

MANUAL DE ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS



ESTRATEGIAS, TÉCNICAS Y JUEGOS
DIDÁCTICOS PARA EL APRENDIZAJE DE
COMBINATORIA



ERIKA PARRA M.
PATRICIA PAUCAR



PRESENTACIÓN

El presente trabajo ha sido planificado, diseñado y elaborado para servir como material de apoyo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Teoría Combinatoria dirigido a los estudiantes que se preparan para ser docentes de Matemáticas y Física en la Universidad de Cuenca; pretende mejorar la comprensión conceptual y procedimental de las técnicas de conteo: permutación, variación y combinación, a la vez que ofrece una guía en cuanto a estrategias y técnicas didácticas; se desarrolla en base al Cognitivismo de Piaget, la cual hace énfasis en el aprendizaje a través de la experimentación, manipulación y juegos. Ha sido principalmente diseñado para uso de los docentes. El manual comprende cuatro unidades con los siguientes temas: ESTRATEGIAS, TÉCNICAS, JUEGOS Y COMBINATORIA. Las dos primeras son una recopilación bibliográfica de los aspectos más relevantes que un profesor debe conocer en cuanto a la ejecución de estrategias y técnicas, se basan en las siguientes obras: Estrategias cognoscitivas y afectivas de aprendizaje (Chadwick, C., 2006), La enseñanza de las estrategias cognitivas y metacognitivas como una vía de apoyo para el aprendizaje autónomo en los niños con déficit de atención sostenida (Klimenko, O., 2011), La enseñanza de estrategias de aprendizaje en el aula. Estudio descriptivo en profesorado de niveles no universitarios (Saez, M. (2016) y Metodologías de enseñanza-aprendizaje para el desarrollo de competencias (Blanco, J.).

La tercera unidad cuenta con ocho situaciones de aprendizaje basadas en juegos, cada una con su aplicación y respectiva planificación docente, además de sets de materiales y recursos didácticos, el primero contiene girógrafos matemáticos y el segundo posee juegos de mesa como: naipes, dominó, la quiniela y bingo. Finalmente la cuarta es el marco científico de Combinatoria, contiene la parte conceptual, aplicaciones de la vida diaria, datos curiosos, ejercicios modelo y problemas contextualizados con nuestro país, elaborada en base a las siguientes obras: Combinatoria y Probabilidad (Wilhelmi, M., 2004), Análisis histórico – epistemológico de la iniciación de la combinatoria caso: combinaciones (Parra Vargas, D., 2015) y Combinatoria de IES Sant Vicent Ferrer (unidad diez).

ERIKA PARRA M.
PATRICIA PAUCAR

ÍNDICE

ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS

Estrategias didácticas	01
Estrategias cognitivas	03
Estrategia de adquisición	04
Estrategias de codificación	05
Estrategias de transferencia	06
Estrategia de elaboración	07

TÉCNICAS DIDÁCTICAS

Técnicas didácticas	08
Técnicas grupales	10
Phillips 66	12
Aprendizaje cooperativo	13
ABP	14
SDA y Tormenta de ideas	15
Estudio de casos	16
Comparación-contraste y resolución de problemas	17

JUEGOS DIDÁCTICOS

Juegos didácticos	18
Girografo matemático	19
Búsqueda de palabras.	20
Caja secreta	25
Bingo tradicional	29
La quiniela	33
Dominó	36
Póker	41

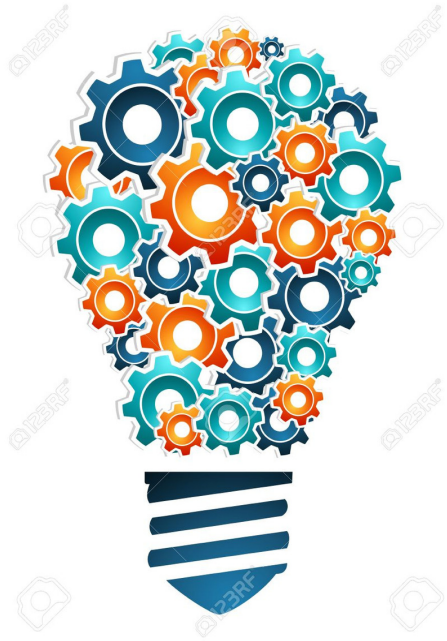
MARCO CIENTÍFICO

Combinatoria	44
Reseña histórica	45
Concepto básicos	46
Permutaciones	47
Variaciones	50
Combinaciones	52
Esquema	54
Ejercicios propuestos	55

ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS



Recuperado de :
<https://guiadeldocente.info/images/2017/02/18/1.png>



Recuperado de: <http://francoscopie.fr/wp-content/uploads/2016/09/DisruptionCollabotation.jpg>

Planificación Docente

La acción docente consiste en planificar clases de forma rigurosa, empleando estrategias y recursos diversos que permitan alcanzar los objetivos de enseñanza y aprendizaje planteados con anterioridad. Es fundamental que el docente previamente conozca los tipos de estrategias y sus características, esto le permitirá obtener un dominio de las mismas.

¿Qué son las estrategias didácticas?

Son actividades secuenciadas, ordenadas y planificadas, caminos que el docente elige para facilitar la comprensión de determinados temas, permitiendo que el aprendizaje sea más efectivo.

Toda estrategia debe poseer un objetivo a alcanzar; por tanto deben estar sujetas a contenidos por estudiar.



Recuperado de:
<http://www.redesymarketing.com/wp-content/uploads/2017/04/estrategia-comunicacion.jpg>



Beneficios de utilizar estrategias didácticas en el aula

1. Mejora la comprensión de los estudiantes en las asignaturas.
2. Convierte al estudiante en un sujeto activo y participativo de su propio aprendizaje.
3. Mejora significativamente el rendimiento académico.

Docente Estratégico

Un educador se convierte en estrategia cuando es capaz de planificar su acción educativa de manera consciente, identificando las potencialidades y debilidades de sus educandos, Además de analizar las situaciones que ocurren en el salón de clase.

Un aspecto relevante que tiene que recordar todo profesor es que, una estrategia didáctica alcanzará su objetivo siempre y cuando se cuente con la acción y el compromiso del estudiante.



Recuperado de: http://www.icsmb.gov.it/pvw/app/default/pvw_img.php?sede_codice=GEME0056&doc=2012527

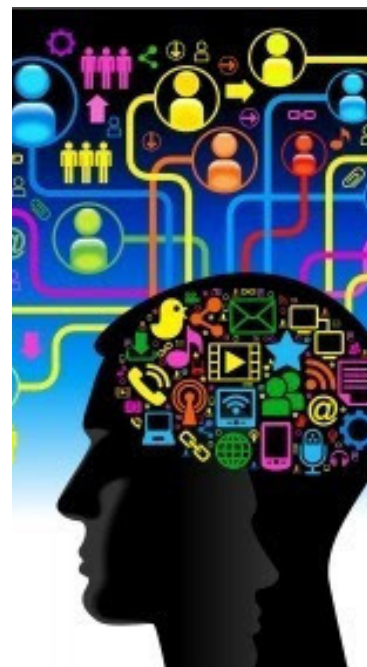


Estrategias Cognitivas

“El conocimiento no puede ser una copia, ya que siempre es una relación entre sujeto y objeto” (Jean Piaget, 1947).

Cuando se habla de **cognición** se hace alusión a la capacidad que posee el ser humano para percibir las cosas que lo rodean; **cognitivo** en cambio es el término para referirse a todo aquello que se encuentre dentro de la cognición, uno de los principales autores que se encargó del estudio de la cognición fue Jean Piaget.

Estrategias cognitivas se definen según Muria (citado por Klimenko, 2009) como los comportamientos planificados que seleccionan y organizan toda la información externa e interna; así también, organizan mecanismos cognitivos, afectivos y motrices con el fin de enfrentarse a situaciones problema, es decir, buscan que no solo el educando aprenda los contenidos como tal, sino, aprenda del proceso que usó para aprender, de esta manera el aprendizaje de la información va más allá del contenido mismo.



Recuperado de: http://2.bp.blogspot.com/-3aZv_83tJIU/UdIrOG6iw-I/AAAAAAAAAaG/a-luRopVxd4/s300/aprendizaje.jpg



Clasificación

Las estrategias de dimensión cognitiva se clasifican según el procedimiento que realizan en:

Atención

Adquisición

Organización

Elaboración

Transferencia

Recuperación

Codificación

Estrategias de adquisición

Son estrategias en las cuales los contenidos deben presentarse de forma organizada siguiendo una secuencia.

Además, procesan la información incipiente, es decir, llevan la información de la memoria de corto plazo, a un conocimiento duradero mediante algunas técnicas o actividades.



Recuperado de:
<http://www.computing.es/sitesources/files/749/91.jpg>



Recuperado de: <https://i.ytimg.com/vi/u6zN6lrl-4/hqdefault.jpg>



Características

1. Se presenta un material didáctico para la exploración de los contenidos.
2. Los contenidos deben seleccionarse según el grado de importancia, separando las ideas principales de las secundarias.
3. Son eficaces cuando los estudiantes tienen pocos conocimientos previos, aunque también pueden utilizarse para promover la transferencia a problemas o contextos nuevos,
4. Su éxito depende en gran parte del diseño y planificación del docente.

Las estrategias de adquisición se han utilizado en: búsqueda de palabras, caja secreta, quiniela, y dominó.

Estrategias de codificación

Codificar es traducir la información recibida a un código, en este caso un código para cada estudiante. Esta estrategia consiste en la elaboración y organización de la información más compleja.

Su **función** es transportar la información recibida y almacenada en la memoria de corto plazo a la memoria de largo plazo, de tal manera que el alumno pueda hacerla uso en el momento y situación que requiera.

El sistema de codificación define el nivel de profundidad del aprendizaje, en comprensión del significado y en la capacidad de relacionarlo con otros aprendizajes, creando estructuras de la realidad cada vez más grandes (Saez, 2010).

Se pueden distinguir tres códigos principales de representación del pensamiento:

- lógico- verbal
- viso- espacial
- analógico

En el área de **matemáticas** es fundamental que los estudiantes sepan transferir los conocimientos de un lenguaje materno a un lenguaje simbólico.



Recuperado de: https://www.fundacioncadah.org/j289eghfd7511986_uploads/web_1/post_images/image_item_final_405.jpg

Esta estrategia se encuentra en: búsqueda de palabras, caja secreta, la quiniela y dominó.

Estrategias de transferencia

"Una de las metas en el proceso de aprendizaje es que los estudiantes sean capaces de emplear lo aprendido en la vida diaria."



Recuperado de:
<https://i.ytimg.com/vi/uJFc5WWHY0g/maxresdefault.jpg>

Las **estrategias de transferencia** son las encargadas de alcanzar esta meta pues, permiten transportar todo el conocimiento a actividades, contextos cercanos o cotidianos. Para conseguir esto, se basa en experiencias y aprendizajes previos que el educando adquiere.

