por el escalar igual a 1; en otras palabras, se mantiene el mismo vector, y se esto se puede ver en (c) y (d).



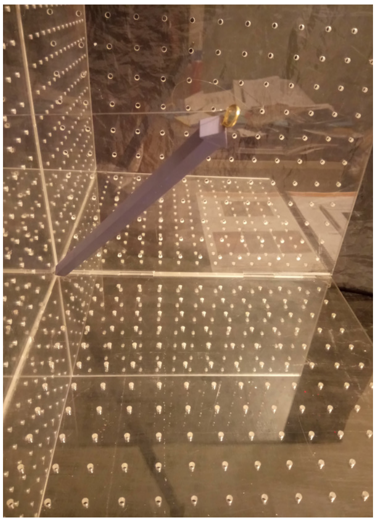
(a) (b)

Figura 19. Propiedad Escalar Neutro

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.



(c)

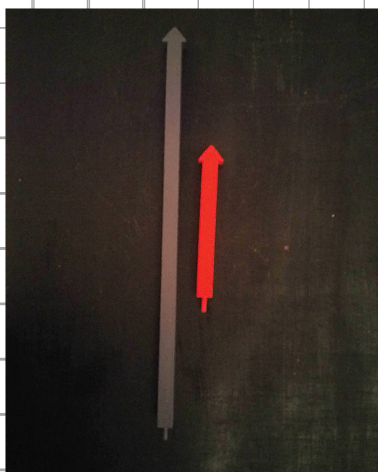


(d)

EJEMPLO:

- Teniendo los vectores $\vec{u}$ y $\vec{u}$ que se muestran en la imagen, realice la siguiente operación, en forma gráfica.

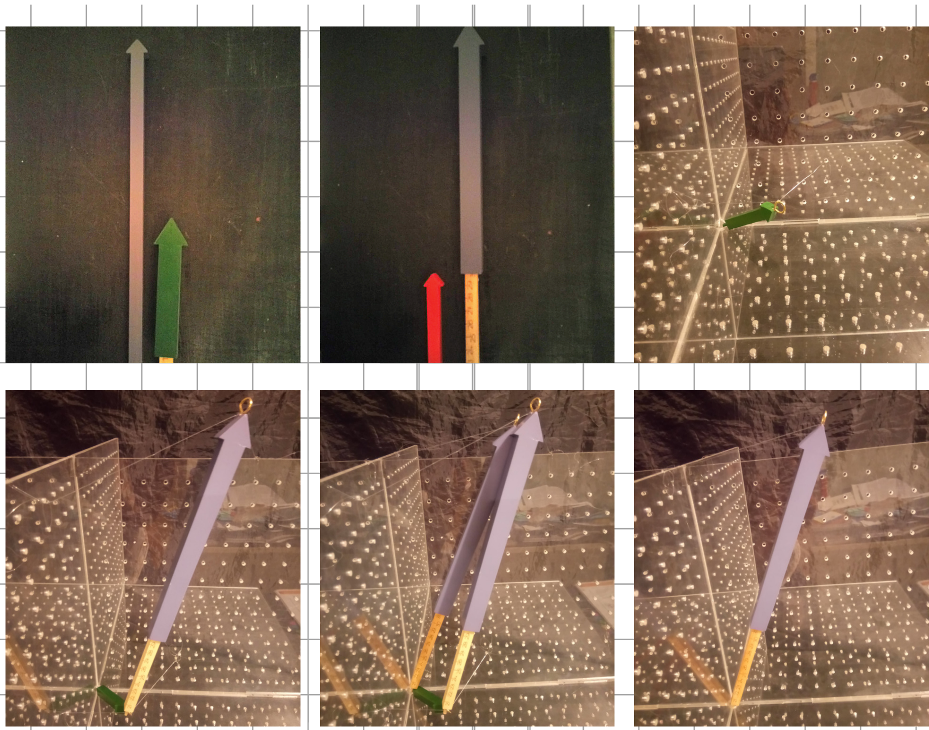
a) $\frac{1}{2}\vec{u} + 3\vec{v}$



Usando el modelo didáctico, se comienza por elegir los dos vectores que se indica. Entonces, procedemos:

a) Al vector $\vec{u}$ se le multiplica por $\frac{1}{2}$ y al vector $\vec{v}$ por 3. Seguidamente se suman ambos vectores. Las imágenes muestran el resultado final.

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.



Participación del estudiante

Asimismo, en esta operación se trabajan sus propiedades correspondientes. Para este caso, los estudiantes deben seguir el mismo procedimiento que se efectuó en el tema pasado y, con estos pasos, llegarían a ratificar o demostrar lo que se expone con el material.

Los pasos que se siguen, se describen a continuación, los cuales son muy similares a lo que se trabajó anteriormente:

- Cada propiedad que está señalada en el texto del estudiante, tiene su correspondiente expresión matemática el cual debe ser tenida en cuenta para poder trasladarlo a lo que se está observando en el material.
- El estudiante debe estar siempre atento sobre qué vector es cuál (se facilita mucho este trabajo al haber varios colores de vector) y vincularlas a la expresión matemática. Es importante, además, que se tenga presente el escalar o escalares que se han usado para estas ejemplificaciones debido a que es una parte fundamental del tema.

- Estas actividades han sido desarrolladas siguiendo lo que indica la expresión matemática, por lo que llegarían a ser esencialmente actividades de demostración. Es así que se le facilitaría al estudiante comprender lo que significan las propiedades, más allá de solo las fórmulas analíticas.
- El estudiante puede consolidar este aprendizaje reemplazando las expresiones matemáticas con ejemplos, de manera que tengan no sólo la comprobación gráfica sino también la analítica.

Por otro lado, los estudiantes verificarán que el tercer diseño del set de vectores no es el único indispensable para este tema, sino puede utilizarse el resto si se sabe cómo trabajar con ellos.

EL ESPACIO VECTORIAL R^3

OBJETIVO

Trasladar los contenidos aprendidos sobre Vectores en el plano al estudio de Vectores en tres dimensiones para solucionar actividades referentes al tema y relacionarlos con nuevos conocimientos, mediante lectura, escritura, exposiciones y guía del docente.

En esta unidad se busca que los estudiantes analicen, comprendan y conceptualicen el desenvolvimiento de los vectores de forma más real, pues se aplica a las tres dimensiones.

Al tratarse de una unidad pequeña, las actividades que se proponen no están planificadas para realizarlas en clase por lo que el docente deberá organizarla para que sean los propios alumnos quienes preparen este aprendizaje con tareas adecuadas, sencillas y efectivas.

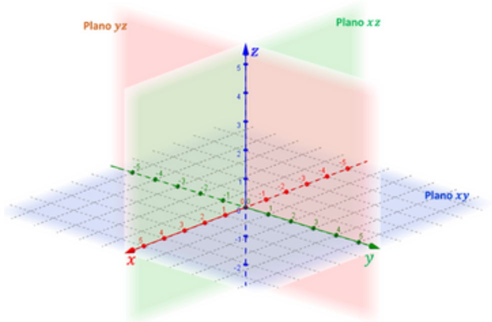
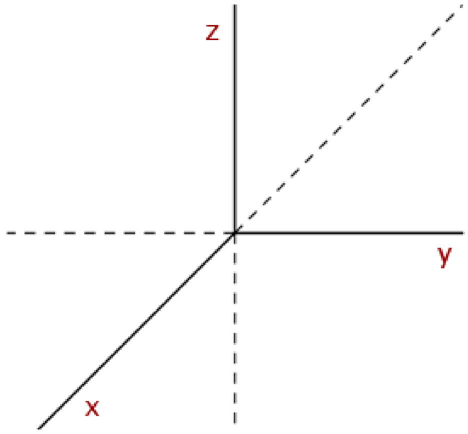


Figura 20. Imagen inicial del Espacio Vectorial
Fuente: Universidad Tecnológica Nacional de Buenos Aires

- En primer lugar, se les pide a los estudiantes que lean muy profundamente el tema en sus respectivos textos de Matemáticas (MINEDUC).
- En caso de que algo no les quede claro, entonces se lo preguntarán la siguiente clase al docente para aclarar dudas.
- Se puede incitar a los estudiantes a practicar las actividades propuestas en el texto con el material didáctico elaborado por ellos.
- Se les puede otorgar, además, una hoja de actividades (ya resuelta) la cual se presenta a continuación (el formato sin completar lo encontrará en la página 198):

ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIANTE

1. Explique cómo se construye un sistema de referencia tridimensional. Grafique:
Un sistema de referencia o sistema de coordenadas tridimensional se construye con tres ejes X, Y y Z, ortogonales entre sí.



2. ¿Cómo se trabaja en este sistema de referencia?
En este sistema de referencia se trabaja a través de puntos P en el espacio, determinado por tres coordenadas en X, Y y Z, así: P (x, y, z).

3. Complete:
Los ejes de coordenadas que forman el sistema de referencia determinan planos coordenados que son: ***XY, XZ, YZ****. Estos planos dividen al espacio en ocho regiones denominados* ***octantes****. En el primer octante las tres coordenadas son* ***positivas****.*

4. ¿En qué situación de la vida real se puede encontrar este sistema de referencia?
Como se leyó en el texto, un sistema de referencia tridimensional puede compararse a las paredes de una habitación en las que, desde una esquina inferior, se observa que el suelo llegaría a ser el plano XY; la pared a la izquierda, el plano XZ; y la pared de la derecha, el plano YZ.

5. Al tener un punto P en el espacio, ¿cómo se determinan sus componentes?
Primero se determinan las perpendiculares desde el punto P hasta cada plano: la componente en x, desde el punto P hasta la perpendicular en el plano YZ; la componente en y, desde el origen hasta la perpendicular en el plano XZ; y la componente en z, desde el origen hasta la perpendicular en el plano XY; así, se obtiene la terna ordenada P (x, y, z). Para ubicar cada una de estas componentes, se empieza contando desde el origen el número de unidades que representa x, por su respectivo eje; luego, paralelo a sus correspondientes ejes, se avanza el número de unidades que representen y y z.

ACTIVIDADES

1. ¿Cuántos y qué ejes coordenados se encuentran en el Sistema de referencia?

Los ejes coordenados con los que se trabaja en el Sistema de referencia son: +X, -X, +Y, -Y, +Z y -Z.

2. ¿Cómo se realiza la suma de dos vectores dadas sus coordenadas?

Se puede empezar sumando sus componentes, es decir, las cantidades del componente en X, los de Y y luego los de Z, tomando en cuenta su sentido (signo). También se puede convertir los vectores a forma canónica y sumarlas, igualmente, por sus componentes respectivas.

3. Teniendo los siguientes vectores v = (v1, v2, v3) y w = (w1, w2, w3), establezca las siguientes nociones básicas:

Igualdad:	*v = w -----> v1 = w1 ; v2 = w2 ; v3 = w3*
Suma:	*v + w = (v1 + w1, v2 + w2, v3 + w3)*
Opuesto de v:	*-v = (-v1, -v2, v3)*
Opuesto de w:	*-w = (-w1, -w2, -w3)*
Resta v-w:	*v - w = (v1 - w1, v2 - w2, v3 - w3)*
Resta w-v:	*w - v = (w1 - v1, w2 - v2, w3 - v3)*

4. ¿Cómo se expresa, según sus componentes, un vector nulo?

O = (0, 0, 0)

5. Además de sus componentes, ¿cómo puede expresarse un vector?

Un vector puede expresarse también en forma canónica, esto es, a través de sus componentes acompañados del vector unitario respectivo.

6. Teniendo el vector a = (1, 0, -3), expréselo en forma canónica:

a = (1, 0, 3) -------> a = (1 i + 0j - 3k) = (i - 3k)

COMPONENTES

OBJETIVO

Aplicar conocimientos básicos de vectores en nuevos aprendizajes más complejos de manera que se facilite la comprensión de los temas, para trabajar con diferentes operaciones entre vectores y sus prácticas relativas, con la ayuda del material didáctico elaborado y la explicación del docente.

En esta unidad se trabajarán los siguientes temas:

- Componentes
- Operaciones con componentes: Adición y Multiplicación por un escalar
- Combinación lineal de vectores
- Componentes de un vector determinado por dos puntos
- Punto medio de un segmento

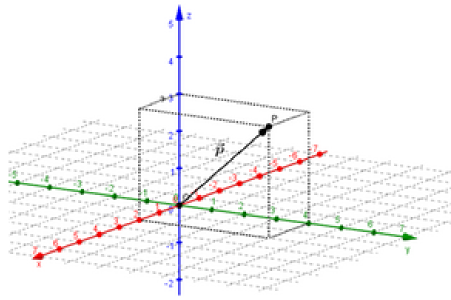


Figura 21. Imagen inicial de Componentes

Fuente: Universidad Tecnológica Nacional de Buenos Aires

Componentes

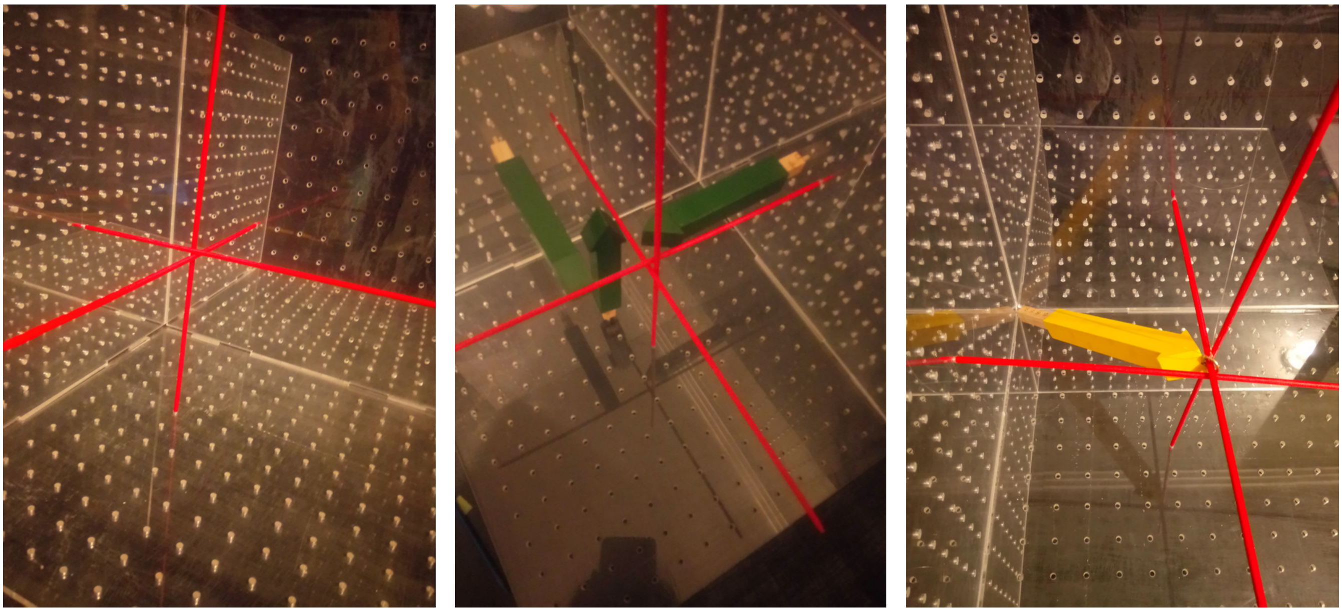
Actividad del docente

Antes de comenzar, se les pide a los estudiantes que hagan un pequeño recordatorio de las actividades que realizaron en el tema anterior pues están íntimamente relacionadas con lo que se estudiará a continuación. Entonces, se propone que se empiece con la ilustración de la explicación, a modo de ejemplo, para permitir que los alumnos comprendan y manifiestan por su cuenta lo que se va presentando. El procedimiento que se puede ejercer es el siguiente:

Duración: 10 minutos

1. Se anuncia que se exhibirá el Vector Posición de un punto.
2. En la Figura 22 se lo presenta, colocando un punto P cualquiera en el sistema de referencia (a) cuyas coordenadas, en forma general, serán (a, b, c), como se observa en (b). Se debe exhibir a los estudiantes legiblemente este punto.
3. El vector surge desde el punto O -usualmente se le conoce como origen, cuyas coordenadas son (0, 0, 0)- hasta el punto P. Como se ilustra en (c), se puede usar cualquiera de los tres diseños de vectores del set que mejor se adapte en esta ilustración.

4. Una vez colocado el vector se les pide a los alumnos que, en base a lo que observaron, lo definan (*); además de representarlo de acuerdo a sus coordenadas.



(a) (b) (c)

Figura 22. Vector Posición

El vector posición del punto P, representado como $\overrightarrow{OP}$ o $\vec{p}$, tiene coordenadas (a, b, c) en el espacio y que, a su vez, conforman las componentes del vector posición de P.

Participación del estudiante

A partir de este tema, se tomará como protagonista la aplicación del sistema de referencia. Es necesario que los estudiantes reconozcan su funcionamiento ideal y aquí se detallarán algunos preceptos para su correcto uso:

- En el sistema de referencia se cuentan componentes o coordenadas.
- Las componentes o coordenadas se cuentan en cada plano del sistema de referencia, desde el origen hasta el punto que se desee.
- La intersección de cada una de las componentes en cada eje: X, Y y Z, formarán el punto en el espacio con el que se trabajará.

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.

- Se ubica un vector del set que se ajuste al punto establecido.
- La relevancia de este sistema de referencia radica en el hecho de que se observan los vectores en el espacio, su ubicación y su posición.

Ante estos lineamientos, el docente ha recurrido a explicar el tema a modo de ejemplo, es decir, realizando el proceso con el recurso didáctico y dejando que sean los alumnos quienes descubran el concepto de Vector Posición a través de la observación de la práctica.

