UNIVERSIDAD DE CUENCA

Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación

Departamento de Posgrado

CONOCIMIENTOS CORRECTOS Y ERRORES DE CONOCIMIENTO EN EL ESTUDIO DE LAS CÓNICAS CON USO DE GEOGEBRA POR ESTUDIANTES DEL TERCERO DE BACHILLERATO

Tesis previa a la obtención del título de Magister en docencia de las Matemáticas

AUTOR:

ING. WILLIAM MANUEL GONZÁLEZ GALLEGOS

CI: 0103093795

DIRECTORA:

MGT. MÓNICA DEL CARMEN LLIGUAIPUMA AGUIRRE

C.I. 0102834363

CUENCA – ECUADOR

2018

RESUMEN

Esta investigación parte de la necesidad de identificar los conocimientos correctos y errores de conocimiento que alcanzan los estudiantes de tercero de bachillerato en el estudio de las cónicas usando el software Geogebra.

Se realizaron las clases sobre cónicas usando Geogebra como recurso tanto en actividades en el aula como en casa, luego de este período de trabajo se accedió a la información con la técnica de la encuesta, y el instrumento de recolección de información fue un cuestionario, tipo prueba; dicho estudio se realizó gracias a un análisis del procedimiento planteado en cada ítem del cuestionario.

La investigación tuvo un enfoque cuantitativo de tipo descriptivo, con una población finita de 15 estudiantes, al ser esta pequeña se la usó como muestra, la cual fue de tipo no probabilística por conveniencia pues se tuvo fácil acceso a los sujetos para la investigación; el proyecto considero la variable conocimientos correctos y errores de conocimiento.

En los resultados se evidenció que los conocimientos correctos vienen dados por la interpretación del lenguaje y aplicación de conocimientos previos, mientras que los errores de conocimiento son el proceso de solución de problemas y la operacionalización algebraica.

La aplicación de las TIC permite que el estudiante efectué su proceso de aprendizaje de forma interactiva y directa, pero no es una respuesta definitiva a la adquisición de conocimientos y total comprensión de las cónicas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Palabras clave: Conocimientos correctos, errores de conocimiento, Geogebra, cónicas, aprendizaje.

ABSTRACT

This research is based on the need to identify the correct knowledge and knowledge errors reached by third-year students in the baccalaureate in the study of conics using Geogebra software.

Conic classes were conducted using Geogebra as a resource both in classroom activities and at home, after this work period the information was accessed with the survey technique, and the information collection instrument was a questionnaire, type proof; This study was carried out thanks to an analysis of the procedure proposed in each item of the questionnaire.

The research had a quantitative approach of a descriptive type, with a finite population of 15 students, since this small one was used as a sample, which was of a non-probabilistic type for convenience because it was easy to access subjects for research; the project considered the variable correct knowledge and knowledge errors.

The results showed that the correct knowledge is given by the interpretation of the language and application of prior knowledge, while knowledge errors are the process of solving problems and algebraic operationalization.

The application of ICT allows the student to carry out their learning process in an interactive and direct way, but it is not a definitive answer to the acquisition of knowledge and total understanding of the conics in the teaching-learning process of mathematics.

Key words: Right knowledge, knowledge errors, Geogebra, conics, learning.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio Institucional

William Manuel González Gallegos en calidad de autor y titular de los derechos morales y patrimoniales de la tesis "CONOCIMIENTOS CORRECTOS Y ERRORES DE CONOCIMIENTO EN EL ESTUDIO DE LAS CÓNICAS CON USO DE GEOGEBRA POR ESTUDIANTES DEL TERCERO DE BACHILLERATO", de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, 17 de julio de 2018

William Manuel González Gallegos

C.I: 0103093795

Cláusula de Propiedad Intelectual

William Manuel González Gallegos, autor de la tesis CONOCIMIENTOS CORRECTOS Y ERRORES DE CONOCIMIENTO EN EL ESTUDIO DE LAS CÓNICAS CON USO DE GEOGEBRA POR ESTUDIANTES DEL TERCERO DE BACHILLERATO", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor.

Cuenca, 17 de julio de 2018

William Manuel González Gallegos

C.I: 0103093795

AGRADECIMIENTO

En primer lugar, agradezco a Dios por guiar mi camino, por las oportunidades y bendiciones que me brinda.

Un agradecimiento especial a la Mgt. Mónica Lliguaipuma por su calidad humana y profesional, pues siempre estuvo dispuesta a brindarme su ayuda y conocimientos para culminar con éxitos esta investigación; gracias por su tiempo y motivación para seguir adelante. A la Dra. Catalina Mora, por su colaboración en la realización de este proyecto.

A los docentes de la Maestría por brindar lo mejor de cada uno y convertir sus clases en una experiencia profesional enriquecedora.

A la Universidad de Cuenca y Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación por generar espacios como la maestría y permitirme ser parte de la misma.

A la UE Los Andes en la persona de la Lic. Tatiana Cordero, por su colaboración para la realización de esta investigación.

DEDICATORIA

Para mi esposa Picita, a mis hijos Pedrito y Milú, gracias por llegar a mi vida y llenarla de felicidad; por ser el motor, luz y aliento para luchar y seguir adelante. Por todo lo que día a día me dan y por los inefables momentos compartidos. Les amo infinitamente.

Para mi Mamiqui, quien me enseño que las metas se consiguen a base de esfuerzo y sacrificio; sus enseñanzas de vida siempre han sido fundamentales en mi existir, gracias por estar ahí cuando la he necesitado.

Para mis ángeles Papi y Tío, quienes siempre me acompañan y guían, los extraño mucho.

Mis hermanos Jane y Geova que siempre estuvieron conmigo y me acompañan en mi lucha diaria, con quienes compartí alegrías y tristezas gracias por impulsarme a no desfallecer en mis metas.

A mi tía Ana, primos Ita y Brett pues no dudaron nunca en ayudarme cuando acudí a ellos, gracias también por todo su afecto y apoyo. Por ser un ejemplo de lucha, constancia y superación.

A mi cuñado y amigo Andrés; a mis sobrinitos Joaquín y Thiago por el cariño y afecto que siempre me dan.

INTRODUCCIÓN

El sistema educativo ecuatoriano vive un profundo proceso de cambio, consustancial a la naturaleza de todos los factores que competen a la educación, que debe adaptarse permanentemente al entorno social y a la metodología a utilizarse. En noviembre del 2006; se aprueba en consulta popular el Plan de Decenal de Educación 2006-2015 el mismo que acuerda el mejoramiento de la calidad educativa, la equidad de la educación, la implementación de un sistema nacional de evaluación y rendición social de cuentas del sistema educativo; este plan contempla diferentes estrategias, entre ellas: el fortalecimiento de los currículos de la Educación General Básica y Bachillerato; pero una parte fundamental de esta reforma curricular tiene que ver con el uso de tecnologías informáticas en el aprendizaje, pues la naturaleza del proceso de aprendizaje está en continua modificación y el uso de las TIC como herramienta lleva a un cambio rotundo en la educación. Ahora se cuenta con innumerables recursos tecnológicos como: softwares, dispositivos, recursos online y la misma red internet, entre otros, la mayoría de los cuales son de fácil acceso inclusive gratuitos en ciertas ocasiones.

En el año 2005, el Informe Mundial sobre la Educación de la UNESCO, “El Imperativo de la Calidad”, enfatizó en la importancia de los métodos de enseñanza - aprendizaje y en la utilización de materiales educativos, infraestructura y acceso a las TIC, como un importante desafío en el campo educativo. Cada vez es más común ver como los docentes introducen la tecnología dentro de sus planificaciones y por consecuencia en sus clases; ya sea por iniciativa propia, por las capacitaciones o por no quedarse al margen de este nuevo escenario socio cultural.

Las investigaciones realizadas en el campo de las TIC por lo general muestran las bondades de su aplicación en el área de la motivación y participación del estudiante, sin embargo, no siempre se ha determinado su impacto en el aprendizaje cognitivo (conocimientos correctos y errores) en particular en el estudio de las cónicas.

Es motivo de esta investigación entonces, identificar los aprendizajes cognitivos que alcanzan los estudiantes en el estudio de cónicas usando el software Geogebra mediante, la identificación tanto de los conocimientos correctos alcanzados por los estudiantes, como de los errores de conocimiento en los que incurren, es decir contar con las destrezas y contenidos que se requieren y aquellas que no se logran pese a la introducción del recurso tecnológico en clases.

La incorporación de las TIC al proceso de trabajo en el aula no necesariamente son un factor predominante y de mejora de los procesos de enseñanza aprendizaje, ni tampoco son una solución definitiva para la adquisición de conocimientos matemáticos, sin embargo, le permiten al estudiante realizar esa mediación con los saberes, ya que permiten manipular de manera directa los objetos matemáticos y trabajar interactivamente con ellos; de aquí se determina que el uso de un software en particular no ayuda a cubrir todas las necesidades cognitivas, por lo tanto cabe preguntarse: ¿Cómo el uso del software Geogebra influye en el aprendizaje de las cónicas? ¿Cuáles son los conocimientos correctos alcanzados por los estudiantes y cuáles son de los errores de conocimiento en los que incurren pese a usar un software como Geogebra?

De esta manera se planteó como objetivo general, describir los conocimientos correctos e incorrectos por parte de los estudiantes del tercer año de bachillerato que emplearon Geogebra como recurso didáctico y como objetivos específicos:

-Identificar los conocimientos correctos por parte de los estudiantes del tercer año de bachillerato, que emplearon software Geogebra como recurso didáctico.

-Identificar los errores en el aprendizaje de cónicas por parte de estudiantes del tercer año de bachillerato, que emplean software Geogebra como recurso didáctico.

-Describir los errores de conocimiento de mayor incidencia en el aprendizaje de las cónicas con el uso de software Geogebra.

-Analizar los conocimientos correctos alcanzados en el aprendizaje de las cónicas con el uso de software Geogebra.

-Analizar los errores de conocimiento de mayor incidencia en el aprendizaje de las cónicas con el uso de software Geogebra.

Para la investigación se trabajó con una población finita de 15 estudiantes del tercero de bachillerato "A" de la Unidad Educativa "Los Andes", donde el investigador labora como docente de la asignatura de Matemáticas, como la población es pequeña se utilizó como muestra, la cual fue no probabilística por conveniencia pues se tiene fácil acceso a los sujetos para la investigación y se incluyó a todos los individuos. Se trabajó con un enfoque cuantitativo de tipo descriptivo, cuya variable de medición fueron los conocimientos correctos y errores de conocimiento.

Como exigencia ministerial se ha planteado la incorporación de las TIC, sin embargo, solo se ha incurrido en determinar las bondades de las mismas y no se ha analizado los conocimientos correctos o incorrectos que generan e identificar la validez en términos cognitivos del uso de un software como del Geogebra, es decir si la aplicación en realidad ayuda a generar conocimientos correctos o se aplica por aplicar. Es necesario incluir el software con una planificación determinada, que permita aparte de la motivación mejorar el aprendizaje y comprensión de la asignatura.

Con los resultados obtenidos se concluyó que las TIC no solventan completamente los errores de conocimiento, por lo tanto, no son una garantía para la consecución de conocimiento, sin embargo, estos resultados permitirán reorganizar las planificaciones realizadas por el docente y los trabajos planteados con el software; de la misma manera se podrán proponer otras estrategias metodológicas y didácticas para compensar los errores conceptuales que no han sido solventados con el uso de Geogebra.

CAPÍTULO 1

MARCO TEÓRICO

1.1. Antecedentes

El sistema educativo ecuatoriano vive un profundo proceso de cambio, ineludible a la naturaleza de todos los factores que competen a la educación, que debe adaptarse permanentemente al entorno social y a la metodología a utilizarse. En noviembre del 2006; se aprueba en consulta popular el Plan Decenal de Educación 2006-2015 el mismo que propone el mejoramiento de la calidad educativa, la equidad de la educación, la implementación de un sistema nacional de evaluación y rendición social de cuentas del sistema educativo. El plan contempla diferentes estrategias, entre ellas el fortalecimiento de los currículos de la Educación General Básica y Bachillerato. A partir de los resultados obtenidos de este plan decenal, de la información proporcionada por docentes del país en relación con la aplicación de la propuesta curricular y basados en la investigación denominada “El uso y percepciones del currículo de Educación General Básica” realizada entre octubre y noviembre de 2013 por parte del Ministerio de Educación, se ejecutó un ajuste curricular el cual se encuentra en vigencia desde septiembre de 2016.

Una parte fundamental de esta actualización curricular tiene que ver con el uso de tecnologías informáticas, pues la naturaleza del proceso de aprendizaje está en continua modificación y el uso de la Tecnología Informática como herramienta lleva a un cambio rotundo en la educación. El currículo 2016 especifica que las tecnologías de la información y de la comunicación formarán parte del uso habitual como instrumento facilitador para el desarrollo del currículo, incluso muchos de los aprendizajes deseables e imprescindibles implican el uso de TIC para su consecución; para esta actualización curricular el uso de tecnología se ve involucrado en todos los niveles educativos, ya que ahora se cuenta con innumerables recursos tecnológicos como: softwares, dispositivos, recursos online y la misma red internet, entre otros, la mayoría de los cuales son de fácil acceso inclusive gratuitos en ciertas ocasiones.

En el año 2005, el Informe Mundial sobre la Educación de la UNESCO, “El Imperativo de la Calidad”, enfatizó en la importancia de los métodos de enseñanza - aprendizaje y en la utilización de materiales educativos, infraestructura y acceso a las TIC, como un importante desafío en el campo educativo. Cada vez es más común ver como los docentes introducen la tecnología dentro de sus planificaciones y por lo tanto en sus clases; ya sea por iniciativa propia, por las capacitaciones o por no quedarse al margen de este nuevo escenario socio cultural.

Con el fin de mejorar los procesos de enseñanza aprendizaje, se ha incrementado y mejorado la introducción de nuevas técnicas, metodologías y tecnologías, sin embargo, respecto al último punto se desconocen investigaciones que determinen con certeza qué tan útil ha sido la introducción de estos recursos TIC y sobre todo que conocimientos correctos se han alcanzado con la implementación de dichas herramientas.

En las diferentes áreas del conocimiento, de acuerdo a Monsalve (2011), la implementación de las TIC genera muchas ventajas tales como el fortalecimiento del trabajo en equipo, la participación activa, la capacidad de establecer relaciones, la realización de comparaciones y además de la motivación como tal. Lo que se pretende en particular con la incorporación de TIC es modificar los procesos de enseñanza aprendizaje, de ahí que es fundamental identificar bajo qué circunstancias y condiciones estos recursos podrían generar un impacto positivo en dichos procesos; y además cuales son los resultados obtenidos de la incorporación.

Para Coll (2011) una de las bondades del uso de las TIC es que el estudiante ya no se convierte en un sujeto pasivo dentro del proceso de enseñanza aprendizaje, sino más bien a través de la interacción entre el recurso y el conocimiento es donde se desarrollan los saberes, es decir, se toma a las TIC como instrumento mediador de las relaciones que se generan en la construcción del conocimiento.

Hay que buscar las claves para comprender y valorar el impacto de las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje, aprovechar las potencialidades de los recursos disponibles con prudencia y con conocimiento de cómo realizar la aplicación, ya que, si no se enfoca adecuadamente su uso, los resultados obtenidos dentro de lo que se refiere al conocimiento van a ser los mismos que se conseguirían con la ausencia de TIC, o incluso podría ocasionar mayores inconvenientes en el aprendizaje.

En la investigación denominada “Psicología de la educación virtual: aprender y enseñar con las tecnologías de la información y comunicación” realizada por el por César Coll y Carles Monereo(2008) en la Universidad de Barcelona, se plantea las bondades de las TIC en el área de la motivación y participación del estudiante; la interactividad entre el contenido, el estudiante y docente; sin embargo no siempre se ha determinado su impacto en el aprendizaje cognitivo, conocimientos correctos y errores de conocimiento en el campo del aprendizaje de la matemática en particular en el estudio de las cónicas.

Tamayo (2013), en su trabajo sobre “Evaluación del software Geogebra sobre el aprendizaje significativo de los tipos de funciones en estudiantes de secundaria”, determinó las implicaciones didácticas relacionadas con el uso de las TIC (software Geogebra) en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas estableciendo que “el recurso presenta posibilidades para generar un conflicto cognitivo en el estudiante” (p.9); quien a su vez busca un acomodamiento de dicho conflicto y es ahí donde se genera la construcción del conocimiento. De igual manera en el trabajo realizado por William Sarmiento (2014) en su investigación “Implementación y Aplicación de prácticas experimentales de laboratorio en el aprendizaje de la geometría analítica en los alumnos del tercer año de bachillerato del Colegio Particular Universitario La Asunción”, indica que la incorporación de tecnologías mejoran el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, sin embargo en la práctica no se sabe bien que conocimientos se abordan de mejor manera y que errores se siguen manteniendo a pesar del uso de las TIC.

“Es notable ver como los estudiantes construyen su conocimiento matemático de manera inadecuada y a veces errónea; y descubren relaciones entre diferentes estructuras del saber matemático, sin que ello haya sido parte explícita de la enseñanza" (Golbach, 2009, p.5). Indudablemente los errores influyen en el aprendizaje de los contenidos, por lo tanto, es imperativo que éstos sean reconocidos y superados a fin de obtener mejores logros de aprendizaje.

En 2009, Golbach, Mena, Abraham y Rodríguez sustentados en las concepciones constructivistas cognitivas del aprendizaje y basados en la clasificación de los errores realizada por Mosvskovitz - Hadar, N. Taslavsky e Imbar, S. realizaron su investigación "Identificación de los errores en la resolución de problemas de geometría analítica y su comparación con el rendimiento académico en alumnos de ingeniería" en la cual preocupados por la cantidad de errores cometidos de manera reiterada por los estudiantes, realizan un diagnóstico, pues desde el enfoque constructivista cognitivo basado en el aprendizaje significativo, se considera que las dificultades en el aprendizaje de la Matemática y los errores que comenten los alumnos obstaculizan con frecuencia la construcción significativa de su aprendizaje y en el rendimiento de los alumnos.

Algunas investigaciones como la realizada por María del Mar García López titulada "evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir geogebra en el aula", demuestran como la introducción de algún software en la clase de matemática presenta muchas bondades y una nueva visión del conocimiento, permitiendo que este se convierta en un instrumento matemático, sin embargo Cruz y Puentes plantean que aunque las TIC no son la solución definitiva de las dificultades en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, le abren un espacio en el que los estudiantes pueden manipular de manera directa los objetos matemáticos y sus relaciones, de aquí se determina que el uso de un software en particular no ayuda a cubrir todas las necesidades cognitivas, por lo tanto cabe preguntarse: ¿Cómo el uso del software Geogebra influye en el aprendizaje de las cónicas? ¿Cuáles son los conocimientos correctos alcanzados por los estudiantes y cuáles son de los errores de conocimiento en los que incurren pese a usar un software como Geogebra?

1.2. El conocimiento

Al mencionar que se ha implementado las TIC como una herramienta en el proceso de aprendizaje de las matemáticas y a la vez cuestionarse sobre el alcance e implicaciones de su uso en la clase que son interrogantes que forman parte de esta investigación, es importante aclarar algunos conceptos los cuales van a guiar adecuadamente la investigación entre ellos está el conocimiento.

El término conocimiento está ligado a la existencia misma del hombre, pues las personas siempre se han mostrado curiosas en obtener diferentes saberes y dar explicación a situaciones cotidianas, para Rodríguez (1993) “el conocimiento es el acumulo de información, adquirido de forma científica o empírica” (p.5), es un conjunto de representaciones o propiedades sobre un ente en particular, conseguido a través de la experiencia u observación; dichas propiedades se almacenan para luego ser reproducidas cuando sean necesarias.

Hessen (1925), en su obra, Teoría del conocimiento, describe la esencia misma del fenómeno del conocimiento, “como una relación entre un sujeto y un objeto, siendo esta dualidad una característica esencial del conocimiento” (p.43).

Esta relación, que también es una correlación, porque no hay lo uno sin lo otro y, además la presencia de uno supone la del otro, se entiende como una apropiación o captación que el sujeto hace del objeto mediante la producción de una imagen del mismo, o de una representación mental del objeto, debido a una determinación o modificación que el objeto causa en el sujeto.

Lo que el sujeto conoce no son los objetos como tales, sino la información que recibe de estos, dicha información se organiza dentro del sujeto, esta a su vez permite tomar una acción en particular. Este conocimiento, aquello que es conocido, se percibe constantemente, pero puede o no puede ser utilizado por el sujeto de acuerdo al grado de importancia que posea; gracias a nuestra memoria podemos almacenar esta información, la cual puede ser adquirida o aprehendida y pasar a formar parte de lo que es nuestro conocimiento.

> No toda la información puede considerarse conocimiento, ya que para darle este valor debemos hacer uso continuo o específico del mismo en distintas situaciones, es decir, darle una funcionalidad a la información obtenida; pero esta no siempre es la adecuada y de ahí surgen errores de conocimiento, ya que aquí interviene un elemento fundamental del conocimiento que es la representación interna, que no es más que el proceso cognoscitivo, es decir la explicación de la información al criterio del sujeto. (Hessen, 1925, p.58)

El conocimiento es más que un conjunto de datos, verdades o de información almacenada a través de la experiencia; el conocimiento, en su sentido más amplio, es una apreciación de la posesión de múltiples datos interrelacionados que por sí solos poseen menor valor cualitativo.