La **transferencia** se produce cuando aplicamos el conocimiento de una ciencia a otra, a la que no se hacía referencia inicialmente y con la que no parecía tener relación. Por ejemplo Matemáticas y Medicina.

Clasificación

Existen diferentes clasificaciones realizadas por diversos autores, sin embargo aquí se destacan dos de las más frecuentes:

Transferencia lateral: lo aprendido se traslada a situaciones de igual naturaleza, del mismo nivel de complejidad que aquella en la que se produjo el aprendizaje inicial.

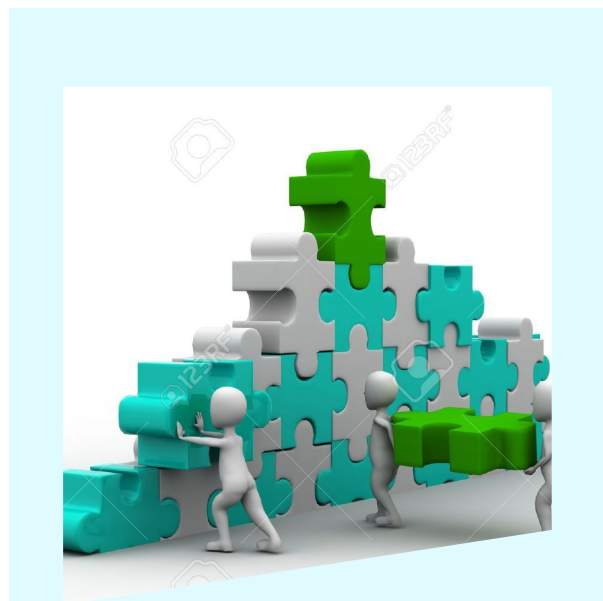
Transferencia vertical: el aprendizaje se transfiere a una situación de distinta naturaleza, que requiere del aprendizaje previo de otras destrezas.

Esta estrategia ha sido utilizada en: Bingo tradicional, dominó y póker.

Estrategias de elaboración

Elaboración en el ámbito educativo significa llevar a cabo actividades que concedan al estudiante realizar construcciones, con los conocimientos que poseen.

La función de este tipo de estrategias es servir de nexo entre el conocimiento nuevo y el previo que se encuentra en la memoria, logrando un conocimiento más grande, es decir, cambiando los esquemas mentales ya existentes o preparando otros nuevos en caso de ser necesario y oportuno.



Recuperado de: <https://thumbs.dreamstime.com/z/business-team-work-building-puzzle-developing-concept-36813737.jpg>



Recuperado de: <http://es.smibot.com/wp-content/uploads/2014/03/10-consejos-para-crear-una-p%C3%A1gina-efectiva-de-Preguntas-frecuentes-FAQ-en-una-tienda-online.jpg>

Este tipo de estrategias se encuentra en todas las actividades del manual

Formulación de Preguntas

En el área de Matemáticas es fundamental trabajar con preguntas en las estrategias de elaboración, pues favorecen el aprendizaje significativo,

Se debe tener mucho cuidado en la elaboración de las preguntas, puesto que no deben ser solamente preguntas de repuesta fácil, literal o cuya solución se conoce de antemano, sino preguntas que logren un desequilibrio en los conocimientos de los estudiantes, esto es, preguntas que provoquen la integración de conocimiento.

TÉCNICAS DIDÁCTICAS



Recuperado de: https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSrWcVljCBJutHxKfGWIHbg_MkaIRIT7ZJYgNyumnA_NjFkYL6Hog



Recuperado de: <https://media.istockphoto.com/vectors/gears-in-the-mind-climate-change-vector-icon-pattern-vector-id956094512>

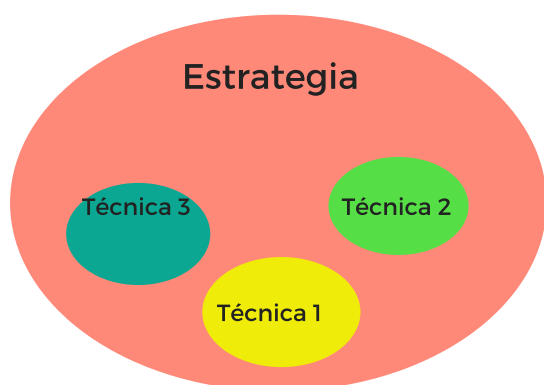
¿Qué son?

Las técnicas o tácticas didácticas son procedimientos, pasos o comportamientos, que buscan mejorar el aprendizaje en los estudiantes. Son herramientas que determinan de forma organizada la manera de llevar a cabo un proceso, definiendo explícitamente los pasos para alcanzar los objetivos propuestos.

¿Cuál es la diferencia entre una técnica y una estrategia didáctica?



Recuperado de: <http://www.vanospensioen.nl/uploads/images/vraagteken.jpg>



Autoría propia

Un problema tradicional en la educación es diferenciar las estrategias de aprendizaje de las técnicas o tácticas didácticas; esto se produce en vista de que los conceptos guardan cierta similitud. Se sabe que las estrategias son actividades o caminos planificados para alcanzar un objetivo, pero ¿cómo se recorren estos caminos?.

Una de las herramientas más útiles para recorrer los caminos son las técnicas; estas indican los pasos a seguir, entonces se puede decir que las estrategias se componen de diferentes técnicas, estructuradas, observables y evaluables.

Una de las diferencias más importantes es que las estrategias están al servicio de los procesos cognitivos y las técnicas al servicio de las estrategias. Otra diferencia es el nivel de complejidad, las estrategias requieren la supervisión del docente en todo momento, mientras que las técnicas son procedimientos específicos a seguir.

Finalmente es importante considerar que la diferenciación es a nivel de complejidad, estrategia y técnica no se diferenciarían en lo que se hace, sino en el modo de realizarlo (Pozo, 2008).

Técnicas grupales



Recuperado de: <https://thumbs.dreamstime.com/z/sociedad-del-mundo-14112549.jpg>

Se sabe que el ser humano aprende de forma individual; sin embargo se encuentra inmerso dentro de una sociedad, lo que implica que también debe hacerlo de forma colectiva. La interacción entre personas, modela una forma de aprendizaje que se construye, esa forma es **grupal**.

Agrupar es un medio de enseñanza que facilita el descubrimiento de la información y la adquisición de los valores.

La utilización de grupos es un mecanismo de organización y aprendizaje que se emplea en educación, en virtud de que es casi imposible que un maestro confronte individualmente y de forma directa las necesidades de cada estudiante.

Técnicas grupales: técnicas que se aplican en un contexto de grupo, pretenden por un lado organizar el trabajo que se realiza a partir de las características de sus miembros y , por otro, obtener y aprovechar todas las habilidades que se manifieste en las interacciones grupales y mejorar las relaciones interpersonales (Parramón, 2001).

Conformación de grupos

Los grupos pueden conformarse de dos maneras, la primera es considerando las semejanzas en el nivel de conocimientos y las habilidades que poseen los educandos, lo que se denomina como **grupos homogéneos**; la segunda es buscando un contraste en los conocimientos, de tal manera que exista variedad, es decir, **grupos heterogéneos**.

La conformación de estos grupos dependerá en gran parte de los objetivos que desea alcanzar el docente con el empleo de esta técnica.



Recuperado de: software Canva

Organización de los grupos

Muchas veces las técnicas grupales fallan en su aplicación por la organización, es fundamental que el docente haga un análisis previo sobre las actividades y los objetivos que busca alcanzar, pues las actividades son las que dan la pauta para estructurar los grupos.



Recuperado de: https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSrWcVljCBJutHxKFgWIHbg_MkaIRIT7ZJYgNyumnA_NjFkYL6Hog

Según Costes (citado por Trujillo, 2010), los grupos se organizan de dos formas según el tiempo de duración y conforme quién lo organice.

DE ACUERDO AL TIEMPO

Duración larga o casi estable: corresponde a la organización de equipos para un trimestre o para todo el ciclo escolar. Permite al educador tener más facilidad en la organización de las actividades previas, durante y posteriores a la sesión de clase. La principal restricción es que únicamente se conseguirán los objetivos sociales entre los miembros del mismo grupo, limitándose las relaciones interpersonales con los demás grupos.

Duración corta u ocasional: Son formaciones que permanecen hasta el desarrollo de las actividades para las que fueron creadas. Favorecen las relaciones sociales entre todos los miembros de la clase.

DE ACUERDO A QUIÉN LO ORGANICE

El educando: el grupo es formado por los propios estudiantes por iniciativa propia o por solicitud del maestro. El profesor no intervendrá a menos que encuentre dificultades.

El educador: cuando el docente pretende interacciones o aprendizajes concretos, en un grupo definido.



Recuperado de: https://d1zqayhc1yz6oo.cloudfront.net/backgrounds/custom_bg-5344cc484060371265d96948-70919080f049.jpg

Phillips 66

Técnica grupal creado por el norteamericano J. Donald Phillips, consiste en dividir a los estudiantes en grupos de seis integrantes, el **objetivo** es conseguir intercambios de opiniones e ideas entre los miembros, formando de esta manera un debate, el tiempo asignado para esta técnica es de seis minutos. A diferencia de otras técnicas grupales, esta entrega diferentes tareas y temas a cada grupo de manera que no se repiten, formando grupos de expertos.



Recuperado de: <http://2.bp.blogspot.com/-ylxODkSLQyw/TVP3UD8EsfI/AAAAAAAAAAw/HzYAtNZIo1g/s1600/2images.jpeg>

Ventajas:

1. Esta técnica es perfecta para conseguir la participación de todos los estudiantes.
2. Funciona en números grandes de estudiantes.
3. Facilita y mejora la comunicación entre los compañeros de clase.



¿Cómo funciona?

El docente explica la técnica y el modo de operar en cada grupo, formula la pregunta sobre el tema a tratar y gestiona el tiempo.

Cada grupo elige un coordinador y un secretario. Cada persona da su opinión brevemente admitiéndose comentarios también breves. El secretario hace la síntesis acordada.

Posteriormente los secretarios presentan sus síntesis parciales y se hace un resumen en general.

Aprendizaje cooperativo

El aprendizaje cooperativo consiste en formar grupos reducidos de estudiantes con la finalidad de que trabajen juntos para alcanzar metas en común y mejorar el aprendizaje. En esta técnica cada miembro adquiere una responsabilidad y una tarea específica a realizar, de tal manera que la ausencia de una parte, compromete el trabajo de todo el equipo.

El **docente** es una pieza fundamental debido a que es el principal responsable de la organización y conformación de los grupos.



Recuperado de: <http://www.teacherspro.com/wp-content/uploads/2017/03/Aprendizaje-Cooperativo-en-red-01-1.jpg>

El docente debe:

Según (Johnson, Johnson & Holubec, 1999)

1. Definir los objetivos de la clase.
2. Explicar la actividad y el rol que cumple cada miembro en el grupo.
3. Supervisar el aprendizaje de los estudiantes.
4. Evaluar el aprendizaje de los educandos y determinar el nivel de eficacia de los grupos.