Para el seguimiento de dicha explicación, el alumno puede arrancar así:

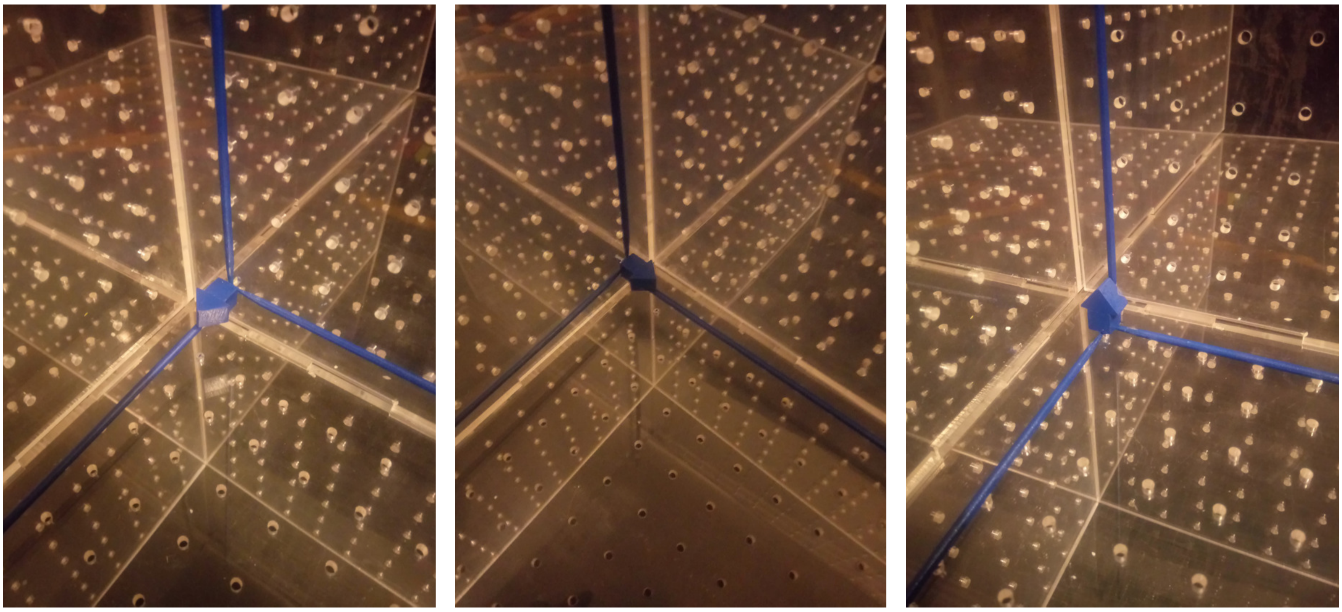
- Destacar el punto en el espacio; si es posible, con el recuento de las componentes.
- Observar el vector que se despliega desde el origen hasta el punto en el espacio.
- Determinar qué es lo que los estudiantes observan después de la práctica, con ciertas orientaciones que se deben tomar en cuenta: el origen y extremo del vector posición; las coordenadas o componentes por las que está conformado; y, finalmente, las conclusiones que se obtienen de esta percepción.

Duración: 3 minutos

Actividad del docente
Asimismo, el docente aplicará el material para representar la siguiente parte del contenido, los vectores unitarios, para lo cual puede hacer lo siguiente (véase la Figura 23):

1. Se empieza por colocar en el sistema de referencia el primer vector unitario del set (a), el vector unitario $\vec{i}$.
2. Se les pide a los estudiantes que, observándolo, proporcionen las componentes del vector que se ubicó. Esta respuesta debe ser (1, 0, 0).
3. Hacer lo mismo con los otros dos vectores unitarios: para los vectores $\vec{j}$ y $\vec{k}$, como se demuestra en (b) y (c), respectivamente.
4. Finalmente, pedir a los alumnos que definan lo que es un Vector Unitario(*) en base a lo que observaron.

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.



(a) (b) (c)

Figura 23. Vectores Unitarios

Llamamos a los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ los vectores base de $\mathbb{R}^3$ pues apuntan en la dirección positiva de los ejes X, Y y Z. Además, se llaman Unitarios debido a que su módulo es igual a 1, y sus componentes son:

$$\vec{i} = (1,0,0)$$

$$\vec{j} = (0,1,0)$$

$$\vec{k} = (0,0,1)$$

Participación del estudiante

En este tema se desarrolla también otro punto muy relevante en el estudio de las componentes, los Vectores Unitarios. De la misma manera como se laboró anteriormente, se necesitará hacer un análisis bastante sencillo para la correcta interpretación de este contenido, en el que se espera, nuevamente, que los alumnos lo experimenten y conceptualicen. Para esto, los estudiantes pueden realizar lo siguiente:

- En primer lugar, el docente colocará el primer vector unitario, el cual se desprende en el eje X.

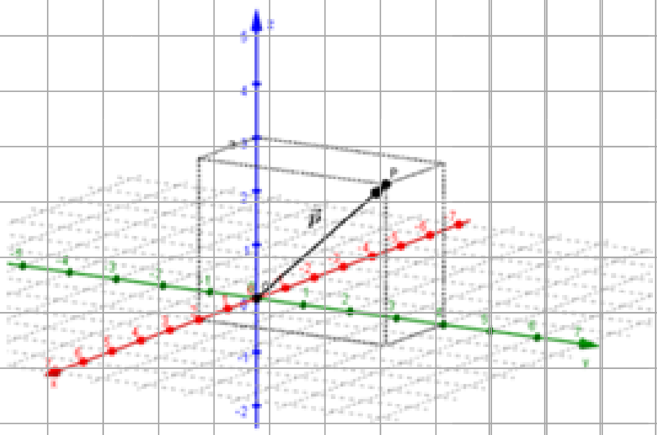
- La forma de colocarlo es en forma ortogonal al plano YZ, es decir, siguiendo la línea del eje X.
- El vector que se coloca es el más pequeño del set, pues mide 1 unidad.
- El estudiante debe observar muy bien lo que se ha realizado y deducir todas sus características, esto es: el módulo del vector que, al ser el más pequeño y como lo indica el manual, mide 1 unidad; la dirección del vector es la línea del eje X con su sentido positivo; y, finalmente, establecer sus coordenadas que, en este caso, serán (1, 0, 0).
- Para el segundo vector unitario, el docente lo ubicará sobre el eje Y.
- Este vector estará ubicado en forma ortogonal al plano XZ, siguiendo la línea del eje Y.
- Se realizan otra vez los pasos inmediatos a los que se describieron con el primer vector.
- Finalmente, para el tercer vector unitario se situará el vector sobre el eje Z.
- En este caso, la situación del pequeño vector será ortogonal al planoXY y siguiendo la línea del eje Z.
- Nuevamente se realizan los pasos inmediatos a los ya descritos y se encuentran las coincidencias entre los tres para elaborar la definición correcta, al término de la actividad.

El empleo de los recursos didácticos elaborados favorecerá el desarrollo formativo del estudiante ya que, al tener la posibilidad de manipularlos, podrán ser comparados. El alumno puede distinguir qué tipo de vectores son los más útiles para ciertos asuntos, algunos de ellos muy peculiares y otros más generalizados.

Lo que el alumno resalta de este trabajo es una mejor distinción de módulos, de direcciones, de sentido, de posición de los vectores, pero, esencialmente, su funcionamiento en el espacio.

EJEMPLO:

- Observando la siguiente gráfica, determine las componentes de los puntos que se indican:



Las componentes del punto P son: (2, 4, 3). Así, el vector es $\vec{P} = (2, 4, 3)$.

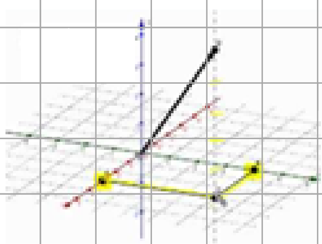
En el caso de que se necesite determinar otros vectores se puede indicar cualquiera de ellos y determinar las componentes del vector.

- Grafique los siguientes vectores teniendo estas componentes:

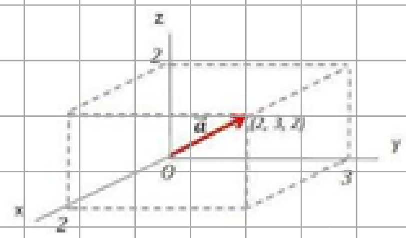
  a) $\vec{V} = (3, 4, 5)$

  b) $\vec{A} = (2, 3, 2)$

a)



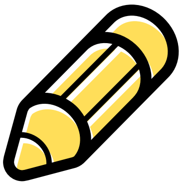
b)



Si se quiere utilizar material didáctico para estos ejemplos, simplemente se usa el sistema de referencia y se ubican las componentes o los vectores que pide el enunciado.

Operaciones con componentes

Adición



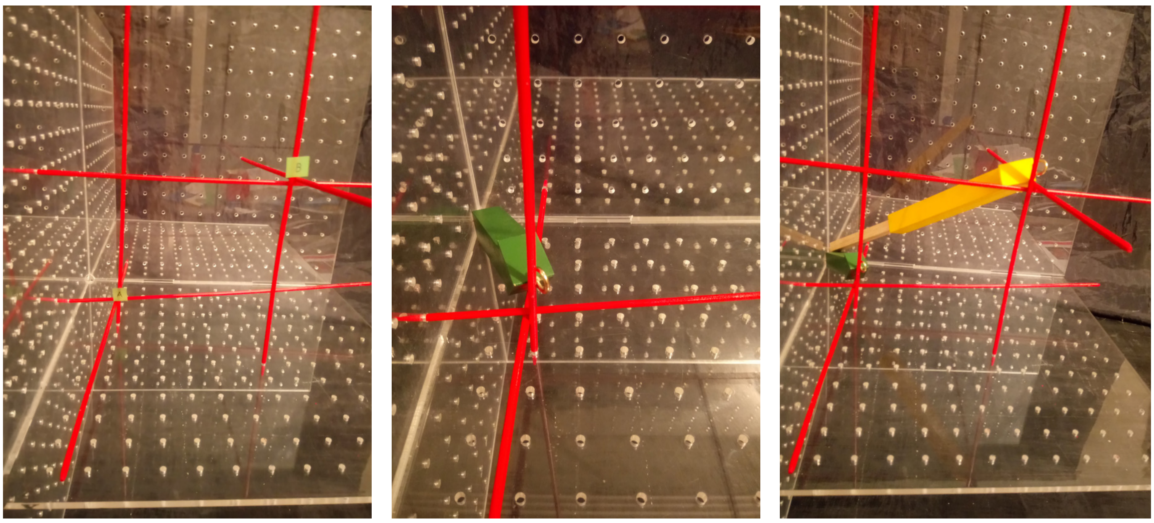
Duración: 10 minutos

Actividad del docente
Debido a que este subtema está correlacionado con la aplicación de componentes, para su explicación correcta es necesario trabajar desde su uso. Se recomienda que se puede proceder así:

1. Se empieza por dar dos vectores cualesquiera. En la Figura 24.1(a) se observan las componentes seleccionadas, las cuales, para generalizarlas, pueden ser dadas así:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$$
$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

2. Para esta demostración, se puede utilizar cualquiera de los tres diseños de vectores (aunque el primero es el más recomendable al ser más compacto por lo que puede estar mejor ajustado), sin importar el módulo del mismo. El docente optará por el que considere más eficaz.
3. Para colocar el primer vector, se empieza desde el punto O con el origen del vector (el extremo sin saeta) hasta un punto determinado, como se muestra en (b). Se recomienda al docente buscar algún vector que pueda acomodarse en el sistema de referencia de tal manera que sus componentes lleguen a obtenerse fácilmente.
4. Se determinan las componentes de este primer vector guiándose en el sistema de referencia.
5. En el caso del segundo vector, se realiza lo mismo que indican el paso número 3 y 4(c).

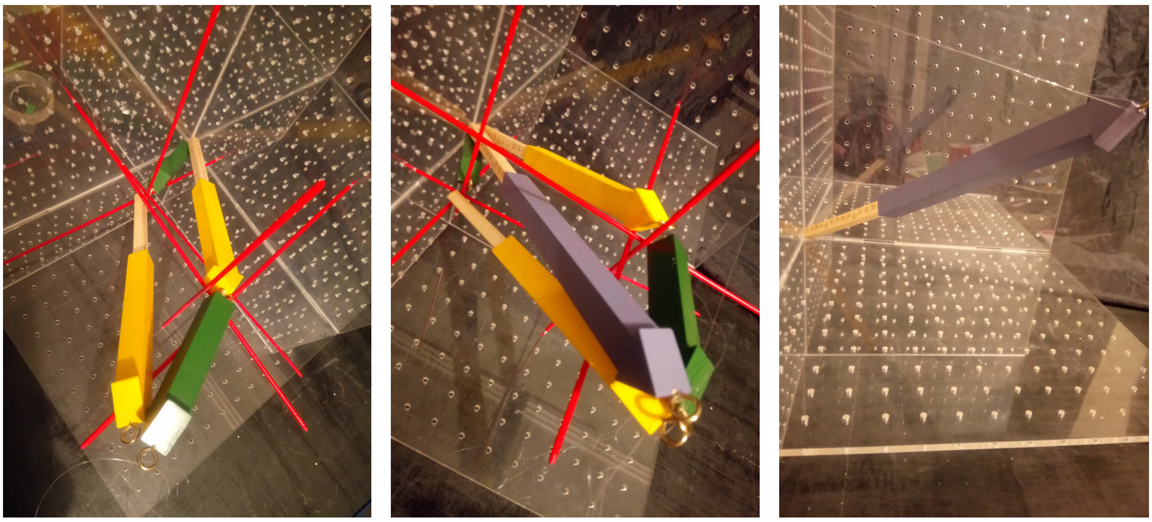


(a) (b) (c)

Figura 24.1 Adición de Vectores por el Método del Paralelogramo. Primera Parte

En este paso se puede poner en práctica lo que se aprendió en temas anteriores sobre la Adición de Vectores. i) El primer método es el que ya se aplicó en el tema Adición de Vectores de la Unidad: Operaciones con vectores. ii) El segundo método, el del Paralelogramo, es el que usará para esta explicación. Siguiendo con el procedimiento se tiene:

6. Una vez colocados los vectores en el sistema de referencia (véase la Figura 24.2), se aplica el Método del Paralelogramo (d), consistente en trasladar los dos vectores paralelamente. Esto puede hacerse a través del uso de otros dos vectores que tengan la misma magnitud de los dos ya colocados.
7. Cuando ya se obtiene el paralelogramo, se coloca el vector resultante (e), cuyo origen va desde del punto O y su extremo se prolonga hasta su esquina opuesta.
8. Se determinan las componentes de este último vector (f), apoyándose en el sistema de referencia.



(d) (e) (f)

Figura 24.2 Adición de Vectores por el Método del Paralelogramo. Segunda Parte

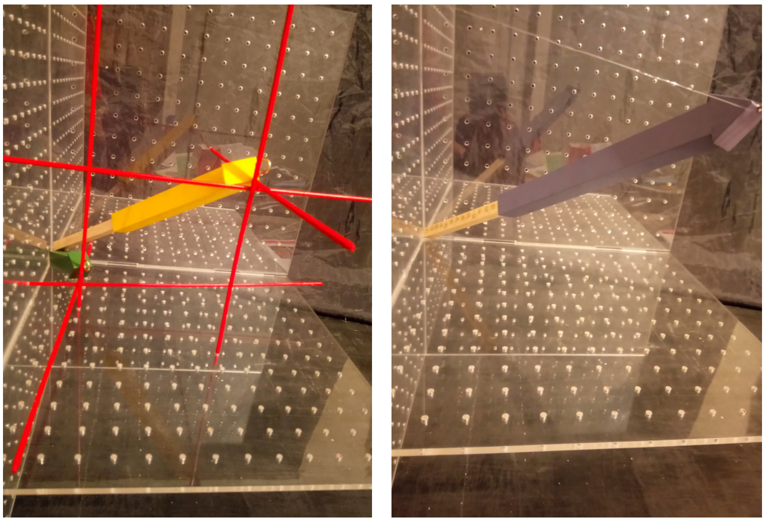
Cuando se obtienen estos datos, es ineludible demostrar la validez de este proceso, a través de la comprobación de la operación; por ello, el docente expresa la Adición de Vectores(*) por componentes como la suma entre cada componente, así:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.

Entonces, se procede como se indica a continuación:

1. Se trabajan con los dos vectores que se sumaron anteriormente (a), además del vector resultante (b) que se produjo de esta adición. Así lo muestra la Figura 25.
2. Basándose en la definición de esta operación se mide cada componente de los dos primeros vectores y se lo compara con su respectiva componente. Para esto, se puede medir con una regla, con los vectores ajustables, con cinta, o con cualquier implemento que sirva como referencia de la medida.
3. Se hace lo mismo con las componentes del vector resultante y se comprueba la definición.



(a) (b)

Figura 25. Adición de Vectores por componentes

Finalmente, se puede dejar que los estudiantes en su casa (o en clase, si se cuenta con tiempo) resuelvan en forma analítica el ejemplo que se dio para patentizar lo aprendido.

Participación del estudiante

Como ya se ha explicado en puntos anteriores, en cuanto a la primera operación con vectores con la que se trabaja que es la Adición, el procedimiento para los dos métodos ya se conoce y se trabajó en una unidad anterior con el primero de ellos. La diferencia entre el primer desarrollo del tema y el que se hará a continuación es que previamente se estudió la operación sólo con el uso de los vectores y su procedimiento para sumarlos, a modo de recordatorio; mientras que, en esta parte, se estudiarán los vectores pero ya con el uso de componentes.