Una característica esencial del conocimiento es que no es inmutable, ya que, al ser producto del ingenio y la construcción humana, está sujeto a cambios; pues la información admitida como correcta en un momento, posteriormente puede ser refutada, debatida y mejorada. De lo anterior se puede plantear que los estudiantes construyen su conocimiento mediante un proceso gradual, a partir de sus errores y esfuerzos.

Todo esto en concordancia con Piaget (1967) quien, en su teoría del desarrollo cognitivo, la cual se centra en la percepción, la adaptación y la manipulación del entorno que lo rodea, especifica que la asimilación de conocimientos viene dada por la experiencia y la manipulación de la información, en donde luego de tomarla se realiza una adaptación a los esquemas ya existentes. En dicha teoría especificó unas etapas de desarrollo, que para él se trataba de la naturaleza misma del conocimiento y cómo las personas llegan paulatinamente a adquirirlo, construirlo y utilizarlo.

En la actualidad la sociedad se caracteriza por el uso de las tecnologías de la información y comunicación en prácticamente todas las actividades humanas, a tal punto que llegamos a depender de las mismas para nuestras labores cotidianas, de esta manera, el uso de las TIC se ha convertido en una de las fuentes principales para adquirir información y conocimiento, sin embargo, para Arrieta (2013) "los conocimientos adquiridos a través de dichos medios muchas veces resultan desestructurados y poco precisos”(p.9); pues en lugares como la internet existen una infinidad de datos que muchas de las veces no han sido contrastados y cuando se usan recursos de software y hardware, al no estar estos bien enfocados, tampoco garantizan la obtención de conocimientos.

1.2.1. Conocimiento y aprendizaje

Al hablar de conocimiento necesariamente viene supeditado el aprendizaje, pues los procesos de aprendizaje permiten incorporar una nueva información en el individuo, logrando a la vez un cambio en su conocimiento ya que de esta manera se logra entender la realidad y actuar de un modo distinto. Gracias al aprendizaje se consigue reestructurar los conocimientos anteriores relacionándolos con los nuevos.

Aprender es crear, inventar, descubrir. El sujeto aprende cuando logra integrar en su estructura lógica y cognoscitiva los datos que surgen de la realidad exterior, en un proceso personal, de exploración, avances y retrocesos, que el profesor puede orientar con actividades didácticas más adecuadas para el momento, más cercanas a sus intereses y motivaciones.

Se construyen significados al momento que entrelazamos el nuevo aprendizaje a los que ya poseemos, es decir el conocimiento previo da nacimiento a un conocimiento nuevo, esto que se aprende se incorpora a experiencias previas y se crean estructuras mentales propias.

Existen muchas definiciones de aprendizaje, entre las que se puede mencionar:

Piaget (citado por Fonseca y Benconmo, 2011) afirma que:

> El aprendizaje se produce a lo largo de un proceso en el que el sujeto, a través de la experiencia, dentro de un contexto real, mediante la manipulación de objetos y la interacción con las personas, genera o construye conocimiento, modificando, en forma activa, sus esquemas cognoscitivos, empleando sus propios esquemas para la asimilación de la realidad que proviene de la actividad constructiva de la inteligencia del sujeto. (p.53)

Por otra parte Alonso, Gallego, y Honey (1995) consideran que “Aprendizaje es el proceso de adquisición de una disposición, relativamente duradera, para cambiar la percepción o la conducta como resultado de una experiencia” (p.17). Cuando se incorpora una nueva información o conocimiento a los ya existentes en la estructura cognitiva del sujeto, generando un conflicto entre lo que el alumno ya sabe con lo que debería saber aquí es cuando se produce el aprendizaje.

El aprendizaje se genera en la interacción del conocimiento que el individuo ha adquirido y las experiencias que este ha vivido, pues de esta manera puede establecer si los saberes obtenidos son significativos para él, es decir al darle un uso a la información que tiene el sujeto tal como lo plantea Perez (1988), quien define el aprendizaje como “los procesos subjetivos de captación, incorporación, retención y utilización de la información que el individuo recibe en su intercambio continuo con el medio" (p.68).

La asimilación del conocimiento se consigue a través de la interacción con este, por lo tanto, los recursos y estrategias planteadas, para la adquisición y trabajo con los saberes ocasionarán que el individuo establezca nuevas relaciones, pudiendo de esta manera darle un significado a la información adquirida, para Knowles, Holton y Swanso (2001) "el aprendizaje es en esencia un cambio de conocimiento producido por la experiencia" (p.75); por lo tanto debe distinguirse a el aprendizaje bajo tres perspectivas, como producto: en donde interesa el resultado final; el aprendizaje como proceso: aquí sale a relieve lo que pasa durante el proceso de aprendizaje, en este ámbito se pueden determinar los errores y aciertos en el conocimiento y el aprendizaje como función: en esta esfera en cambio se destaca aspectos críticos del aprendizaje como la motivación, retención y la transferencia los cuales hacen posibles cambios de conducta en el aprendizaje.

De todas estas definiciones se puede resaltar que el aprendizaje es una actividad que debe realizar el individuo para obtener un conocimiento; de aquí se produce una asimilación de la información recibida, que no es más que la forma en como el sujeto percibe y adapta el conocimiento a su entorno, a la vez este nuevo conocimiento se relaciona con la información previamente adquirida con el fin de alterar los esquemas cognitivos existentes en el individuo para de esta manera adecuar la nueva información.

En el ámbito escolar el análisis del proceso de aprendizaje permitirá determinar no sólo los resultados del mismo, sino que sucede durante este, pudiendo identificar en el trayecto los conocimientos correctos e incorrectos que se han producido en las representaciones generadas por los estudiantes, pues muchas de las veces la adquisición de conocimientos no son más que la interpretación que los individuos den a estos.

“El aprendizaje siempre está situado, se aprende junto a unos contenidos concretos y en situaciones específicas de interacción social. No se puede aprender sin sentido, sin saber qué se busca, sin pautas de acción” (Esteban & Vigueras, 2007, p.23); además depende del contenido a aprender y el sujeto que aprende.

1.2.1.1. Aprendizaje de las Matemáticas

Las personas a lo largo de la historia se han mostrado curiosos en aprender diferentes saberes, de ahí que el aprendizaje de las Matemáticas data desde hace muchos años atrás, por la necesidad de medir el tiempo, realizar conteos, efectuar mediciones y diferenciar las formas. “En la actualidad los estudiantes deben aprender matemáticas comprendiéndolas, construyendo activamente el nuevo conocimiento a partir de la experiencia y el conocimiento previo” (Godino, Batanero y Font, 2003, p12). Los estudiantes necesitan aprender matemáticas entendiéndolas e interpretándolas cognitivamente, deben construir conocimientos de manera activa, a partir de sus experiencias y el saber anterior.

Conocer o saber matemáticas, es algo más que repetir las definiciones o ser capaz de identificar propiedades de números, magnitudes, polígonos u otros objetos matemáticos. La persona que sabe y ha aprendido matemáticas ha de ser capaz de usar el lenguaje y conceptos matemáticos para resolver problemas. Para Godino et al. (2003) "no es posible dar sentido pleno a los objetos matemáticos si no los relacionamos con los problemas de los que han surgido" (p.66).

Para aprender Matemáticas hay que hacer, desde lo más elemental que es repetir, a lo más complejo que consiste en enfrentarse a problemas y tratar de resolverlos. Tanto para recordar como para comprender, identificar, etc., es importante que el que aprenda haga. Es frecuente que las orientaciones curriculares insistan en que el aprendizaje de las matemáticas debe ser significativo y que para conseguirlo "Los estudiantes deben aprender las matemáticas con comprensión, construyendo activamente los nuevos conocimientos a partir de la experiencia y los conocimientos previos" (National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 2000, p.16)

El resolver problemas es fundamental si queremos conseguir un aprendizaje significativo de las matemáticas. Esta actividad no debe convertirse en un contenido adicional al currículo sino uno de los motores principales que guíe el aprendizaje de la matemática, además que tiende a motivar a los estudiantes tomando a dicho aprendizaje como una función, pues permite contextualizar los conocimientos y dar una mayor significación a lo trabajado. Para Godino et al. (2003) "al resolver un problema, el alumno dota de significado a las prácticas matemáticas realizadas, ya que comprende su finalidad" (p.67).

Cuando los individuos ponen en acción sus saberes es cuando se puede identificar si esa acomodación de conocimientos fue la adecuada o si se produjeron errores, pues aprender Matemáticas no es solo conocer conceptos, definiciones, propiedades y algoritmos, es mucho más que eso, es un conjunto particular de características que demuestran los resultados de todo el proceso de aprendizaje desde la aplicación de conceptos previos, pasando por la inferencia correcta, hasta el proceso de solución y análisis e interpretación de los resultados obtenidos.

Dentro del aprendizaje de las matemáticas, la introducción de un software como Geogebra, ha brindado la oportunidad de generar espacios representativos y dinámicos donde se ha logrado establecer que el estudiante adquiera de manera interactiva y experimental sus conocimientos. Este software es uno de los más utilizado por docentes y estudiantes en nuestro entorno, pues es de acceso libre y cuenta con un sinnúmero de herramientas y funcionalidades, tales como animación, uso de parámetros y variables, funciones específicas y demás.

El uso de Geogebra no sólo desarrolla destrezas de contenido, sino también habilidades que son esenciales para el proceso matemático como: la resolución de problemas, razonamiento, comunicación del lenguaje, demostraciones, generación de conjeturas y otros. Entre las potencialidades del software está la animación de una situación bajo diferentes condiciones (uso de deslizadores y parámetros) y las simulaciones, a través de estas se logra contrastar los resultados obtenidos respecto a los esperados, siendo aquí donde el estudiante puede generar un desequilibrio cognitivo fundamental para la adquisición de nuevos conocimientos.

1.2.1.2. Principios del aprendizaje de las Matemáticas

Dienes (1970) planteó una teoría específica del aprendizaje de las matemáticas basando su trabajo en los de Piaget, Bartlett y sus propias observaciones, en esta teoría determina que en todo proceso de enseñanza aprendizaje de matemáticas se considera necesario tener en cuenta cuatro principios que ayudarían a los alumnos en la comprensión de los conceptos matemáticos:

Principio dinámico: Considera que el aprendizaje es un proceso activo por lo que la construcción de conceptos se promueve proporcionando un entorno adecuado con el que los alumnos puedan interactuar.

Se propondrán juegos preliminares, estructurados y de práctica, que les sirvan a los niños de experiencias para que puedan formar conceptos matemáticos. Estos juegos deben ser practicados con un material concreto para introducir gradualmente a los niños en la investigación matemática.

Principio constructividad: Las matemáticas son para los niños una actividad constructiva y no analítica. El pensamiento lógico-formal dependiente del análisis puede ser muy bien una tarea a la que se consagran los adultos, pero los niños han de construir su conocimiento.

La construcción precederá siempre al análisis del concepto, teniendo siempre en cuenta el nivel de maduración de los alumnos. Hay que señalar que la construcción no se refiere a la construcción física con algún material, que debe hacerse si es posible. Nos referimos a la construcción conceptual en relación a las variables del concepto y al proceso de adquisición de los mismos.

Principio de variabilidad matemática: Un concepto matemático contiene cierto número de variables y de la constancia de la relación entre estas surge el concepto.

Los conceptos que encierran más de una variable deben ser estudiados mediante experiencias que impliquen el mayor número posible de aquellas. Comparando las diferentes construcciones realizadas podremos ver lo que hay de invariante en ellas, que será lo que nos interese para la formulación del concepto.

Principio de variabilidad perceptiva: Existen diferencias individuales en cuanto a la percepción de los conceptos. Para que puedan manifestarse las diferencias individuales en la formación de los conceptos, como para que los niños vayan adquiriendo el sentido matemático de abstracción, la misma estructura conceptual deberá ser presentada en tantas formas perceptivas como sea posible.

En esta teoría también se determina que el aprendizaje es un proceso basado en la abstracción, generalización y comunicación, que son la base para la adquisición de conocimientos en procesos de aprendizaje de las matemáticas. Aquí se pueden distinguir 6 etapas: Adaptación, estructuración, Abstracción, representación gráfica o esquemática, descripción de las representaciones, formalización o demostración.

1.2.2. Conocimiento matemático

Al igual que en otras ramas de las ciencias, en la matemática la consecución de conocimiento se ve determinada por la experiencia, particularmente por la abstracción reflexiva, la cual es un proceso por el que el individuo obtiene conocimiento a partir de la acciones o manipulaciones sobre los objetos.

> El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas en un contexto social, y construyendo acciones, procesos y objetos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones y resolver los problemas. (Dubinsky & McDonald, 2001, p. 276).

Tomando como punto de partida lo establecido anteriormente, la abstracción reflexiva busca establecer como un sujeto genera sus propias construcciones mentales acerca de un concepto específico.

Por lo antes dicho es fundamental enfrentar al sujeto con situaciones matemáticas que suscite su reflexión, ya que la reflexión que realice el individuo promulgará una adquisición de conocimientos matemáticos, de ahí que la determinación de conocimientos correctos generados dependerá del tipo de preguntas y cuestionamientos planteados; es decir que estas se orientarán para generar un nuevo conocimiento.

También es importante plantear que el desarrollo del conocimiento no se establece sólo por la incorporación de nuevos conocimientos sino más bien, por la reorganización de los conocimientos logrados por etapas, “que representan niveles cognoscitivos, en cada etapa hay una reorganización de los conocimientos adquiridos en la etapa anterior” (Piaget y Garcia, 2004, p.134). Estas etapas, se determinan como intra, inter y trans; las cuales establecen la evolución del conocimiento matemático de un individuo y sus oportunidades de razonamiento frente a ciertos conceptos matemáticos.

Para Azcárate y Camacho (citado por Pérez, 2016) “en el conocimiento formal matemático las propiedades de los objetos se deben construir a partir de las definiciones de los conceptos” (p. 136). Pero muchos de estos conceptos no son aprendidos de la manera formal por los estudiantes, sino que aprenden a reconocer el concepto a través de la experiencia. Por ejemplo, en el caso de las secciones cónicas la imagen del concepto siempre está relacionado con la ecuación que las describe o bien con la figura geométrica relacionada o con el tipo de corte realizado por el plano en el cono, mientras que la definición del concepto en sí es la definición del lugar geométrico de las secciones.

De lo anterior se plantea que los conocimientos matemáticos no son más que las herramientas, conceptos, destrezas y experiencias que los individuos ponen en práctica para solucionar los problemas que se presenten; para comprender y manejar la realidad en la que vivimos. Para Cadenas (2007) “la construcción de este conocimiento requiere una reorganización y ampliación de los conocimientos previos” (p.72).

1.2.3. Errores de conocimientos

Según lo planteado anteriormente, las estructuras que un individuo posee de manera previa determinarán la construcción del nuevo concepto. Un punto clave del desarrollo del conocimiento es ayudar a los estudiantes a que construyan las estructuras apropiadas para cada nuevo concepto, estableciendo las conexiones adecuadas con las estructuras previas. Para Dubinsky y McDonald (2001) “las estructuras, denominadas acciones, procesos, objetos y esquemas, están relacionadas de tal modo que sus conexiones determinan el conocimiento matemático de un individuo” (p.276).

Se ha identificado que el error está presente en los procesos de adquisición y consolidación del conocimiento, por lo tanto, se lo puede aprovechar como una oportunidad de aprendizaje, de la misma forma, el error serviría como una herramienta para un cambio de conocimiento ocasionado por la experimentación, tal como ha ocurrido a lo largo de la historia humana ha existido información que en su instante fueron aceptados como verdaderos, sin embargo ahora conocemos que son erróneos.

Charnay (citado por Engler et al., 2002) plantea “considerar el error no como una falta o una insuficiencia sino como una parte coherente de un proceso, ayuda al alumno a tomar conciencia de que puede aprender de sus errores y a nosotros mismos, los docentes, a aprender mucho de los errores de nuestros alumnos” (p.1). De hecho, es fundamental darle la importancia a la existencia de conocimientos correctos y errores de conocimiento pues influyen en asimilación de los nuevos conocimientos como en el rendimiento de los alumnos, por lo tanto es necesario que los docentes y estudiantes los reconozcan y asuman la necesidad de superarlos a fin de obtener logros en sus aprendizajes.

Para Roa y Asuman (2009), “cuando un individuo enfrenta una situación matemática debe recurrir a sus ideas sobre los conceptos involucrados en ella, haciendo una reconstrucción de su conocimiento como resultado de la reflexión sobre las condiciones del problema planteado” (p. 3), es decir hace uso de las experiencias y herramientas adquiridas respecto a ese conocimiento, pero si los resultados frente a esta situación problémica no cumplen con el objetivo planteado se habla de un error de conocimiento, y caso contrario si se da una solución adecuada estamos hablando de la aplicación de conocimientos correctos.

> Con frecuencia los estudiantes construyen explicaciones inadecuadas e incluso erróneas desde el punto de vista matemático y descubren relaciones entre diferentes estructuras del saber matemático, sin que ello haya sido

parte explícita de la enseñanza. En este sentido el enfoque constructivista cognitivo basado en el aprendizaje significativo, considera que las dificultades en el aprendizaje de la Matemática y los errores que comenten los alumnos obstaculizan con frecuencia la construcción significativa de su aprendizaje y, estos obstáculos se manifiestan en la práctica en forma de respuestas equivocadas. El análisis de los mismos permite relevar el estado de conocimiento de los alumnos y comprender las dificultades que evidencian en la adquisición de conceptos y la aplicación de propiedades, imprescindibles a la hora de realimentar el proceso de enseñanza aprendizaje. (Golbach, Mena, Abraham, & Rodriguez, 2009, p.2)

1.2.4. Categorización de errores de conocimiento

La categorización de los errores de conocimiento hace posible centrar la atención hacia los diferentes aspectos presentes en el aprendizaje de los individuos y permite realizar una evaluación y diagnóstico más eficaz de los procesos académicos para así, poder ayudar a los estudiantes en sus dificultades cognitivas y sus carencias de sentido de los objetos matemáticos y en el desarrollo de una actitud racional hacia la matemática.

Los errores en el estudio de la matemática, según Radatz (1979), “no son simplemente la ausencia de respuestas correctas o el resultado de accidentes desafortunados, ellos son la consecuencia de procesos definidos cuya naturaleza debe ser descubierta” (p.163). Tomando en consideración los aspectos diagnosticados en base a los errores, podría ayudar a los docentes a planificar los contenidos del plan de estudios teniendo en cuenta las dificultades de los estudiantes.

Movshovitz (citado por Bocco y Canter, 2010), realizó una clasificación empírica de los errores de conocimiento, sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos realizadas por expertos, determinando seis categorías descriptivas para clasificar los errores encontrados:

1. ***Datos mal utilizados:*** Esto es, los errores que se producen por alguna discrepancia entre los datos y el tratamiento que le da el alumno. Ya sea porque se añaden datos extraños; se olvida algún dato necesario para la solución; se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; se hace una lectura incorrecta del enunciado, etc.

2. ***Interpretación incorrecta del lenguaje:*** Son errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto.

3. ***Inferencias no válidas lógicamente:*** Son errores que tienen que ver con fallas en el razonamiento y no se deben al contenido específico.

4. ***Teoremas o definiciones deformados:*** Errores que se producen por deformación de un principio, reglas, teorema o de definición identificable.

5. ***Falta de verificación en la solución:*** Son los errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada.

6. ***Errores técnicos**:* Se incluyen en esta categoría los errores de cálculo, en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos.

Es importante complementar esta clasificación de los errores de conocimiento desde las diferentes perspectivas de las investigaciones realizadas acerca del tema, tomando en consideración que cada estudiante presenta diferentes dificultades en el proceso del aprendizaje, tal es el caso de:

Rico (citado por Engler et al., 2002), ofrece una taxonomía para clasificar los errores de conocimiento a partir del procesamiento de la información, estableciendo los siguientes indicadores para este análisis:

1. ***Errores debido a dificultades de lenguaje:*** El aprendizaje de conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos es para muchos alumnos un problema similar al aprendizaje de una lengua extranjera. Errores derivados del mal uso de los símbolos y términos matemáticos, debido a su inadecuado aprendizaje.

2. ***Errores debido a dificultades para obtener información espacial:*** Las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante imágenes

espaciales o visuales es una fuente de dificultades en la realización de tareas matemáticas. Errores provenientes de la producción de representaciones icónicas (imágenes espaciales) inadecuadas de situaciones matemáticas.

3. ***Errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos:*** Incluyen todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos, procedimientos para las tareas matemáticas.

4. ***Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento:*** La experiencia sobre problemas similares puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información. Los alumnos continúan empleando operaciones cognitivas aun cuando las condiciones originales se hayan modificado. Están inhibidos para el procesamiento de nueva información. En general son causados por la incapacidad del pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas.

5. ***Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes:*** Surgen con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes. El razonamiento por analogía no siempre funciona en Matemática.

Golbach et al. (2009), tomando en cuenta su experiencia docente y la clasificación de los errores dadas por Movshovitz et al. (1987) y Rico (2002), plantea la siguiente categorización de errores:

1. ***Interpretación incorrecta del lenguaje:*** Son errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto.

2. ***Errores que tiene su origen en conocimientos previos:*** Errores conceptuales en torno a ejes temáticos claves de la matemática previa.

3. ***Deducción incorrecta de la información. Datos mal utilizados:*** Incluyen las deficiencias en el contenido y los problemas específicos de conocimiento, necesarios para desenvolverse satisfactoriamente en la tarea matemática. Estas deficiencias pueden originarse en el desconocimiento de algoritmos, manejo inadecuado de conceptos básicos, realización de procedimientos incorrectos, incomprensión de símbolos, etc.