Selección del tamaño del grupo

Si un grupo posee muchos integrantes será muy complejo conseguir un consenso y por consiguiente existirán muchos problemas de organización.

Si el tiempo para realizar la tarea es corto, el grupo de trabajo también deberá ser pequeño.

Es recomendable que los docentes utilicen esta técnica con grupos de entre tres a cuatro estudiantes.

ABP

El Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) es una técnica de investigación que busca dar solución a un problema real o hipotético, el problema sirve como punto de partida para la adquisición de nuevos conocimientos. El ABP se desarrolla a través del trabajo individual y en equipo.



Recuperado de: https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcTb6-iOB4sk5Ipw8kcR1s_BQkYdK4p1aO4QwAWdLgAg2FnFhzkD

Ventajas:

1. Desarrolla el pensamiento crítico en los alumnos.
2. Fortalece los valores de tolerancia, respeto y responsabilidad.
3. Mejora el nivel de argumentación y manejo de la información.
4. Adquisición de habilidades y competencias para la resolución de problemas.



¿Cómo funciona?

El ABP, de acuerdo con Blanco (2010), se desarrolla en cuatro etapas:

1. El docente presenta una situación problema elaborada y planificada con anticipación a sus educandos, establece condiciones de trabajo y conforma grupos en los que se designan los siguientes roles: coordinador, gestor de tiempos, moderador, entre otros.
2. Los alumnos identifican sus necesidades de aprendizaje (lo que desconocen para resolver el problema).
3. Los estudiantes recolectan información, complementan sus conocimientos y habilidades previas, reestructuran sus propias ideas y pensamientos.
4. Finalmente resuelven el problema aportando una solución, la validez de ésta es debatida entre el maestro y todos los compañeros de clase.

SDA

¿Qué sabemos?, ¿qué deseamos saber?, ¿qué aprendimos? son tres preguntas que se resumen en **SDA**, estas preguntas ayudan a saber el nivel de conocimientos que poseen los estudiantes a la vez que los involucra en el aprendizaje de los contenidos.



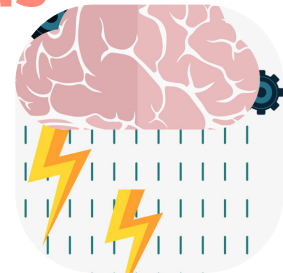
Recuperado de: <http://es.smibot.com/wp-content/uploads/2014/03/10-consejos-para-crear-una-p%C3%A1gina-efectiva-de-Preguntas-frecuentes-FAQ-en-una-tienda-online.jpg>

Ventajas:

1. Permite al docente saber los conocimientos previos que adquirieron los educandos.
2. Esta técnica es perfecta para la anticipación de los conocimientos.

Tormenta de ideas

Brainstorming, lluvia o tormenta de ideas, es una técnica utilizada en los trabajos en grupo, su objetivo es mejorar la obtención de ideas de acuerdo a un tema definido. En esta técnica cada educando expone sus ideas y pensamientos.



Recuperado de: https://es.pngtree.com/freepng/brainstorming_3087518.html

Ventajas:

1. Consigue ideas diversas en cortos periodos de tiempo.
2. Facilita la obtención de diferentes soluciones posibles sobre un mismo problema.
3. Estimula la creatividad de los estudiantes.

Estudio de casos

Es una técnica de aprendizaje grupal asociada a la observación; consiste en estudiar un hecho, problema, suceso o situación real, identificando sus características principales para después obtener conclusiones y verificar teorías. Se identifica un problema, se simplifica, y se motiva al estudiante a resolverlo en un proceso de toma de decisiones.



Recuperado de: https://sites.google.com/site/espanoleneducacionbasica/_/rsrc/1438740626185/home/papel-del-docente/papel%20docente.jpg

Ventajas:

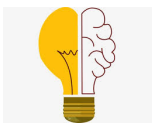
Capacita al educando en el análisis de temas específicos.

Motiva al estudiante de forma intrínseca en el aprendizaje.

Fortalece los lazos afectivos entre los miembros de los grupos.

Mejora y entrena las habilidades de resolución de problemas (casos reales).

Desarrolla la comunicación interpersonal.



¿Cómo funciona?

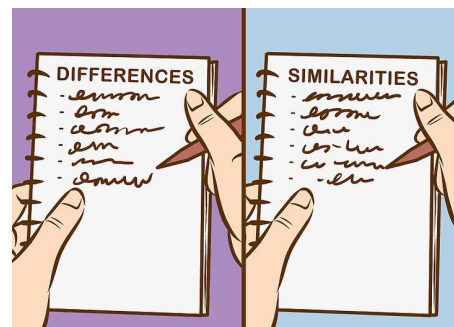
Estudio de casos se desarrolla en varias etapas:

1. Selección del caso a estudiar.
2. Presentación y socialización del tema.
3. Análisis minucioso del caso, creación de preguntas.
4. Búsqueda y selección de un plan de acción.
5. Ejecución del plan de acción.
6. Elaboración de conclusiones y recomendaciones.

Comparación y contraste

Es una técnica que permite ordenar, aclarar y clasificar ideas por comparación y contraste. Este proceso requiere que los estudiantes evalúen y sintetizen la información; el uso de gráficos y organizadores gráficos puede ayudar a los estudiantes a completar fácilmente este proceso.

La comparación muestra la semejanza entre dos ideas, pensamientos u objetos; el contraste, sus similitudes o diferencias con otros semejantes.



Recuperado de: <http://knowthatplace.com/wp-content/uploads/comparing-and-contrasting-aid3093500-v4-728px-start-compare-contrast-essay-step-2-version-snap-diverting-titled.jpg>

Resolución de problemas

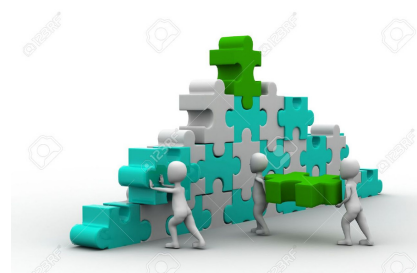
Técnica de aprendizaje dirigida para los educandos, tiene como objetivo poner en práctica los conocimientos adquiridos y mejorar las capacidades de comprensión. Así también desarrolla el trabajo en equipo y el liderazgo



Etapas:

Según Blanco (2010) la resolución de problema posee las siguientes etapas:

1. Reconocimiento del problema. Comprensión.
2. Análisis, búsqueda y selección de un plan o procedimiento.
3. Ejecución del procedimiento o plan seleccionado.
4. Comprobación e interpretación del resultado.



Recuperado de: <https://thumbs.dreamstime.com/z/business-team-work-building-puzzle-developing-concept-36813737.jpg>

JUEGOS DIDÁCTICOS



Autoría propia



Recuperado de: <https://i3.wp.com/www.comunidadcassa.com/website/wp-content/uploads/2016/11/ROMPECABEZAS-2.jpg>

Aportes en la educación

Los juegos en educación son considerados como materiales didácticos que involucran actividades lúdicas, forman el pensamiento teórico y práctico del educando; su utilidad se enfoca en el aprendizaje y desarrollo de destrezas, permitiendo adquirir competencias a través de la diversión y contribuyendo al desarrollo social y emocional del educando.

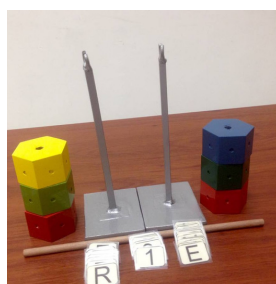
Girógrafo Matemático

Descripción: Material didáctico de forma hexagonal, permite tener 6 diferentes opciones para la composición de otros conceptos.



Características:

Existen cinco sets de girógrafos: cada uno compuesto por: seis prismas hexagonales, un eje de madera y dos soportes de metal; adicional a esto cuenta con 120 fichas repartidas entre números y letras.



Autoría propia

Diseño y aplicación

El girógrafo, dentro de este manual, se ha diseñado y construido con la finalidad de crear juegos manipulativos de palabras y contraseñas. Se puede utilizar para enseñar los temas de: permutaciones, variaciones y combinaciones a partir de la resolución de situaciones particulares y su posterior generalización y formalización.



Los juegos en los que se utiliza el girógrafo son: Búsqueda de palabras y Caja secreta.

Búsqueda de palabras



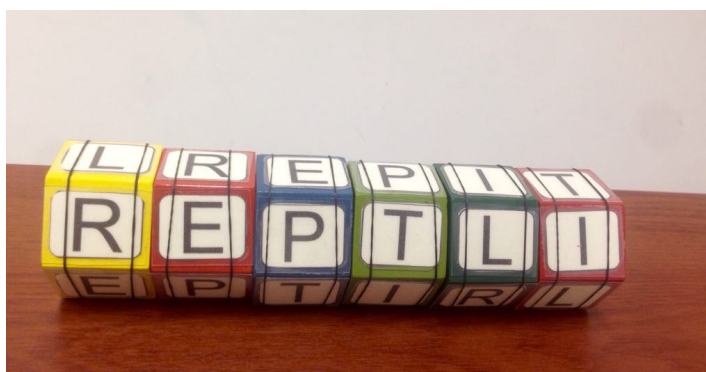
Objetivo: Encontrar el mayor número de palabras con las letras de **REPTIL**

Tiempo: 25 minutos

Indicaciones:

La técnica que será empleada en este juego es **Phillips 66** (véase la pág. 12), por tanto el docente debe dividir a sus estudiantes en grupos de seis integrantes, en este caso se formará cinco grupos.

A cada grupo se tiene que entregar un girógrafo con 36 tarjetas, Se les asigna un tiempo de cinco minutos para que los estudiantes manipulen el girógrafo y se familiaricen con él.



Autoría propia



Reglas de acción

- Grupo 1:** Encuentre la mayor cantidad de palabras con las seis letras de **REPTIL**, no se puede repetir ninguna letra y no importa si tienen sentido o no las palabras formadas.
- Grupo 2:** Forme palabras con las letras de **REPTIL** sin importar si tienen sentido o no, existen dos restricciones: la primera es que no se deben repetir las letras y la segunda, la letra **R** debe ir siempre al inicio de cada palabra formada.
- Grupo 3:** Arme palabras con las letras de **REPTIL** sin interesar si poseen sentido o no, únicamente no se pueden repetir las letras y **P** debe ir siempre al final.
- Grupo 4:** Forme palabras con las letras de **REPTIL** sin importar si carecen de sentido, las restricciones son que **R** debe ir siempre al inicio y **P** al final, no se pueden repetir las letras.

Grupo 5: Encontrar todas las posibles ordenaciones de **REPTIL** con la condición de que las letras **T**, **L** y **E** vayan siempre juntas no interesa si la palabras carecen de sentido, solamente no se pueden repetir las letras.

El grupo que logre formar el mayor número de palabras en el menor tiempo posible es el ganador.

APLICACIÓN 1: PERMUTACIONES SIMPLES

Acción docente



Objetivo: Deducir la fórmula de permutaciones simples a través del principio de multiplicación.