Para la explicación del tema, el docente ha decidido utilizar el segundo método de Adición, el del paralelogramo; por ello, se pretende que el estudiante reconozca cómo proceder. A más de la exposición del docente, los pasos que puede seguir cada estudiante se reflejan a continuación:

- Cada vector estará determinado por sus componentes a través de los cuales se ubicarán en el sistema de referencia.
- Lo primero que hará el docente será ubicar los dos vectores, en base a sus componentes.
- Una vez ubicados estos vectores, y según el método convenido, se observará que los dos vectores se trasladarán paralelamente hasta formar el paralelogramo completo.
- Recordando, el vector resultante es el que se obtiene uniendo los dos vértices opuestos del paralelogramo, partiendo desde el punto O (origen) y el extremo se prolonga hasta su esquina opuesta.

Finalmente, es indispensable establecer las componentes de este vector resultante, dejando que los alumnos se fijen en las coordenadas visibles en el sistema de referencia y, de este modo, demostrar la veracidad del concepto.

Además, se puede dejar que los estudiantes en su casa (o en clase, si se cuenta con tiempo) resuelvan en forma analítica el ejemplo que se dio para patentizar lo aprendido.

EJEMPLO:

- Teniendo los vectores $\vec{u} = (2, 0, -1)$, $\vec{v} = (-3, 4, 5)$ y $\vec{w} = (1, 0, -1)$ realice las operaciones siguientes:

  a) $\vec{u} + \vec{w}$

  b) $\vec{w} - \vec{v}$

  c) $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$

a) $\vec{u} + \vec{w}$

$= (2,0,-1) + (1,0,-1)$

$= (2 + 1, 0 + 0, -1 - 1)$

$= (3,0,-2)$

b) $\vec{w} - \vec{v}$

$= (1,0,-1) - (-3,4,5)$

$= (1 + 3, 0 - 4, -1 - 5)$

$= (4,-4,-6)$

c) $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$

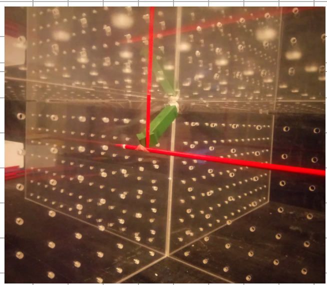
$= (2,0,-1) + (-3,4,5)$

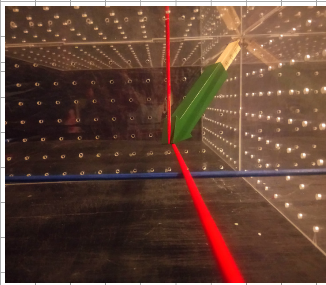
$- (1,0,-1)$

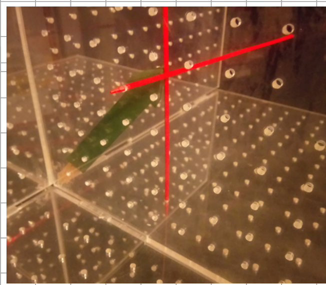
$= (2 - 3 - 1, 0 + 4$

$- 0, -1 + 5 + 1)$

$= (-2,4,5)$







Estos ejercicios también pueden representarse en el material didáctico para demostrar que son válidos; sin embargo, por cuestión de tiempo, solo se ilustrarán los resultados. Si se requiere hacerlos en el material, solo se deben seguir los mismos pasos que se indicaron en actividades pasadas.

Multiplicación por un escalar

Duración: 10 minutos

Actividad del docente

Para la exposición de este subtema, se pueden seguir muchos de los pasos que se hicieron con anterioridad, notando que, en este caso, se ejecutará la operación con componentes; es así que se recomienda trabajar como se indica a continuación:

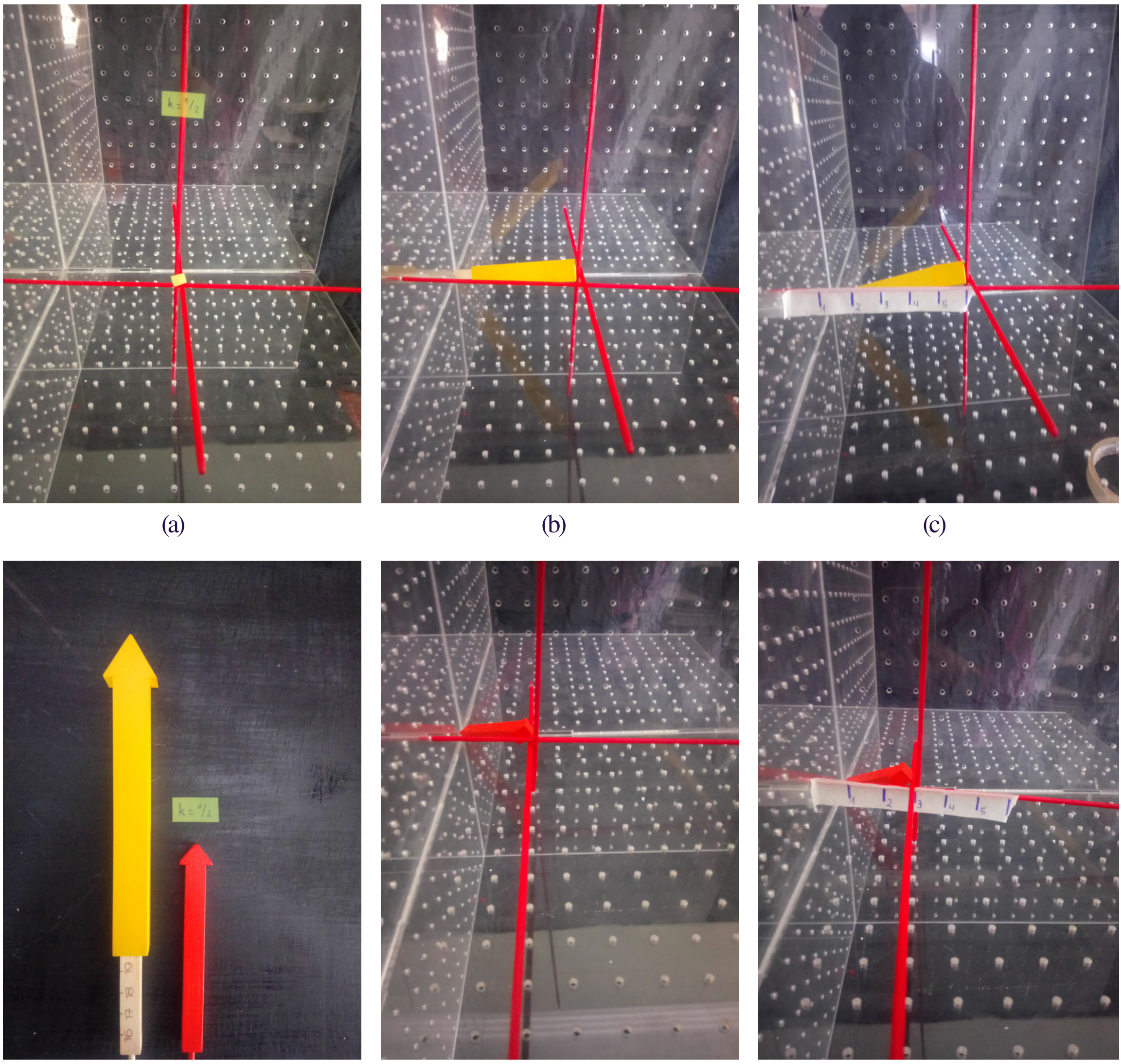
1. En la Figura 26 se muestra que se empieza dando algún ejemplo de vector por componentes y de escalar (a), pero, para generalizarlo se los puede escribir así:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$$
$$k \in \mathbb{R}$$

2. El docente puede elegir el tipo de vector que mejor se adapte a esta explicación; puede ser el del primer diseño y de cualquier dimensión. En cuanto al escalar, se puede proponer cualquier número, preferiblemente un entero pequeño para mayor facilidad.

3. En primera instancia, se ubica este vector en el sistema de referencia (como desee el docente) para tener una primera observación, como se hace en (b).

4. Se determinan las componentes de este vector, teniendo como guía el sistema de referencia. Se puede guiar en (c).
5. Seguidamente, "se transforma" este vector multiplicándolo por el escalar k (d) que se propuso e, igualmente, se lo ubica en el sistema de referencia (manteniendo la misma dirección y sentido), así como en (e). Finalmente, se determinan estas coordenadas finales (f).



(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

Figura 26. Multiplicación por un escalar

Ya obteniendo estos datos, se debe demostrar la validez de este proceso, a través de la comprobación de la operación; esto es, relacionando la semejanza existente entre las componentes del vector con el que se empezó con las del que finalizó. Por lo tanto, la Multiplicación de un escalar por un vector(*) se expresa como sigue:

$$k\vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$$

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.

Participación del estudiante

Por otro lado, en esta unidad se estudia también la Multiplicación por un escalar, de la misma forma que se desarrolló la operación anterior.

Para este caso en particular no sólo se trabaja con el vector a operarse y sus componentes, sino, además, con un escalar cuyo valor puede ser cualesquiera del conjunto de los números reales.

- Tal y como se vio en unidades anteriores cuando se trabajó esta operación, es necesario contar con un vector pero, esta vez, colocándolo en el sistema de referencia, siguiendo las componentes indicadas.
- El vector a operarse se encontrará colocado en el sistema de referencia, de manera que sirva a los estudiantes como un primer vistazo a la resolución de la operación.
- El estudiante debe retener en su mente este vector para luego realizar una comparación con el vector que se obtendrá al multiplicarlo por el escalar.
- A continuación, al vector se le multiplicará por el escalar decretado, esto es, reducirlo o ampliarlo, manteniendo la misma dirección.
- Al final, con este resultado, se observará la diferencia existente entre el primer vector y el que resultó de realizar la operación.

Tras el desarrollo de esta práctica, el estudiante obtendrá algunos resultados que mejorarán la percepción. Estos pueden resumirse como sigue:

- Al realizar la Multiplicación de un vector por un escalar, el vector que se obtuvo como resultado tendrá un cambio de magnitud, ya sea menor o mayor al original. Será mayor cuando los escalares por los que se multiplique sean números enteros (2, 3, 4, 5, ...) o fracciones impropias, es decir, el vector final aumentará con respecto al original. Por el contrario, cuando se multiplica por números fraccionarios propios (1/2, 2/3, 2/5, ...), el vector final se reducirá, es decir, será de menor magnitud que el original.
- En cuanto a la dirección, se notará que no se verá afectada ya que, por más que el escalar sea cualquier valor, la inclinación de la línea imaginaria sobre la que sigue la dirección del vector, se mantiene debido a que no hay cambio de ángulo.

- Por último, se verificará que el sentido del vector cambiará únicamente cuando el escalar por el que se multiplique el vector original sea un valor negativo; en caso contrario, sea cual sea el número positivo a multiplicar, el sentido no cambiará.

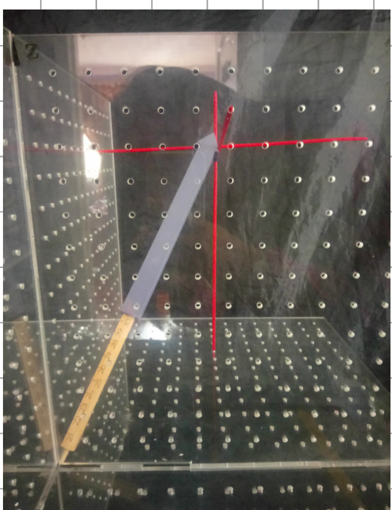
El alumno evidenciará todas estas conclusiones al observarlo representado gráficamente en el material; así como también, la expresión matemática correspondiente, con el cual se puede trabajar de forma analítica para su comprobación.

EJEMPLO:

- Teniendo los vectores $\vec{u} = (-3,2,4)$ y $\vec{v} = (0,2,2)$, realice las operaciones siguientes:
  - a) $3\vec{u}$
  - b) $-2\vec{v}$
  - c) $\frac{2}{3}\vec{u} + 5\vec{v}$
  - d) $-\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

a) $3\vec{u}$

$$= 3\cdot(-3,2,4)$$
$$= (3\cdot -3; 3\cdot 2; 3\cdot 4)$$
$$= (-9;6;12)$$



c) $\frac{2}{3}\vec{u} + 5\vec{v}$

$$= \frac{2}{3}(-3,2,4) + 5(0,2,2)$$
$$= \left(\frac{2}{3}\cdot -3; \frac{2}{3}\cdot 2; \frac{2}{3}\cdot 4\right) + (5\cdot 0; 5\cdot 2; 5\cdot 2)$$
$$= \left(-2; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right) + (0;10;10)$$
$$= \left(-2+0; \frac{4}{3}+10; \frac{8}{3}+10\right)$$
$$= \left(-2; \frac{34}{3}; \frac{38}{3}\right)$$

b) $-2\vec{v}$

$= -2 \cdot (0,2,2)$

$= (-2 \cdot 0;\ -2 \cdot 2;\ -2 \cdot 2)$

$= (0;\ -4;\ -4)$

d) $-\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

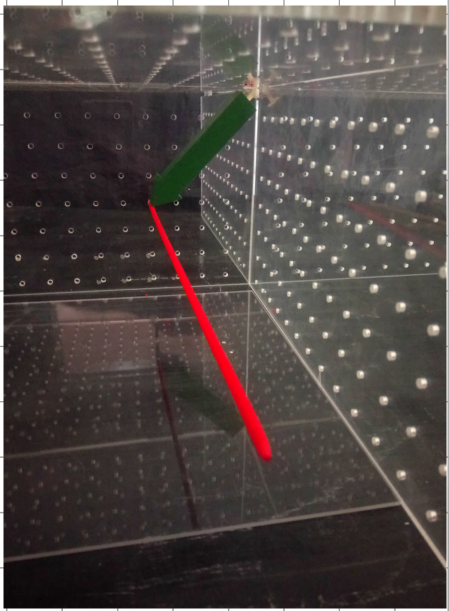
$= -(-3,2,4) + \dfrac{1}{2}(0,2,2)$

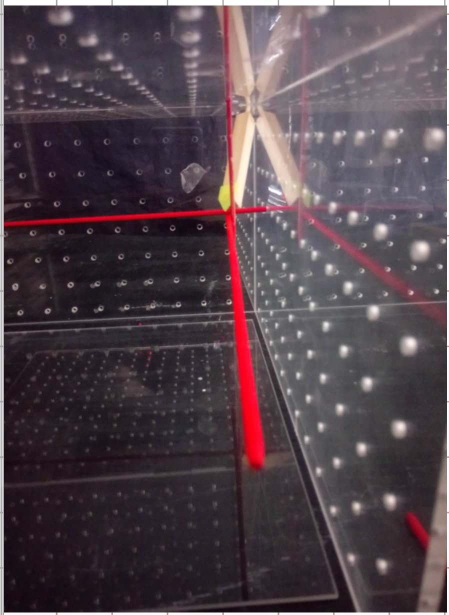
$= (3,-2,-4) + (\dfrac{1}{2} \cdot 0;\ \dfrac{1}{2} \cdot 2;\ \dfrac{1}{2} \cdot 2)$

$= (3,-2,-4) + (0;\ 1;\ 1)$

$= (3+0,-2+1,-4+1)$

$= (3,-1,-3)$





Estos ejercicios también pueden representarse en el material didáctico para demostrar que son válidos; sin embargo, por cuestión de tiempo, solo se ilustrarán los resultados. Si se requiere hacerlos en el material, solo se deben seguir los mismos pasos que se indicaron en actividades pasadas; pero se debe tomar mucho en cuenta que en algunos de estos problemas se opera con fracciones. Es por eso que se debe tener mucho cuidado en el momento de ubicar las componentes del vector.

Combinación lineal de vectores

Duración: 5 minutos

Actividad del docente

- En primer lugar, sería recomendable que el docente comience la explicación del tema con un pequeño ejemplo contextualizado a la vida cotidiana. A continuación, se expresa una muestra de lo que se puede decir; está en juicio del docente exponerla, aumentar más contenido o restar contenido.
- Se explica que este tema reúne la relación entre cantidades vectoriales y escalares.

Se toma en cuenta que hay un grupo de personas (conjunto que determina el primer vector) que se encuentran en un almacén comprando determinados materiales (conjunto que representan las cantidades escalares) y que, finalmente, se dirigirán de regreso a sus respectivos hogares o lugares de trabajo. Sin embargo, se necesita saber la combinación total de personas que obtuvieron sus cosas.

- Se busca que, con la guía del maestro y la ayuda del ejemplo, se establezca el concepto de Combinación lineal (*).
- Entonces, reuniendo algunas ideas o pensamientos que se exclamen en la clase, se emana una definición que se expresa así:

Una Combinación Lineal de Vectores es el vector que se obtiene al sumar todos los vectores que lo componen multiplicados por ciertos escalares.

Por ello, en lenguaje matemático, se dice que el vector $\vec{u}$ es combinación lineal de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_n$ si existen $k_1, k_2, k_3, \ldots k_n$ números reales tales que:

$$\vec{u} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + \cdots + k_n\vec{u}_n$$

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.

Participación del estudiante

Como primera actividad para desarrollar el tema, el docente decidió impartir un pequeño ejemplo contextualizado para explicarlo más categóricamente.

De ese ejemplo, el estudiante puede desprender ciertos puntos importantes que les sirvan como guía para establecer el concepto de Combinación Lineal, como los que se describen aquí:

- Se puede comenzar identificando lo que simboliza cada pieza del ejemplo (pieza hace referencia a los conjuntos presentes en dicho ejemplo): el de las personas, que representan los vectores; y el de los materiales que lleva cada persona, que representan los escalares.
- Se anuncia, también, que las personas con sus materiales se dirigen hacia sus respectivos establecimientos; esto indica, de forma implícita, que se tratan de vectores ya que va dirigido hacia algún lado (la pregunta: "¿hacia dónde se dirige?" es un práctico modo de descubrir si una cantidad o parámetro corresponde a un vector.
- Se requiere conocer la cantidad total de personas que recibieron su material, esto es una combinación.