4. ***Errores lógicos o de razonamiento:*** Surgen por la falta de flexibilidad en el pensamiento, es decir el alumno no puede adaptar lo que ya sabe a situaciones nuevas. En esta categoría están los errores de asociación, de inferencia, de asimilación y los errores generados por la aplicación de reglas y propiedades válidas solo en algunos casos. Incluye los errores cometidos por un razonamiento incorrecto. Esta nueva información, inválida, es luego

utilizada para resolver el problema planteado ocasionando una respuesta errónea.

5. ***Errores al operar algebraicamente (errores de cálculo):*** Incluye los errores de cálculo, los errores en la extracción de datos de las tablas, los errores en la manipulación de símbolos algebraicos elementales, etc.

6. ***Errores que se presentan durante el proceso de solución de problemas:*** (identificación de la o las variables, las relaciones de dependencia y el modelo que conduce a la solución). Reconocer los datos y las incógnitas. Soluciona lo planteado.

Esta forma de ver los errores en el aprendizaje de los estudiantes no es considerada por los docentes, de igual manera no existe un tratamiento curricular de los mismos, a la vez el sistema educativo tampoco da apertura para que exista una formación adecuada de los docentes respecto a su capacidad de detectar, analizar, interpretar y tratar los errores de sus estudiantes.

Si, por el contrario, la labor docente se enfocara entorno al estudio de los errores de conocimiento en el proceso de aprendizaje, se contaría con una fuente de información trascendental para tomar decisiones adecuadas para nuestra intervención en los procesos de enseñanza aprendizaje de los estudiantes.

En la reforma educativa actual se plantean utilizar nuevas metodologías, estrategias, inclusión de TIC, pero no se analizan los verdaderos procesos que se deben realizar en el aprendizaje de la matemática al introducir herramientas como el de las TIC en el proceso de aprendizaje, sino se toma a esta sólo como una innovación sin ningún análisis de sus efectos.

Realizar un análisis donde se determine las potencialidades de los recursos tecnológicos y los resultados de su aplicación en el desarrollo cognitivo de los estudiantes, permitiría la implementación de las TIC de forma apropiada y que no se la realice de manera empírica, o como una innovación metodológica nada más.

1.2.4.1. El lenguaje y conocimiento matemático

Para Godino, Batanero y Font (2003) la manera de expresar nuestras ideas influye en cómo las personas pueden comprender y usar dichas ideas. Por ejemplo, es diferente la comprensión que se tiene de los números naturales cuando se los representa mediante dígitos o mediante la recta numérica. Wittgenstein (citado por Dummet, 1959) piensa incluso, que sin el lenguaje no hay tales ideas, ya que éstas no son otra cosa que reglas gramaticales de los lenguajes que usamos para describir nuestro mundo.

Para poder adquirir conocimientos es muy importante el lenguaje tanto a nivel general y de la matemática, el resultado de los errores que tienen los estudiantes de conocimiento es cuando los estudiantes aplican mal este lenguaje, por ejemplo:

Sin la palabra “triángulo” (u otra que tenga los mismos usos) no existiría la idea de triángulo. Esta idea no es más que una regla para describir un cierto tipo de objetos (tres lados , tres vértices, suma de ángulos internos igual a 180 grados, etc.). El lenguaje matemático tiene además una doble función:

-**Representacional:** Permite designar objetos abstractos que no se pueden percibir.

-**Instrumental:** como herramienta para hacer el trabajo matemático. El valor instrumental puede ser muy diferente según se trate de palabras, símbolos, o gráficas. En consecuencia, el estudio de los diversos sistemas de representación para un mismo contenido matemático es necesario para la comprensión global del mismo.

El lenguaje es esencial para:

-comunicar las interpretaciones y soluciones de los problemas a los compañeros o el profesor;

-reconocer las conexiones entre conceptos relacionados;

-aplicar las matemáticas a problemas de la vida real mediante la modelización.

-para utilizar los nuevos recursos tecnológicos que se pueden usar en el trabajo matemático (Godino et al. 2003, p.57).

1.2.4.2 Planteamiento y resolución de problemas

Según lo expuesto en los puntos anteriores el conocimiento matemático se establece cuando el estudiante puede responder a situaciones problémicas en un entorno, planteando acciones con el fin de manejar dichas situaciones y resolver los problemas presentados. Santos Trigo (1997) afirma que una situación puede concebirse como un problema en la medida en que no se disponga de procedimientos de tipo automático para solucionarla de forma inmediata, sino que requiera de un proceso de reflexión o toma de decisiones sobre los pasos a seguir. Supone para el alumno una demanda cognitiva y motivacional. Por su parte, dentro del ámbito de la didáctica de la matemática, el término problema se refiere a un obstáculo arrojado ante la inteligencia para ser superado, una dificultad que exige ser resuelta, una cuestión que requiere ser aclarada.

Polya desarrolló un sistema de planteamiento de resolución de problemas que contiene diferentes pasos con la finalidad de que el estudiante comprenda el problema y pueda resolverlo. Batanero et al. (1994) afirman que los estudiantes en la resolución de problemas aplican una gran variedad de conocimientos con el fin de llegar a la solución adecuada, durante este proceso se puede identificar una considerable cantidad de conocimientos correctos y errores de conocimiento, existe varias investigaciones como la realizada por Mercedes Bocán o Ken Clements que han querido facilitar la comprensión de los conocimientos a través del planteamiento de problemas en el área de la matemática, sin embargo son propuestas pedagógicas y metodológicas que solamente han evaluado su eficiencia y eficacia, a través de la medición de percepciones de los participantes y las notas obtenidas; en estos casos no ha existido un estudio profundo respecto a los errores.

1.3. TIC y aprendizaje

La sociedad actual ha sufrido cambios trascendentales a lo largo de su historia, los cuales se ha producido por diversas causas; entre ellas, los avances tecnológicos tanto en software como en hardware, estos avances han tenido un peso social y económico. Todas estas revoluciones tecnológicas, permiten a las personas obtener información y conocimientos que antes estaban restringidos a unos pocos, además han permitido una gran facilidad para comunicarse, inclusive a largas distancias. Sin embargo, el papel de la mayoría de los individuos en la sociedad se ha reducido a ser meros receptores de información, y unos pocos ser emisores de la misma.

En la actualidad sobre todo en las últimas décadas se han producido importantes avances tecnológicos que afectan en gran medida al lenguaje y a la comunicación, avances que han provocado notables cambios en la sociedad. De este modo, teniendo en cuenta la realidad en la que nos encontramos, el sistema educativo no puede seguir utilizando, exclusivamente, los métodos de enseñanza del pasado, sin considerar todos los estímulos e influencias que afectan directa e indirectamente al estudiante.

Para Sánchez (2000) y Corrales (2009) las TIC son herramientas computacionales e informáticas que permiten procesar, recopilar, resumir, recuperar y presentar información de diversas formas, de acuerdo a los requerimientos y necesidades de los usuarios. Es decir, son el conjunto de técnicas para administrar la información, especialmente computadores y programas para obtener, guardar, generar y transmitir información.

> Ante esta perspectiva de enormes cambios en cuanto a la forma de comunicación, obtención de información y formación del conocimiento, se hace menester que el sistema educativo genere nuevos ambientes de aprendizaje, en los cuales se propicie el contacto, el intercambio y la participación de los estudiantes (Ferrer citado por Arrieta, 2007, p.4).

Indistintamente a las estrategias metodológicas (TIC u otros) que se establezcan, cuando un estudiante construye su conocimiento descubre y plantea diferentes relaciones entre los contenidos o destrezas trabajados, las cuales no están implícitas en el proceso de aprendizaje; sin embargo, estas se establecen de manera inadecuada. Indudablemente los errores influyen en el aprendizaje de los contenidos, por lo tanto, es imperativo que éstos sean reconocidos y superados a fin de obtener mejores logros de aprendizaje. (Engler et al., 2002).

La naturaleza del proceso de aprendizaje está en continua modificación y el uso de la Tecnología Informática (TI) como herramienta, lleva a un cambio rotundo en la educación. Muchas investigaciones como la "Implementación y aplicación de software educativo y material concreto en el aprendizaje de las ecuaciones de las cónicas en geometría analítica plana de los estudiantes del tercer año de bachillerato“ realizada por Victor Vallejo, demuestran como la introducción de algún software en la clase de matemática presenta muchas bondades y una nueva visión del conocimiento permitiendo que este se convierta en un instrumento matemático (Balderas, 2016). Una de las grandes ventajas que ofrecen las TIC y en particular Geogebra tal como lo plantean Azcarate y Camacho (2003) en su investigación en Didáctica del análisis matemático, es permitir que los estudiantes adquieran nuevos conocimientos que de otra forma dificilmente estarían a su alcance por el alto grado de abstracción que exigirían en la ausencia de medios de prueba y experimentación.

Las TIC tienen un gran impacto como herramientas en el proceso educativo, pues ayudan a la actividad docente y a fortalecer los conocimientos matemáticos: conceptos, algoritmos, definiciones. Se debe hacer lo necesario para que la experiencia de aprendizaje sea efectiva, no lo que es fácil o barato. Y las tecnologías nos pueden prestar una inestimable ayuda en ese intento.

Ahora la sociedad está sometida a vertiginosos cambios que plantean continuamente nuevas problemáticas, exigiendo a las personas múltiples competencias procedimentales (iniciativa, creatividad, uso de herramientas TIC, estrategias de resolución de problemas, trabajo en equipo entre otras) para crear el conocimiento preciso que les permita afrontarlas con éxito.

La inmersión de las TIC dentro del proceso de aprendizaje de la matemática incide de manera favorable en los conocimientos de los estudiantes, lo que permite alcanzar innumerables beneficios tanto cognitivos como sociales, por ejemplo: se fomenta el aprendizaje activo, mejora la atención y actitud de los estudiantes, influye en la motivación del estudiante, ayuda a la investigación, acceso rápido de información, desarrollando a la vez destrezas de razonamiento.

Arrieta, Delgado y Riveros (2009) plantean unas reflexiones sobre la inclusión de las TIC en la práctica educativa:

-Con las herramientas TIC se puede generar espacios motivantes, que generen desafíos durante la adquisición de los conocimientos.

-Las TIC actúan directamente sobre el estudiante y docente, pues juegan un papel fundamental en el fenómeno educativo, por lo tanto es importante conocer su influencia y consecuencias ante determina situación educativa, para poderlos usarlos de manera adecuada.

-No son la solución a las problemáticas en la educación, pues en un proceso educativo existen otros factores preponderantes.

-Las TIC aplicadas en educación puede contribuir a mejorar la eficacia de los procesos de enseñanza aprendizaje, pues los estudiantes trabajan de manera activa vinculándose directamente con el recurso y los conocimientos que este trabaja; a la vez brindan la alternativa de aprender fuera el salón de clase y aprovechando los espacios temporales de los estudiantes.

El uso de las TIC también presenta una amplia gama de desventajas, entre ellas:

-Al tener demasiada información para trabajar, los estudiantes podrían dispersar su atención en la búsqueda de esta, a la vez alcanzar unos conocimientos incorrectos pues no logran seleccionar adecuadamente la información obtenida.

-Si no se trabaja conscientemente, se corre el riesgo de que los aprendizajes sean incompletos.

-Si las actividades planteadas no están correctamente dirigidas y adecuadas al contexto no se conseguirán los objetivos planteados, generando así errores de conocimiento.

El uso de TIC se está volviendo indispensable en todas las áreas, pero de manera especial en algunos entornos como el educativo, pues se convierte en una fuente interminable de recursos, pero como en todo recurso didáctico, si el mismo no está correctamente direccionado los resultados esperados en términos de aprendizaje no serán los adecuados; incluso la herramienta implementada generaría inconvenientes en la consecución de los conocimientos matemáticos, se prevé que las TIC al introducirse en el proceso de enseñanza aprendizaje pueden disminuir los errores de conocimiento que presentan los estudiantes, por lo tanto es importante diferenciar en que consiste implementar adecuadamente las TIC en el proceso enseñanza aprendizaje.

Para Antunes do Nascimento (2012), es fundamental que el estudiante realice construcciones geométricas y luego cambie las posiciones iniciales de los objetos para que identifique que se conserva las propiedades originales. Varios estudios muestran que recursos como Geogebra puede traer importantes beneficios, permitiendo, de una forma más o menos intuitiva, construir y explorar figuras, formular conjeturas y relacionar propiedades que se evidencian durante el proceso de manipulación (NCTM, 2000); no existen estudios que determinen los conocimientos correctos e incorrectos que se generan pese a la inclusión de TIC como recurso educativo, de ahí la necesidad del planteamiento de este estudio.

Es importante identificar los aprendizajes cognitivos que alcanzan los estudiantes en el estudio de cónicas usando el software Geogebra; es decir tener a nuestro alcance la información de las destrezas y contenidos que se alcanzan y aquellas que no se logran pese a la introducción del recurso en clases. La identificación tanto de los conocimientos correctos alcanzados por los estudiantes, como de los errores de conocimiento en los que incurren, permitirán reorganizar las planificaciones realizadas por el docente y los trabajos planteados con el software; de la misma manera se podrán proponer otras estrategias metodológicas y didácticas para compensar los errores conceptuales que no han sido solventados con el uso de Geogebra.

CAPÍTULO II

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

2.1. Método

2.1.1. Enfoque, tipo y diseño de investigación.

La investigación posee un enfoque cuantitativo de tipo descriptivo. Se trabajó con un diseño cuasi experimental, de manera que el mismo grupo se constituye como grupo control.

2.1.2. Participantes.

Para la investigación se trabajó con una población finita de 15 estudiantes del tercero de bachillerato "A" de la Unidad Educativa "Los Andes", donde el investigador labora como docente de la asignatura de Matemáticas. La participación fue voluntaria, aceptando formar parte de la investigación por medio de la confirmación del consentimiento informado; como la población es pequeña se utilizó como muestra.

La muestra es no probabilística por conveniencia pues se tiene fácil acceso a los sujetos para la investigación y se incluyó a todos los individuos. La misma está compuesta por 8 mujeres (53,3%) y 7 varones (46,7%) con edades que oscilan entre 17 y 18 años con una edad media de 17,53 años y una desviación típica de 0,516. Del grupo investigado, únicamente 2 estudiantes son nuevos, por los que el 86,66% (13 participantes) comparten condiciones semejantes de conocimientos previos en el tema de cónicas y en el uso del software Geogebra.

2.1.3 Procedimiento

El estudio se desarrolló en cuatro fases: fundamentación teórica, implementación, evaluación y presentación de resultados.

2.1.3.1 Fundamentación teórica

Se establecieron las bondades de la aplicación de las TIC en las diferentes áreas del conocimiento y de la Matemática de manera particular, además de su relación con el aprendizaje. Se tomó en cuenta los lineamientos respecto al uso de las TIC en el currículo actual; se abordó además los fundamentos referentes al conocimiento, como la relación existente entre el sujeto-objeto y la determinación de lo que podemos considerar como conocimiento.

Se identificó la relación entre el aprendizaje y el conocimiento, estableciendo al primero como la forma de incorporar al segundo en el individuo, se estableció los principios esenciales sobre el aprendizaje de la Matemática y la definición de conocimiento matemático; con estos se pudo identificar los errores de conocimiento en la Matemática y su categorización.

2.1.3.2. Fase implementación de la propuesta

Para la aplicación de la propuesta se realizaron varias sesiones de trabajo durante un período de 6 semanas con los estudiantes del tercero de bachillerato en el tema de cónicas, usando Geogebra en actividades en el aula y en casa, siguiendo además las planificaciones desarrolladas por el docente, de tal manera que los estudiantes puedan ir incorporando nuevos conocimientos con la ayuda de las TIC. El detalle de esta fase será profundizado en el capítulo III.

2.1.3.3. Fase evaluación

Luego de este período de clases, realizando las actividades planificadas por el docente y usando el software Geogebra, se accedió a la información para el estudio mediante la técnica de la encuesta, y como instrumento de recolección de la información el cuestionario, tipo prueba, utilizado por Golbach et al. (2009) en su investigación: "Identificación de los errores en la resolución de problemas de geometría analítica y su comparación con el rendimiento académico en alumnos de ingeniería", dicho cuestionario toma en cuenta los errores de conocimiento y las categorías de análisis y los indicadores.

Esta evaluación fue tomada a los estudiantes como parte de los insumos de las calificaciones y con el fin de identificar en cada ítem los errores de conocimiento descritos en la implementación teórica.

Para la medición de los conocimientos en cada una de las preguntas se tomó en cuenta lo siguiente:

Tabla 1. Análisis de conocimientos pregunta 1

1.Interpretación correcta del lenguaje.	1a.Identificar una abscisa
2.Aplicación de conocimientos previos	2a.Teorema Pitágoras (cálculo c)
	2b. Ecuación de segundo grado
	2c.Conocer la ecuación de la recta y elipse
3.Deducción correcta de la información. Datos correctamente utilizados. Conceptos	3a.Reconocer y determinar elementos de la elipse (focos, a, b y c)
	3b.Usar foco con abscisa negativa para calcular ecuación recta
4.Aciertos lógicos o de razonamiento (Inferencia correcta).	4a.Identificar foco con abscisa negativa
	4b.Sustituir ecuación recta en ecuación elipse (puntos corte)
5.Operar algebraicamente (Cálculos correctos).	5a.Cálculo de pendiente en ecuación recta
	5b.Operaciones algebraicas en sustitución de ecuaciones
	5c.Cálculo numérico y algebraico (otro)
6.Proceso de solución de problemas.	6a. Identifica datos y variables
	6b. Sustitución de raíces de ecuación resultante de sustitución (ec. segundo grado) en ecuación elipse o recta.
	6c.Encuentra los valores de las ordenadas de puntos de corte

Fuente: Autor

Tabla 2. Análisis de conocimientos pregunta 2

1.Interpretación correcta del lenguaje.	1aReconoce ecuación general de una cónica
2.Aplicación de conocimientos previos	2a.Completar cuadrados, factorización
	2b.Teorema de Pitágoras (cálculo de c)
3.Deducción correcta de la información. Datos correctamente utilizados. Conceptos	3a.Identificar ecuación resultante (hipérbola, eje focal paralelo a "x")
4.Aciertos lógicos o de razonamiento (Inferencia correcta).	4a.Reconocer que se debe expresar la ecuación general dada a forma ordinaria.
5.Operar algebraicamente (Cálculos correctos).	5a.Operaciones algebraicas en la expresión de ecuación en forma ordinaria
	5b.Cálculo numérico y algebraico (otros)
6.Proceso de solución de problemas.	6a.Identifica datos y variables
	6b.Reconocer y determinar elementos de la hipérbola a partir de la ecuación (focos, centro, vértices eje transverso y asíntotas)
	6c. Gráfica

Fuente: Autor

Tabla 3. Análisis de conocimientos pregunta 3

1.Interpretación correcta del lenguaje.	1a.Identificar lo que es tener al origen de coordenadas
	1b.Identificar que es una abscisa
2.Aplicación de conocimientos previos	2a.Conocer la ecuación de la circunferencia
3.Deducción correcta de la información. Datos correctamente utilizados. Conceptos	3a.Usar ecuación de circunferencia, sustituir centro y origen como coordenadas.
4.Aciertos lógicos o de razonamiento (Inferencia correcta).	4a.Determinar que coordenadas centro es (-6,k)
	4b.Tiene dos soluciones, dos valores de k(ordenada centro)
5.Operar algebraicamente (Cálculos correctos).	5a.Hallar valor de ordenada de centro
	5b.Cálculos numéricos y algebraicos
6.Proceso de solución de problemas.	6a.Identifica datos y variables
	6b.Usar valores de k (dos centros) para determinar dos ecuaciones de circunferencia.

Fuente: Autor

Tabla 4. Análisis de conocimientos pregunta 4

1.Interpretación correcta del lenguaje.	1a.Identificación que parábola es una con eje de simetría paralelo a eje x
2.Aplicación de conocimientos previos	2a.Conocer ecuación de la parábola
3.Deducción correcta de la información. Datos correctamente utilizados. Conceptos	3a.Determina coordenadas del vértice
	3b.Sustituir coordenadas vértice y poste en ecuación
	3c.Deducir separación entre cables como coordenadas de parábola(abscisa)
4.Aciertos lógicos o de razonamiento (Inferencia correcta).	4a.Identificar medidas de postes como coordenadas de puntos de parábola
5.Operar algebraicamente (Cálculos correctos).	5a.Cálculos numéricos y algebraicos
	5b.Hallar el valor de p
6.Proceso de solución de problemas.	6a.Identifica datos y variables
	6b.Determina longitudes (ordenadas) de los cables sustituyendo coordenadas de estos en ecuación de parábola

Fuente: Autor

2.1.3.4. Fase presentación de resultados

Luego de la implementación y aplicación del cuestionario se procesó y analizó los datos; con esto se pudo examinar y discutir los resultados obtenidos para así finalmente poder plantear después las conclusiones de la investigación.

Para esto, tomando en cuenta lo planteado en el marco teórico, se identificó dentro de cada uno de los ítems del cuestionario los indicadores que se miden, para presentar los resultados en una tabla por cada pregunta del instrumento de evaluación.

Finalmente presentar un consolidado de los conocimientos correctos e incorrectos alcanzados por los estudiantes, tomando en cuenta la categorización de los mismos.

CAPITULO III

IMPLEMENTACIÓN Y RESULTADOS

3.1. CONTENIDO DE LAS ACTIVIDADES

Cada una de las actividades y ejercicios están diseñadas para trabajar la parte conceptual y las definiciones básicas sobre las cónicas, además ayudan a la construcción de los conocimientos respecto a la temática tratada. En cada una de las actividades se plantea su objetivo y como se trabajaron las mismas.