Tiempo: 40 minutos

Prerrequisitos: principio de la multiplicación

Una vez que los grupos hayan terminado con **Búsqueda de palabras**, se pide que anoten una de las palabras que formaron en la pizarra.

Se les pregunta a los grupos:

1. ¿Qué observan con respecto a la estructura de las cinco palabras?
2. ¿Cuál es la relación que existe entre el número de letras que conforma la palabra **REPTIL** y las restricciones con respecto a las posiciones de las letras?

3. ¿Qué estrategias empleó el primer grupo para armar las palabras?
4. ¿Qué estrategias empleó el segundo, tercer y cuarto grupo para armar las palabras?
5. ¿Qué relación existe entre el segundo, tercer y cuarto grupo?
6. En la quinta palabra es necesario que T, L y E siempre vayan juntas pero ¿es importante el orden de estas 3 letras (es decir pueden ir E, T y L o L, E y T)?
¿Por qué?
Entonces:
7. ¿El orden de qué manera interviene en la formación de las palabras?
8. ¿Cuáles son las similitudes que existe en la formación de las cinco palabras?



Recuperado de:
software Canva

Se solicita a los alumnos que representen todas las palabras en una tabla, gráfico o diagrama.

Luego se requiere que, utilizando un lenguaje usual o materno, describan la situación que representaron.

Posteriormente se pide a los educandos que traten de simbolizar la situación utilizando conceptos matemáticos conocidos por ellos (en este caso el principio de multiplicación). Luego que intenten establecer una relación entre la multiplicación encontrada y los factoriales. Para generalizar se solicita que traten de deducir la fórmula de cada uno de los casos.

Finalmente los estudiantes comprueban el número de palabras encontradas con la aplicación de la fórmula deducida.

APLICACIÓN 2: PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

Acción docente



Búsqueda de Palabras: puede ser empleado también en permutaciones con repetición, solamente se tiene que cambiar en el girógrafo las fichas de la palabra REPTIL por otra en la que se repita las letras dentro de la misma, por ejemplo: **COCINA, PLANTA, BARRER**, etc. Cabe destacar que si el docente desea, puede emplear también colores, personas, etc; únicamente debe cambiar las tarjetas de cada sección.

Objetivo: Deducir y conocer la fórmula de las permutaciones con repetición.

Tiempo: 40 minutos

Prerrequisitos: permutación simple

Las indicaciones son muy semejantes a la aplicación 1.

Hagamos un ejemplo con la palabra FOCO, esta vez se empleará la técnica **Tormenta de ideas** (véase la pág. 15) para deducir la fórmula.

Se pide a los estudiantes que formen palabras con las letras de **FOCO** ayudándose de un girógrafo, no importa si las palabras no tienen sentido.



Autoría propia



Autoría propia

Una vez realizada esta actividad, se procede a formular preguntas que deben ser respondidas con una única frase en una hoja de papel, posteriormente los alumnos pasarán a la pizarra y escribirán las frases.

1. Observando la lista de palabras formadas, ¿cuál es la principal diferencia entre esta actividad y la anterior?
2. ¿Cómo afecta que las letras O se repitan en la misma palabra?
3. ¿Qué ocurre si cambio el orden de las letras?, ¿se sigue formando la misma palabra?

Sí No

¿Por qué?

4. ¿Cuál es la condición que se debe cumplir para que al cambiar una letra, la palabra formada no se altere?

Entonces:

5. ¿Las letras O también se pueden permutar?

Sí No

¿Por qué?

6. ¿Para formar las palabras con las letras FOCO se deben realizar dos permutaciones?

Sí No

¿Por qué?

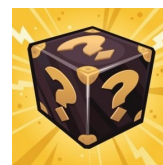


Recuperado de:
software Canva

Las frases de cada grupo de estudiantes deben ser escritas en la pizarra, luego se debe llegar a un consenso entre todos los estudiantes sobre las respuestas. Posteriormente se pide a los alumnos que utilicen las permutaciones simples para calcular el número de palabras formadas.

Una vez hecho esto, se solicita que traten de deducir la fórmula utilizando la ecuación de permutación simple y considerando qué ocurre con las ordenaciones de las letras O; para esto es importante volver a leer las frases en la pizarra. Finalmente se compara el cálculo realizado de forma intuitiva con la ecuación que dedujeron. Para generalizar se pide ahora que encuentren todas las ordenaciones posibles de las siguientes letras: **BARRER**

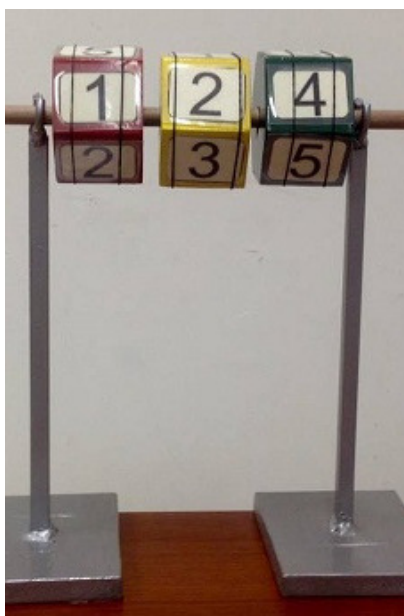
Caja secreta



Descripción: Este juego consiste en colocar una caja en el centro del salón de clase; dentro de esta el docente debe poner un incentivo o premio (lo que considere pertinente). Esta caja estará protegida con una contraseña de tres dígitos. El girógrafo se empleará en este caso como un candado de seguridad.

Objetivo: Obtener por ensayo y error la contraseña para abrir la caja secreta

Tiempo: 25 minutos



Autoría propia

Indicaciones:

Para este juego se va a emplear la técnica de **aprendizaje cooperativo** (véase la pág. 13).

Para empezar, el educador debe retirar tres piezas del girógrafo, luego se procede a repartir las tarjetas de números. El docente previamente tiene que crear una contraseña de tres dígitos para proteger la caja y además designar roles en cada grupo formado.



Reglas de acción

Cada grupo tratará de descifrar la contraseña, para esto tienen que formar números de tres dígitos, se indica que no se pueden repetir los dígitos; los números que se utilizarán son: 1, 2, 3, 4 y 5.

Entre todos los miembros del grupo se tendrá que llegar a un consenso sobre la técnica que emplearán para formar los números; el secretario de cada grupo tiene que anotar la posible contraseña en una hoja de papel, se hará un sorteo previo para determinar el orden de cada grupo. Posteriormente un participante pasará a la pizarra con su contraseña e intentará abrir la caja.

El grupo que logre descifrar la contraseña será el ganador y acreedor al premio.



SUGERENCIA

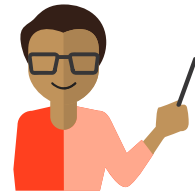
El nivel de complejidad de este juego puede ser aumentado al combinar letras y números en la creación de la contraseña. Es importante que el profesor anote la contraseña previo al inicio del juego, así evitará desacuerdos y conflictos con los alumnos.



Autoría propia

APLICACIÓN 1: VARIACIONES SIMPLES

Acción docente



Objetivo: Reconocer las características principales de las variaciones simples y deducir su fórmula.

Tiempo: 40 minutos

Prerrequisitos: Permutaciones simples

Una vez terminado el juego, es importante que el docente realice las siguientes preguntas:

1. ¿Importa el orden en el que se forman los números?
¿Por qué?
2. ¿Qué representan los números 1, 2, 3, 4 y 5? ¿La muestra o la población?
¿Por qué?
3. ¿Qué representa el número de tres dígitos de la contraseña?
¿La muestra o la población?
¿Por qué?
Entonces
4. ¿Cuál es mayor, la población o la muestra?

Una vez concluida esta actividad es importante realizar un conversatorio con los coordinadores de grupos para describir la forma o estrategia que emplearon para armar el número de tres cifras sin que se repitan los dígitos.

Posteriormente se requiere que los educandos traten de simbolizar la situación utilizando conceptos matemáticos conocidos por ellos (permutación simple), además se pueden ayudar del principio de multiplicidad.

Para generalizar se pregunta a los estudiantes qué ocurriría si en lugar de formar un número de tres cifras fuera uno de cuatro.

Finalmente, se solicita que en base al trabajo realizado definan con sus propias palabras qué son las variaciones simples y cuál es la principal diferencia con las permutaciones.



RECUERDE

Asignar roles es fundamental para agilizar el trabajo con los grupos de estudiantes, principalmente los coordinadores y secretarios de grupo.



Recuperado de: https://img.freepik.com/vector-gratis/coleccion-avatares-gente-hablando_1347-100.jpg?size=338&ext=jpg

Bingo tradicional



Descripción: El bingo es un juego clásico de mesa, este consiste en completar filas, columnas o diagonales con los números que se extraen desde una tómbola. Los participantes poseen una tabla con los números escritos de forma aleatoria desde el 1 al 75.

Al ser un juego tan popular y tradicional se utilizará el ABP (véase la pág. 14)

PROBLEMA

El bingo es un juego de azar tradicional, sus inicios datan desde el siglo XVI, este juego ha tenido varias adaptaciones y versiones, la más popular es la de 75 bolas. Sus elementos indispensables son: bombo, bolas de números, cartones y mesas. Aquí nos enfocaremos en los cartones, piezas fundamentales para el juego como tal, una característica especial es que cada cartón posee un número de serie, de manera que no se pueden repetir las tablas. Al ser un juego tan popular, los cartones deben estar bien diseñados y planificados; la interrogante que surge es ¿cuántos cartones de bingo se pueden crear, de manera que no se repita ninguno?



Imagen recuperada de:
<http://es.smibot.com/wp-content/uploads/2014/03/10-consejos-para-crear-una-p%C3%A1gina-efectiva-de-Preguntas-frecuentes-FAQ-en-una-tienda-online.jpg>

APLICACIÓN 1: VARIACIONES SIMPLES- PRINCIPIO DE MULTIPLICIDAD



Acción docente

Objetivo: Aplicar los conceptos combinatorios de variaciones y principio de multiplicidad para resolver problemas contextualizados

Tiempo: 60 minutos

Prerrequisitos: Variación simple

Para empezar, es necesario que el docente motive a sus estudiantes y los llene de entusiasmo, de esta forma despertará el interés en los mismos. Luego debe repartir cartones de varios colores a sus estudiantes



Los cartones se pueden conseguir en cualquier juguetería o bazar, también se los puede descargar de forma gratuita en la siguiente página web:

<http://www.bingo.es/cartones-bingo/>

Autoría propia

Antes de intentar responder la interrogante planteada, es necesario conocer la opinión de los estudiantes con respecto al juego del Bingo; para esto es recomendable emplear la técnica **SDA** (véase la pág 15).

¿Qué sabemos?	¿Qué deseamos saber?	¿Qué aprendimos?

la última columna debe ser llenada al finalizar la clase.