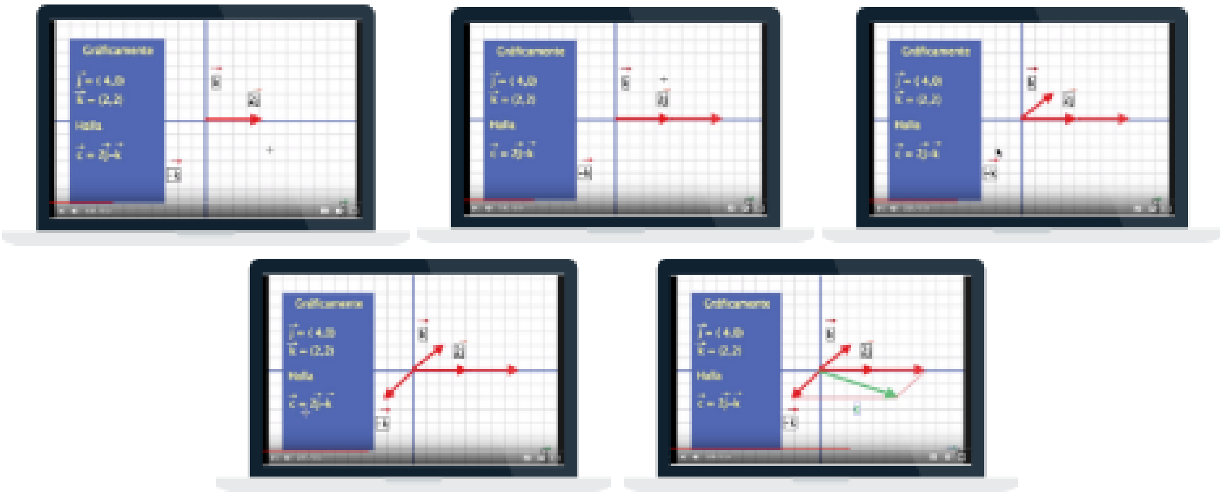
De estos puntos destacados, los alumnos pueden tener cierta idea de lo que significa Combinación Lineal de vectores: Se quiere conocer la cantidad total de personas que obtuvieron su material. Esto, con otras palabras, quedaría: El total de vectores multiplicados por sus escalares, lo que llega a conformar una combinación.

Además, se puede trasladar ese concepto teórico a uno matemático, tomando en cuenta cada punto y conclusión que se obtuvo de esta actividad entera.

Duración: 10 minutos

Actividad del docente

Para demostrar estos conceptos se recomienda al maestro que, previamente, haya revisado este video sobre Combinación Lineal de vectores, de manera que se le facilite la explicación de este tema en forma gráfica y, a su vez, cómo utilizar el material. Cabe mencionar que el video muestra el contenido en dos dimensiones; sin embargo, el docente debe ser capaz de traspasarlo a tres dimensiones. En la Figura 27 se dejan algunas capturas del video como referencia.

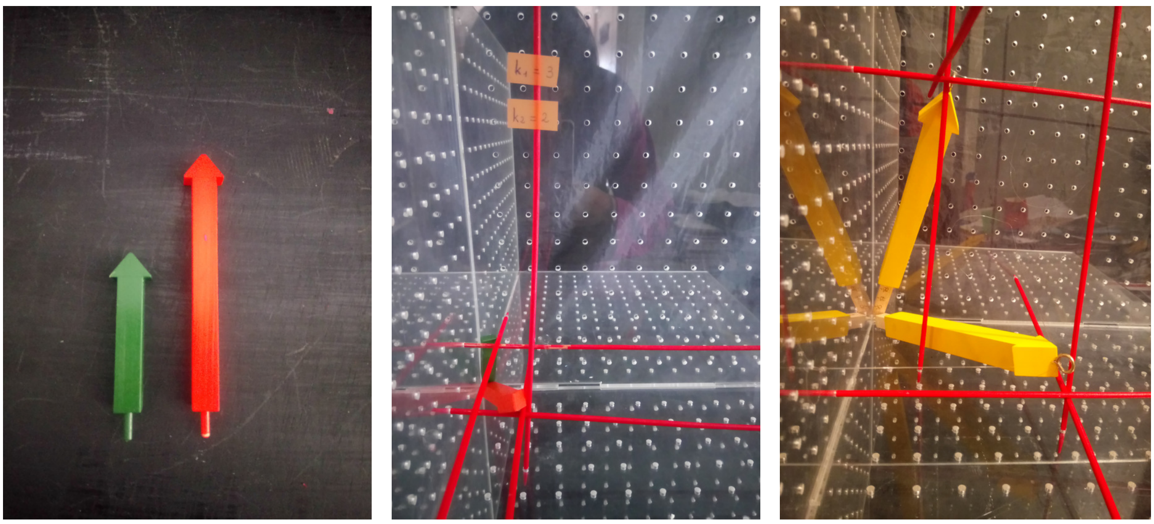


Recuperado en: https://www.youtube.com/watch?v=Qd3lHt-tHrA

Figura 27. Combinación Lineal en dos dimensiones

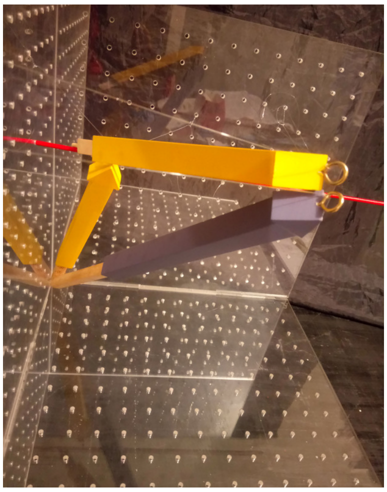
Es así que, para aplicarlo a nuestro sistema de referencia, como en la Figura 28, se puede proceder así:

1. Establecer dos vectores con los que se vaya a trabajar; el docente puede escoger entre los más idóneos y ubicarlos como se crea más conveniente y luego se estipulan estas componentes (véase (a)).
2. Asimismo, determinar los escalares para cada uno de los vectores; en este caso, sí se podría fijar dos cantidades escalares representativos, en lugar de generalizarlas.
3. A los vectores se les multiplica por los escalares que se determinaron, formando así los vectores con los que se va a trabajar; esto está representado en (b).
4. Una vez colocados los vectores (c) como se indicó, se continúa con la adición de ellos, como (d) lo muestra. Puede usarse el Método del paralelogramo.
5. Finalmente, con (e) se determinan las componentes del vector resultante para compararlas después.

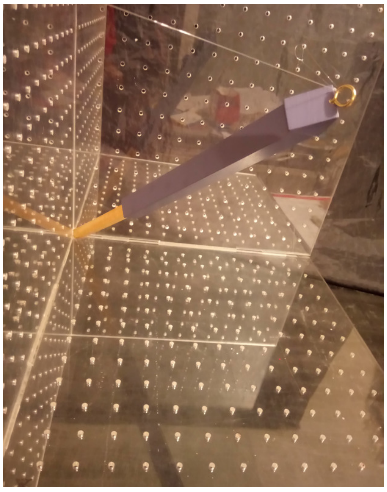


(a) (b) (c)

Figura 28. Combinación Lineal



(d)



(e)

Participación del estudiante

Una vez entendido teóricamente lo que significa esta parte de la materia, es necesario trasladarla a lo gráfico, mediante la utilización del material concreto.

La resolución práctica (tanto la forma gráfica como la analítica) cumple unas condiciones bastante simples, que relacionan conceptos ya aprendidos. El docente, paso por paso, ejecutará un ejemplo como parte de la explicación, el cual se percibe así:

- La práctica muestra dos vectores colocados en el sistema de referencia, cada uno con sus respectivas coordenadas.
- A estos dos vectores se les multiplicó por sus correspondientes escalares, tomando en cuenta todo lo que se estudió al respecto.
- Y, como último paso, se adicionaron estos dos nuevos vectores, con cualquiera de los dos métodos de Adición que se aprendió ya.

La representación gráfica del tema es muy sencillo de analizar y entender, puesto que ha incorporado temas que ya se conocen de forma teórica, de forma analítica y de forma gráfica. Como consecuencia, el estudiante se dará cuenta que la Combinación Lineal de vectores es la unión de las dos operaciones más sencillas de vectores: la Adición de Vectores y la Multiplicación de un escalar por un vector.

Se puede dejar que los estudiantes en su casa (o en clase, si se cuenta con tiempo) resuelvan en forma analítica el ejemplo que se dio para patentizar lo aprendido.

EJEMPLO:

- Expresar el vector $\vec{s} = (1,2,3)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u} = (1,0,1)$, $\vec{v} = (1,1,0)$ y $\vec{w} = (0,1,1)$.

Recordando que $\vec{u} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + \cdots + k_n\vec{u}_n$ los vectores quedarían así:

$$\vec{s} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v} + k_3\vec{w}$$

$$(1,2,3) = k_1(1,0,1) + k_2(1,1,0) + k_3(0,1,1)$$

$$(1,2,3) = (k_1, 0, k_1) + (k_2, k_2, 0) + (0, k_3, k_3)$$

$$(1,2,3) = (k_1 + k_2 + 0; 0 + k_2 + k_3; k_1 + 0 + k_3)$$

$$(1,2,3) = (k_1 + k_2;\ k_2 + k_3;\ k_1 + k_3)$$

Ahora, igualamos las cantidades obtenidas, componente por componente:

$$\left.\begin{aligned} k_1 + k_2 &= 1 \\ k_2 + k_3 &= 2 \\ k_1 + k_3 &= 3 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} 2k_1 + 2k_2 + 2k_3 &= 6 \\ k_1 + k_2 + k_3 &= 3 \end{aligned}$$

Sumamos miembro a miembro las tres ecuaciones y a la ecuación obtenida se le resta cada una de las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 &= 3 \\ k_1 + k_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 &= 3 \\ k_2 + k_3 &= 2 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 &= 3 \\ k_1 + k_3 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

$$k_3 = 2 \qquad\qquad k_1 = 1 \qquad\qquad k_2 = 0$$

$$\vec{s} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v} + k_3\vec{w}$$

$$\vec{s} = 1\vec{u} + 0\vec{v} + 2\vec{w}$$

$$\vec{s} = \vec{u} + 2\vec{w}$$

Participación del estudiante

- Se puede dejar que los estudiantes, en grupos, practiquen este ejercicio en particular con el material concreto y comparen el resultado analítico con el que obtengan gráficamente.
- Después, por grupos, deberán crear su propio ejercicio para compartirlo con el resto de los grupos y solucionarlos.

- Es importante que el docente realice el ejercicio paso por paso en el pizarrón, de manera que indique a sus alumnos cuál es el proceso correcto para resolver problemas como estos.
- De igual forma, se aprovecha para comentar que este último ejercicio se presta para una demostración diferente, debido a que éste se basa en el descubrimiento de los escalares en lugar del vector.

Componentes de un vector determinado por dos puntos

Actividad del docente

Este subtema requiere algunos conocimientos obtenidos en años anteriores; es por tal razón que se pretende realizar ciertas preguntas a los estudiantes como pequeña introducción de este subtema. Se tiene, entonces:

Duración: 3 minutos

1. ¿Por cuántos puntos está determinado un vector? Explique:
2. Si se tiene el vector AB, ¿cuál punto determina su origen y cuál su extremo?
3. En la recta real, ¿cómo se determina la distancia entre dos puntos?

El docente puede realizar las preguntas en forma individual, eligiendo a cualquier estudiante de la clase para que responda la pregunta. Para tener un pequeño apoyo, el estudiante debe responder algo similar a lo que se presenta a continuación:

1. ¿Por cuántos puntos está determinado un vector? Explique:

Un vector está determinado por dos puntos cualesquiera en el espacio. En temas anteriores, estos dos puntos eran: el punto O, de coordenadas (0, 0, 0) y el punto P de coordenadas (p1, p2, p3).

2. Si se tiene el vector AB, ¿cuál punto determina su origen y cuál su extremo?

En el vectorAB, el punto A determina su origen y el punto B, su extremo; es decir, el vector se dirige de A a B.

3. En la recta real, ¿cómo se determina la distancia entre dos puntos?

Para determinar la distancia entre dos puntos que se encuentran sobre la recta real se debe restar las coordenadas del punto 2 menos las del punto 1.

Participación del estudiante

Al igual que en muchos otros temas, éste requiere la respuesta a algunas interrogantes que servirán como preceptos para el correcto desenvolvimiento del tema.

1. ¿Por cuántos puntos está determinado un vector? Explique:
2. Si se tiene el vector AB, ¿cuál punto determina su origen y cuál su extremo?
3. En la recta real, ¿cómo se determina la distancia entre dos puntos?

Se repiten los mismos pasos que ya se implantaron en algunos otros temas, por lo que los estudiantes ya tienen una idea de cómo proseguir en este tipo de actividades. Para dar respuesta a las interrogantes, las posibles ideas que desarrollan los estudiantes pueden ser:

- Un vector, con todas sus partes, necesitan solamente de dos puntos para ser constituidas totalmente.
- Un vector está determinado por un punto de origen y un punto de extremo.
- Para la denominación de un vector se inicia con el,punto de origen, luego con el punto de extremo. En el vector AB, el punto A expresa el origen y el punto B, el extremo.
- En la recta real, cuando se tienen dos puntos, para determinar su distancia se resta la posición del segundo punto menos la del primero.

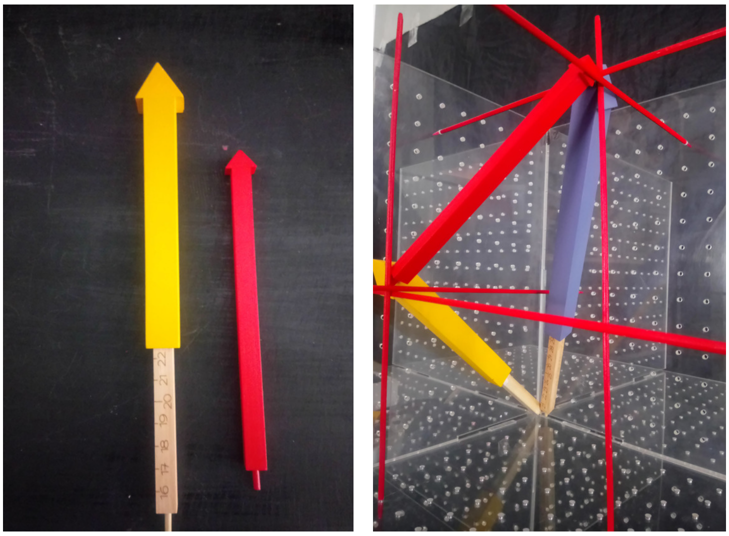
Duración: 10 minutos

Actividad del docente

Ahora bien, se procederá a la explicación del tema como tal. Debido a la facilidad de éste, la aplicación del material didáctico (véase la Figura 29) resulta mucho más sencilla puesto que se trata de contenido meramente gráfico. Para esto, se hace lo siguiente:

1. Elegir, en primer lugar, dos vectores del set (los que mejor puedan adaptarse a esta situación según la opinión del docente). Esto se muestra en (a).
2. Adicionar estos dos vectores gráficamente (b), siguiendo la secuencia que ya se aprendió. Este paso es significativo debido a que la operación remite como base de lo que se aprenderá.
3. Con la representación gráfica obtenida, se visibilizarán los vectores de manera que se puedan determinar sus respectivas componentes.
4. Como se dijo en el paso 2, se trabajará con la operación de la siguiente manera: Recordando que la suma de los dos vectores da igual a una resultante, entonces, algebraicamente se sabe que un vector, restada de la resultante, da igual al otro vector; es decir:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \rightarrow \vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$$



(a) (b)

Figura 29. Componentes de un vector determinado por dos puntos

Entonces, tras lo que se representó gráficamente, en forma matemática(*) nos queda:

$$\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$$

$$\vec{u} = (w_1, w_2, w_3) - (v_1, v_2, v_3)$$

$$\vec{u} = (w_1 - v_1, w_2 - v_2, w_3 - v_3)$$

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.

Se puede dejar que los estudiantes realicen algunos ejemplos en sus cuadernos, con este enunciado: Dados los puntos A = (2, -2, 3); B = (-1, 0, 5); C = (5, 3, 1) y D = (2, 3, 4), determine las componentes de los siguientes vectores: AB, CD, DA, CB y DA.

Participación del estudiante

La explicación del tema en sí permite una sencilla aplicación de ejemplos en el recurso elaborado, al tratarse de contenido meramente gráfico. Esta representación sigue un sinnúmero de pasos que el docente sostiene como parte de la exposición y que el estudiante debe retener.

- Para resumir, la explicación del tema cuenta con la adición de dos vectores colocados en el sistema de referencia y obteniendo su correspondiente resultante.
- De esta suma de vectores, junto con su resultante, se organiza algebraicamente de manera que uno de los vectores sea igual a la resultante menos el otro vector.
- Entonces, con esta conclusión, se determina la representación matemática disponible para el tema.
- Luego, se sustituye esta expresión por las correspondientes componentes de cada vector con el fin de obtener una expresión más específica y útil.

Por tanto, se podría deducir que la representación en el material sirve como apoyo para demostrar la validez de la fórmula matemática, ya que los vectores estarán habilitados para establecer sus respectivas componentes, según su ubicación en el sistema de referencia.