La experiencia se desarrolló con un grupo de 15 estudiantes del tercero de bachillerato general unificado (17 y 18 años) pues en este año se trabaja la unidad curricular correspondiente a "Cónicas", además los estudiantes tienen experiencia en trabajar con el software Geogebra ya que en los años anteriores se habían familiarizado con el uso de la aplicación.

El aula en la que se llevó a cabo la experiencia estaba dotada de una pizarra de tinta, un proyector y una computadora portátil con el software Geogebra instalado, además se tenía acceso al laboratorio de computación donde todas las PC tenían instalado el software Geogebra; también los estudiantes tenían acceso a una computadora en sus casas para realizar las actividades planteadas. Se usó Geogebra para la interpretación de los problemas, para el planteamiento y resolución de los problemas y en otras ocasiones para la comprobación de las respuestas.

El desarrollo de la experiencia se realizó durante seis semanas de clase (30 horas pedagógicas, entre el 12 de septiembre y el 21 de octubre), más el tiempo dedicado por los estudiantes en las actividades a casa.

La revisión conceptual se la tomó del libro de Geometría Analítica Leman y de Matemáticas Tercero de Bachillerato de Santillana que es el texto guía que utilizan los estudiantes. Durante las seis semanas se dieron clases sobre las cónicas apoyándose con el uso de la herramienta de Geogebra y al final de las actividades se realizó la evaluación, mediante la aplicación de la prueba o cuestionario.

Actividad 1

Tema: El cono de Apolonio

- **Objetivos:**

General

- Identificar a las cónicas mediante el uso de los deslizadores applet para reconocer sus características.

Específicos

- Conocer a las cónicas como las secciones generadas en un cono.
- Identificar las condiciones para obtener cada una de las cónicas.
- Describir la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola como curvas que se obtienen al interceptar una superficie cónica con un plano

- **Forma de trabajo:** Individual.
- **Tiempo aproximado:** Una hora pedagógica 45 minutos.
- **Planificación (plan de clase):** Anexo 5
- **Descripción de la actividad:**

Como introducción al tema se hizo la lectura “Detectar las señales provenientes del universo”, luego se presentaron algunas imágenes donde se identificó la aplicación de las cónicas, usaron el applet “cono” para que manipulen los deslizadores y vayan identificando que cónica se generaba según las características del plano.

Luego plantearon las condiciones bajo las cuales se presenta cada una de las cónicas, distinguiendo así el nombre y forma característica de cada una de ellas.

Desarrollo:

- **Primera Etapa**

Determinación de los temas a tratarse

-Cono de Apolonio, sección cónica

-Cónicas en la cotidianeidad

-Cónicas degeneradas.

Revisión conceptual

Apolonio de Perga nació en el año 262 a.C., en Panfilia (la actual Antalya, Turquía), estudió en el Museo de Alejandría con los discípulos de Euclides, y residió tanto en Alejandría como en Éfeso y Pérgamo. Esta última poseía una Biblioteca y una Escuela del Saber, similares a las de Alejandría, ciudad donde murió el año 190 a.C.

La más grande obra de Apolonio fue “Las Cónicas” en donde demostró que de un cono pueden obtenerse cuatro tipos de secciones, variando la inclinación del plano que corta al cono; esta demostración supuso un paso importante en el proceso de unificar el estudio de los diferentes tipos de curvas, y esta importancia se reveló casi 2000 años después cuando Kepler o Newton descubrieron el papel fundamental de la mecánica celeste.

Las cónicas son:

- **Un círculo**: corte con un plano paralelo a la base del cono.
- **Una elipse**: corte oblicuo con respecto a la base.
- **Una parábola**: corte paralelo a una generatriz del cono que atraviesa su base.
- **Una hipérbola**: corte paralelo u oblicuo a la altura del cono enfrentado a su imagen unido por el vértice.

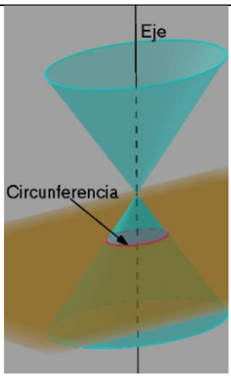
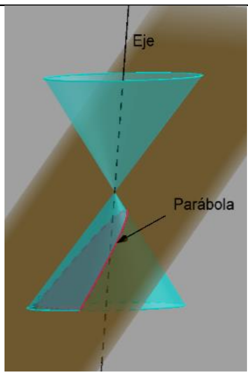
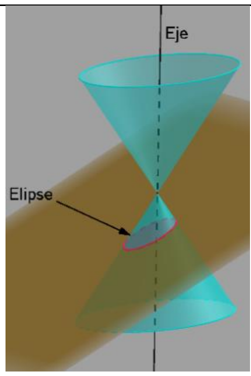
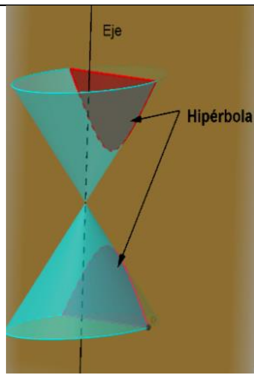
			
El plano es perpendicular al eje	El plano es oblicuo al eje y paralelo a la generatriz	El plano es oblicuo al eje y no es paralelos a la generatriz	El plano es paralelo al eje, se obtienen dos curvas

Figura 1. Cónicas generadas por el corte de un plano y un cono

Fuente: Autor

- **Segunda etapa**

Ejercicio 1.1. Determinación de cónicas mediante la manipulación de applet cono: Los estudiantes manipularon el applet "cono" cambiando los valores de los deslizadores e identificaron las características de generación de cada cónica. Luego de su determinación, con los botones circunferencia, Elipse, Parábola e hipérbola pudieron comprobar la formación de las cónicas.

En el siguiente applet de Geogebra manipule los valores de los deslizadores q (movimiento del plano), α (ángulo inclinación plano), β (ángulo generatriz cono), r (movimiento del plano).

Observe las curvas que se van generando en cada uno de los casos, desactive las casillas Ocultar/Mostrar Cono y Ocultar/Mostrar Plano para una mejor visualización. Vaya a propiedades de la curva de intersección para observar su nombre.

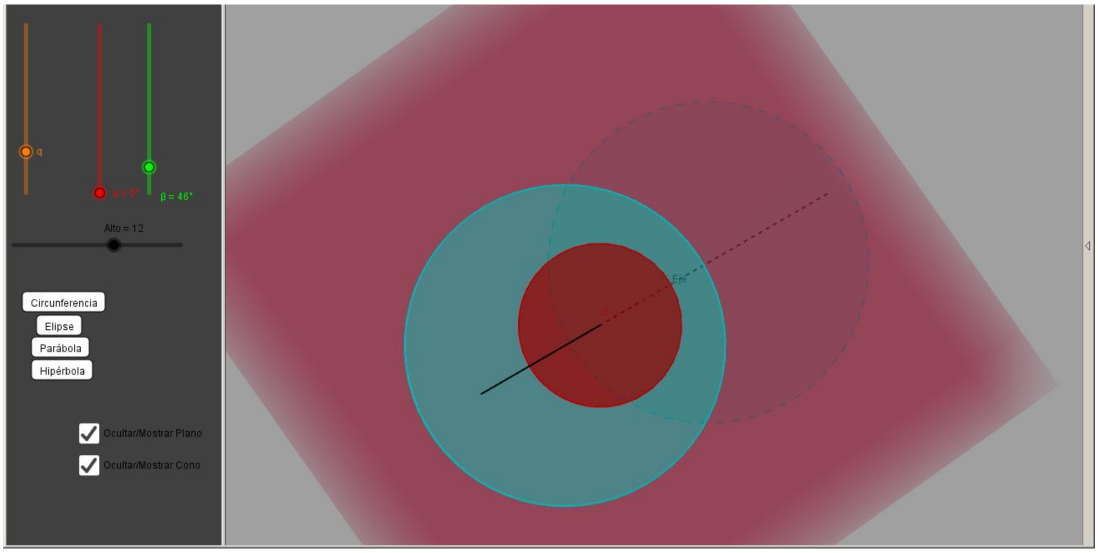


Figura 2. Determinación de la cónica, circunferencia

Fuente: Autor

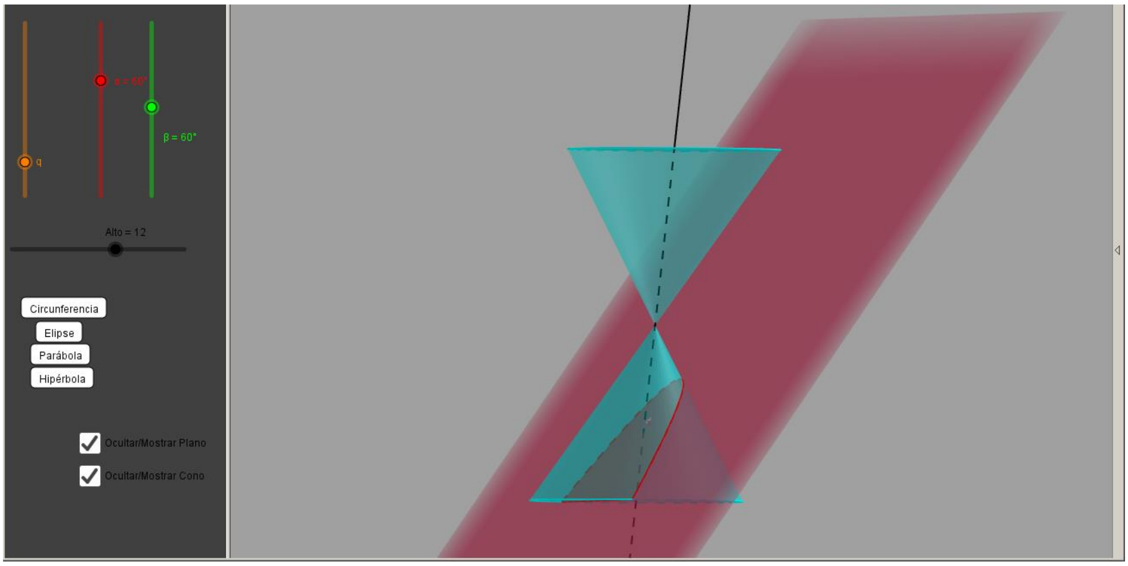


Figura 3. Determinación de la cónica, parábola

Fuente: Autor

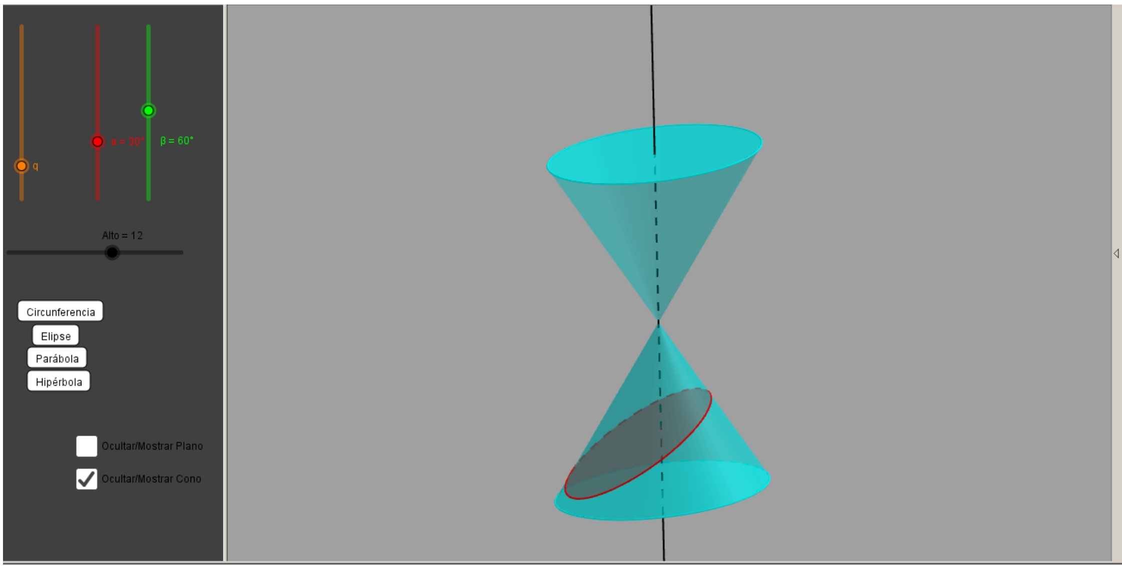


Figura 4. Determinación de la cónica, elipse

Fuente: Autor

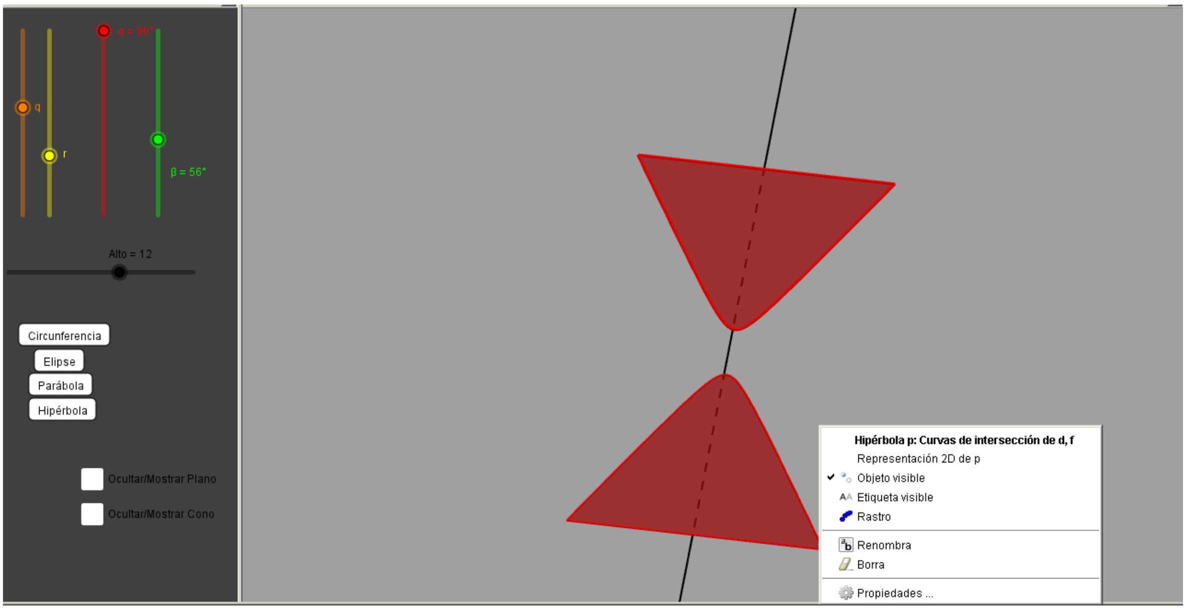


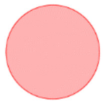
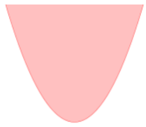
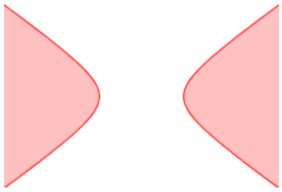
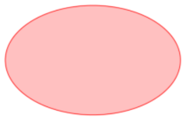
Figura 5. Determinación de la cónica, hipérbola

Fuente: Autor

Ejercicio 1.2. Determinación de condiciones de corte: Realizado el ejercicio 1.1 complete la siguiente tabla con la siguiente información:

- Nombre de cónica
- Condiciones de corte
- Gráfico representativo

Tabla 5. Cónicas, condiciones de corte y gráfico

Cónica	Condiciones de corte	Gráfico representativo
Circunferencia	Plano de corte es perpendicular al eje	
Parábola	El plano de corte es oblicuo al eje y paralelo a la generatriz del cono.	
Hipérbola	Plano de corte oblicuo o paralelo a al eje del cono (pero no paralelo a generatriz) y que corta la base del cono	
Elipse	Plano de corte oblicuo al eje del cono, ese plano no corta la base del cono	

Fuente: Autor

Actividad 2

Tema: La circunferencia (definición, lugar geométrico)

- **Objetivo:**
    - Usar el software Geogebra y la definición de circunferencia para describirla con lugar geométrico.
- **Forma de trabajo:** Individual.
- **Tiempo aproximado:** Una hora pedagógica
- **Planificación (plan de clase):** Anexo 5
- **Descripción de la actividad:**

Como introducción al tema se presenta a la circunferencia vista de manera geométrica junto con sus elementos como revisión previa de conocimientos, luego se plantea su definición como lugar geométrico, se solicitó que usen el Geogebra para dibujar la circunferencia tomando en cuenta su definición.

Desarrollo:

- **Primera Etapa**

  Determinación de los temas a tratarse

  -Definición de circunferencia

  Revisión conceptual

Elementos de la circunferencia

La circunferencia es una línea curva cerrada y plana, cuyos puntos están todos a la misma distancia del centro.

Los elementos de la circunferencia son los siguientes:

-*Centro*: Es el punto equidistante de todos los puntos de la circunferencia.

-*Radio*: Es un segmento que une el centro con cualquier punto de la circunferencia.

-*Cuerda*: Es un segmento que une dos puntos de la circunferencia.

-*Diámetro*: Es una cuerda que pasa por el centro, su longitud es el doble del radio.

-*Arco*: Es la parte de circunferencia correspondida entre dos puntos de la misma.

-*Semicircunferencia*: Es un arco igual a la mitad de la circunferencia.

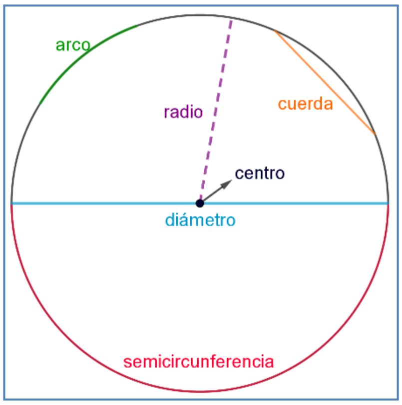


Figura 6. *Elementos de la circunferencia*

Fuente: Autor

Definición circunferencia:

"Circunferencia es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano" (Lehmann, 1990, p.99). El punto fijo se llama centro de la circunferencia, y la distancia constante se denomina radio

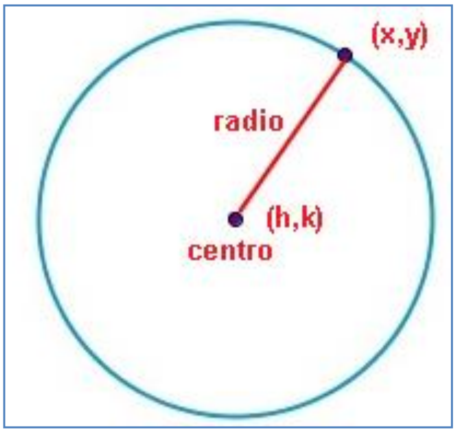


Figura 7. *Determinación de la cónica, hipérbola*

Fuente: Autor

- **Segunda Etapa**

Tema: Definición de circunferencia:

Actividad 2.1. Dibuje el lugar geométrico que representa una circunferencia usando su definición y herramientas de Geogebra, para esto se sigue los siguientes pasos:

1) Usando la opción punto 

de la barra de herramientas ubicamos un punto cualquiera en el plano cartesiano (punto C).

2) Se crea un deslizador llamado radio, configurado de la siguiente manera.

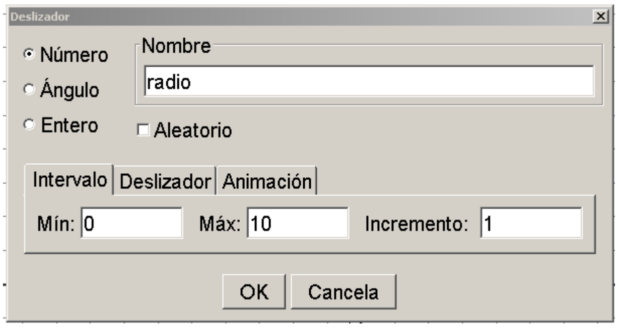


Figura 8. Configuración de herramienta deslizador

Fuente: Autor

3) Use la herramienta 

, haga click en el punto A e ingresamos en la longitud del segmento la palabra "radio".

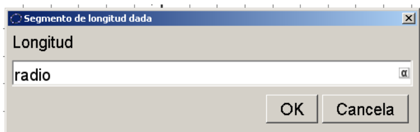


Figura 9. Longitud del segmento enlazado con deslizador radio

Fuente: Autor

4) Observe como la longitud del segmento varía según se cambia el valor del deslizador, al segmento se renombra como "r".

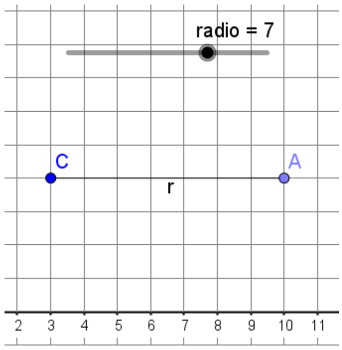


Figura 10. *Gráfico del segmento según el valor del deslizador radio*

Fuente: Autor

5) El punto C es fijo, ahora en el punto A, en propiedades escoja la opción rastro y animación. Se puede además cambiar el estilo del punto.