Autoría propia

Es importante realizar esta tabla en la pizarra o en cartulina, de esta manera todos los estudiantes la pueden visualizar. Una vez que se conoce las opiniones e inquietudes de los educandos con respecto al juego y a los cartones de bingo como tal, se procede a sacar las características más importantes de la tabla o cartón de bingo

B I N G O				
1-15	16-20	21-25	26-30	31-35
5	30	38	47	71
10	26	36	46	66
1	19	FREE	52	68
9	24	40	58	74
2	20	39	48	72

Recuperado de: <https://cf.shopee.com.my/file/842273b7097b90be848b57459db23489>

1. ¿Cuántas columnas y filas tienen el cartón de bingo?
2. ¿Cuántos casilleros hay en el tablero de Bingo?
3. ¿Cuál es la utilidad del casillero que no posee número?
4. ¿Es posible encontrar un número mayor a 25 en la primera columna?
¿Por qué?
5. ¿Es posible encontrar un número mayor a 25 en la primera fila?
¿Por qué?
Entonces:
6. ¿Los números están organizados mediante filas o columnas?

Una vez encontradas las características, procedemos a llevar toda esta información a un lenguaje matemático, en este caso combinatorio. Al igual que la anterior actividad, se lo hace en base a preguntas:

1. ¿Los 75 números representarán la población?
¿Por qué?
2. ¿Los 25 casilleros representarán la muestra?
¿Por qué?
3. ¿Importa el orden en el que se encuentran distribuidos los números?
¿Por qué?
4. ¿Los números se pueden repetir en la misma tabla?
¿Por qué?



Recuperado de:
<http://www.computing.es/siteresources/files/749/91.jpg>

Posteriormente, se tiene que llegar a un consenso entre todos los alumnos sobre las posibles respuestas.

Finalmente, los educandos deben identificar la técnica de conteo que cumpla con las características encontradas y que permita calcular cuántos cartones de bingo se pueden crear.



Recuperado de:
<https://thumbs.dreamstime.com/z/business-team-work-building-puzzle-developing-concept-36813737.jpg>

La Quiniela



Descripción: El juego de La Quiniela consiste en acertar el resultado de algunos partidos de fútbol marcando si crees que va a ganar el equipo que se encuentra en primer lugar (1), si van a empatar (X), o si gana el equipo que se encuentra en segundo lugar (2).

Objetivo: Calcular todos los resultados posibles que se pueden obtener en los encuentros deportivos.

Tiempo: 20 minutos

SENCILLO

Marque 8 signos por bloque (mínimo 2) en la zona de PRONÓSTICOS.

CAMPEONATO NACIONAL ECUATORIANO / SEGUNDA FASE FECHA: 18-04-2019

	P	R	O	N	Ó	S	T	I	C	O	S
LDU Quito - Aucas	1	X	2	1	X	2	1	X	2	1	X
Barcelona SC - Dep. Cuenca	1	X	2	1	X	2	1	X	2	1	X
El Nacional - Delfin	1	X	2	1	X	2	1	X	2	1	X

BLOQUES →

1

2

3

4

5

6

7

8

Autoría propia

Indicaciones:

El docente debe entregar a cada estudiante una tabla, en ella están los encuentros deportivos. Es importante que el educador realice el primer pronóstico de un partido.

SENCILLO

Marque 8 signos por bloque (mínimo 2) en la zona de PRONÓSTICOS.

CAMPEONATO NACIONAL ECUATORIANO / SEGUNDA FASE FECHA: 18-04-2019

	P	R	O	N	Ó	S	T	I	C	O	S
LDU Quito - Aucas	1	X	2	1	X	2	1	X	2	1	X
Barcelona SC - Dep. Cuenca	1	2	1	X	2	1	X	2	1	X	2
El Nacional - Delfin	1	X	2	1	X	2	1	X	2	1	X

BLOQUES →

1

2

3

4

5

6

7

8

Autoría propia

Por ejemplo: En el partido de Barcelona vs Dep. Cuenca se va a producir un empate.



Reglas de acción

Cada estudiante debe llenar la Quiniela con todas la posibilidades; para esto puede utilizar un diagrama o un esquema que le ayude a agilizar el trabajo.

La persona que consigue todas las formas en el menor tiempo posible es el ganador.

APLICACIÓN: VARIACIONES CON REPETICIÓN

Acción Docente



Objetivo: Identificar los elementos de población y muestra.
Determinar la fórmula de variaciones con repetición.

Tiempo: 30 minutos

Prerrequisitos: principio de multiplicidad y variaciones simples

Una vez terminado el juego de la quiniela, es importante que el profesor realice las siguientes preguntas

1. ¿Qué representan los encuentros deportivos en la quiniela? ¿La muestra o la población?

¿Por qué?

2. ¿Qué representan los resultados de: ganar el primero equipo, el segundo o empatar? ¿La muestra o la población?

¿Por qué?

Entonces:

3. ¿Cuál es mayor, la población o la muestra?

4. ¿Cuál es la relación que existe entre los resultados y los partidos de fútbol?

Se les solicita a los estudiantes que representen todas las formas posibles de los resultados en una tabla, gráfico o diagrama.

Luego se solicita que utilizando un lenguaje usual o materno describan la situación que representaron. Posteriormente se requiere que los educandos traten de simbolizar, utilizando conceptos matemáticos conocidos por ellos (principio de multiplicativo); además, se pueden ayudar con la regla de los exponenciales. Para generalizar, se pregunta a los estudiantes qué ocurriría si en lugar de tres encuentros deportivos fueran ocho. Finalmente, se pide que, en base al trabajo realizado, definan con sus propias palabras qué son las variaciones con repetición y cuál es la principal diferencia con las variaciones simples.

Dominó



Descripción Es uno de los juegos de mesa más populares de todos los tiempos, en el que se usan 28 fichas rectangulares de color blanco divididos en dos cuadrados; cada uno de estos están marcados de uno a seis puntos, generalmente de color negro, o inclusive el cero. Las fichas van desde el doble blanco al doble seis.

Al ser un juego muy popular se empleará la técnica **Estudio de Casos** (véase la pág. 16), para conocer cómo se organizan los puntos de numeración dentro de las fichas de dominó



Recuperado de: <http://2.bp.blogspot.com/-Zbit5UMtnK8/VjsbTdp9kol/AAAAAAAAAF0/ZDwP3A5dY8s/s1600/domino.jpg>

APLICACIÓN 1: COMBINACIONES



Acción Docente

Objetivo: Conceptualizar las combinaciones y establecer diferencias con las variaciones

Tiempo: 30 minutos

Prerrequisito: variaciones

Para iniciar, es necesario formar equipos de trabajo, con tres integrantes. Es probable que la mayor parte de estudiantes estén familiarizados con la forma de juego; sin embargo, se debe hacer énfasis en la distribución de los puntos de cada cuadrado en las fichas.

A continuación, es necesario realizar una **lluvia de ideas** (véase la pág. 15) con el fin de obtener las características principales de las fichas de dominó.

1. ¿Cómo están organizados los puntos en cada cuadrado?
2. Se puede repetir la numeración en cada cuadrado de la ficha?
2. ¿Crees que en la fichas se encuentra presente el concepto de orden?
3. ¿Existe una forma de cambiar el valor de una ficha?



Es muy posible que en las respuestas otorgadas por los alumnos aparezca el término **combinación**, puesto que es bastante empleado en la vida cotidiana; es importante destacar esta respuesta, ya que posteriormente se hará uso de ella.

Una vez realizada la lluvia de ideas, se procede a la representación gráfica, para esto se requiere que los estudiantes organicen las fichas de manera que se forme un diagrama con la numeración.

Por ejemplo:

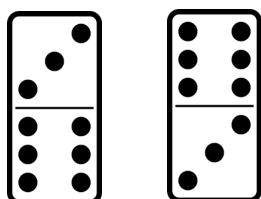


La puntuación del dominó va desde 0 hasta 6.

Autoría propia

Con el diagrama de las fichas se tendrá una mejor visión, esto ayudará a relacionar la parte gráfica con el lenguaje matemático.

1. Los números simbolizados con puntos negros son: 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6, ¿qué representan la población o muestra?
2. ¿Los 2 cuadrados de cada ficha de dominó representan la población o muestra?
3. ¿Las siguientes fichas son las mismas?



Autoría propia

¿Por qué?

Entonces,

5. ¿El orden de los números influye en la distribución de las fichas de dominó?
6. ¿Intervinieron todos los números en una ficha?

Después de haber escuchado la participación de los grupos, será preciso introducir el tema de combinación; conjuntamente todas las características ya fueron contestadas mediante las preguntas. Finalmente se debe requerir a los estudiantes que realicen un cuadro comparativo entre variaciones y combinaciones.



Sugerencia

1. En virtud de que el dominó es un juego tan conocido, el profesor previamente puede requerir que cada grupo traiga su propio dominó.
2. Si el docente considera pertinente, puede además trabajar con otras variaciones de dominó que incluyen 55 piezas, esto aumentara el nivel de complejidad.

APLICACIÓN 2: COMBINACIÓN SIMPLE

Acción Docente



Objetivo: Determinar la fórmula de combinación sin repetición.

Tiempo: 30 minutos

Prerrequisitos: Permutación y variación sin repetición

Las fichas de **dominó** sirven también para trabajar en la fórmula de combinaciones sin repetición, solamente se deben retirar las siete fichas dobles. De esta manera existirá un total de 21 fichas.

En esta actividad se utilizará la técnica de **comparación y contraste** (véase la pág. 17), a través de gráficos y diagramas.

Para iniciar, se solicita a los educandos que organicen las fichas desde 0 hasta 6 según la puntuación que marquen.

Por ejemplo:



Autoría propia

Luego, es necesario que este esquema lo transfieran de forma simbólica a numérica utilizando un diagrama de árbol.

Diagrama de árbol

Herramienta gráfica que permite escribir todas las posibilidades.



Autoría propia

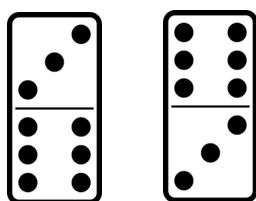
Para realizar el contraste con las variaciones, se procede a plantear el siguiente problema:

¿Cuántos números de dos cifras se pueden formar con los siguientes dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6, sin que se repita ninguno? (la primer cifra puede también ser cero). Realice un diagrama con todas las posibilidades.

Una vez hecho esto, se tiene que comparar los dos diagramas, ¿qué tienen en común? y ¿en qué se diferencian?

Si el profesor observa que sus alumnos poseen dificultad en esta actividad, los puede guiar con las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál de los diagramas tiene el mayor número de posibilidades?
2. ¿Importa el orden en el segundo diagrama?
3. ¿Las siguientes figuras son las mismas fichas del dominó?



Autoría propia

Sí No

¿Por qué?

4. ¿La población y la muestra es igual en ambos casos?

Entonces:

5. ¿De qué manera el segundo diagrama puede ser igual al primero?
6. ¿Cuáles cifras deben eliminarse del segundo diagrama para que las posibilidades sean iguales?
7. ¿Qué técnica de conteo representan los números eliminados?