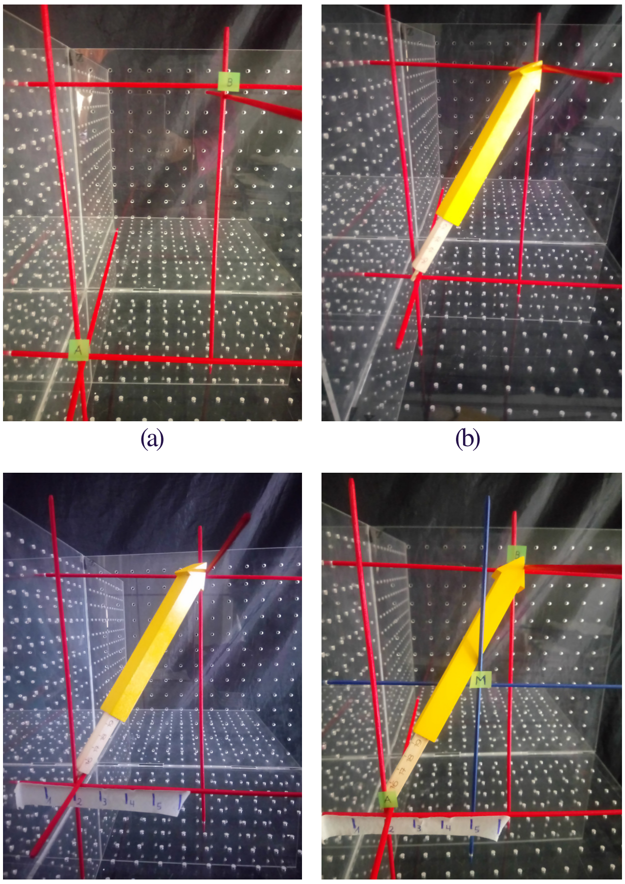
Punto medio de un segmento

Actividad del docente
Este subtema, al igual que anterior tiene muchas facilidades gráficas por lo que se puede utilizar el material designado.

Duración: 10 minutos

Se pretende que los propios alumnos, en base a lo que se ha venido aprendiendo y a la guía del docente, descubran por sí mismos la expresión de este tema; por lo que se sugiere que trabajen en grupos con su material propio. Las indicaciones son las siguientes:

- El docente les pide que se reúnan en grupos (tomando en cuenta el número de estudiantes y el material que con el que se cuente; aunque, se recomiendan que sean 4 miembros por grupo como máximo).
- En primer lugar, deberán colocar un vector (b) determinado por los puntos A y B (véase la Figura 30(a)) que ellos escojan, y determinar sus componentes. Para esto, pueden seguir los pasos del tema preliminar 0, para reducir tiempo, pueden guiarse en las coordenadas del sistema de referencia. Lo que se busca es concretar las componentes del punto medio del vector en uso, es decir, buscar el punto que divide a este vector en dos partes iguales, como lo indica (c).
- Se tiene que las componentes del punto medio, al que se le denominará M, son (m1, m2, m3); y el vector AB será igual a dos veces el vector AM. Así se puede ver en (d).
- Con este vector, los estudiantes pueden medir su longitud y dividir para dos para obtener la mitad del segmento y, con esto, se fijan sus componentes, lo más aproximado posible.
- Ahora, con estos datos, se puede hacer una comparación con los resultados que se obtengan analíticamente (se deberán usar las expresiones matemáticas correspondientes que están en el texto). Finalmente, los resultados deberán coincidir.



(a) (b) (c) (d)

Figura 30. Punto Medio de un segmento

Entonces, como se comprobó gráfica y analíticamente, las expresiones matemáticas aplicadas a Punto Medio de un Segmento(*) son:

$$m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2};\ m_2 = \frac{a_2 + b_2}{2};\ m_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}$$

Participación del estudiante

Nuevamente es un trabajo que se hizo en forma grupal. Los estudiantes procuran hacer observaciones muy específicas del tema que se está estudiando y de la manera en que se lo trabajó con el material.

- La primera observación importante que se realiza de este tema comienza en las coordenadas. En este caso, el vector con el que se trabaja no se traza desde el origen del sistema de referencia como se ha venido ejecutando, sino que empieza desde un punto en particular al que se lo ha denominado A.
- Este vector que inicia en el punto A se dirige hacia el punto B, también con coordenadas específicas.
- Es, en casos como éstos, en donde el estudiante se puede dar cuenta de lo que aprendió en temas anteriores sobre representación de un vector, el cual nos manifestaba que un vector se denomina tomando en cuenta su punto de origen y el punto de extremo; el vector AB es con el que se ha trabajado en este apartado.
- Una vez obtenido el vector, se determina su punto medio, basándonos en las componentes. Este punto medio debe coincidir con las expresiones que se manifiestan en la definición.
- Es así que, tanto analítica como gráficamente, se observará que la definición se cumple.
- Los estudiantes pueden notar la facilidad que presenta el material al poder contar las coordenadas, y son de gran ayuda, sobre todo, al tratarse del espacio donde este tipo de contenido suele ser mucho más abstracto. Es por ello, que al estudiante se le amplía la comprensión y, a las vez, simplifica el estudio.

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.

EJEMPLO:

- Hallar las coordenadas del punto M que es el punto medio del vector determinado por los puntos $A\ (-1,3,1)$ y $B\ (7,5,-3)$.

Aplicamos las expresiones respectivas, y tenemos:

$$m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{-1+7}{2} = 3$$

$$m_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$$

$$m_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{1+(-3)}{2} = -1$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto medio son: $B\ (3,4,-1)$

- Hallar las coordenadas del punto B, que es uno de los extremos del vector, si son conocidos los puntos $A\ (-1,3,10)$ y $C\ (1,5,2)$, el cual es el punto medio:

Aplicamos las expresiones respectivas, y tenemos:

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \rightarrow b_1 = 2c_1 - a_1 = 2(1) - (-1) = 3$$

$$c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} \rightarrow b_2 = 2c_2 - a_2 = 2(5) - 3 = 7$$

$$c_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} \rightarrow b_3 = 2c_3 - a_3 = 2(2) - 10 = -6$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto B son: $B\ (3,7,-6)$

PRODUCTO ESCALAR

OBJETIVO

Emplear el material elaborado para una comprensión más amplia del contenido a través de actividades como: la lectura, el trabajo en grupo, la resolución de ejercicios y la práctica con recursos educativos concretos, con el fin de que los estudiantes se sientan atraídos por este trabajo activo y la explicación lúdica del docente para optimizar su aprendizaje.

En esta unidad se trabajarán los siguientes temas:

- Definición
- Propiedades del producto escalar
- Expresión analítica del producto escalar
- Módulo de un vector y ángulo entre dos vectores

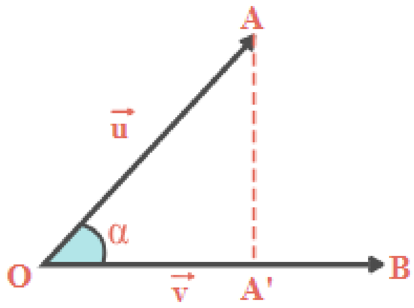


Figura 31. Imagen inicial de Producto Escalar

Fuente: Sangaku Maths

Definición

Es necesario que el docente, anticipadamente, haya solicitado a la clase hacer una lectura del tema como medio para activar conocimientos previos, dado que, para éstos temas, se utilizarán las mismas expresiones que en años anteriores, pero aplicadas al espacio.

Duración: 6 minutos

Actividad del docente

En primera instancia, se puede iniciar con una guía de preguntas para que los estudiantes puedan reavivar lo aprendido y logren relacionarlo con lo que se aprenderá. Para este propósito se tiene lo siguiente (aquí se muestran las preguntas ya contestadas; el formato sin contestar se tiene en la página 199):

PREGUNTAS PARA EL ESTUDIANTE

1. ¿Cuál es la expresión para determinar el módulo de un vector?

$$|\vec{u}| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2}$$

2. ¿A qué se llama producto escalar o producto punto entre dos vectores?
El Producto Escalar entre dos vectores es un número real que resulta al multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

3. ¿Cuál es la ecuación general del Producto escalar?

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos\left(\widehat{\vec{u} \cdot \vec{v}}\right)$$

4. ¿Cómo se define el producto escalar entre dos vectores en forma geométrica?
Geométricamente, se conoce que el Producto Escalar entre dos vectores es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él. La proyección es la "sombra" que un vector marca en el segmento del otro, cuando ambos parten del mismo punto y se traza una perpendicular desde el extremo de un vector hasta la dirección del otro.

5. Escriba la ecuación del producto escalar dadas sus componentes:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

6. ¿Cómo influyen los signos del resultado del producto escalar en los diferentes casos?
El producto escalar es positivo si el ángulo es agudo.
El producto escalar es negativo si el ángulo es obtuso.
El producto escalar es nulo si el ángulo es recto (vectores ortogonales).

7. ¿Qué se pude determinar mediante la aplicación del producto escalar?
Se puede determinar:
El módulo de un vector
El ángulo entre dos vectores
Proyección de un vector en la dirección de otro
Condición de perpendicularidad entre vectores.

8. Complete:
El resultado del producto escalar entre dos vectores es igual a un ***escalar o número real.***

Participación del estudiante

Para la explicación del tema, el docente decidió enviar a sus estudiantes una hoja de interrogantes para que los estudiantes recuerden el contenido necesario para relacionarlo, aumentarlo y continuar con el aprendizaje.

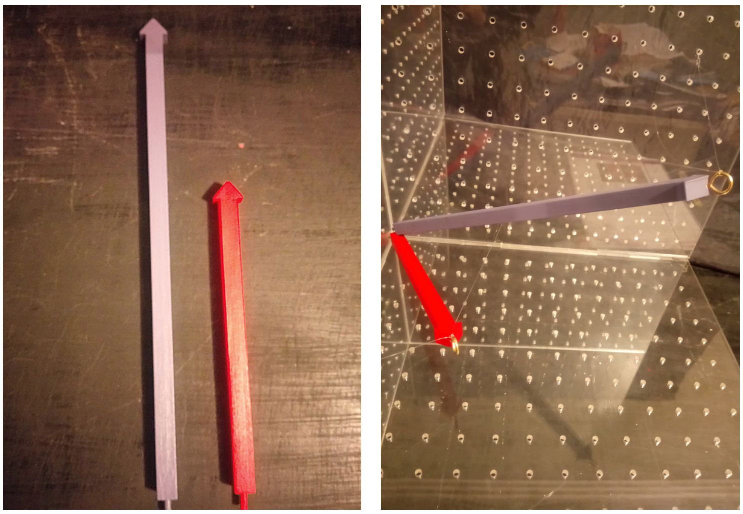
Las interrogantes planteadas se muestran en los anexos. La hoja con las respuestas más próximas están incorporadas al trabajo con el docente.

La resolución de esta hoja de preguntas requiere que los estudiantes recuerden o investiguen el contenido que se aprendió ya para luego adaptarlo a la explicación con el material.

Actividad del docente

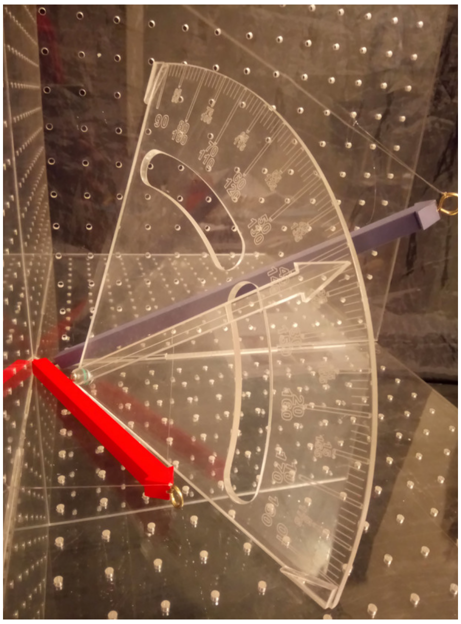
El docente ha decidido que, para demostrar la primera expresión del producto escalar, se podría trabajar con los estudiantes en grupos utilizando el sistema de referencia y los vectores que los alumnos construyeron. Para esta parte se utilizan estos materiales como se describe a continuación:

- En primer lugar, se especificará si se averiguará el ángulo o las magnitudes.
- Si se empieza por el ángulo, entonces se recomienda seleccionar los vectores (véase la Figura 32.1(a)) que tengan magnitud fija -para decretar cómodamente el valor de la magnitud- y colocarlos en el sistema de referencia como se desee (b).
- Cada grupo se encargará de buscar la solución aplicando la expresión con los datos que se tenga. Así, se obtendrá el valor del ángulo, como se observa en (d).
- Para medir el ángulo entre los vectores se usa la pieza del set que corresponde al graduador (c).



(a) (b)

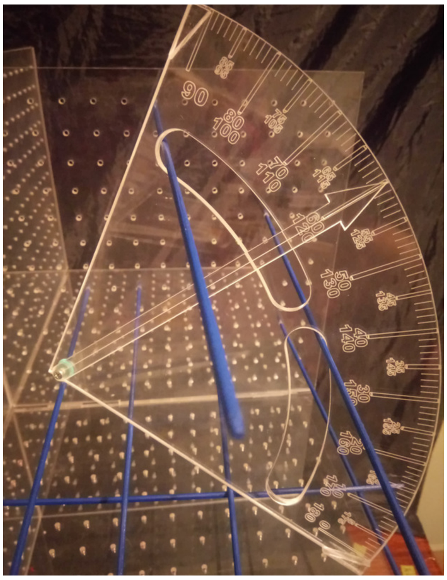
Figura 32.1 Producto Escalar. Primera Parte



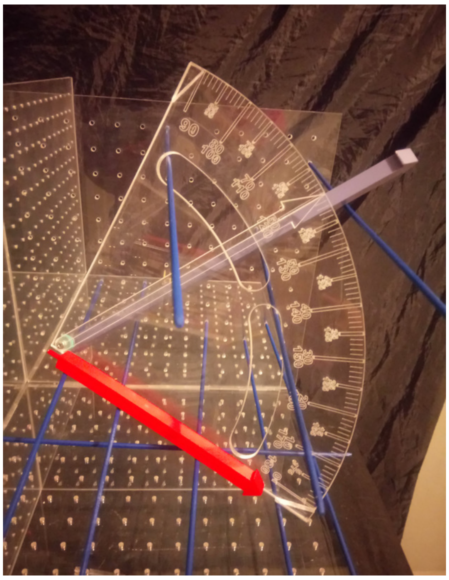
(c)

(d)

- En el caso que se empiece trabajando con el valor del ángulo (e), no sería necesario que los vectores que se escojan tengan una magnitud bien definida sino que sean colocados (f) de manera que el ángulo pueda calcularse con simplicidad usando el graduador. Esto puede observarse en la Figura 32.2.
- Tras este paso, los alumnos deben realizar la operación respectiva en su cuaderno e identificar los valores para luego compararlos.
- Se procura que los resultados sean iguales o, al menos, muy similares; así, se demostraría la validez de la expresión.
- Si se quiere seguir trabajando con cualquiera de estos dos casos, solamente se van cambiando los datos eventualmente.



(e)



(f)

Figura 32.2 Producto Escalar. Segunda Parte

Ahora, se destaca una vez más la expresión matemática del producto escalar entre vectores(*):

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\left(\widehat{\vec{u}\cdot\vec{v}}\right)$$

Participación del estudiante

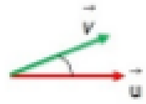
La primera actividad está destinada para que el alumno demuestre la veracidad de la primera expresión del tema Producto Escalar.

- Cada paso que se detalló en el desarrollo de la actividad se elaboró para que sea el propio estudiante que, con su práctica, verifique si es correcto o no cómo está trabajando.
- Debido a que la representación gráfica de esta parte de la actividad está muy relacionada con la expresión matemática, lo que se realizará es, a modo de ejemplo, la sustitución de los datos que se observan en el material para, luego, comprobarlo analíticamente.
- En primer lugar se recurre a identificar el ángulo; y, después, las magnitudes de os vectores; ambos con los mismos pasos.
- Finalmente se evidenciará que lo que está representado en el material se contemple en el desarrollo analítico a través de la aplicación de la expresión matemática.

Ahora bien, la continuación del tema, que tiene que ver con la pregunta 6 de las Actividades para el Estudiante, puede ser enviado de tarea a la casa para que puedan ser reproducidos por los propios alumnos en el material didáctico elaborado; desarrollando paso a paso lo que demanda cada punto.

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.

El producto escalar es positivo si el ángulo es agudo.

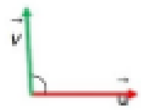


$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$

El producto escalar es negativo si el ángulo es obtuso.

$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$

El producto escalar es nulo si el ángulo es recto (vectores ortogonales).