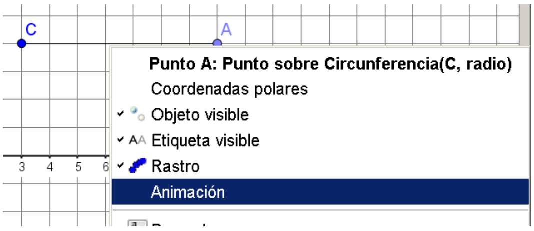


Figura 11. *Configuración de animación para el punto A*

Fuente: Autor

6) Enseguida se dibuja el lugar geométrico que representa a la circunferencia, pues la distancia entre el punto “C” y “A” siempre es la misma.

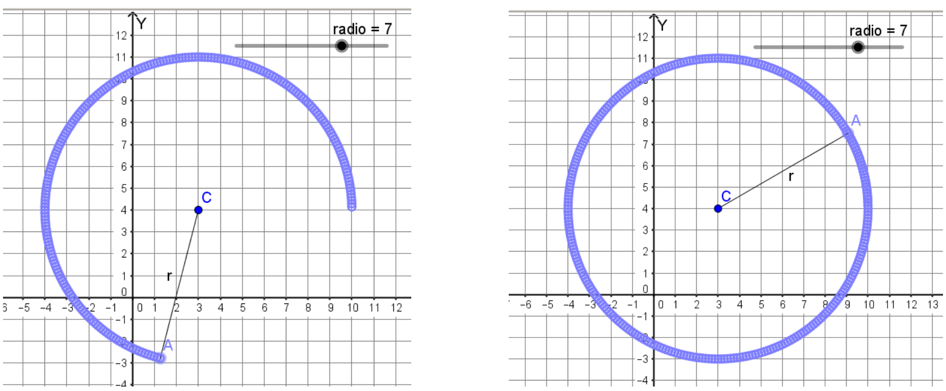


Figura 12. *Gráfico de la circunferencia*

Fuente: Autor

7) Si movemos el deslizador, se continúa dibujando el lugar geométrico que representa a una circunferencia.

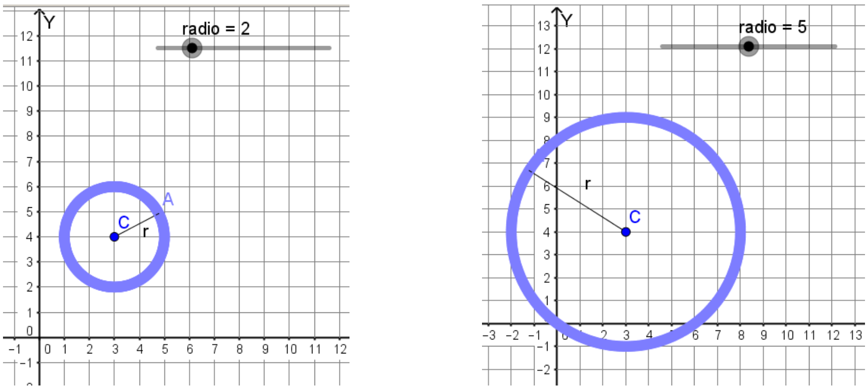


Figura 13. Gráfico de la circunferencia según el valor del deslizador radio

Fuente: Autor

8) Responda a las preguntas:

¿Qué representa el punto C?

Representa al centro de la circunferencia y es un punto fijo.

¿Qué característica se cumple entre el punto A y C?

La distancia entre los dos, sin importar donde se ubique el punto A es la misma, a esa distancia le llamamos radio. Además, el punto A siempre pertenece al lugar geométrico que representa la circunferencia.

Actividad 3

Tema: Ecuación ordinaria de la circunferencia

Objetivos:

- Conocer la ecuación de la circunferencia (canónica y ordinaria)
- Identificar la representación de los elementos h, k y r en la circunferencia a través de la aplicación de ecuación ordinaria de la misma y el uso de deslizadores en Geogebra.

- Determinar la ecuación de una circunferencia dados el centro y el radio.
- Identificar la ecuación canónica de la circunferencia como un caso particular de la ordinaria que cumple la condición de centro (0,0).

- **Forma de trabajo:** Individual.
- **Tiempo aproximado:** Tres horas pedagógicas
- **Planificación (plan de clase):** Anexo 5
- **Descripción de la actividad:** Se parte del planteamiento de la ecuación ordinaria de la circunferencia, a partir de ahí se plantean ejercicios para identificar adecuadamente los coeficientes h, k, r y lo que representan en la circunferencia.

  Luego se plantean actividades para inferir como hallar las ecuaciones dadas las coordenadas del centro y el valor del radio de la circunferencia, además como representarlas gráficamente. En base a la ecuación ordinaria se planteó un ejercicio en clase y otros a casa para identificar a la ecuación en forma canónica de la circunferencia. Todas las actividades las realizaron primero en Geogebra y luego de manera analítica, para de esta forma buscar que el software brinda apoyo tanto al entendimiento del ejercicio como a la comprobación de la resolución.

Desarrollo:

- **Primera Etapa**

  Determinación de los temas a tratarse

-Ecuación ordinaria de la circunferencia.

-Ecuación canónica de la circunferencia.

-Ecuación general de la circunferencia.

-Relación entre h, k, r y D, E y F.

Revisión conceptual

Ecuación canónica de la circunferencia

En la figura 14 se puede ver una circunferencia con centro en el punto C(h,k) y radio r, se tiene además un punto P(x,y) que pertenece a la circunferencia.

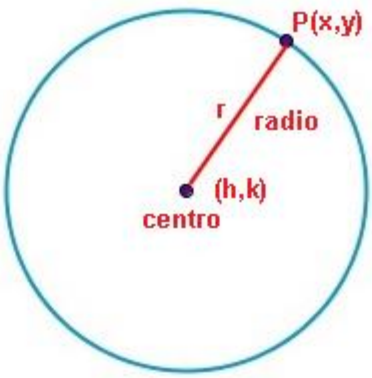


Figura 14. *Circunferencia con centro h,k y radio r*

Fuente: Autor

En esta se cumple que:

$\overline{PC} = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$ Se halla la distancia entre los puntos P y C

$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$ Se aplica que $\overline{PC} = r$ por la definición de circunferencia

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ Elevando al cuadrado a ambos lados de la igualdad

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia es:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

con centro (h,k) y radio r. A esta ecuación se le llama ordinaria.

Si el centro está en el origen (0,0) la ecuación quedaría:

$$x^2+y^2=r^2$$

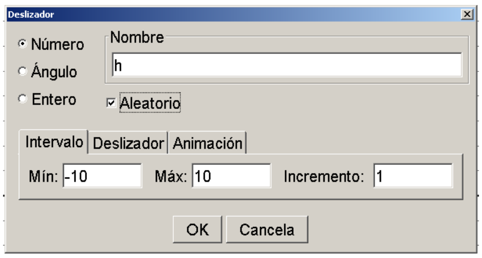
y se le llama ecuación canónica de la circunferencia.

Segunda Etapa

Actividad 3.1. Ecuación ordinaria de la circunferencia: Grafique la circunferencia usando la ecuación ordinaria de la circunferencia, use deslizadores para los coeficientes h, k y r, se usa como guía lo siguiente:

1) Cree tres deslizadores h, k y r usando la herramienta 

con las configuraciones presentadas.



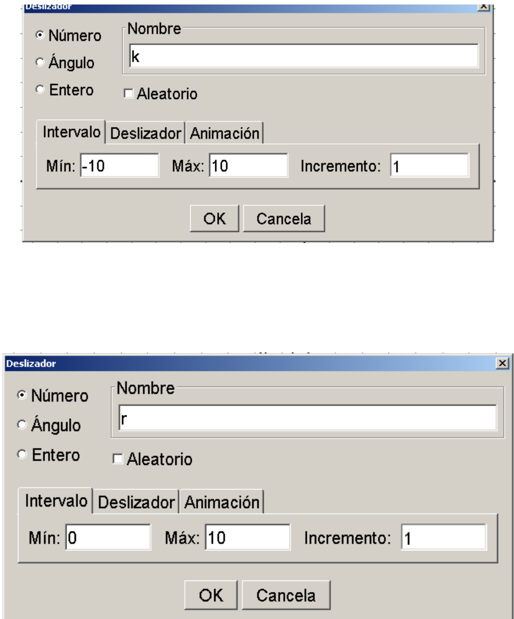


Figura 15. Configuración de deslizadores h, k y r

Fuente: Autor

2) Escriba en la entrada del programa $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

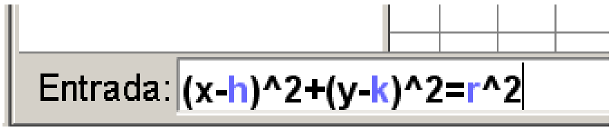


Figura 16. Ingreso de ecuación en entrada de Geogebra

Fuente: Autor

3) Se observa que se representa una circunferencia, vaya propiedades de esta y cambiamos color y estilo.

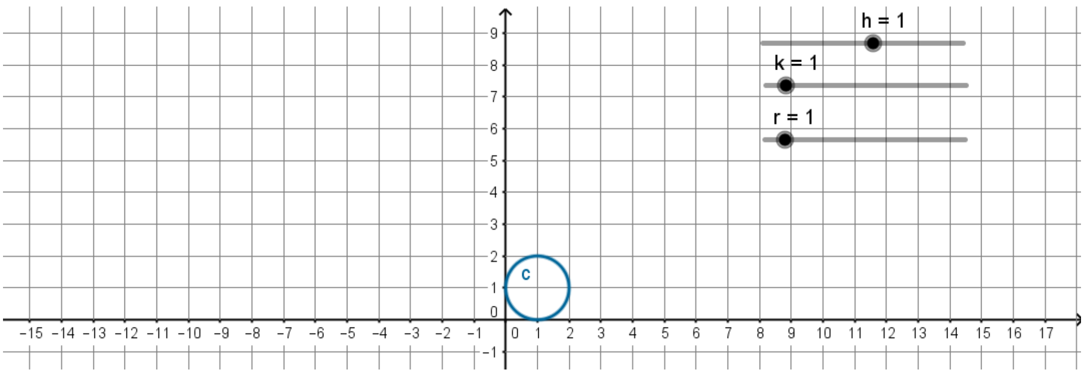


Figura 17. Gráfica de circunferencia según deslizadores h,k y r

Fuente: Autor

4) Mueva los deslizadores y observe que sucede con cada uno de ellos.

5) Introduzca en la entrada C=(h,k), se ve que se dibuja un punto dentro de la circunferencia.

6) Vaya a la opción 

y dé click en cualquier lugar de la circunferencia, se va a dibujar un punto en ella. Dibuje un segmento entre el centro C y este punto.

7) Vuelva a mover los deslizadores.

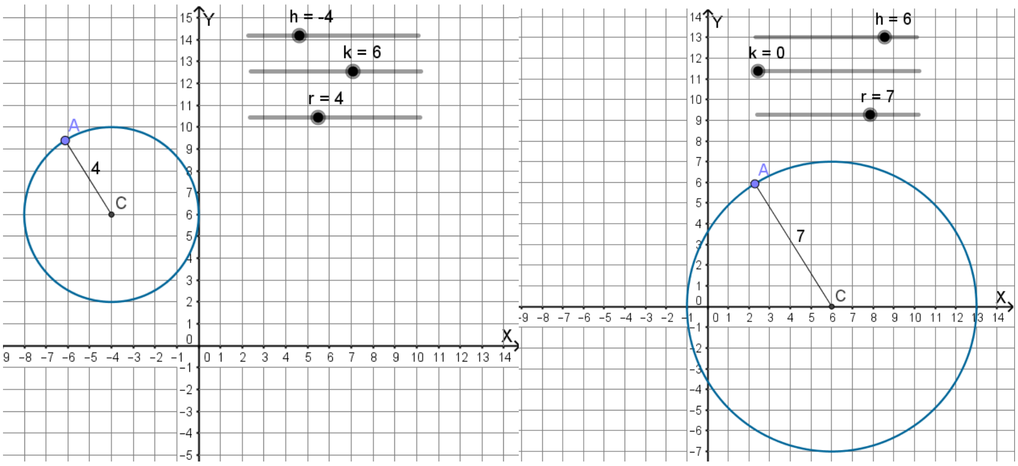


Figura 18. Diferentes gráficas de circunferencia según movimientos de deslizadores h,k y r

Fuente: Autor

8) En la vista algebraica, en donde se nos muestra la ecuación de la circunferencia graficada se arrastra dicha ecuación a la vista gráfica.

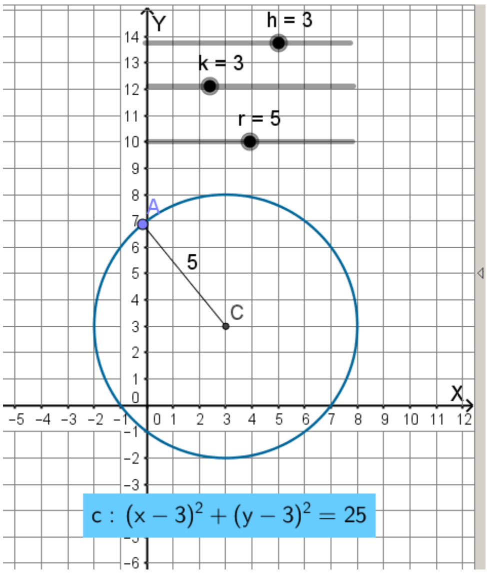


Figura 19. *Circunferencia con su respectiva ecuación en forma ordinaria*

Fuente: Autor

¿Qué representa el Punto C?

El centro de la circunferencia

¿Qué representa *h*?

La abscisa del centro de la circunferencia (coordenada en x)?

¿Qué representa *k*?

La abscisa del centro de la circunferencia (coordenada en y)?

¿Qué representa *r*?

Representa el radio de la circunferencia.

¿Qué ocasiona un movimiento del deslizador h y k?

En el caso de h produce un desplazamiento horizontal de la circunferencia y en el de k un movimiento vertical de la misma.

El cambio de los deslizadores, ¿ocasiona un cambio en la circunferencia?

Desde luego, ya que los valores que tengamos en h, k y r están relacionados con la ecuación de la circunferencia $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ *. Por lo tanto, cambia la ecuación observada en la vista gráfica.*

¿Para obtener circunferencia cuyo el centro esté sobre el eje de las abcisas que debo hacer?

Se debe tener a k=0 y h puede tomar cualquier valor.

Actividad 3.2. Ecuación canónica de la circunferencia: Del applet anterior se ubica los deslizadores en 0 y sigue lo planeado a continuación:

1) Realiza movimientos en el deslizador "r".

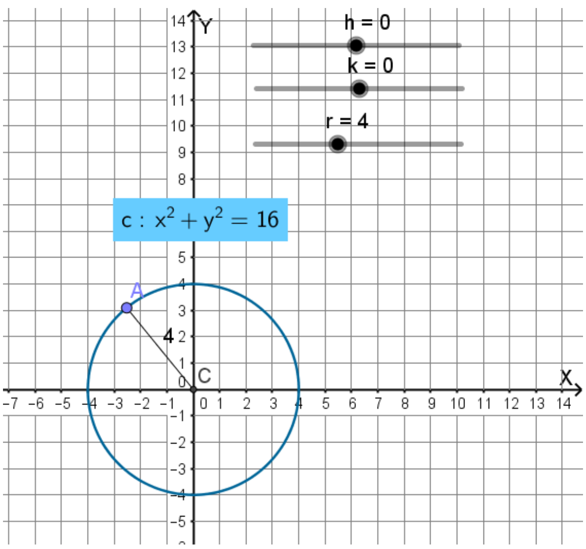


Figura 20. *Circunferencia con centro en el origen*

Fuente: Autor

¿Dónde se ubicó el centro de la circunferencia?

El centro de la circunferencia se ubicó ahora en el origen, cuyas coordenadas son (0,0).

¿Qué pasó con la ecuación de la circunferencia?

Al eliminarse los coeficientes h y k, queda de la forma $x^2 + y^2 = r^2$*, es la ecuación canónica de la circunferencia.*

Actividad 3.3. Determinar la ecuación de una circunferencia dadas ciertas condiciones. Se plantearon algunos ejercicios en los cuales se daban como datos las coordenadas del centro y del radio (o existía una condición para determinarlos) y con estos plantear la ecuación solicitada. Además, que los estudiantes resolvían los ejercicios usando Geogebra, importante fue el uso de conocimientos previos como distancia entre dos puntos.

También se trabajó que dada la ecuación obtengan la información solicitada y puedan representarla gráficamente.

Encuentre las ecuaciones de las siguientes circunferencias y grafique:

a) Centro (-6,7) y radio 3

Con Geogebra:

1) Se ingresa en la entrada C=(-6,7)

2) Use la opción 

marco el punto C y luego me solicita el radio, coloco 3.

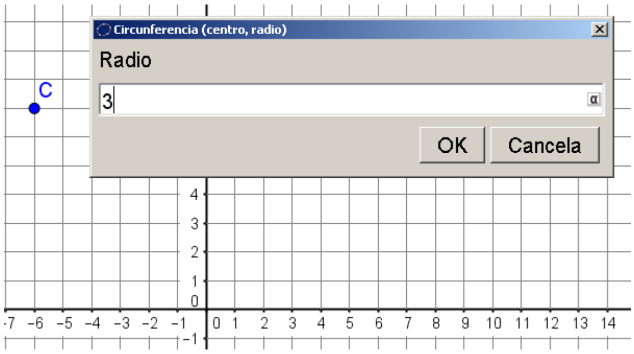


Figura 21. *Ingreso de valores del radio*

Fuente: Autor

3) Arrastre la ecuación de la vista algebraica a la vista gráfica

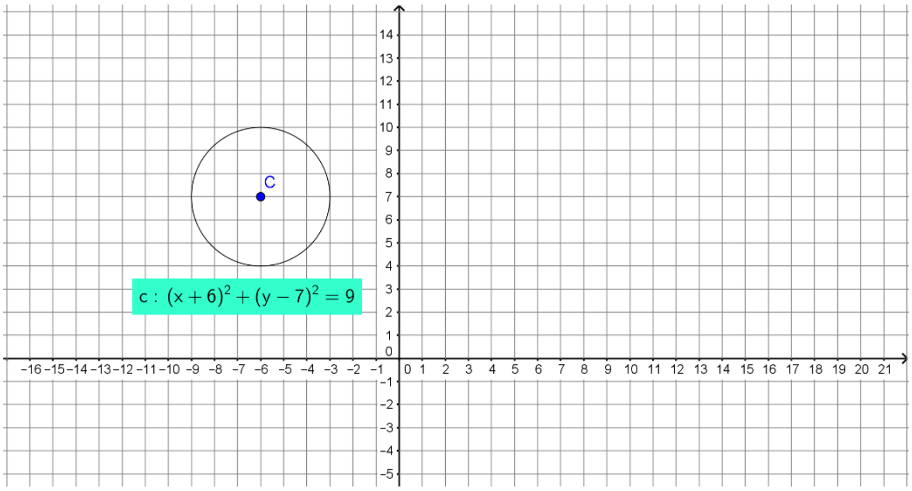


Figura 22. *Gráfico de la circunferencia con centro (-6,7) y radio 3 con su ecuación*

Fuente: Autor

4) La ecuación es $(x+6)^2+(y-7)^2=9$

Analíticamente:

C(-6,7)   h= -6, k=7

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ Ecuación ordinaria de la circunferencia

$(x-(-6))^2+(y-7)^2=3^2$ Se sustituye h por -6, k por 7 y r por 3

$(x+6)^2+(y-7)^2=9$ Ecuación de la circunferencia

b) Centro (0,0) y radio 5

Con Geogebra:

1) Se ingresa en la entrada C=(0,0)
2) Use la opción Circunferencia (centro, radio) marco el punto C y luego me solicita el radio coloco 5.
3) Arrastre la ecuación de la vista algebraica a la vista gráfica

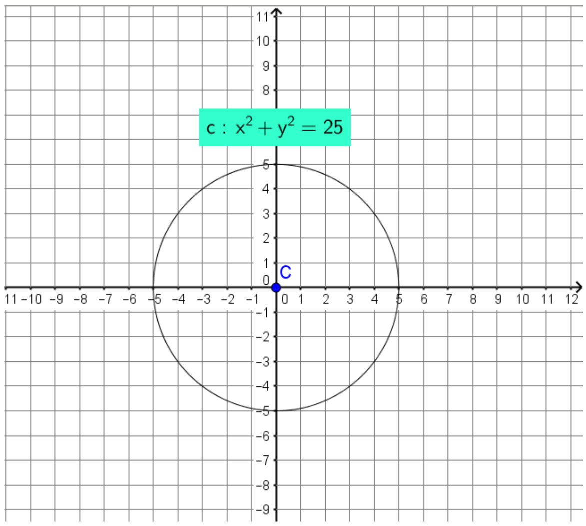


Figura 23. Gráfico de la circunferencia con centro (0,0) y radio 5 con su ecuación

Fuente: Autor

4) La ecuación es $x^2+y^2=25$

Analíticamente:

C(0,0) Circunferencia con centro en origen

$x^2+y^2=r^2$ Ecuación canónica de la circunferencia

$x^2+y^2=5^2$ Se sustituye r por 5

$x^2+y^2=25$ Ecuación de la circunferencia

c) Centro (-3,-5) y que pasa por el punto (-2,4)

Con Geogebra:

1) Se ingresa en la entrada C=(-3,-5)
2) Se ingresa en la entrada A=(-2,4)
3) Trace un segmento entre A y B, y en propiedades se muestra el valor de este.