Posteriormente, se requiere que los educandos traten de simbolizar la primera situación utilizando conceptos matemáticos conocidos por ellos (variación y permutación simple). Para generalizar, se pregunta a los estudiantes qué ocurriría si en lugar de siete números fueran diez.

Finalmente, se pide que en base al trabajo realizado, definan con sus propias palabras, ¿qué es una combinación sin repetición?

Póker



Descripción: El Póker es un juego de cartas en el que se emplea la baraja francesa, se desarrolla en base a combinaciones de cinco cartas. El objetivo de este juego es reunir la combinación más alta posible a partir de las cartas recibidas.

MANOS DE JUEGO



Escalera real

Está compuesta por as, rey, reina, jota y diez de un mismo palo.



Escalera de color

Cinco cartas consecutivas del mismo palo.



Póker

Cuatro cartas del mismo valor y una carta no emparejada o "kicker"



Full

Tres cartas del mismo valor y un par de un mismo valor diferente al anterior



Color

Cinco cartas del mismo palo, no necesariamente consecutivas.



Escalera

Cinco cartas consecutivas no necesariamente del mismo palo. .



Trío

Tres cartas del mismo valor y dos cartas no emparejadas



Doble par

Dos cartas del mismo valor, otras dos cartas del mismo valor diferente al anterior y un kicker.



Par

Dos cartas del mismo valor y tres cartas no emparejadas.



Carta alta

Cualquier mano que no esté clasificada entre una de las categorías anteriores

Todas las imágenes y descripciones fueron recuperadas de:
<https://www.pokerstars.com/espanol/poker/>

APLICACIÓN: COMBINACIONES SIMPLES

Acción Docente



El término combinar se encuentra tan ligado a la vida diaria y su presencia es más que evidente en juegos tanto de mesa como digitales. El póker lleva implícito la teoría combinatoria cada vez que se arman manos (agrupaciones de cartas); se están aplicando combinaciones, aún incluso si desconocen las ecuaciones o definiciones; entonces, este juego es perfecto para aplicar la técnica de **resolución de problemas** (véase la pág. 17)

Objetivo: Resolver problemas, aplicando los conceptos de combinaciones

Tiempo: 30 minutos

Prerrequisitos: combinaciones

Para iniciar, es importante dividir a los estudiantes en grupos de tres personas; cada grupo deberá tener un baraja francesa; a pesar de que el póker es muy popular, pueden existir estudiantes que nunca lo hayan jugado, entonces es recomendable realizar una breve explicación en cuanto al juego, pero sobre todo a las manos que se pueden formar. Posterior a esto, se pide a los alumnos que con sus cartas formen las siguientes manos: escalera de color, full, póker y doble par.

A continuación, se presenta el problema a resolver:

¿De cuántas formas puede sacar un jugador cinco naipes de una baraja francesa y obtener un full ?



Se analiza el problema primero de forma individual y luego grupal, se procede a obtener las características más importantes:

1. ¿Cuántas cartas posee una baraja francesa?
2. ¿Cuántos palos de cartas existen?
3. ¿Cuántas naipes existen en cada palo?
4. ¿De cuántas cartas se conforma un full?

Debido a que la mano full está compuesta por un trío y una pareja, se dividirá este problema en dos partes.

En la primera se buscará todos los posibles tríos que se pueden formar con los naipes, para esto se requiere que los alumnos usen los naipes para armar los tríos.

Por ejemplo:



Autoría propia

5. ¿Cuántos tríos formaron?
6. Si existen cuatro cartas del mismo valor, ¿qué técnica de conteo permite realizar grupos de tres?
7. Calcule el número de grupos de tres cartas que se pueden formar con los cuatro naipes del mismo valor.
Luego,
8. Calcule el número de tríos que se formarán con todos los naipes.

Para la segunda parte se debe usar un procedimiento muy parecido al anterior, solo que esta vez, con los pares (naipes del mismo valor). Finalmente, se une las respuestas de las dos partes empleando el principio de multiplicidad.

MARCO CIENTÍFICO



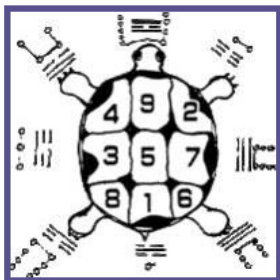
Recuperado de: <https://biotrendies.com/wp-content/uploads/2016/10/Toma-estas-frutas-afrodisiacas-y-desata-tu-pasion.jpg>

Recuperado de: <https://www.oei.es/historico/divulgacioncientifica/IMG/arton4858.jpg?1508693439>

Combinatoria

Es una rama de las matemáticas, que estudia las formas de contar, es decir, las diversas formas de realizar agrupaciones con elementos de un conjunto, de tal manera que se puedan calcular todas las posibles agrupaciones.

Reseña histórica



Recuperado de:
https://historiaybiografias.com/arquivos_varios3/numero_magico1.jpg

Cuadrados mágicos

Son distribuciones de números en base a una matriz, de tal forma que la suma de los elementos de cualquier columna, fila o diagonal es siempre la misma.

La historia de la combinatoria aparece en forma simultánea junto con otras ramas de la matemática como son: álgebra, probabilidad y teoría de números.

Surge aparentemente en el siglo XXII A.C con el problema de los cuadrados mágicos; cuenta una leyenda que el emperador chino Yu, encontró en el caparazón de una tortuga sagrada, un cuadrado mágico. Posteriormente, en el siglo V A.C, aparecen los números triangulares.

En el siglo XVI D.C, la combinatoria logra vislumbrar en las ciencias, gracias a los trabajos de Fermat y Pascal, quienes dan el reconocimiento al análisis combinatorio como un nuevo campo de las matemáticas valioso por estudiar, y se le adjunta como el dominio de técnicas o prácticas para dar solución a un problema.

Finalmente en el siglo XVII D.C, la combinatoria es reconocida como disciplina científica por medio de los trabajos de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) y Jacobo Bernoulli (1654-1705)



Recuperado de:
https://www.biografiasyvidas.com/biografia/y/fotos/yu_el_grande.jpg



Recuperado de:
<https://fermatlibrary.com/assets/fermat-8c81357625a7bdf0cd01f485812e02b1949b3dc3a3ab8476bbe24bc195acbc8c.png>



Recuperado de:
<http://images.computerhistory.org/tidh/09june-1.jpg?w=600>



Recuperado de:
<https://cdn.britannica.com/s:300x200/47/130347-004-E502B45E.jpg>



Recuperado de:
<http://www.100ciaquimica.net/images/biografias/ima/bernouillij.jpg>

Conceptos básicos

CONTENIDOS

PERMUTACIONES

VARIACIONES

COMBINACIONES

Nomenclatura

SIN REPETICIÓN	CON REPETICIÓN
P_n	$PR_{n^{a,b,c}}$
V_n^r	VR_n^r
C_n^r	CR_n^r

Autoría propia

Población : Conjunto de elementos que se desea estudiar con una característica en común.

La letra **n** representará la población.



Recuperado de: software Canva

Muestra: Es un subconjunto de la población, o también se conoce como la forma en la que se toman los elementos de la población.

La letra **r** representará la muestra.



Recuperado de: software Canva

Orden: Es posicionar o colocar elementos u objetos en el lugar que les corresponde a cada uno, de tal manera que su modificación altera el producto final.



Recuperado de: <https://mad4yoga.com/wp-content/uploads/2015/01/Crear-Espacio-Tazas.jpg>

Repetición: Es la acción o efecto de repetir ciertos elementos.



Recuperado de: <https://images-na.ssl-images-amazon.com/images/I/41OW8mv%2BmPL.jpg>

Permutaciones

PERMUTACIONES SIMPLES

PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

PERMUTACIONES CIRCULARES



Recuperado de: <https://img-aws.ehowcdn.com/750x500p/photo.s.demandstudios.com/getty/article/10/232/92456092.jpg>



Recuperado de:
https://d1zqayhcl1yz6oo.cloudfront.net/bac-kgrounds/custom_bg-5344cc484060371265d96948-70919080f049.jpg

Definición

Se llaman permutaciones a todos los posibles arreglos u ordenaciones que se pueden dar en un conjunto de n elementos .

En las permutaciones importa el orden y se deben considerar todos los elementos de la población , es decir,

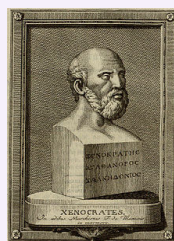
$$n = r$$

Autoría propia



EN LA VIDA DIARIA

Las permutaciones permiten a las compañías telefónicas asignar tantos números como sea posible sin repetir ninguno, pues cada persona posee su propia línea telefónica.



Recuperado de:
<https://citaty.net/media/authors/xenokrates-z-chalkedonu.jpg>

¿SABÍAS QUE?

Xenócrates de Calcedonia (339-314 a.c) fue a quien se le adjudicó el primer intento por resolver un problema de permutación.

Permutaciones Simples

Permutaciones simples, ordinarias o sin repetición son los diferentes grupos que se pueden formar, de manera que en un grupo participen los n elementos y la única diferencia entre ellos sea el orden de colocación.



$$P_n = n!$$



Ejemplo:

¿De cuántas maneras diferentes se puede ordenar tres fichas de colores: azul, amarillo y rojo ?

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Recuperado de:
https://cdn.shopify.com/s/files/1/0407/1985/products/ED83638_1_800x.jpg?v=1396071906

Curiosidades

Si se toma una baraja española de 40 naipes y se los permuta, se obtendría aproximadamente **ocho octillones**, si cada naipe se lo coloca uno encima de otro considerando el ancho de 1.5 cm, estos tendrían una altura de doce octillones de centímetros, equivalente a **doce septillones** de kilómetros.

Para comparar con algo extremadamente grande, se lo hará con el universo. Se estima que el universo tiene un diámetro de casi un **cuatrillón** de kilómetros, por lo que en el universo cabría un porcentaje realmente pequeño de las barajas que se necesitarán.



Recuperado de: https://www.bienestarsenior.com/media/catalog/product/5/0/502010040_3.jpg



https://cdn.hispantv.com/hispanmedia/files/images/thumbnail/20161219/01575168_xl.jpg

Información recuperada de:

<http://www.matematicasdigitales.com/combinaciones-de-una-baraja-de-cartas/>

Permutaciones con repetición

Se llaman permutaciones con repetición de n elementos, distribuidos en grupos de $a, b, c, \dots$ elementos, a las diferentes ordenaciones que se pueden formar con los elementos, siempre y cuando $a+b+c+\dots = n$, de tal manera que cada una de ellas se diferencia en el orden de colocación, excluyendo las que pertenecen al mismo grupo.



Recuperado de: <https://images-na.ssl-images-amazon.com/images/I/41OW8mv%2BmPL.jpg>



Ejemplo:

Con los números 2,2,3,3,3,6,6 ¿cuántas cifras de ocho números se pueden formar?