$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Actividad del docente

En caso que el maestro crea necesario que esta explicación debe ser dada, entonces se recomienda seguir los siguientes pasos:

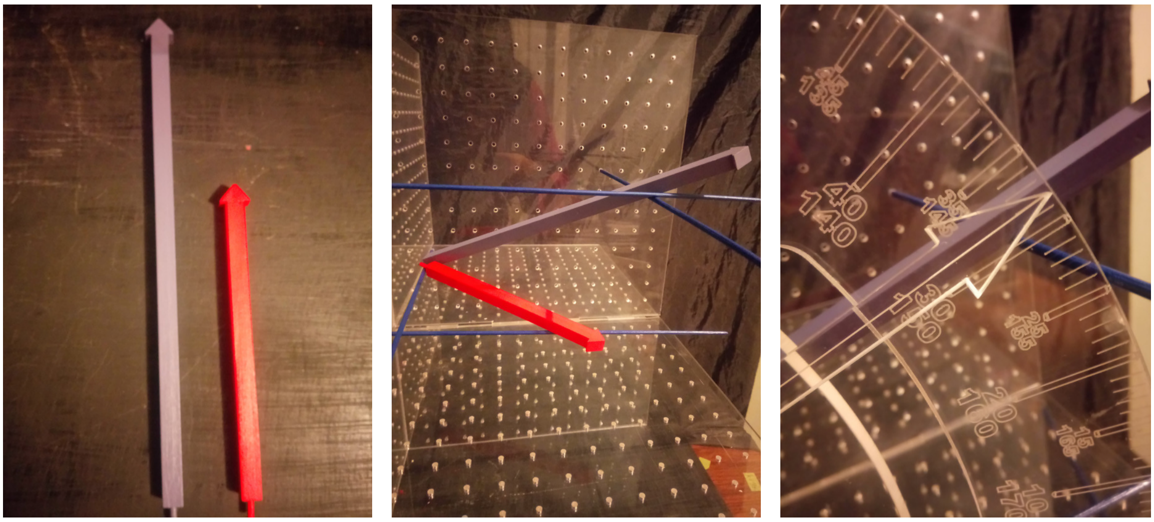
Duración: 7 minutos

- Se comienza por el primer enunciado, en el cual el ángulo es menor a 90°.
- Se tienen dos opciones: utilizar las herramientas del set propias del tema; o aquellas que conllevan la aplicación del sistema de referencia.
- Si se decide el primer caso, entonces se empezará por elegir cualquiera de las piezas cuyo ángulo sea agudo; por tal razón, el valor del ángulo será fijo (véase la Figura 33.1(a) y (b)).
- Entonces, con un flexómetro o una regla graduada se calcularán las magnitudes de cada vector (c) que conforman esta pieza.
- Se reemplazan estos datos en la ecuación del producto escalar entre dos vectores y se comprueba que este resultado sea positivo.

(a) (b) (c)

Figura 33.1 Producto Escalar respecto al ángulo. Primera Parte

- Si se desea emplear la segunda opción, entonces se iniciará con la selección de dos vectores cualesquiera del set, como lo muestra la Figura 33.2(d).
- Se establecen las magnitudes de estos vectores a través de medición, si aquellos no tiene valor concreto.
- Se ubicarán estos vectores en el sistema de referencia, como lo indica (e), cuidando que el ángulo que formen entre ellos sea menor a 90°.
- Se usará el graduador para medir el ángulo que forman ambos vectores (f).
- Se reemplazan estos datos en la ecuación del producto escalar entre dos vectores y se comprueba que este resultado sea positivo.



(d) (e) (f)

Figura 33.2 Producto Escalar respecto al ángulo

Para los otros dos enunciados que faltan, se puede proceder de la misma manera con ambas opciones, solamente se cambiaría el valor del ángulo.

Participación del estudiante

Para la siguiente parte del tema, en la que se pretende identificar cómo influyen los signos en el desarrollo del Producto Escalar, se ha desencadenado una secuencia de pasos para, nuevamente, comprobar más explícitamente lo que emite el contenido.

Se propusieron dos opciones y, en esta ocasión, es importante enfocarse en la primera, la cual utiliza los elementos propios del set.

- Las herramientas pretenden que el estudiante compruebe que las expresiones utilizadas son válidas, pues ya cuentan con uno de los parámetros fijos para sustituirlos en la fórmula matemática.
- Por otro lado, si se aplican las herramientas que se han venido utilizando, simplemente se tendrá que obtener los valores de los parámetros que sean posibles ya sea usando el graduador para medir el ángulo, o los vectores de magnitud fija.
- Se toma en cuenta que, para este apartado, se debe trabajar con tres ángulos: el menor a 90°, el de 90° y el mayor a 90°; y se deben seguir estos mismos pasos para los tres casos (aunque, al ser igual el procedimiento, sería necesario hacer uno solo y dejar que el alumno compruebe los otros dos, como ya se expresó en la actividad).

Además, como parte del trabajo activo y de redescubrimiento del estudiante, se espera que practiquen y mejoren su comprensión (tanto del tema como del uso del material) con los siguientes casos particulares de la operación; por medio de la aplicación del material didáctico y de la resolución analítica.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{u} = \vec{v} \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

Propiedades del producto escalar

Actividad del docente

En este tema, el desarrollo de las propiedades de la operación en cuestión también pueden elaborarse a través del material empleado, para conseguir que los estudiantes trabajen y descubran cada precepto en torno al tema estudiado.

Duración: 20 minutos

- Como primer paso, se podría dividir el curso en cinco grupos (debido a que son cinco las propiedades del producto escalar entre vectores).
- El docente explica que cada grupo deberá ejemplificar una de las cuatro propiedades a través del material didáctico, entonces se otorga a cada uno de ellos una propiedad. Los miembros del grupo, con ayuda de sus textos y la guía del docente, tratarán de entender la propiedad y elaborarán un ejemplo aplicable al material didáctico.
- Una vez que todos los grupos cuenten con su respectivo ejemplo, se procede a compartirlo, aleatoriamente, con los otros grupos. Todos los alumnos deberán tratar de emular el ejemplo dado para descubrir la propiedad que se está exponiendo.
- Se repite este mismo procedimiento para las demás propiedades.

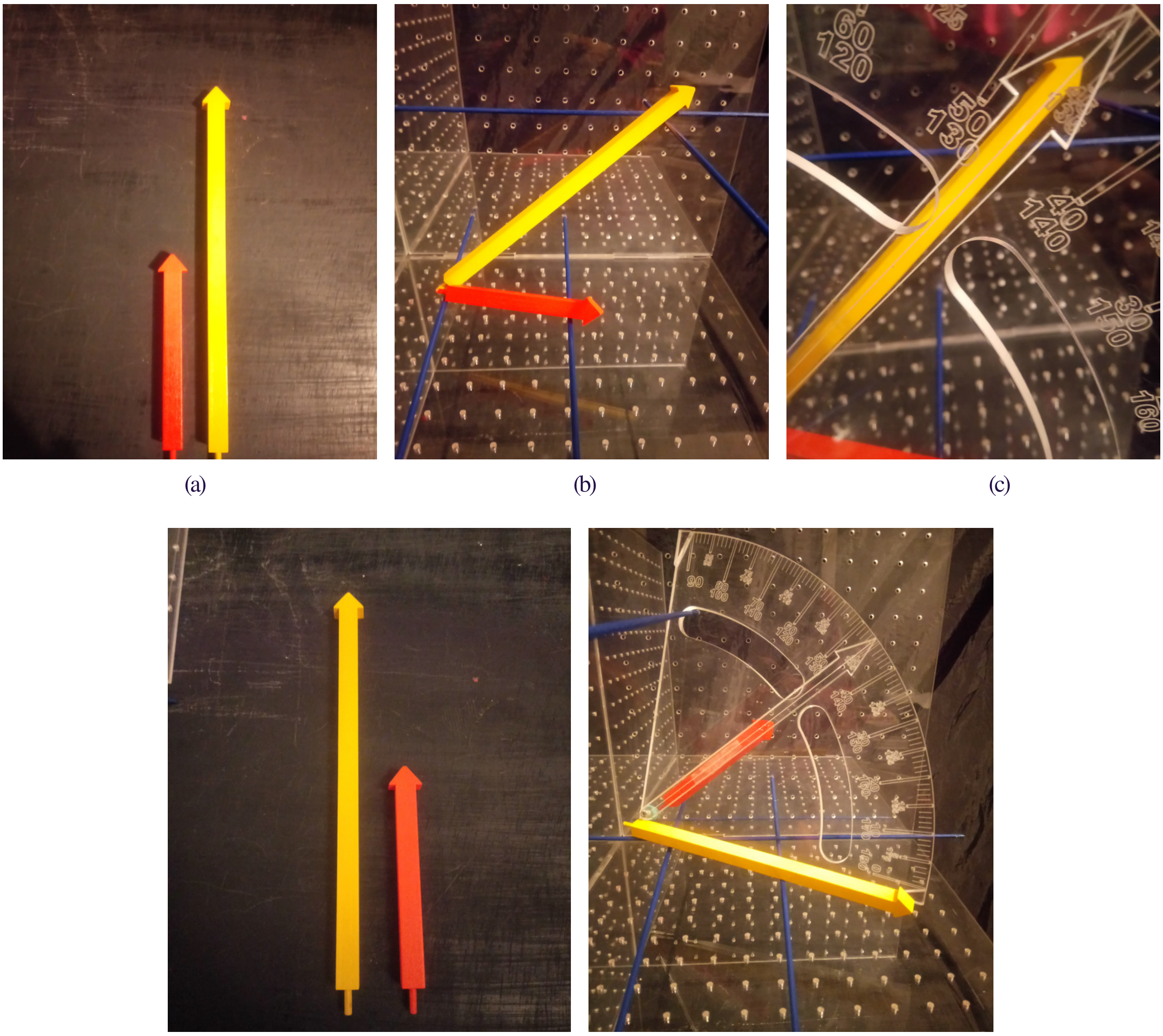
Para dar una idea general de cómo se puede trabajar este subtema con la aplicación de material didáctico, se propondrá un ejemplo y se resolverá poniendo en práctica cada una de las propiedades, haciendo uso de las piezas del set de vectores.

Cabe recalcar que algunas de las propiedades deben ser resueltas estrictamente en forma analítica en caso que la forma gráfica no sea tan clara y concisa como se espera.

Primera propiedad. Ley Conmutativa

La Ley Conmutativa o Primera Propiedad(*) enuncia que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
1. En la Figura 34, se han seleccionado los dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ como muestra (a); y se los ubica en el sistema de referencia (b). Es necesario especificar cuál es el vector $\vec{u}$ y cuál es el vector $\vec{v}$ para esto se puede fijar un color distinto a cada uno.
2. Se consiguen los datos de estos vectores que puedan ser utilizados en la ecuación; esto es, magnitudes y ángulo, como ya se explicó en antiguas indicaciones (c).
3. Finalmente, los estudiantes resuelven la ecuación con los datos obtenidos y descubren el resultado.
4. En este paso, se recurre nuevamente al sistema de referencia pero, esta vez, intercambiando el orden de los vectores, lo muestra así (d), es decir, el que fue el vector $\vec{u}$ pasaría a ser el $\vec{v}$ y viceversa (e).
5. Se repiten los mismos pasos indicados y se obtiene el nuevo resultado.
6. Al final, se comparan ambos resultados, los cuales deben ser iguales.

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.



(a) (b) (c)

(d) (e)

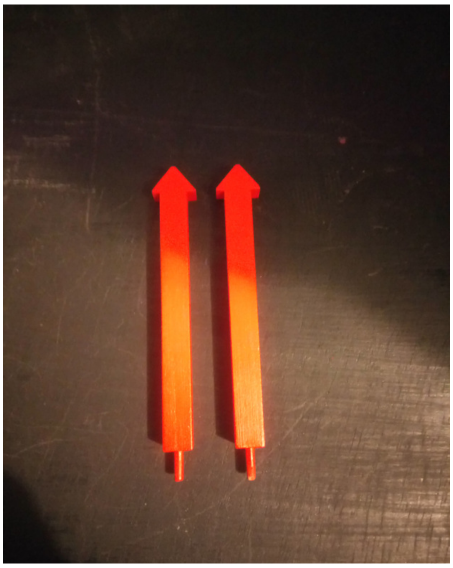
Figura 34. Ley Conmutativa. Primera Propiedad

Segunda propiedad

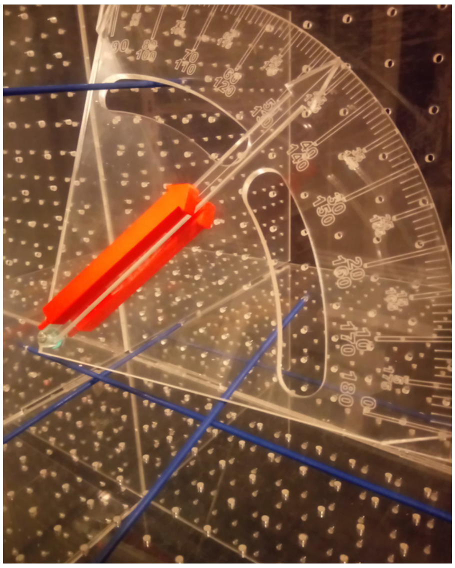
La Segunda Propiedad enuncia que $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$

1. Se empieza seleccionando dos vectores $\vec{u}$ cualesquiera. Se debe tomar en cuenta que ambos vectores tienen que ser completamente iguales; así se puede ver en la Figura 35(a).
2. Se consiguen los datos de este vector para que puedan ser utilizados en la ecuación; esto es, mangnitud y ángulo, como ya se explicó en antiguas indicaciones. Esto puede ser observado en (b).
3. Finalmente, los estudiantes resuelven la ecuación con los datos obtenidos y determinan el resultado al ser mayor o igual a 0.

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.



(a)



(b)

Figura 35. Segunda Propiedad

Tercera propiedad. Ley distributiva

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad (*)$$

Cuarta propiedad

$$k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) \quad (*)$$

Quinta propiedad

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |u|^2 \quad (*)$$

La demostración gráfica de estas tres últimas propiedades puede complicarse; por eso se pide a los alumnos que únicamente apliquen la demostración analítica, aplicando algún ejemplo.

Participación del estudiante

La primera actividad a desarrollarse también consigue que sean los estudiantes quienes, en grupos, puedan aplicarlo y demostrarlo. En este caso, cada grupo se encargará de una propiedad, mediante la secuencia que se ha establecido, que especifica cómo trabajar con el material para demostrar la expresión matemática correspondiente a cada propiedad, además de la ayuda de los textos de Matemáticas de cada estudiante.

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.

Debido a que este tema reúne muchos de los pasos otorgados para desarrollar las propiedades, se podría recomendar a cada grupo que empiecen ideando un ejemplo para, seguidamente, transportarlo al material didáctico.

Nuevamente, es necesario deducir que para temas de este tipo, el apoyo del recurso elaborado es de gran utilidad como demostración de las propiedades y, por ende, de las expresiones respectivas.

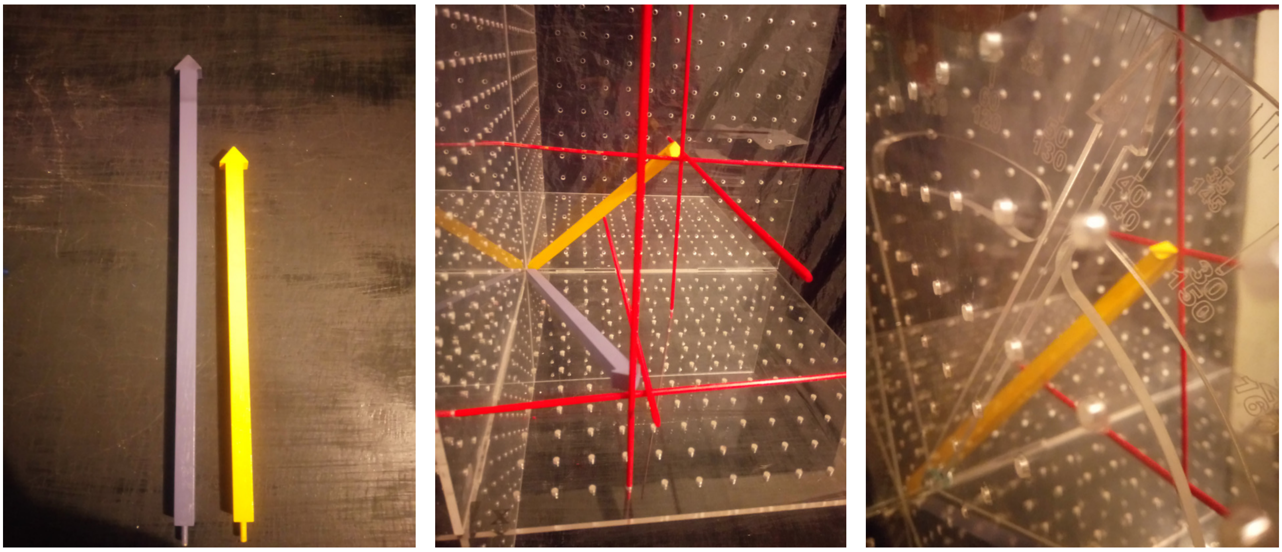
Cabe recalcar que no siempre va a ser posible representar ciertas propiedades en el material, por lo que, estrictamente, sería recomendable resolverlo analíticamente.

Expresión analítica del producto escalar

Duración: 8 minutos

Actividad del docente
Este tema ya se vio como recordatorio, por lo que para demostrar la aprobación de la expresión que aquí se estudia, sería ineluctable aplicar los materiales que se usaron en actividades anteriores, es decir, el sistema de referencia y los vectores del set. Se podría ejecutar la actividad como sigue, verificando la Figura 36 que nos sirve como guía:

1. Se empezará tomando dos vectores del set (a), sin importar su tamaño o su diseño, que serán colocados partiendo del origen de tal modo que coincidan con coordenadas simples de visualizar, como ilustra (b).
2. Para este caso será importante contar con el valor del ángulo, así como indica (c), para tener un pequeño apoyo que será utilizado en pasos posteriores.
4. Ahora, como se hizo ya antes, se ejecutará en forma analítica la solución del producto entre estos dos vectores pero, esta vez, utilizando la segunda expresión.
5. Teniendo ya la solución de la operación, se procederá a sustituirla en la primera ecuación para poder obtener el valor analítico del ángulo.
6. Finalmente, como se indicó en el paso 2, se comparará el valor analítico con el medido, los cuales tienen que ser idénticos.