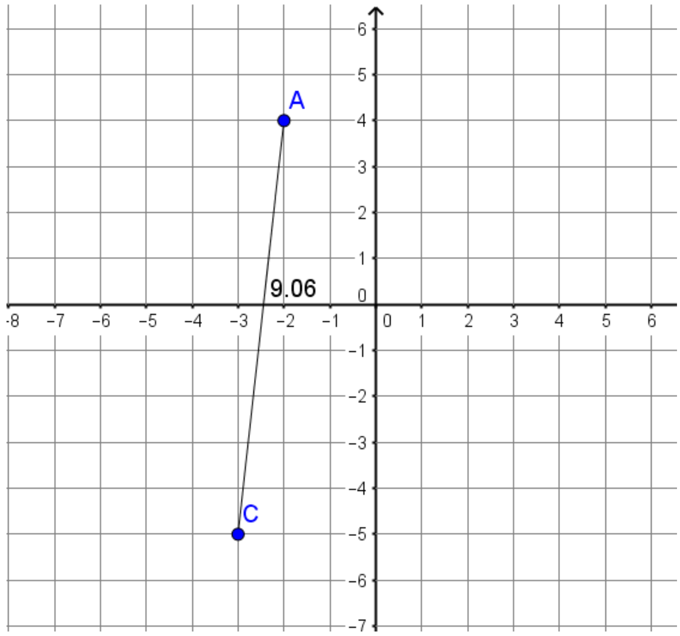


Figura 24. Segmento rectilíneo entre los puntos A y C con su longitud

Fuente: Autor

¿Qué representa el valor de AC?

Determina la medida del radio

4) Use la opción  marcando primero el punto C y luego el A.
5) Arrastre la ecuación de la vista algebraica a la vista gráfica

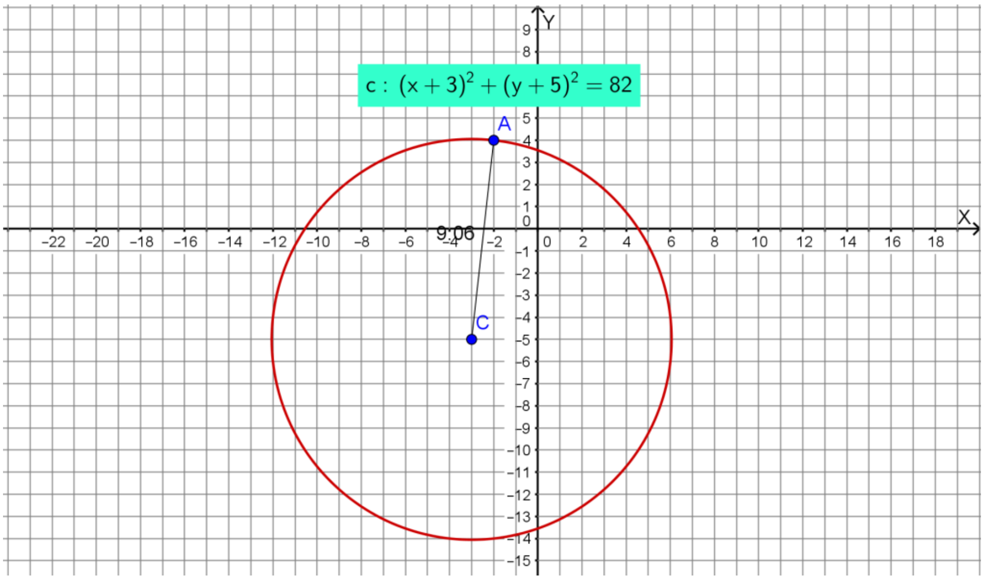


Figura 25. Circunferencia con centro (-3,-5) y que pasa por el punto(-2,4)

Fuente: Autor

6) La ecuación sería $(x+3)^2+(y+5)^2=82$

¿Sin usar la opción 

se podría resolver el ejercicio?

Sí, con la medida del segmento AC que aproximadamente es 9,06 se usaría la opción ya 

que AC es el radio.

En este caso la ecuación sería $(x+3)^2+(y+5)^2=82.07$, *se ve que varía el valor de* r^2 *por el uso de decimales de la longitud del radio.*

Analíticamente: C=(-3,-5) A=(-2,4)

C=(-3,-5) y A=(-2,4)	C es centro y A punto en la circunferencia
$\overline{AC}=\sqrt{(-5-4)^2+(-3+2)^2}$	Distancia entre dos puntos, pues
$\overline{AC}=\sqrt{82}$	$\overline{AC}$ es radio de la circunferencia.

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ Ecuación ordinaria de circunferencia

$(x-(-3))^2+-(y-(-5))^2=(\sqrt{82})^2$ Sustituyo valores de h, k y r

$(x+3)^2+(y+5)^2=82$ Ecuación de la circunferencia

d) Determine la ecuación de la siguiente circunferencia

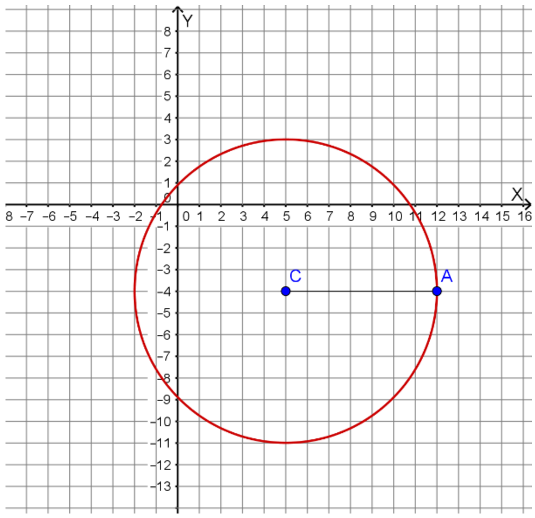


Figura 26. Gráfico de una circunferencia con centro (5,-4) y radio (7)

Fuente: Autor

Analíticamente:

C=(5,-4) Identificamos valor del centro

r=7 Determinamos que el valor de radio=7

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ Ecuación ordinaria de la circunferencia

$(x-5)^2+-(y-(-4))^2=7^2$ Sustituimos h, k y r

$(x-5)^2+(y+4)^2=49$ Ecuación de la circunferencia

Con Geogebra:

1) Ingreso en la entrada C= (5,-4)
2) Uso la opción 

marco el punto C y luego me solicita el radio, se coloca 7.

3) Arrastre la ecuación de la vista algebraica a la vista gráfica

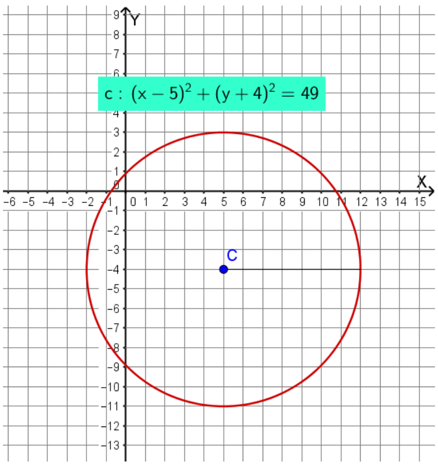


Figura 27. Gráfico de una circunferencia con centro (5,-4) y radio (7) con su ecuación ordinaria

Fuente: Autor

4) La ecuación es $(x-5)^2+(y+4)^2=49$

Actividad 4

Tema: Ecuación general de la circunferencia y aplicaciones

Objetivos:

- Conocer la ecuación general de la circunferencia.
- Determinar las ecuaciones de circunferencias dadas varias condiciones.
- Realizar el gráfico de circunferencias a partir de su ecuación y/o diferentes condiciones.
- Determinar la pertenencia de un punto a una circunferencia.
- Analizar una circunferencia a través de los coeficientes D, E y F.
- Resolver problemas con la ecuación de la circunferencia.

- **Forma de trabajo:** Individual.
- **Tiempo aproximado:** Cuatro horas pedagógicas
- **Planificación (plan de clase):** Anexo 5
- **Descripción de la actividad:** En primera instancia se presenta la ecuación general de la circunferencia, se desarrolla applets en Geogebra para analizar a la circunferencia a través de los coeficientes D, E y F; y estudiando el valor del discriminante en la ecuación.

  Se plantea la obtención de la ecuación de la circunferencia dadas condiciones diferentes al centro y radio, también como pasar de la ecuación ordinaria a la general y viceversa. Finalmente la aplicación de la ecuación de la circunferencia en la resolución de problemas (aplicaciones).

Desarrollo:

- **Primera Etapa**

  Determinación de los temas a tratarse

-Ecuación general de la circunferencia.

-Relación entre coeficientes D, E, F y h, k y r

Revisión Conceptual

Ecuación general de la circunferencia

A partir de la ecuación ordinaria de la circunferencia se puede encontrar la ecuación general de esta.

Por lo visto anteriormente se tiene que:

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$	Ecuación ordinaria de la circunferencia.
$x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2=r^2$	Desarrollando los cuadrados
$x^2+y^2-2xh-2yk+h^2+k^2-r^2=0$	Ordenando e igualando a cero Reemplace $-2h=D, -2k=E$ y $h^2+k^2-r^2=F$
$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$	Se tiene la ecuación general de la circunferencia.

Se puede denotar que $h=-\frac{D}{2}$ y $k=-\frac{E}{2}$.

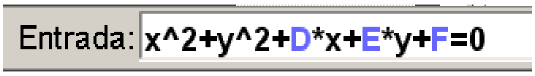
De la sustitución de h y k por sus equivalencias con D y E en $h^2+k^2-r^2=F$, y despejando r se tiene que $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$.

Ejercicio 4.1. Ecuación general de la circunferencia: En este ejercicio se desarrolló un applet en Geogebra en donde se varía los deslizadores D, E y F para identificar cuáles son los cambios en la circunferencia y encontrar de esta manera la relación con los parámetros h, k y r.

Grafique una circunferencia usando la ecuación general de la circunferencia, use deslizadores para los coeficientes D, E y F.

a) Se crea tres deslizadores D, E y F usando la herramienta con intervalo mínimo de -10 y máximo de 10, con un incremento de 1.

b) Escriba en la entrada del programa $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, use la función centro, ingresando en la entrada centro(c).



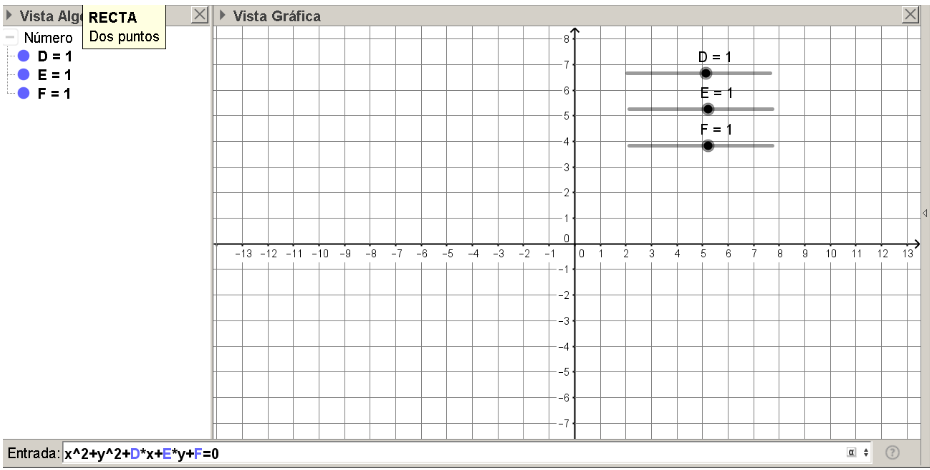


Figura 28. Ingreso de deslizadores D, E y F

Fuente: Autor

c) Se mueve los deslizadores D, E y F; se analiza que sucede al movimiento de cada uno.

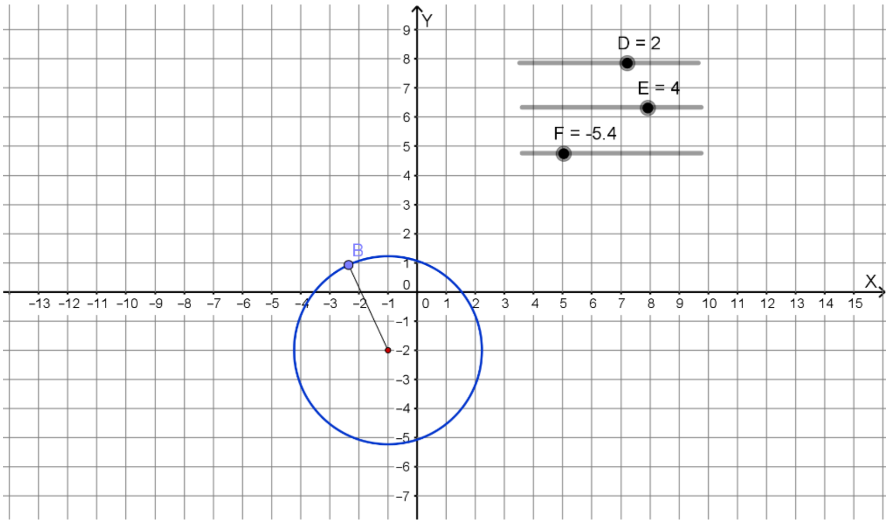


Figura 29. Gráfica de circunferencia según movimiento de deslizadores D, E y F

Fuente: Autor

d) Usando la opción texto realice los cálculos de h, k y r en la circunferencia, además se va a mostrar esos valores en el elemento correspondiente, usando la opción propiedades.

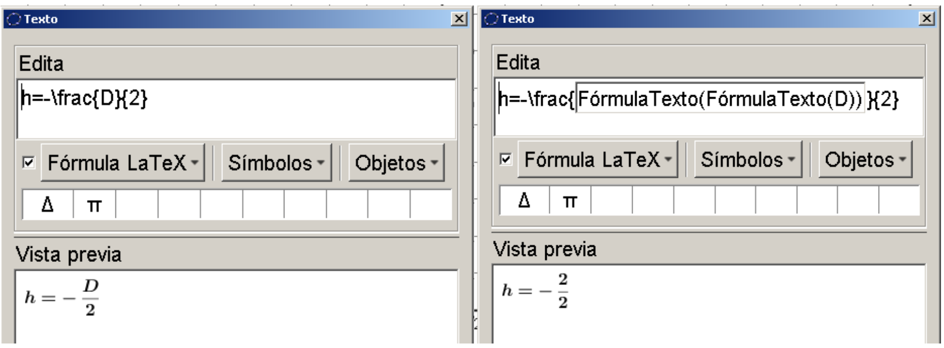


Figura 30. Ingreso de cálculo del parámetro "h"

Fuente: Autor

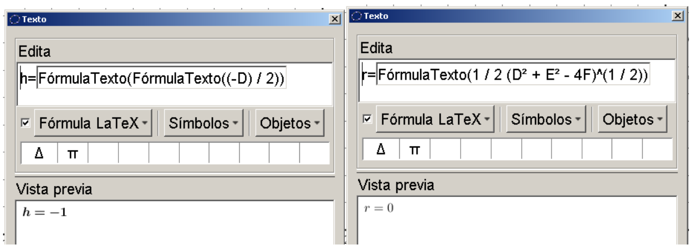


Figura 31. Ingreso de cálculo del parámetro "r"

Fuente: Autor

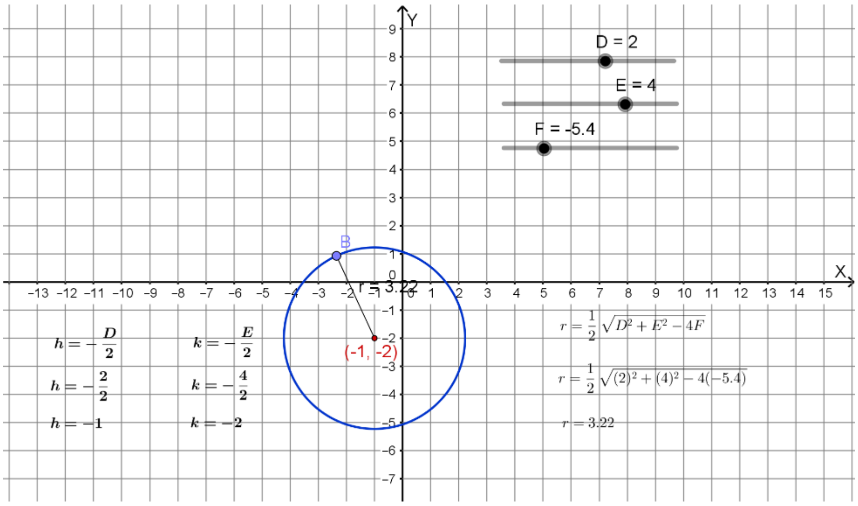


Figura 32. Muestra de los cálculos de parámetros h, k y r en Geogebra

Fuente: Autor

¿Qué sucede al mover el deslizador D y por qué?

La circunferencia se desplaza horizontalmente, la ordenada del centro se mantiene constante, pero el radio de la circunferencia varía aumentando o disminuyendo. Esto sucede ya que la abscisa del centro depende del valor de D, pues, $h = -\frac{D}{2}$ *y el valor del radio también depende de D.*

¿Qué sucede al mover el deslizador E y por qué?

La circunferencia se desplaza verticalmente, la abscisa del centro se mantiene constante, pero el radio de la circunferencia varía aumentando o disminuyendo. Esto sucede ya que la ordenada del centro depende del valor de E, pues, $k = -\frac{E}{2}$ *y el valor del radio también depende de D.*

¿Qué sucede al mover el deslizador F y por qué?

Únicamente el radio de la circunferencia varía, pues depende directamente de F y mantenerse D y E constantes, sólo el radio cambia pues, $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.

e) Ahora calcula solo el valor del $D^2 + E^2 - 4F$ usando las herramientas texto de Geogebra.

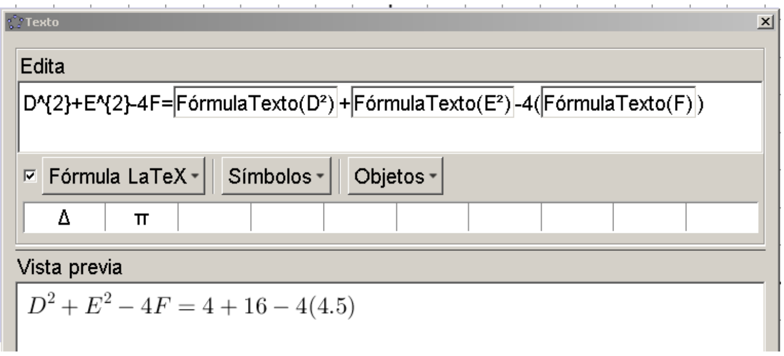


Figura 33. Ingreso de cálculo de $D^2 + E^2 - 4F$
Fuente: Autor

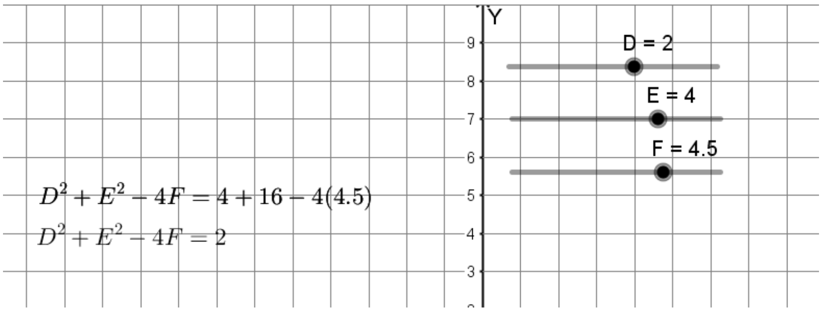


Figura 34. Muestra de los cálculos de $D^2 + E^2 - 4F$ *en Geogebra*
Fuente: Autor

f) Mueva los deslizadores varias veces, identifique las condiciones planteadas en la tabla

Completamos la tabla 2:

Tabla 6. *Gráfica de circunferencia según valor* $D^2 + E^2 - 4F$

Valor de $\boldsymbol{D^2 + E^2 - 4F}$	***Resultado en la gráfica***
=0	*Un punto*
>0	*Una circunferencia*
<0	*No se grafica nada*

Fuente: Autor

Ejercicio 4.2. Circunferencia sujeta a condiciones: En este ejercicio se analiza la pertenencia de un punto al lugar geométrico circunferencia, partiendo de la consigna de que si pertenece al lugar geométrico circunferencia satisface la ecuación que la representa.

Dada ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$, determina cuales de los siguientes puntos pertenece a la misma, A(1,1); B(-1,3), C(-1,4) y D(2,4).

Con Geogebra:

a) Se escribe en la entrada $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$
b) Ingresaen la entrada cada uno de los puntos A=(1,1), B=(-1,3), C=(-1,4) y D=(2,4).