$a=2$, $b=3$, $c=2$

$$PR_{8^{2,3,2}} = \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 1680$$



Permutaciones circulares

Son aquellas en las que no existe ni primer ni último objeto, se utilizan cuando los elementos se han de ordenar "en círculo", de modo que el primer elemento que "se sitúe" en la muestra determina el principio y el final de la misma



Recuperado de: https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSrwCvIjCBJutHxKFGWlHbg_MkaIRIT7ZJYgNyumNA_NjFkYL6Hog



Ejemplo:

Seis personas dentro de una junta se sientan alrededor de una mesa redonda, ¿De cuántas formas diferentes pueden ocupar los asientos?

$$PC_6 = (6 - 1)! = 5! = 120$$

Variaciones

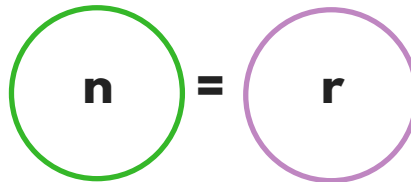
Definición

Se llaman variaciones a las agrupaciones que se pueden formar con los n elementos tomados de r en r .

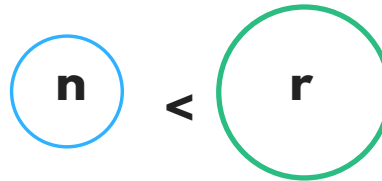
En las variaciones importa el orden y se pueden presentar tres casos.



No intervienen todos los elementos



Intervienen todos los elementos



Las formas de agrupar los elementos son más grandes que la población

Autoría propia

VARIACIONES SIMPLES

VARIACIONES CON REPETICIÓN



Recuperado de:
https://4.bp.blogspot.com/-QZxG8q_Gwzk/VtOYcTtD6HI/AAAAAAAAAAOl/rEd8T67IORg/s1600/10%2Bcentavos.JPG



Recuperado de:
http://4.bp.blogspot.com/-J3PoYD1mkpE/T-IxWDptFHI/AAAAAAAAAqk/AyDftMbQecY/s1600/coin_toss-772544.jpg



Nota

Existen muchos autores que consideran a las variaciones como un subcaso de las permutaciones.



EN LA VIDA DIARIA

Las variaciones están presentes en las placas de los automóviles; una placa consta de 3 letras y 4 números. Las letras del abecedario son 27 y los dígitos de los números 10.

Variaciones Simples

Las variaciones sin repetición o simples de n elementos tomados de r en r ($n \geq r$) son agrupaciones formadas por elementos diferentes, es así que una variación difiere de otra si se cambia el orden de colocación.



Ejemplo

$$V_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

¿Cuántas cifras de dos números se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, sin que se repitan los elementos?

$n=4$, $r=2$

$$V_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 12$$

Variaciones con repetición

Las variaciones con repetición de n elementos tomados de r en r son agrupaciones en las que se repiten los elementos, de modo que una variación es distinta a otra si esta difiere en algún elemento o se sitúa en distinto orden. Existen dos casos:

Si $n > r$ no entran todos los elementos.

Si $n \leq r$ entran todos los elementos.



Recuperado de:
<https://i.ytimg.com/vi/4PyuzzmaBYA/hqdefault.jpg>

$$VR_n^r = n^r$$



Ejemplo

¿Cuántas palabras de tres letras se pueden formar con: a, b, c, d, ?

$n=4$, $r=3$

$$VR_4^3 = 4^3 = 64$$

Combinaciones

COMBINACIONES SIMPLES

COMBINACIONES CON REPETICIÓN

Definición

Se llaman combinaciones a las agrupaciones que se pueden formar con los n elementos tomados de r en r , considerando que no importa el orden.

$$n \geq r$$

Autoría propia

¿Cuándo no importa el orden?

El orden no importa cuando no altera o modifica el resultado final.



Recuperado de:
<http://2.bp.blogspot.com/-Zbit5UMtnK8/VjsbTdp9kol/AAAAAAAAAAAF0/ZDwP3A5dY8s/s1600/domino.jpg>



Recuperado de: <https://2.bp.blogspot.com/-7H7VBeilzMo/VnRMEzWfGI/AAAAABAs/OI9PRCqwoJO/s1600/bodega-bar-aleman.jpg>



EN LA VIDA DIARIA

En el arte culinario muchas veces no importa el orden en el que se colocan los ingredientes, por ejemplo: si deseamos preparar una deliciosa ensalada de frutas, no interesa el orden en que piquemos las frutas y las coloquemos en el recipiente, si al final obtenemos el mismo resultado

¿Sabías qué?



Recuperado de: http://photos.geni.com/p13/8d/ce/70/2d/53444839cd307f08/vaq44kid_medium.jpg

Levi Ben Gerson (1288-1344) escribió las reglas principales de cálculo sobre las permutaciones y combinaciones, anteriormente ya descubiertas por los hindúes.

Combinaciones Simples

Las combinaciones sin repetición de n elementos tomados de r en r se definen como las agrupaciones formadas por elementos distintos, es decir, una combinación es distinta a otra si esta difiere en algún elemento, además no influye el orden de colocación.



Recuperado de: <https://i.ytimg.com/vi/laWP-X4C4yE/maxresdefault.jpg>

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$



Ejemplo:

Una pastelería tiene 10 pasteles diferentes,
¿De cuántas formas se puede elegir 5 de estas tortas?

$n=10$

$r=5$

$$C_{10}^5 = \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{10!}{5! \times 5!} = 252$$



Combinaciones con repetición

Se llaman combinaciones con repetición de n elementos tomado de r en r a aquellas diferentes agrupaciones de r elementos (indistinguibles o no), de tal forma que una agrupación se diferencia de las demás en al menos un elemento (no importa el orden de colocación y se pueden repetir los elementos).



Recuperado de: https://farm7.static.flickr.com/6084/6063228917_71932cfab.jpg

$$CR_n^r = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$



Ejemplo:

¿De cuántas formas puede una niña tomar 4 dulces, si tiene una ánfora con 5 tipos diferentes de dulces?

$n=5$ $r=4$

$$CR_5^4 = \frac{(5+4-1)!}{4!(5-1)!} = \frac{8!}{4! \times 4!} = 70$$

Esquema

PREGUNTAS CLAVES



Es importante, antes de resolver cualquier tipo de ejercicio o problema, recordar las siguientes preguntas:

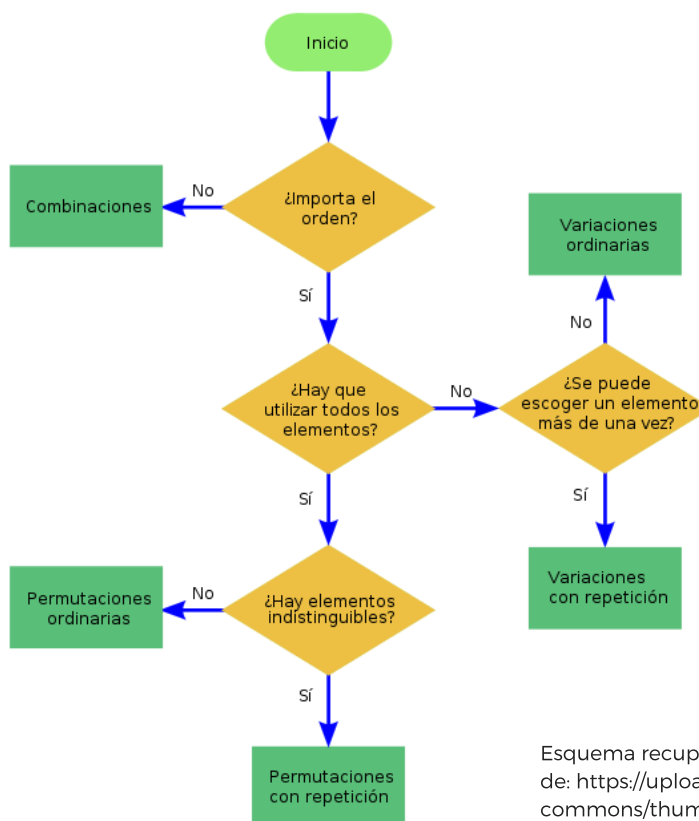
1. ¿Importa el orden?
2. ¿Entran todos los elementos?
3. ¿Se pueden repetir los elementos?



Estas preguntas ayudan a reconocer y establecer las diferencias que existen entre las técnicas de conteo (permutación, variación y combinación). Además son de gran ayuda al momento de seleccionar la ecuación matemática que se debe emplear.

Recuperado de:
http://www.icsmb.gov.it/pvw/app/default/pvw_img.php?sede_codice=GEME0056&doc=2012527

El siguiente esquema te ayudará a resolver los ejercicios con mayor facilidad.



Esquema recuperado de: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/77/AlgoritmoCombinatoria.svg/550px-AlgoritmoCombinatoria.svg.png>

Ejercicios propuestos



1. Escriba todas las permutaciones que pueden formarse con las letras de las siguientes palabras; ayúdese del girógrafo.
 - a) copo
 - b) bate
 - c) pera
2. En el campeonato ecuatoriano de fútbol participan 18 equipos, el primer clasificado acude a la Copa Libertadores de América y el segundo tiene que ir a una eliminatoria previa. ¿De cuántas formas diferentes se pueden ocupar estos dos puestos?
 - a) En este caso, ¿de cuántos elementos está compuesta la muestra y la población?
 - b) ¿Se pueden repetir los elementos? Justifique su respuesta.
 - c) ¿Qué técnica de conteo debe aplicar para resolver este problema?
3. ¿Cuántos números naturales de seis cifras distintas hay?
 - a) En este caso, ¿de cuántos elementos se conformaría la población? Justifique su respuesta.
 - b) Escriba nueve números naturales de seis cifras distintas.
 - c) ¿Importa la posición de los dígitos en los números?
Por ejemplo: 102574 - 257401 - 457104
Justifique su respuesta
 - d) ¿Qué ocurre con las cifras que inician con el dígito 0?
Entonces:
 - e) ¿Cuál es la restricción implícita en este problema?
 - f) ¿Qué técnica debe utilizar para calcular los números?
 - g) ¿Qué ocurriría si las cifras se pueden repetir?
4. Con los siguientes datos elabore un problema de variación con repetición:
 $n: 8; r: 5$
5. Con los datos a continuación formule dos problemas, uno para variación sin repetición y otro para combinación simple.
 $n: 6; r: 4$
6. Resuelva el siguiente problema empleando dos procedimientos diferentes.
¿De cuántas maneras se pueden distribuir doce libros de distintas asignaturas entre cuatro estudiantes de tal manera que:
 - a) cada alumno reciba tres libros?
 - b) los dos estudiantes de grados superiores reciban cuatro libros y los dos de ciclos inferiores dos cada uno?