(a) (b) (c)

Figura 36. Expresión analítica del Producto Escalar

Ahora, se destaca una vez más la expresión analítica del producto escalar entre vectores (*) la cual es:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

Participación del estudiante

El uso de material didáctico para este apartado es una mezcla de varios de los contenidos que ya se han visto, así como también de las técnicas que los estudiantes han usado para afianzar su aprendizaje. Al ser éste un tema que simplemente hace referencia a una expresión que ya se aprendió y demostró, es más sencillo para el estudiante desarrollarlo tanto analítica como gráficamente.

Para el estudiante, colocar los vectores en el sistema de referencia ya no es un limitante, pues ya conoce cómo ubicarlos, esto es, establecer sus componentes, su magnitud, su dirección y sentido.

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.

- Es por eso que, para nuevamente retomar este tema, el estudiante debe observar muy bien los vectores y, según lo aprendido, determinar cada una de sus componentes. Con el material, es muy sencillo contar en los tres ejes cómo recorre el vector.
- Una vez contadas las componentes de ambos vectores, la resolución analítica es el siguiente paso.
- Es así que, una vez más, se comprueba la expresión matemática correspondiente al tema y se afirma la relación que existe entre teoría y práctica.
- Asimismo, los estudiantes pueden practicar y reforzar los conocimientos a través de la resolución de ejercicios.

Módulo de un vector y ángulo entre dos vectores

Actividad del docente

Las dos partes de este tema: a) Módulo de un vector y b) Ángulo entre dos vectores, son ya ampliamente conocidos y utilizados; sin embargo, pueden efectuarse ciertas tareas en el material didáctico que ayuden en la visualización de manera que se pueda comprobar que las expresiones utilizadas son las correctas; así como también, servirán como apoyo perceptivo para una comprensión más profunda.

Para desarrollar cada uno de estos subtemas, se sugiere que se empiecen exponiendo sus definiciones respectivas, de manera que los alumnos se encarguen únicamente de demostrar que éstas se cumplen.

Módulo de un vector

Como ya se señaló, se empezará por definir el subtema en base a su expresión matemática (*). Por ello, como indica el texto, se tiene:

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.

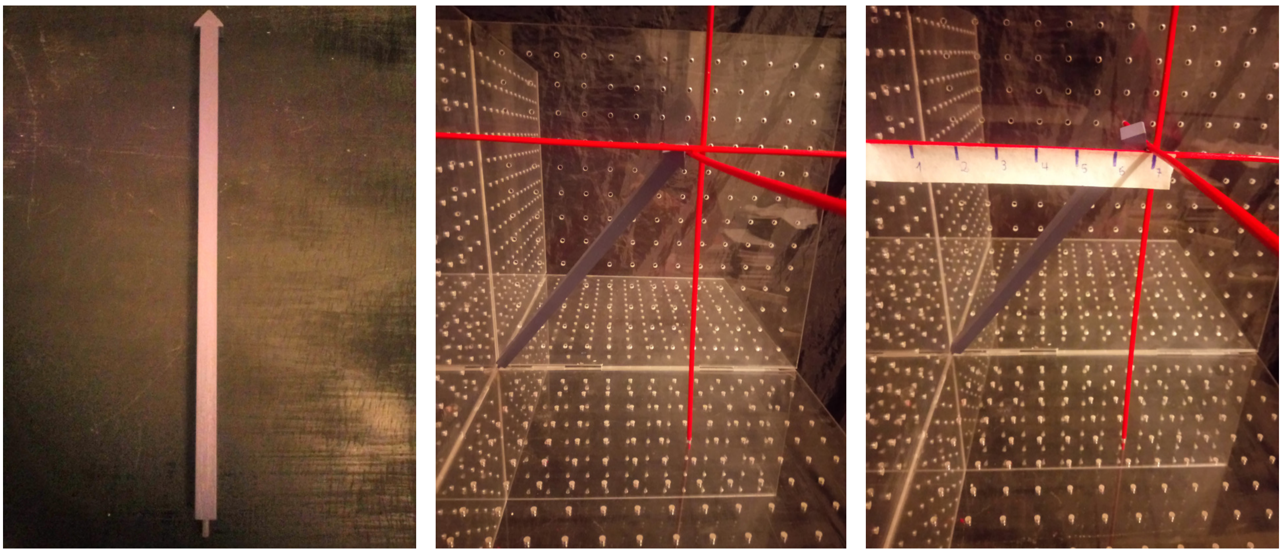
$$|\vec{u}| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2}$$

Duración: 4 minutos

Actividad del docente

Como primera actividad se propone que los estudiantes, a través de las componentes del vector, verifiquen su módulo aplicando la expresión dada. Se utilizará, en este caso, el primer diseño de vectores y se seguirán los siguientes pasos:

- Observando la Figura 37(a), se ubicará cualquiera de los vectores del primer diseño en el sistema de referencia, en forma aleatoria, advirtiendo el módulo que tenga.
- Con la ayuda de las varillas de soporte, se determinan las coordenadas en las que se haya ubicado el vector; así puede observarse en (b).
- Finalmente, con estas coordenadas, se reemplaza en la expresión matemática para verificar si coincide con el módulo mismo del vector (puede apreciarse en (c)).



(a) (b) (c)

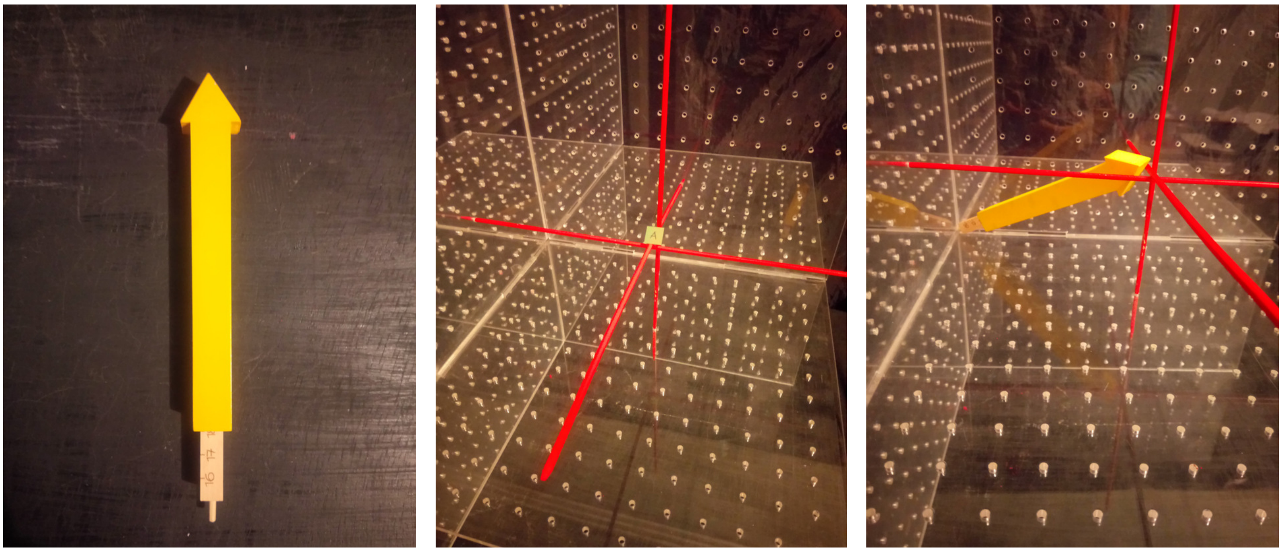
Figura 37. Módulo de un vector. Primer Diseño

Duración: 4 minutos

Actividad del docente

Ahora, se utilizará cualquiera de los vectores del segundo diseño para determinar su módulo; si se usa como apoyo la Figura 38(a), se procederá así:

- Se establecerán las componentes o coordenadas que tendrá el vector, para lo cual se necesitará escoger uno que se adapte a ellas (b).
- Se ve que en (c) se ubica el vector en el sistema de referencia tomando en cuenta las coordenadas propuestas.
- Con estas coordenadas, se reemplaza en la expresión matemática para obtener el módulo del vector.
- Finalmente, se compara el resultado con la medida del vector, los cuales deberán ser los mismos.



(a) (b) (c)

Figura 38. Módulo de un vector. Segundo Diseño

Participación del estudiante

En estas dos últimas actividades, se plantea un tema que, de la misma manera, es únicamente de comprobación puesto que su expresión matemática ha sido un conocimiento ya aprendido al que sólo se va a poner en práctica gráficamente.

El estudiante debe mirar el material y sacar sus conclusiones, como se indica a continuación:

- Se ha decidido obtener el módulo del vector utilizando dos de los diseños de vector que se presentan en el set: el primero y el segundo.
- El primer diseño de vector, el cual ya tiene su módulo establecido, permite que el estudiante lo ubique de cualquier manera en el sistema de referencia, haciendo uso de los conocimientos que ya tiene sobre establecer las componentes de este vector (esto puede ser con la ayuda de las varillas); logrando obtener las coordenadas correctas que serán reemplazadas en la ecuación para su resolución. Esta respuesta debe ser la misma del valor del tamaño del vector con el que se trabajó.
- Con el segundo diseño de vector, el estudiante notará que, en lugar de trabajar con el módulo del vector, se trabajarán con las componentes y, según éstas, se colocará un vector que se adapte correctamente (recordando que el segundo vector tiene un módulo ajustable). Finalmente, una vez establecida la magnitud del vector, se procederá a sustituir las componentes en la expresión respectiva. Con la resolución de esta expresión, se podrán comparar el módulo en forma gráfica y en forma analítica.
- A más de comprobar la eficacia de la expresión matemática, los estudiantes podrán manipular el material las veces que consideren necesarias para reforzar el contenido o probar otros ejemplos.

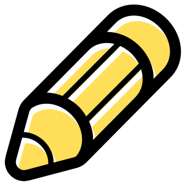
Si se desea realizar las actividades con el tercer diseño de vectores, se pueden seguir los mismos pasos que en los casos anteriores; sin embargo, no es necesario.

Ángulo entre dos vectores

Asimismo, se definirá(*) el subtema en base a su expresión matemática. Por ello, como indica el texto, se tiene:

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\sqrt{u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2}\sqrt{v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_3{}^2}}$$

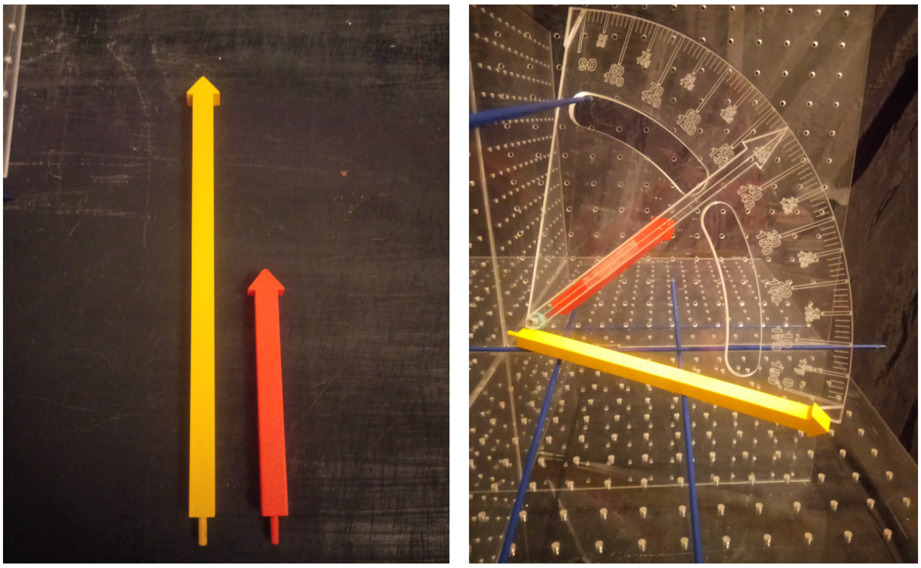
(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.



Duración: 4 minutos

Actividad del docente

- En primera instancia, se escogerán dos vectores del set, cuidando que los dos sean del mismo diseño (véase la Figura 39(a)).
- Colocar estos dos vectores en el sistema de referencia, tratando de que coincidan con coordenadas fáciles de distinguir.
- Se determinan las coordenadas en las que se han ubicado cada uno de los vectores y se sustituyen en la expresión matemática. Obtener el resultado. Ahora, para verificar su validez, podría utilizarse el graduador de vectores para comparar las dos respuestas (b).



(a) (b)

Figura 39. Ángulo entre dos vectores

EJEMPLO:

- Determine el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (2, -1, 3)$ y $\vec{v} = (4, 5, 0)$:

Aplicamos la expresión matemática correspondiente:

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} = \frac{2 \cdot 4 - 1 \cdot 5 + 3 \cdot 0}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}\sqrt{4^2 + 5^2 + 0^2}}$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{8 - 5 + 0}{\sqrt{4 + 1 + 9}\sqrt{16 + 25 + 0}} = \frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{41}} = \frac{3}{\sqrt{574}}$$

$$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{574}} = 82{,}8°$$

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.

PRODUCTO VECTORIAL Y MIXTO

OBJETIVO

Emplear el material elaborado de manera que el estudiante logre captar los contenidos más correctamente, utilizando prácticas individuales y colectivas; para afianzar los aprendizajes y aplicarlos en actividades propuestas.

En esta unidad se trabajarán los siguientes temas:

- Definición del Producto Vectorial
- Propiedades del Producto Vectorial
- Definición de Producto Mixto
- Propiedades del Producto Mixto

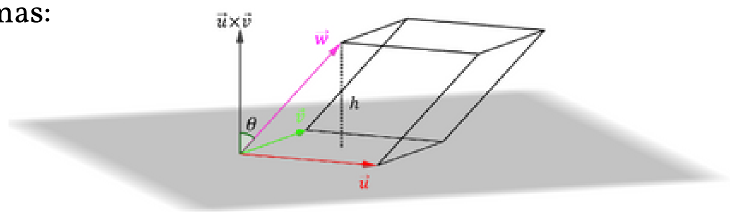


Figura 40. Imagen inicial de Producto Vectorial y Mixto

Fuente: Universidad Tecnológica Nacional de Buenos Aires

Definición del Producto Vectorial

Duración: 10 minutos

Actividad del docente

Como parte de las actividades a desarrollar para conocer la Definición del Producto Vectorial, el docente puede recurrir al uso del material como crea pueda funcionar más eficientemente. Mientras tanto, se propone trabajar así:

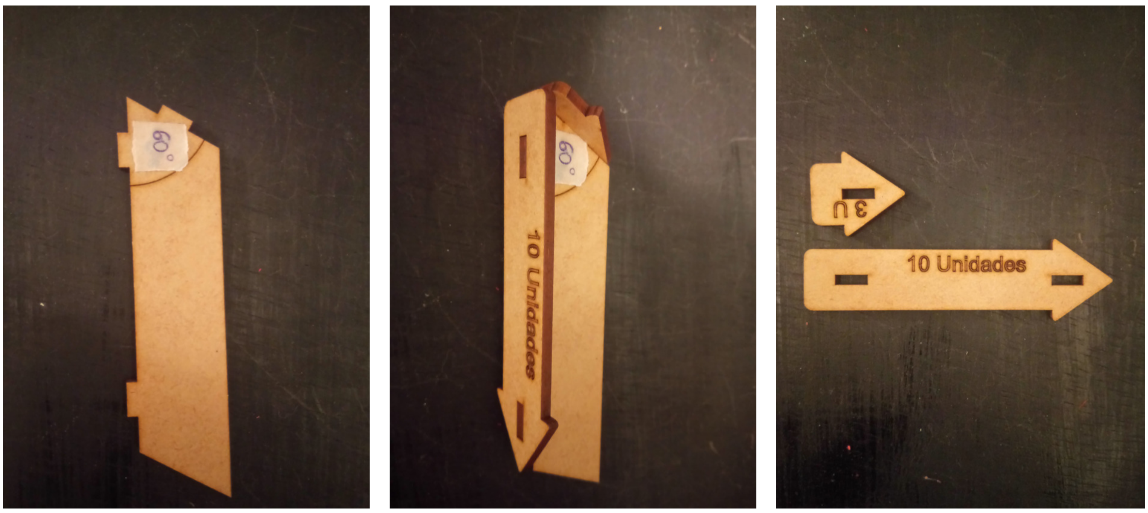
- En primer lugar, se deberá conocer la forma en la que se trabaja esta operación con la que se obtiene un nuevo vector; a esta se la denota así: $\vec{u} \times \vec{v}$ con sus parámetros como se indica a continuación:
- *Dirección*: perpendicular a ambos vectores con los que se trabaja.
- *Sentido*: Mediante la ley de la mano derecha.

- *Módulo:* Se obtiene mediante la multiplicación de los módulos de los dos vectores con los que se trabaja y el seno del ángulo que estos forman. La expresión(*) que se utiliza es:

$$|\vec{u}||\vec{v}|\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$

El segundo set de vectores, el cual se utilizará ahora, se ha realizado con el objetivo de comprobar el módulo del vector que se obtiene al trabajar el producto vectorial. Para esto se hará lo siguiente (véase Figura 41):

1. Primeramente, se escogerá cualquiera de los paralelogramos (o planos) del segundo set de vectores, verificando el ángulo del que está conformado (a).
2. Enseguida, se buscarán dos vectores (del mismo set) que encajen en dos de los lados del plano; y se establecerán sus módulos respectivos (b). Estos dos vectores llegarían a ser los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que se operan.
3. Ahora, los valores de los módulos de los dos vectores y del ángulo se deben reemplazar en la expresión indicada (c).
4. Como último paso, se deberá obtener el valor del área del paralelogramo con el que se trabajó. Este valor debe coincidir con el que se obtuvo anteriormente.