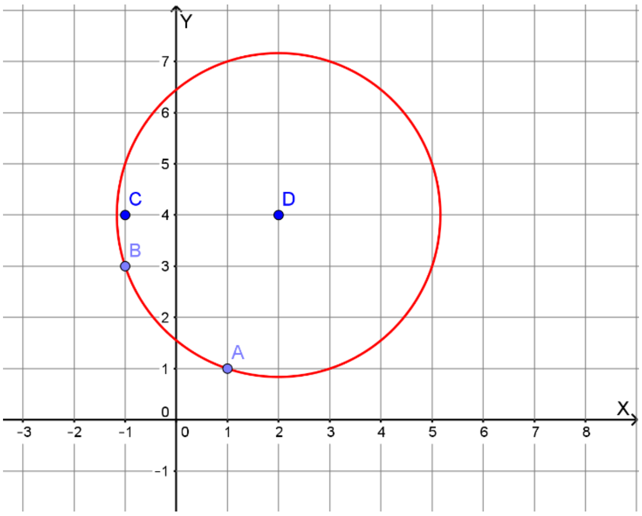


Figura 35. Gráfica de circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$
con puntos que pertenecen y no a al lugar geométrico
Fuente: Autor

c) De donde se denota gráficamente que los puntos A y B pertenecen a la circunferencia.

d) Ahora vaya Cálculo simbólico e introduzca la ecuación $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$

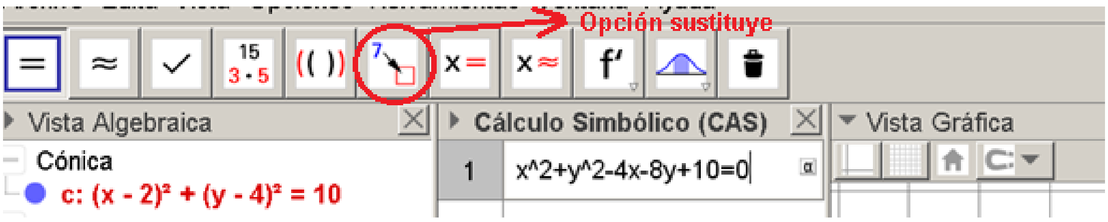


Figura 36. Ingreso de ecuación $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$ *en vista cálculo simbólico*
Fuente: Autor

e) Escoge la opción sustituye y colocamos en x y y los valores de los pares ordenados (abscisa y ordenada) en esta caso A(1,1) y presionamos 

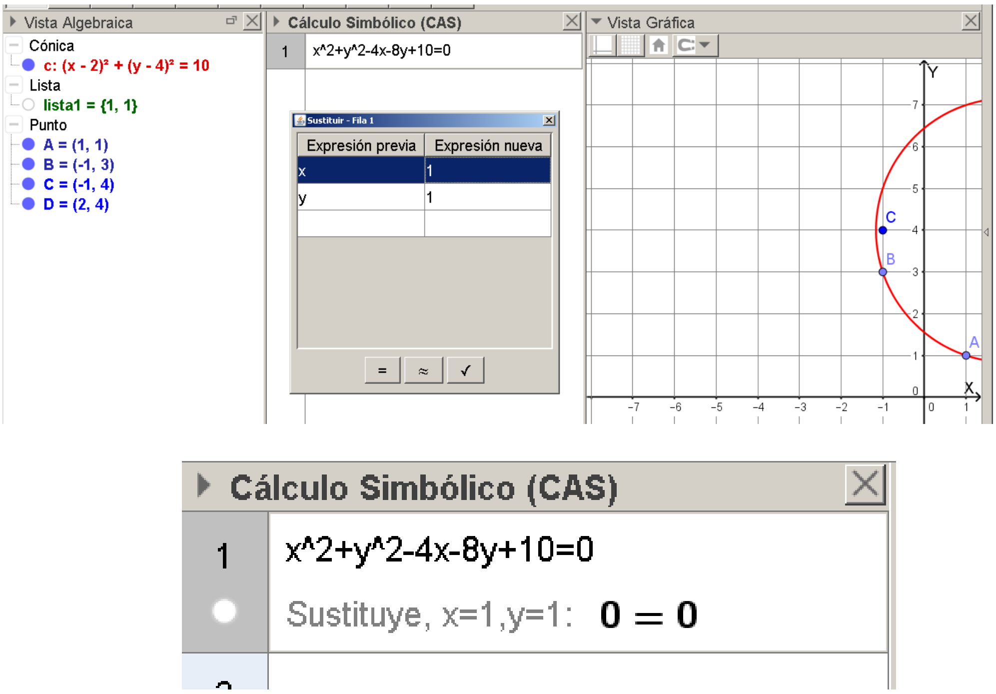


Figura 37. Sustitución de las coordenadas de puntos A en la ecuación $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$ *usando el cálculo simbólico*

Fuente: Autor

¿Qué pasa con la ecuación al sustituir con el punto A?

En este caso se nota que al sustituir a x y y por la abscisa y ordenada del punto A se satisface la igualdad.

¿Qué sucede con los otros puntos?

Vemos que con el punto B se satisface la ecuación, pero con el C y D.

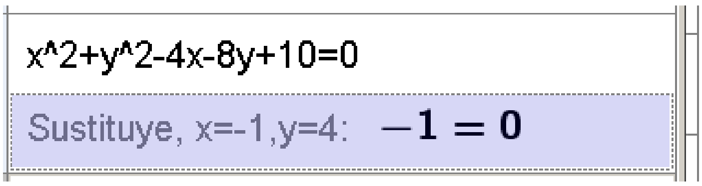


Figura 38. Sustitución de las coordenadas de puntos D en la ecuación $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$ *usando el cálculo simbólico*

Fuente: Autor

¿Qué conclusión tenemos al comparar con los resultados del paso c)?

Que un punto pertenece al lugar geométrico si este satisface a la ecuación que lo representa, es decir si pertenece a la circunferencia también pertenece a la ecuación de ella.

Analíticamente:

$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$ Ecuación general de la circunferencia.

$A(1,1)$ abscisa=1, ordenada=1

$$(1)^2 + (1)^2 - 4(1) - 8(1) + 10 = 0$$
$$1 + 1 - 4 - 8 + 10 = 0$$
$$0 = 0$$

Sustituimos a x=1 y y=1

Satisface a la ecuación por lo tanto el punto A si pertenece a la circunferencia.

$B(-1,3)$ abscisa= -1, ordenada=3

$$(-1)^2 + (3)^2 - 4(-1) - 8(3) + 10 = 0$$
$$1 + 9 + 4 - 24 + 10 = 0$$
$$0 = 0$$

Sustituimos a x=-1 y y=3

Satisface a la ecuación por lo tanto el punto B si pertenece a la circunferencia.

$A(-1,4)$ abscisa= -1, ordenada=4

$$(-1)^2 + (4)^2 - 4(-1) - 8(4) + 10 = 0$$
$$1 + 16 + 4 - 32 + 10 = 0$$
$$-1 \neq 0$$

Sustituimos a x= -1 y y=4

No satisface a la ecuación por lo tanto el punto C no pertenece a la circunferencia.

$A(2,4)$ abscisa=2, ordenada=4

$$(2)^2 + (4)^2 - 4(2) - 8(4) + 10 = 0$$
$$4 + 16 - 8 - 32 + 10 = 0$$
$$-10 \neq 0$$

Sustituimos a x=1 y y=1

No satisface a la ecuación por lo tanto el punto D no pertenece a la circunferencia.

Ejercicio 4.3. Tangente a la curva: Se especificó este ejercicio para que se plantee las relaciones de tangencia de una recta y una circunferencia, además para que aplique conocimientos previos como ecuación de la recta y relación de perpendicularidad.

Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$ *en el punto (3,5).*

Con Geogebra:

1) Se ingresa en la entrada la ecuación $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$
2) Agregue el punto A=(3,5)
3) Determine el centro de la circunferencia con la función Centro(<Cónica>)

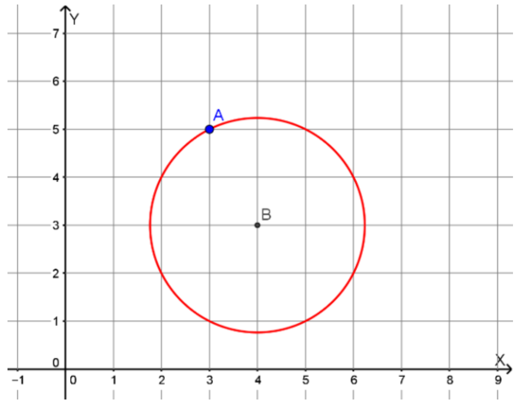


Figura 39. Gráfica de la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$ *y punto A=(3,5)*

Fuente: Autor

4) Se parte de la definición de recta tangente: “La tangente se define como una recta que tiene un solo punto en común con la circunferencia” (Lehmann, 1989, p. 120), por lo tanto, para que ocurra esto dicha recta debe ser perpendicular el radio en el punto de tangencia, ya que si no fuera así cortaría a la circunferencia en más de un punto siendo una recta secante.

5) Use la herramienta perpendicular  entre el punto de tangencia y el radio.

6) La recta obtenida sería la recta tangente, no queda más que arrastrar la ecuación de la vista algebraica.

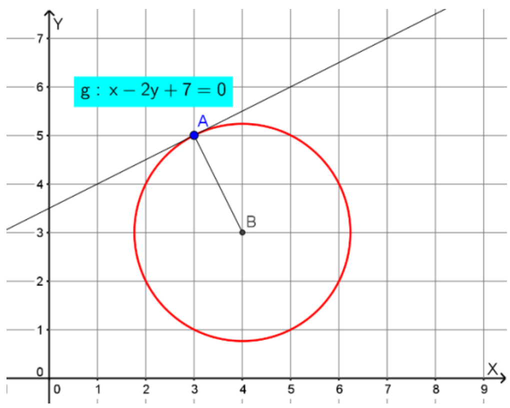


Figura 40. Recta tangente de la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$ *con el punto A=(3,5)*

Fuente: Autor

¿Qué condiciones cumple la pendiente del radio y de la recta tangente?

Al ser perpendiculares cumplen el principio de perpendicularidad en donde las pendientes son inversas y de signo contrario.

Analíticamente:

$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$ Ecuación general de la circunferencia.

$x^2 - 8x + y^2 - 6y + 20 = 0$ Se expresa a la ecuación general como ordinaria para determinar las coordenadas del centro.

Se completa los cuadrados y determina cada trinomio

$$x^2 - 8x + 16 - 16 + y^2 - 6y + 9 - 9 + 20 = 0$$

$$(x^2 - 8x + 16) - 16 + (y^2 - 6y + 9) - 9 + 20 = 0$$

$$(x-4)^2 - 16 + (y-3)^2 - 9 + 20 = 0$$

Factorar

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 - 5 = 0$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5$$

De donde el centro tiene coordenadas (4,3) y el radio es $\sqrt{5}$

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Determina la pendiente del radio usando el punto tangente A(3,5) y el centro (4,3)

$$m_1 = \frac{3-5}{4-3}$$

$$m_1 = -2$$

$m_2 = -\frac{1}{m_1}$

$m_2 = -\frac{1}{-2}$

$m_2 = \frac{1}{2}$

Por ser perpendicular la recta tangente y el radio.

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 5 = \frac{1}{2}(x - 3)$

$2y - 10 = (x - 3)$

$x - 2y + 10 - 3 = 0$

$x - 2y + 7 = 0$

Ecuación recta punto-pendiente, pues tangente pasa por punto A(3,5) y la pendiente es m_2

Se expresa de la forma general

Ecuación de la recta tangente.

Se pudo identificar que la ecuación obtenida es la misma que con el software Geogebra.

Ejercicio 4.4. Aplicación: Resolver el ejercicio propuesto:

Dos antenas de radio emiten ondas circulares a partir de dos puntos distintos A y B. Cada onda cubre una distancia máxima de 5km. Si se supone que los puntos A y B pertenecen al plano cartesiano, tales que A(1,2) y B(6,10), entonces:

Halla la ecuación que describe la máxima distancia alcanzada por cada una de las ondas.

Determinar si un sector C que se encuentra en la coordenada (6,4) recibe alguna de las señales.

Con Geogebra:

a) Se ingres los puntos A=(1,2) y B=(6,10) en la entrada.

¿Qué representa los 5km en la circunferencia y respecto a la antena?

Representaría el radio de la circunferencia y en la antena sería la máxima emisión.

b) Mediante la herramienta Circunferencia (centro, radio) dibujar dos circunferencias con centro en A y B, y radio 5. Configure las circunferencias con líneas entre puntadas y se arrastra la ecuación de cada una de las ecuaciones de la vista algebraica.

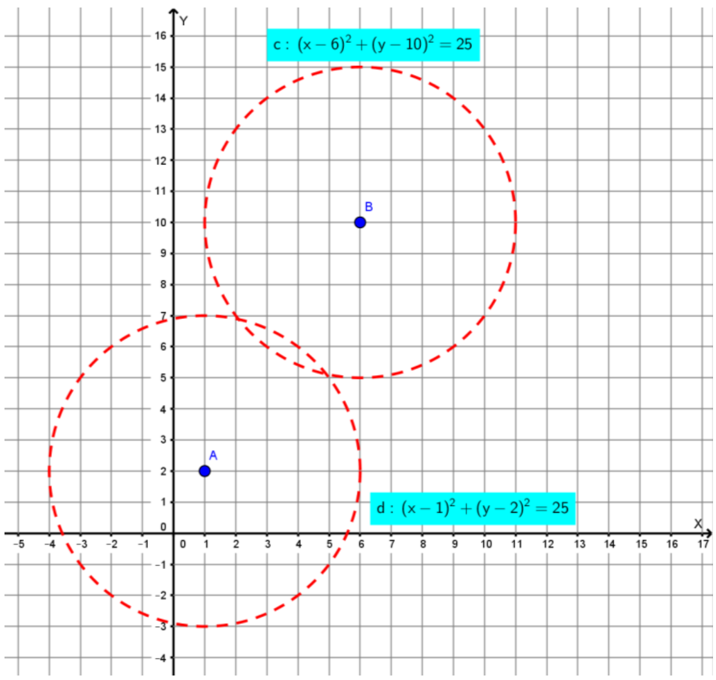


Figura 41. Circunferencias que describen la emisión máxima de las antenas A y B

Fuente: Autor

De donde $(x-6)^2+(y-10)^2=25$ *y* $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ *serán las ecuaciones que describen la máxima distancia alcanzada por cada una de las ondas.*

c) Se realiza una animación de la emisión de ondas, para esto se crea un deslizador de nombre “r” con las siguientes configuraciones.

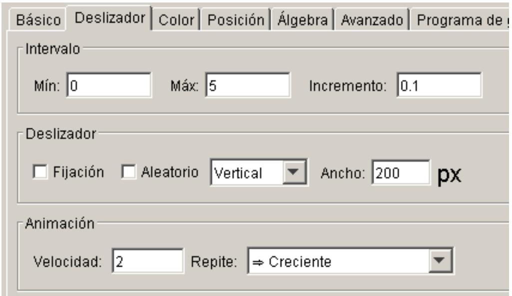


Figura 42. Configuración del deslizador r para realizar la animación
Fuente: Autor

d) Cree dos circunferencias más usando 

con centro en A y B, pero de radio “r”, para que se enlace con el deslizador.

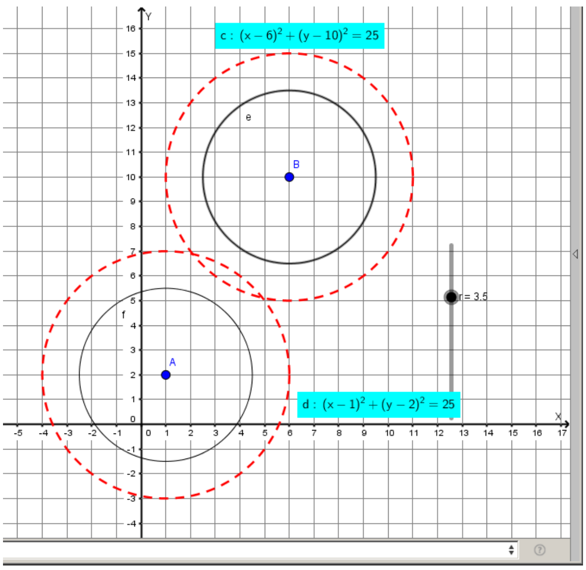


Figura 43. Circunferencias auxiliares para simular la emisión de ondas
Fuente: Autor

e) Ingrese a propiedades de la circunferencia "e" y en programa de guion coloque lo siguiente:

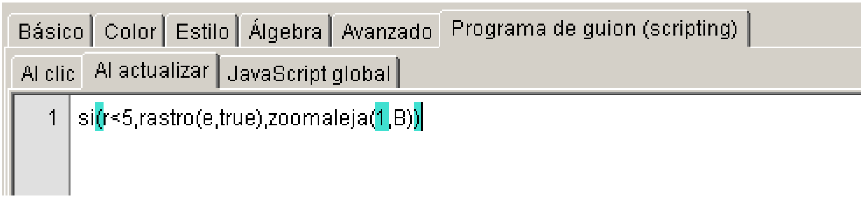


Figura 44. Configuración de la Circunferencia en B auxiliares para simular la emisión de ondas

Fuente: Autor

Esto es para que se dibuje el rastro de la circunferencia "e" emulando una onda.

f) Lo mismo se hace con la circunferencia f, pero escrita la siguiente línea de programa.

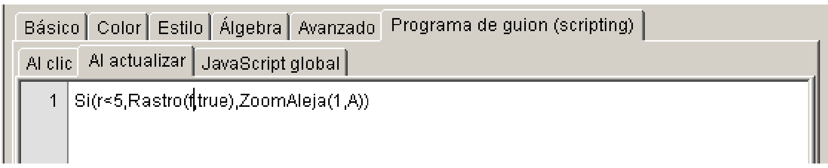


Figura 45. Configuración de la Circunferencia en A auxiliares para simular la emisión de ondas6

Fuente: Autor

Obteniendo el siguiente resultado al activar la animación del deslizador "r".

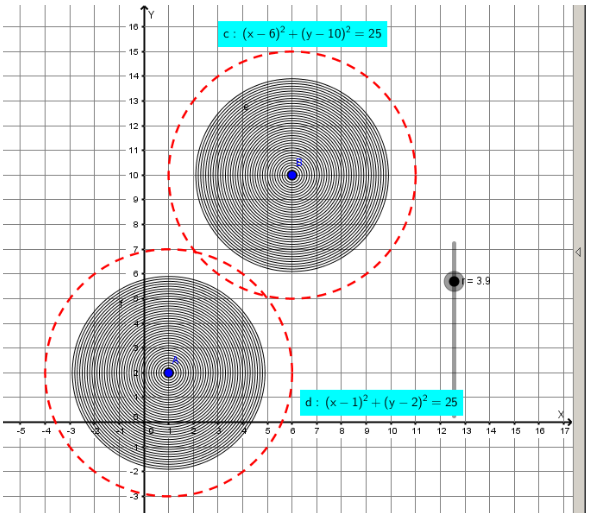


Figura 46. Animación de las circunferencia auxiliar para simular la emisión de ondas

Fuente: Autor

En donde las ondas se ven como una animación.

g) Ahora para responder la segunda pregunta vamos a ubicar el punto C=*(6,4)* en la entrada, observando lo siguiente:

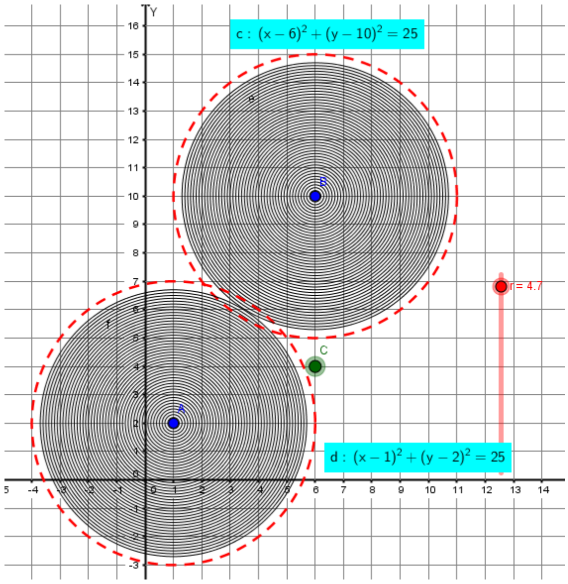


Figura 47. Ubicación del punto C en la animación de la transmisión de las antenas

Fuente: Autor

Podemos determinar entonces que el sector C no recibe señal de ninguna antena.

Analíticamente:

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ Ecuación ordinaria de la circunferencia.

$(x-1)^2+(y-2)^2=5^2$ Sustituya el centro A(1,2) y radio =5

$(x-1)^2+(y-2)^2=25$

$(x-6)^2+(y-10)^2=5^2$ Sustituya el centro B(6,10) y radio =5

$(x-6)^2+(y-10)^2=25$

$(x-1)^2+(y-2)^2=25$

$(x-6)^2+(y-10)^2=25$

Estas son las ecuaciones que describen la máxima distancia alcanzada por cada una de las ondas.

Analizando con el punto C(6,4)

Para identificar si las ondas de alguna antena llegan hacia el sector C determinamos la distancia desde cada centro hasta el punto.

A=(1,2) y C=(6,4)

C punto sector y A centro de la circunferencia

$\overline{AC}=\sqrt{(4-2)^2+(6-1)^2}$ Distancia entre dos puntos.

$\overline{AC} = \sqrt{26}$

$\overline{AC} \approx 5{,}09$

Por lo tanto, la señal de la antena A no llega al punto C pues AC es mayor a 5, distancia máxima de onda antena A.

B=(6,10) y C=(6,4)

C punto sector y B centro de la circunferencia

$\overline{BC} = \sqrt{(4-10)^2 + (6-6)^2}$

$\overline{BC} = \sqrt{36}$

$\overline{BC} = 6$

Distancia entre dos puntos.

Por lo tanto, la señal de la antena B no llega al punto C pues BC es mayor a 5, distancia máxima de onda antena B.

Actividad 4.5. Aplicación imagen: En esta vez se solicitó a los estudiantes que obtengan imágenes que representen circunferencias y creando deslizadores obtener la ecuación que simboliza la imagen.