Solucionario

1. Escribe todas las permutaciones que pueden formarse con las letras de las siguientes palabras; ayúdese del girógrafo.

a) copo

poco, pooc, pcoo, cpoo, coop, ocop, opoc, oopc, oocp, opco, ocpo

b) bate

baet, beta, beat, btae, btea, abte, abet, atbe, ateb, aebt, aetb, tbae, tbea, teba, teab, tabe, taeb, ebat, ebta, etba, etab, eatb, eabt

c) pera

pare, paer, pear, prea, prae, apre, aper, arep, arpe, aerp, aepr, rape, raep, repa, reap, rpaer, rpea, epra, epar, erap, erpa earp, eapr

2. En el campeonato ecuatoriano de fútbol participan 18 equipos, el primer clasificado acude a la Copa Libertadores de América y el segundo tiene que ir a una eliminatoria previa. ¿De cuántas formas diferentes se pueden ocupar estos dos puestos?

En este caso el número de población es 18, y la muestra es 2, en vista de que existe un orden de clasificación no se pueden repetir los elementos, los equipos lógicamente no pueden ser los mismos.

La técnica de conteo que permite realizar este cálculo es una variación simple.

$$V_{18}^2 = 18 \times 17 = 306 \text{ formas diversas de ocupar los dos puestos.}$$

3. ¿Cuántos números naturales de seis cifras diferentes existen?

La población está conformada por 10 elementos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) cada uno de estos números pueden posicionarse en cualquiera de las cifras, en esta ocasión las 6 cifras representan la muestra. La técnica que debe ser utilizada es una variación sin repetición.

$$V_{10}^6 = 151\,200 \text{ números con seis cifras diversas,}$$

Sin embargo en este cálculo están incluidos los que empiezan por cero, automáticamente estos formarían números de cinco cifras, lo cual incumple con la orden del ejercicio; entonces se procede a encontrar los que inician con cero y posteriormente a eliminarlos.

$$V_9^5 = 15\,120 ; \quad V_9^5 - V_{10}^6 = 136\,080 \text{ números.}$$

6. Resuelva el siguiente problema empleando dos procedimientos diferentes.
¿De cuántas maneras se pueden distribuir doce libros de distintas asignaturas entre cuatro estudiantes de forma que:

a) cada alumno reciba tres libros?

b) los dos estudiantes de grados superiores reciban cuatro libros y los dos de ciclos inferiores dos cada uno?

PROCEDIMIENTO 1:

INTERPRETADO POR COMBINACIONES

a) El primer alumno puede recibir C_{12}^3 , el segundo C_9^3 , el tercero C_6^3 y el último C_3^3

Debido a que son sucesos simultáneos se aplica el principio multiplicativo, por tanto la solución es

$$C_{12}^3 \times C_9^3 \times C_6^3 \times C_3^3 = 220 \times 84 \times 20 \times 1 = 369600 \text{ maneras.}$$

b) El estudiante de ciclo superior recibe 4 libros, por consiguiente pueden distribuírsele C_{12}^4 ; al segundo por consecuencia le quedan C_8^4 al tercero le restan C_4^2 y al último C_2^2 ; de igual forma son sucesos simultáneos, entonces la solución es

$$C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^2 \times C_2^2 = 495 \times 70 \times 6 \times 1 = 207900 \text{ maneras.}$$

PROCEDIMIENTO 2:

INTERPRETADO POR PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

a) En este caso se denota a cada estudiante con una letra, por ejemplo ABCD, están designados de mayor a menor grado.

Se mantiene como constante los libros del 1 al 12, y se confieren los alumnos a los libros. Una posible asignación sería AAA BBB CCC DDD, otra sería ABD CAD ABB CC D. De esta manera repartiría los 12 libros entre los 3 estudiantes y las formas distintas de hacerlo serían

$$PR_{12}^{3,3,3,3} = 369600 \text{ maneras.}$$

b) Para el segundo caso los repartos serían del tipo AAAA BBBB CC DD, es decir que la repetición sería 4 para A, 4 para B y 2 para C y D. Por tanto todos los posibles repartos serían:

$$PR_{12}^{4,4,2,2} = 207900 \text{ maneras.}$$

REFERENCIAS

Blanco, J. (2010). *Metodologías de enseñanza-aprendizaje para el desarrollo de competencias*. Oviedo: Universidad de Oviedo.

Chadwick, C. B. (2006). Estrategias cognoscitivas y afectivas de aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Psicología*, 20(1), 163-184.

Johnson, D. W., Johnson, R. T., & Holubec, E. J. (1999). *El aprendizaje cooperativo en el aula*.

Klimenko, O. (2011). La enseñanza de las estrategias cognitivas y metacognitivas como una vía de apoyo para el aprendizaje autónomo en los niños con déficit de atención sostenida. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 1(27).

Navas, F. T. (2010). La organización del grupo-clase y de las tareas en la clase de Educación Física. *EmásF: revista digital de educación física*, (2), 14-24.

Parra, D. M. (2015). Análisis histórico epistemológico de la iniciación de la combinatoria caso: combinaciones. *Tesis de pregrado. Universidad del Valle*.

Parramón (S.A.). (2010). *Manual del educador: Recursos y técnicas para la formación en el siglo XXI*. Barcelona, España: Parramón.

Sáez, M. J. (2010). *Enseñanza de estrategias de aprendizaje en el aula. estudio descriptivo en profesorado de niveles no universitarios*. Valladolid : Universidad de Valladolid.

Wilhelmi, M. R. (2004). *Combinatoria y probabilidad*. Grupo de Investigación en Educación Estadística, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

REFERENCIAS DE IMÁGENES

- <https://guiadeldocente.info/images/2017/02/18/1.png>
Recuperado de: <http://francoscopie.fr/wp-content/uploads/2016/09/DisruptionCollabotation.jpg>
- <http://www.redesymarketing.com/wp-content/uploads/2017/04/estrategia-comunicacion.jpg>
- http://www.icsmb.gov.it/pvw/app/default/pvw_img.php?sede_codice=GEME0056&doc=2012527
- http://2.bp.blogspot.com/-3aZv_83tJlU/Udlr0G6iw-I/AAAAAAAAAAG/a-luRopVxd4/s300/aprendizaje.jpg
- <http://www.computing.es/siteresources/files/749/91.jpg>
- https://i.ytimg.com/vi/u6zN6lrl-_4/hqdefault.jpg
https://www.fundacioncadah.org/j289eghfd7511986_uploads/web_1/post_images/image_item_final_405.jpg
- <https://i.ytimg.com/vi/uJFc5WWHY0g/maxresdefault.jpg>
- <https://thumbs.dreamstime.com/z/business-team-work-building-puzzle-developing-concept-36813737.jpg>
- <http://es.smibot.com/wp-content/uploads/2014/03/10-consejos-para-crear-una-p%C3%A1gina-efectiva-de-Preguntas-frecuentes-FAQ-en-una-tienda-online.jpg>
- https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSrWcvljCBJutHxKfGWIHbg_MkalRIT7ZJYgNyumna_NjFkYL6Hog
- <https://media.istockphoto.com/vectors/gears-in-the-mind-climate-change-vector-icon-pattern-vector-id956094512>
<http://www.vanospensioen.nl/uploads/images/vraagteken.jpg>
- <http://www.vanospensioen.nl/uploads/images/vraagteken.jpg>
- https://d1zqayhclyz6oo.cloudfront.net/backgrounds/custom_bg-5344cc484060371265d96948-70919080f049.jpg

- <http://2.bp.blogspot.com/-ylxODkSLQyw/TVP3UD8EsfI/AAAAAAAAAAw/HzYA+NZlo1g/s1600/2images.jpeg>

- <http://www.teacherspro.com/wp-content/uploads/2017/03/Aprendizaje-Cooperativo-en-red-01-1.jpg>

- https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcTb6-iOB4sk5lpw8kcRls_BQkYdK4p1aO4QwAWdLgAg2FnFhzkD

- <https://i3.wp.com/www.comunidadcassa.com/newsite/wp-content/uploads/2016/11/ROMPECABEZAS-2.jpg>

- <https://www.pokerstars.com/espanol/poker/>

- <https://biotrendies.com/wp-content/uploads/2016/10/Toma-estas-frutas-afrodisiacas-y-desata-tu-pasion.jpg>

<https://www.oei.es/historico/divulgacioncientifica/IMG/arton4858.jpg?1508693439>

https://historiaybiografias.com/archivos_varios3/numero_magico1.jpg

https://www.biografiasyvidas.com/biografia/y/fotos/ya_el_grande.jpg

<https://fermatlibrary.com/assets/fermat-8c81357625a7bdf0cd01f485812e02b1949b3dc3a3ab8476bbe24bc195acbc8c.png>

- <http://images.computerhistory.org/tdih/09june-1.jpg?w=600>

- <https://cdn.britannica.com/s:s:300x200/47/130347-004-E502B45E.jpg>

N<http://www.100ciaquimica.net/images/biografias/ima/bernouillij.jpg>

- <https://mad4yoga.com/wpcontent/uploads/2015/01/Crear-Espacio-Tazas.jpg>

- <https://images-na.ssl-images-amazon.com/images/I/41OW8mv%2BmPL.jpg>

-. <https://imgaws.ehowcdn.com/750x500p/photos.demandstudios.com/getty/article/110/232/92456092.jpg>

-<https://citaty.net/media/authors/xenokrates-z-chalkedonu.jpg>
https://cdn.shopify.com/s/files/1/0407/1985/products/ED83638_1_800x.jpeg?v=1396071906
https://www.bienestarsenior.com/media/catalog/product/5/0/502010040_3.jpg
https://cdn.hispantv.com/hispanmedia/files/images/thumbnail/20161219/01575168_xl.jpg
- https://4.bp.blogspot.com/-QZxG8q_Gwzk/VtOYcTtD6HI/AAAAAAAAA0I/rEd8T67IORg/s1600/10%2Bcentavos.JPG
- http://4.bp.blogspot.com/-J3PoYD1mkpE/T-lxWDptFHI/AAAAAAAAAqk/AyDftMbQecY/s1600/coin_toss-772544.jpg
-<https://i.ytimg.com/vi/4PyuzzmaBYA/hqdefault.jpg>
- <http://2.bp.blogspot.com/-Zbit5UMtnK8/VjsbTdp9kol/AAAAAAAAAF0/ZDwP3A5dY8s/s1600/domino.jpg>
<https://2.bp.blogspot.com/-7H7VBeilzMo/VnRMEzWifGI/AAAAAABAs/Ol9PRCqwoJ0/s1600/bodega-bar-aleman.jpg>
http://photos.geni.com/p13/8d/ce/70/2d/53444839cd307f08/vaq44kid_medium.jpg
- <https://i.ytimg.com/vi/laWP-X4C4yE/maxresdefault.jpg>
- https://farm7.static.flickr.com/6084/6063228917_71932cfaba.jpg
-https://es.pngtree.com/freepng/brainstorming_3087518.html
https://sites.google.com/site/espanoleneducacionbasica/_/rsrc/1438740626185/home/pap
- <http://knowthatplace.com/wp-content/uploads/comparing-and-contrasting-aid3093500-v4-728px-start-compare-contrast-essay-step-2-version-snap-diverting-titled.jpg>
- <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/77/AlgoritmoCombinatoria.svg/550px-AlgoritmoCombinatoria.svg.png>