(a) (b) (c)

Figura 41. Módulo del vector resultante mediante Producto Vectorial

Es importante resaltar que en este tema se trabaja con el seno del ángulo, por lo que el máximo módulo del vector que se obtendrá al hacer el producto vectorial entre dos vectores se dará cuando entre estos se forme un ángulo de 90°. La Figura 42 muestra gráficamente esta explicación: con el ángulo (a), los vectores (b) y su producto vectorial (c).

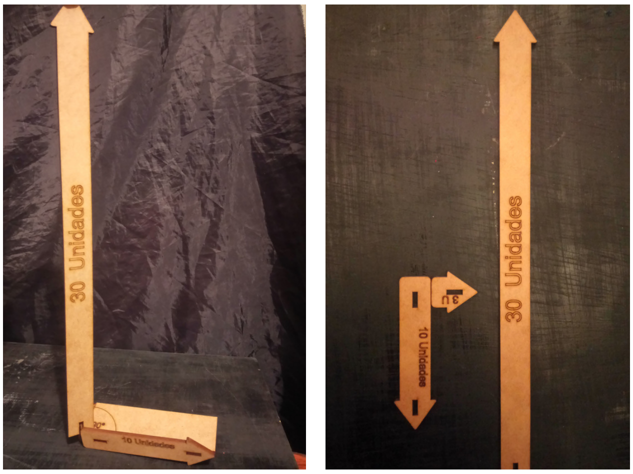
(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.

(a) (b) (c)

Figura 42. Máximo módulo obtenido mediante Producto Vectorial

Una vez determinado el módulo del vector, se explicará la dirección y el sentido.

El vector resultante sale desde el origen de los dos vectores con los que se trabaja (que son $\vec{u}$ y $\vec{v}$), en forma perpendicular a ambos. La Figura 43 enseña más concretamente la posición del vector (a) y los dos vectores iniciales, así como su resultante.



(a) (b)

Figura 43. Dirección del vector resultante

En cuanto al sentido del vector, es indispensable que el estudiante conozca la ley de la mano derecha(*), con la que se procede de la siguiente manera: Se colocan los dedos de la mano en el sentido del vector $\vec{u}$ y se cierran los dedos hacia el vector $\vec{v}$; el sentido al que apunte el pulgar será el sentido del vector resultante de $\vec{u} \times \vec{v}$.

Para más facilidad, se muestra aquí cómo quedarían los vectores unitarios u ortogonales(*) de acuerdo a la definición, utilizando la ley de la mano derecha.

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.

$$\vec{i} \times \vec{i} = 0 \qquad \vec{j} \times \vec{j} = 0 \qquad \vec{k} \times \vec{k} = 0$$
$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$
$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \qquad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \qquad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

Participación del estudiante

En este caso, se ha dejado que el propio docente pueda acomodarse a la explicación debido a que realizar la operación en forma gráfica es más complicado que los temas anteriores. Es por eso que el estudiante debe abrir más su mente para poder comprenderlo.

Primeramente, se dio a conocer cómo está compuesto el vector resultante, es decir, se indica cómo se determina cada uno de sus parámetros:

- El módulo del vector que se busca se obtiene mediante la expresión indicada para lo cual se deberá contar con los módulos de los dos vectores con los que se trabaja y el ángulo que forman entre ellos (estos valores se pueden observar en el propio material); además de esto, y como mostró la demostración, el módulo del vector coincide con el valor del área del paralelogramo que se forma entre los dos vectores con los que se trabaja. El segundo set de vectores tiene los paralelogramos formados, por lo que el estudiante deberá simplemente medir la base y la altura del paralelogramo con el que se ha decidido trabajar. Este resultado será comparado luego con el obtenido mediante la expresión.
- Para la dirección se ha señalado ya que el vector debe ser colocado de manera que quede perpendicular a los dos vectores iniciales. Si se puede dar una pequeña guía al estudiante se podría indicar, como una pequeña imitación, que los tres vectores (los dos iniciales y el resultante) formen un tipo de sistema de referencia XYZ, pero con el "eje Z" siendo el único que se ubica en forma ortogonal.
- Finalmente, para establecer el sentido del vector, se ha notificado seguir la ley de la mano derecha. Para el estudiante, la práctica recurrente de esta ley es lo más efectivo para que lo hagan correctamente. Se recomienda que empiecen ejecutando dicha ley con los resultados expuestos con los vectores unitarios, siguiendo el sistema de referencia.

Tras esto, se puede deducir que el resultado del Producto Vectorial, a diferencia del Producto Escalar, es otro vector con módulo, dirección y sentido ya señalados.

Propiedades del Producto Vectorial

Debido a que se encuentra cierto grado de dificultad en la representación gráfica de las propiedades del Producto Vectorial(*), se ha decidido únicamente señalarlas.

Primera propiedad

$$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$$

Segunda propiedad

$$\vec{u} \times \vec{u} = 0$$

Tercera propiedad

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$$

Cuarta propiedad

$$k(\vec{u} \times \vec{v}) = (k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v})$$

Ahora, después de realizar un proceso algebraico sencillo, tomando en cuenta la definición de Producto Vectorial, la expresión matemática(*) que se puede utilizar es:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\vec{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1)\vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\vec{k}$$

EJEMPLO:

- Teniendo los vectores $\vec{u}$ y $\vec{u}$ que se muestran en la imagen, realice la siguiente operación, en forma gráfica.

a) $\frac{1}{2}\vec{u} + 3\vec{v}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = [-1 - 1]\vec{i} - [3 - 1]\vec{j} + [3 + 1]\vec{k} = [-2]\vec{i} - [2]\vec{j} + [4]\vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k} \rightarrow (-2, -2, 4)$$

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.

Para comprobar si son ortogonales, usamos la expresión del producto escalar entre el vector resultante con el vector $\vec{u}$; y luego entre el vector resultante con el vector $\vec{v}$:

Vector $\vec{u}$: $(-2,-2,4)\cdot(3,-1,1)=-6+2+4=0$

Vector $\vec{v}$: $(-2,-2,4)\cdot(1,1,1)=-2-2+4=0$

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales al vector resultante de $\vec{u}\times\vec{v}$.

Definición del Producto Mixto

Actividad del docente

Este tema en particular unifica las dos operaciones antes vistas: el Producto Escalar (o Producto Punto) y el Producto Vectorial (o Producto Cruz), por lo que se considera necesario únicamente mostrar las expresiones válidas y sus propiedades.

Duración: 3 minutos

Es así que la definición y expresión matemática del Producto Mixto(*) es la que se muestra a continuación:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$$

Propiedades del Producto Mixto

Debido a que se encuentra cierto grado de dificultad en la representación gráfica de las propiedades del Producto Vectorial(*), se ha decidido únicamente señalarlas.

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.

Primera propiedad $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$

Segunda propiedad $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = -\vec{u} \,.\, (\vec{w} \times \vec{v}) = -\vec{v} \,.\, (\vec{u} \times \vec{w}) = -\vec{w} \,.\, (\vec{v} \times \vec{u})$

Tercera propiedad $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = -\ (\vec{u}_1(\vec{v} \times \vec{w})) + (\vec{u}_2 \cdot (\vec{v} \times \vec{w}))$

Cuarta propiedad $k(\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})) = k\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times k\vec{w})$

Participación del estudiante

Debido a que el estudio de este tema es el más complejo, se le recomienda al estudiante poner mucha atención a la explicación en clase, ya que la utilización del material concreto no es tan sencilla como en otros temas.

Una de las sugerencias que se puede dar al estudiante, es realizar lo mismo que en los temas anteriores; pero, esta vez, tomando en cuenta la interpretación geométrica del Producto Mixto, la cual nos indica ciertos puntos importantes:

- Este tema se trabaja con tres vectores distintos: dos de ellos, que se operan mediante Producto Vectorial (cuyo resultado es otro vector); y el vector restante se opera con este último vector obtenido a través de Producto Escalar (cuyo resultado es un escalar). En consecuencia, lo que se obtiene del Producto Mixto es un escalar. Es por esa razón que al Producto Mixto se le conoce también como Triple Producto Escalar.
- Al ubicar los tres vectores a trabajarse se formará entre ellos un paralelepípedo cuyos valores de base, altura y profundidad estarán dadas por los módulos de los vectores con los que se opera.
- Este contenido resulta para el alumno una forma de reto, debido a que su demostración podrá realizarse ubicando los vectores en el sistema de referencia, tomando su módulo y construyendo un paralelepípedo acorde a estos vectores.

(*) Libro de Matemáticas del Estudiante para Tercero de Bachillerato. Ministerio de Educación.

EJEMPLO:

- Dados los vectores $\vec{u} = (1,0,-2)$, $\vec{v} = (2,3,-1)$ y $\vec{w} = (1,1,5)$, calcular:
  a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$; $\vec{u}\cdot\vec{w}$; $\vec{v}\cdot\vec{w}$
  b) $\vec{u}\times\vec{v}$; $\vec{u}\times\vec{w}$
  c) $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$

a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = (1,0,-2)\cdot(2,3,-1) = 2+0+2 = 4$

$\vec{u}\cdot\vec{w} = (1,0,-2)\cdot(1,1,5) = 1+0-10 = -9$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = (2,3,-1)\cdot(1,1,5) = 2+3-5 = 0$

b) $\vec{u}\times\vec{v} = [(0)(-1)-(-2)(3)]\vec{i} - [(1)(-1)-(-2)(2)]\vec{j} + [(1)(3)-(0)(2)]\vec{k}$

$\vec{u}\times\vec{v} = [0+6]\vec{i} - [-1+4]\vec{j} + [3+0]\vec{k} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k} = (6,-3,3)$

$\vec{u}\times\vec{w} = [(0)(5)-(-2)(1)]\vec{i} - [(1)(5)-(-2)(1)]\vec{j} + [(1)(1)-(0)(1)]\vec{k}$

$\vec{u}\times\vec{w} = [0+2]\vec{i} - [5+2]\vec{j} + [1+0]\vec{k} = 2\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k} = (2,-7,1)$

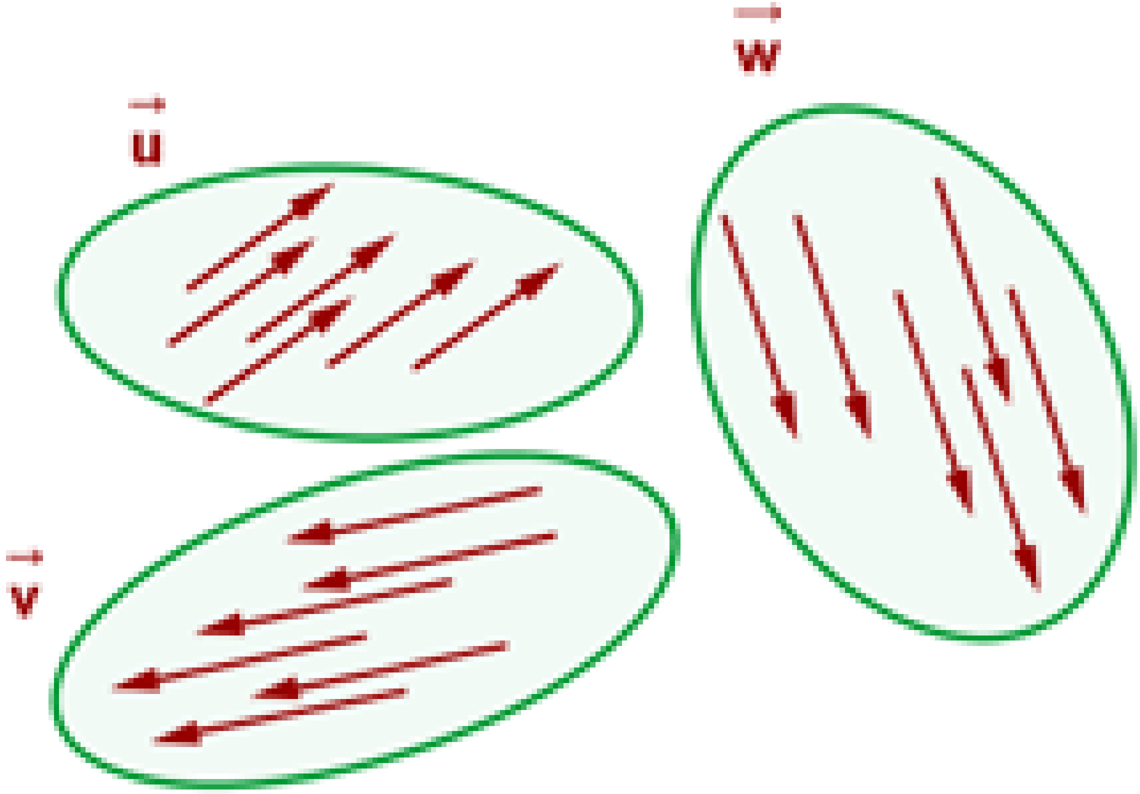
c) $\vec{v}\times\vec{w} = [(3)(5)-(-1)(1)]\vec{i} - [(2)(5)-(-1)(1)]\vec{j} + [(2)(1)-(3)(1)]\vec{k}$

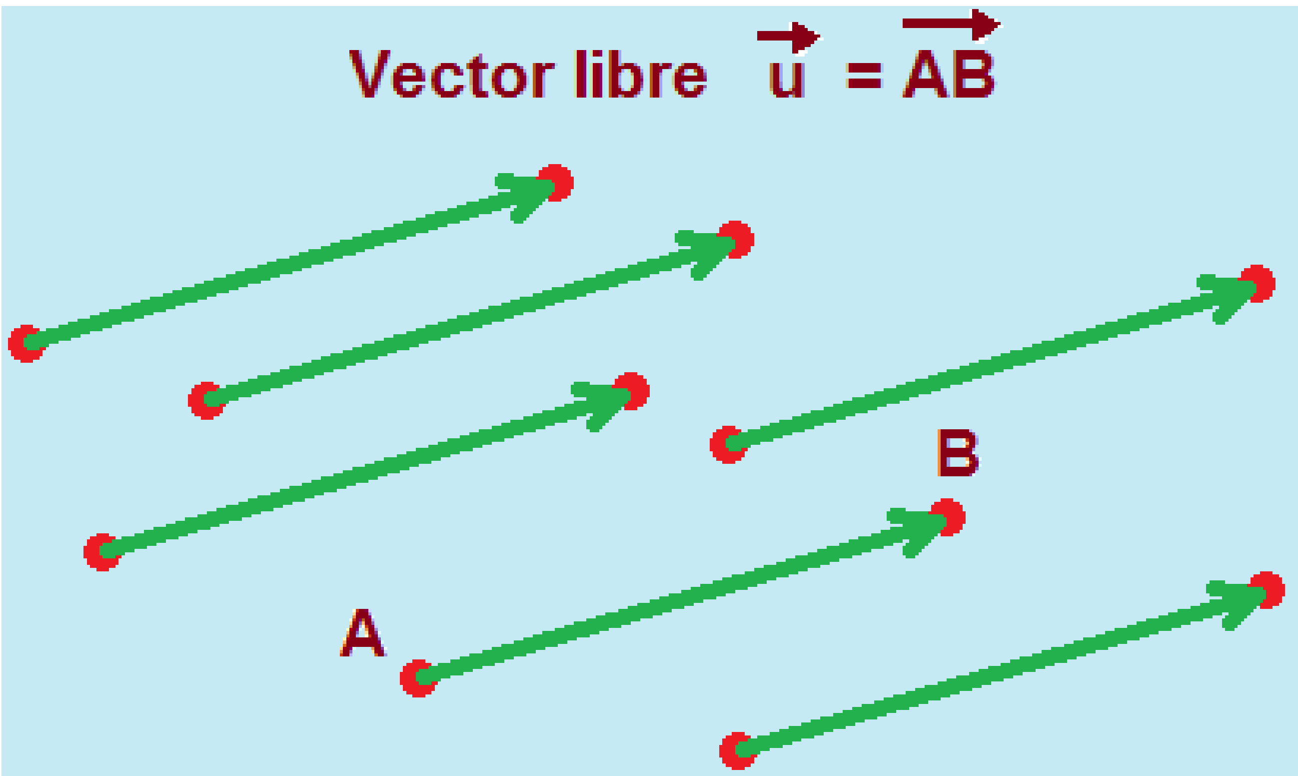
$\vec{v}\times\vec{w} = [15+1]\vec{i} - [10+1]\vec{j} + [2-3]\vec{k} = 16\vec{i} - 11\vec{j} - \vec{k} = (16,-11,-1)$

$(1,0,-2)\cdot(16,-11,-1) = 16+0+2 = 18$

IMÁGENES Y CUESTIONARIOS

Tarjetas de ejemplificación (p. 112)





Actividades (p. 140)

ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIANTE

1. Explique cómo se construye un sistema de referencia tridimensional. Grafique:

2. ¿Cómo se trabaja en este sistema de referencia?

3. Complete:

Los ejes de coordenadas que forman el sistema de referencia determinan planos coordenados que son: _________. Estos planos dividen al espacio en ocho regiones denominados ________. En el primer octante las tres coordenadas son ___________.

4. ¿En qué situación de la vida real se puede encontrar este sistema de referencia?

5. Al tener un punto P en el espacio, ¿cómo se determinan sus componentes?

Actividades (p. 170)

PREGUNTAS PARA EL ESTUDIANTE

1. ¿Cuál es la expresión para determinar el módulo de un vector?

2. ¿A qué se llama producto escalar o producto punto entre dos vectores?

3. ¿Cuál es la ecuación general del Producto escalar?

4. ¿Cómo se define el producto escalar entre dos vectores en forma geométrica?

5. Escriba la ecuación del producto escalar dadas sus componentes:

6. ¿Cómo influyen los signos del resultado del producto escalar en los diferentes casos?

7. ¿Qué se pude determinar mediante la aplicación del producto escalar?

8. Complete:
El resultado del producto escalar entre dos vectores es igual a un ___________________.