Se presentan algunos ejemplos:

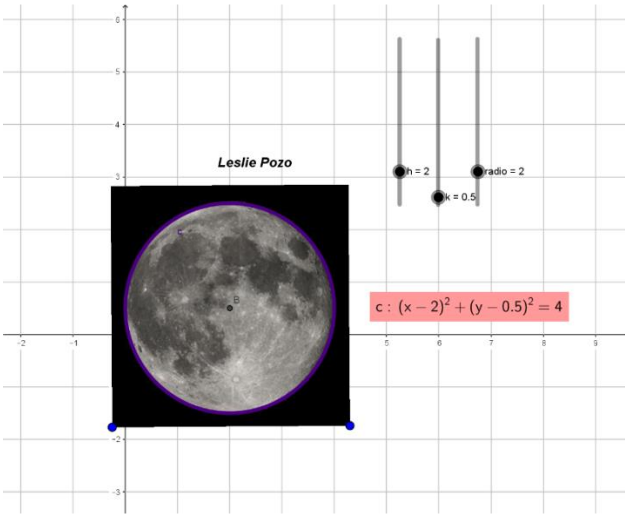


Figura 48. Ecuación circunferencia usando deslizadores, objeto Luna
Fuente: Autor

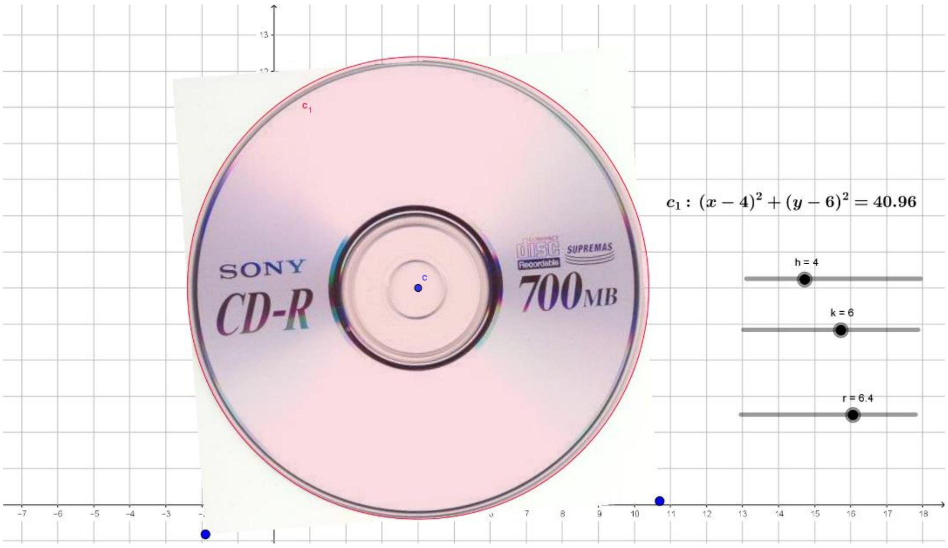


Figura 49. Ecuación circunferencia usando deslizadores, objeto disco compacto
Fuente: Autor

Actividad 5

Tema: La parábola (definición, lugar geométrico)

- **Objetivo:**
  - Aplicar las herramientas de Geogebra para reconocer el lugar geométrico que representa a la parábola aplicando su definición.
- **Forma de trabajo:** Individual.
- **Tiempo aproximado:** Una hora pedagógica
- **Planificación (plan de clase):** Anexo 5
- **Descripción de la actividad:**

Se partió de la definición de parábola como lugar geométrico, se solicitó que usen el Geogebra para dibujar la parábola tomando en cuenta su definición y demostrar que en esta se cumple lo planteado.

Desarrollo:

- **Primera Etapa**

  Determinación de los temas a tratarse

  -Definición de parábola

Revisión conceptual

Definición parábola:

Una parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta. El punto fijo se llama foco y la recta fija directriz de la parábola. La definición excluye el caso en que el foco está sobre la directriz (Lehmann, 1990, p.149).

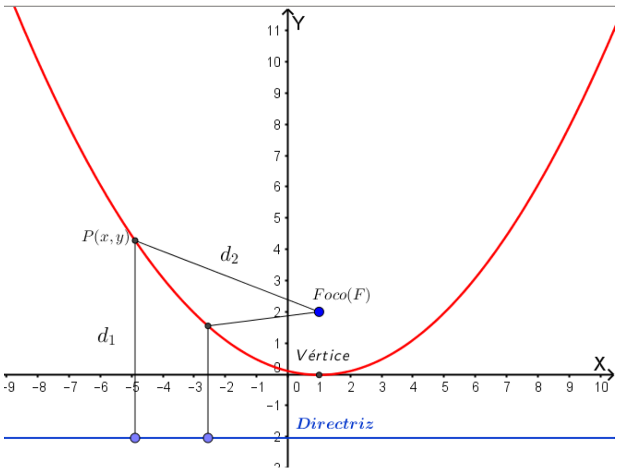


Figura 50. Parábola y sus elementos foco, vértice y directríz

Fuente: Autor

- **Segunda Etapa**

Actividad 5.1. Definición de parábola: Dibuje el lugar geométrico que representa una parábola usando su definición y herramientas de Geogebra, tome en cuenta los siguientes pasos:

1) en la entrada una recta horizontal que será la directriz, en este caso y=-3
2) Vaya a la herramienta *punto en objeto* y marque en la recta anterior, compruebe que el punto se mueve a través de la directriz “d”.

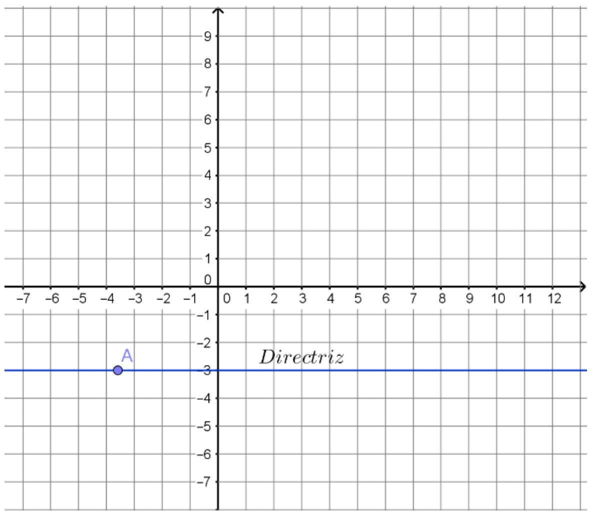
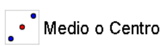


Figura 51. Recta directriz y=-3para graficar parábola
Fuente: Autor

3) Se coloca un punto F sobre la recta anterior, este será el foco.
4) Mediante la herramienta perpendicular, dibuje una recta perpendicular entre A y la directriz.
5) Trace un segmento entre A y F.
6) Con la herramienta 

hallar el punto medio del segmento $\overline{AC}$

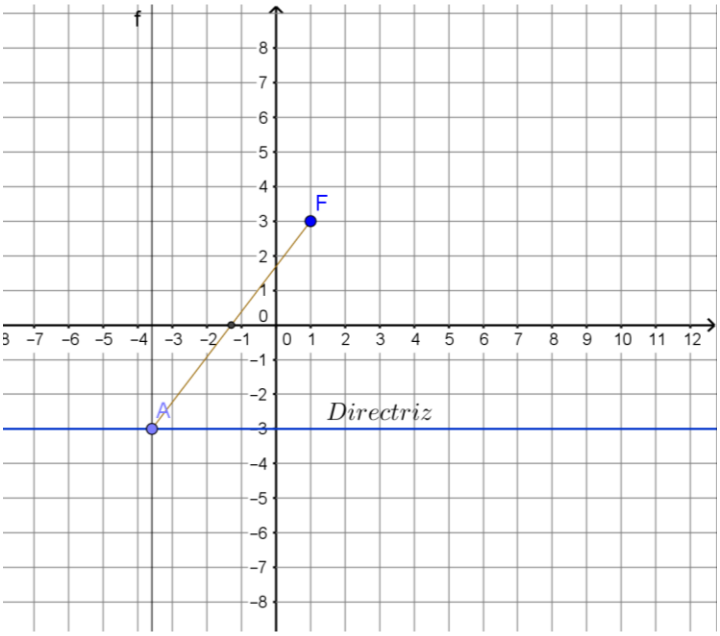


Figura 52. Determinación de punto medio en segmento $\overline{AC}$

Fuente: Autor

7) Para cumplir la condición de que la distancia desde A hasta un punto P sea igual a la distancia de F a P (definición de parábola), se dibuja un triángulo isósceles APF.

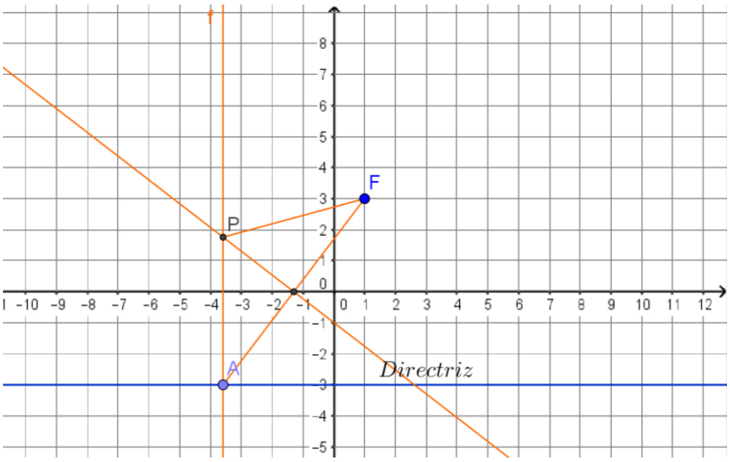


Figura 53. Gráfica de triángulos isósceles con base segmento $\overline{AC}$

Fuente: Autor

8) A continuación, se activa el rastro del punto P, pues es con el cual se cumple la condición de igual distancias $\overline{AP} = \overline{FP}$ y

9) Al mover el punto A se observa que se traza la parábola.

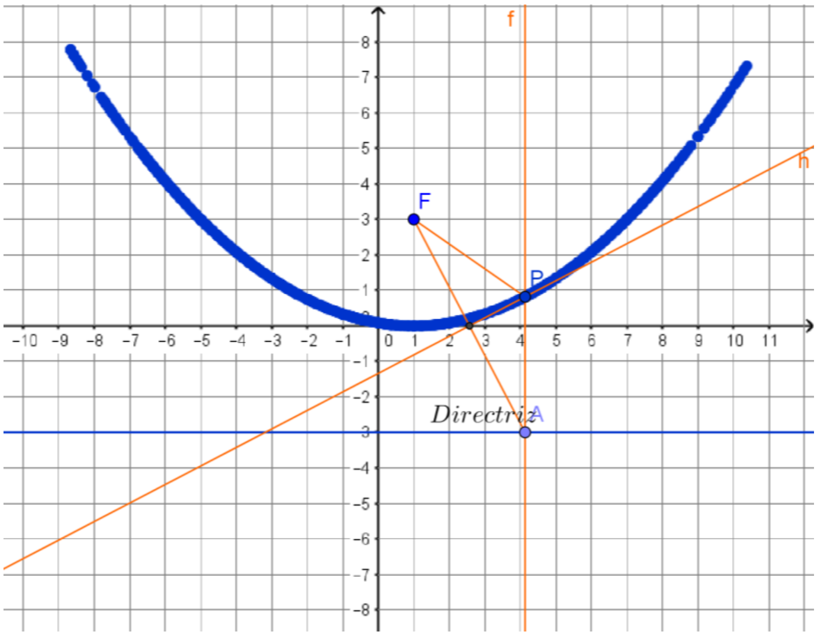
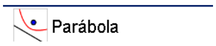


Figura 54. Gráfica de parábola al activar el rastro del punto P

Fuente: Autor

10) Para comprobar que cumple con la definición, se configura para que se visualice la longitud de los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{FP}$, se logró identificar que las medidas siempre eran las mismas.

11) Se recurre además al uso de la herramienta 

marcando la recta directriz y el foco, en donde se dibuja una parábola que coincide con el rastro del punto P.

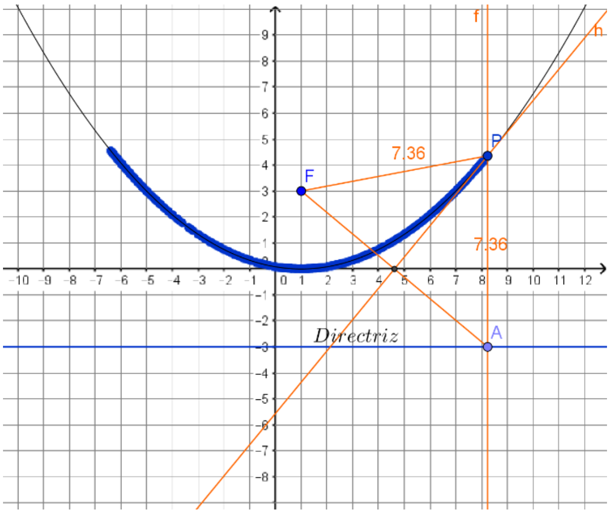


Figura 55. Gráfica de parábola usando la herramienta parábola sobre rastro de P

Fuente: Autor

¿Qué sucede si desplazamos la recta directriz a través del eje y?

Continúa representándose una parábola, es decir $\overline{AP} = \overline{FP}$

Actividad 6

Tema: La parábola (Ecuación ordinaria y canónica)

- **Objetivo:**
  - Identificar los elementos de la parábola
  - Conocer la ecuación de la parábola (canónica y ordinaria)
  - Determinar la ecuación de la parábola identificados su vértice y distancia focal.
- **Forma de trabajo:** Individual.
- **Tiempo aproximado:** Una hora pedagógica
- **Planificación (plan de clase):** Anexo 5
- **Descripción de la actividad:**

Se partió de la revisión de la definición de cada uno de los elementos de la parábola, con la ayuda de Geogebra se plantearon ejercicios para identificarlos y reconocer sus características.

Se continua del planteamiento de la ecuación ordinaria de la parábola, a partir de ahí se plantearon ejercicios para identificar adecuadamente los coeficientes h, k, y p

Luego se proponen actividades para inferir como hallar las ecuaciones dadas las coordenadas del vértice y el valor de la distancia focal, además como representarlas gráficamente. En base a la ecuación ordinaria se planteó un ejercicio en clase y otros a casa para identificar a la ecuación en forma canónica de la parábola. Todas las actividades las realizaron primero en Geogebra y luego de manera analítica, para de esta forma buscar que el software brinda apoyo tanto al entendimiento del ejercicio como a la comprobación de la resolución.

Desarrollo:

- **Primera Etapa**

  Determinación de los temas a tratarse

  -Elementos de la parábola

  -Ecuación ordinaria de la parábola

  -Ecuación canónica de la parábola

Revisión conceptual

Elementos de la parábola

Según Santillana (2017) los elementos de la parábola son:

El foco F y la directriz l son el punto y la recta respectivamente, que equidistan de cualquier punto de la parábola.

El eje de simetría o focal es la recta que pasa por el foco F y es perpendicular a la directriz l.

El vértice V es el punto de intersección de la parábola con el eje de simetría.

A la distancia entre el foco y el vértice se le denomina distancia focal (p).

El lado recto PQ es el segmento cuyos extremos pertenecen a la parábola, pasa por el foco y es perpendicular al eje de simetría.

A dichos elementos se los puede apreciar en la figura 53

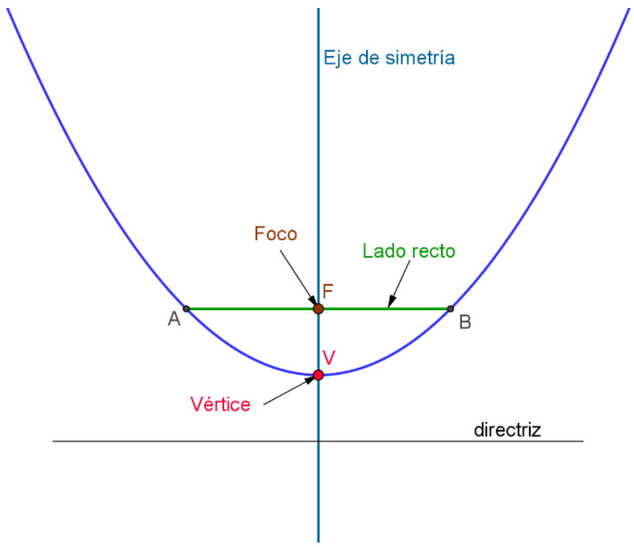


Figura 56. Elementos de una parábola
Fuente: Autor

Ecuación ordinaria de la parábola

En la figura 54 podemos ver una parábola con vértice de coordenadas (h,k) y la distancia focal p.

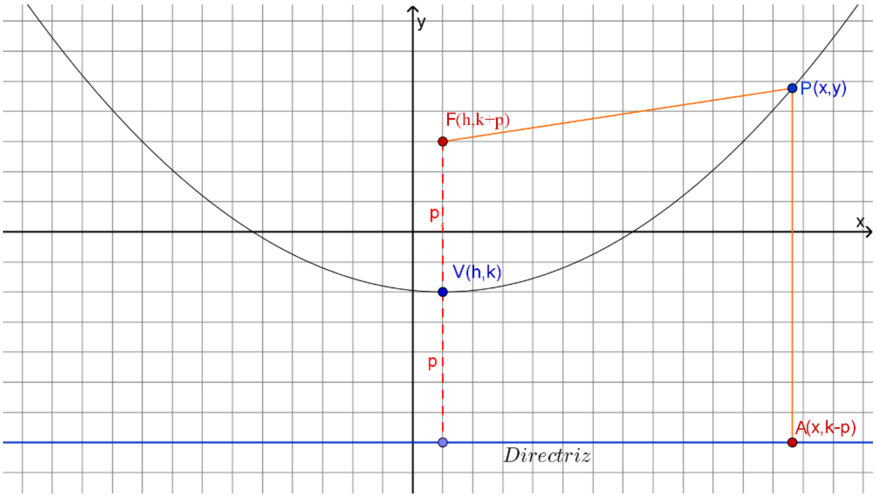


Figura 57. Gráfica de parábola con las coordenadas referenciales de los puntos V, P, F y A
Fuente: Autor

En esta se cumple que:

$\overline{FP} = \overline{PA}$ Por definición los segmentos tienen la misma magnitud y aplicando distancia entre dos puntos.

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+p))^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(k-p))^2}$$

$\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+p))^2} = \sqrt{(y-(k-p))^2}$ Elevando al cuadrado cada miembro

$(x-h)^2+(y-(k+p))^2=(y-(k-p))^2$ Desarrollando cuadrados y realizando productos

$$(x-h)^2+y^2-2ky-2py+k^2+2kp+p^2=y^2-2ky+2py+k^2-2kp+p^2$$

$(x-h)^2=2py-2pk-2pk+2py$ Reduciendo términos

$(x-h)^2=4py-4pk$ Factorando

$(x-h)^2=4p(y-k)$ Ecuación ordinaria de la parábola

Por la gráfica 54 se identifica que esta ecuación es cuando el eje de simetría es paralelo al eje y.

“Si p > 0, la parábola se abre hacia arriba y si p < 0, la parábola se abre hacia abajo” Lehmann, 1990, p.152).

Siguiendo el procedimiento para demostrar la ecuación ordinaria pero cuando el eje de simetría sea paralelo al eje x, llegaremos a la siguiente ecuación:

$$(y-k)^2=4p(x-h)$$

En donde, “si p > 0, la parábola se abre hacia la derecha y si p < 0, la parábola se abre hacia izquierda “(Lehmann, 1990, p.152).

Ecuación canónica de la parábola

Para este caso se analizará la situación particular en la cual el vértice está en el origen, es decir h=0 y k=0; entonces tendremos:

$x^2=4py$ Eje simetría paralelo al eje y

$y^2=4px$ Eje simetría paralelo al eje x

Segunda Etapa

Actividad 6.1. Ecuación ordinaria de la parábola: Grafique la parábola usando la ecuación ordinaria, use deslizadores para los coeficientes h, k y p, se usa como guía lo siguiente:

1) Cree tres deslizadores h, k y p usando la herramienta 

con las configuraciones presentadas.

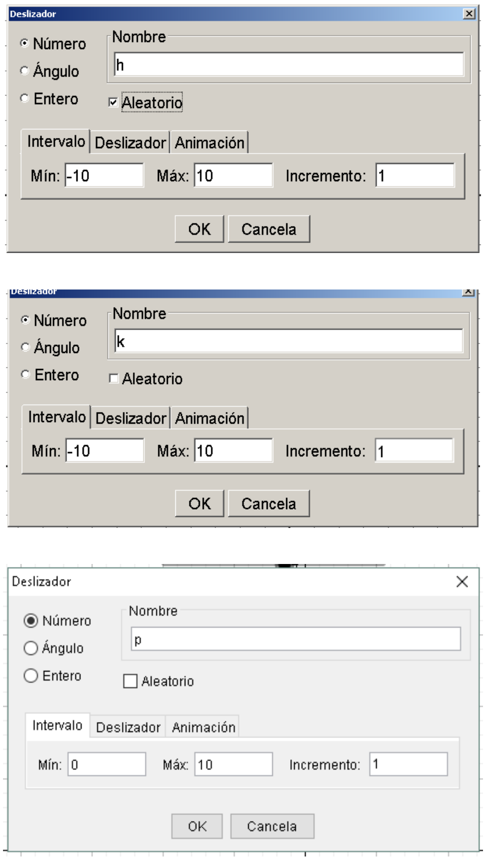


Figura 58. Configuración de deslizadores h, k y p
Fuente: Autor

2) Escriba en la entrada del programa $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.

3) Observe que se representa una parábola, vaya propiedades de esta y cambiamos color y estilo.

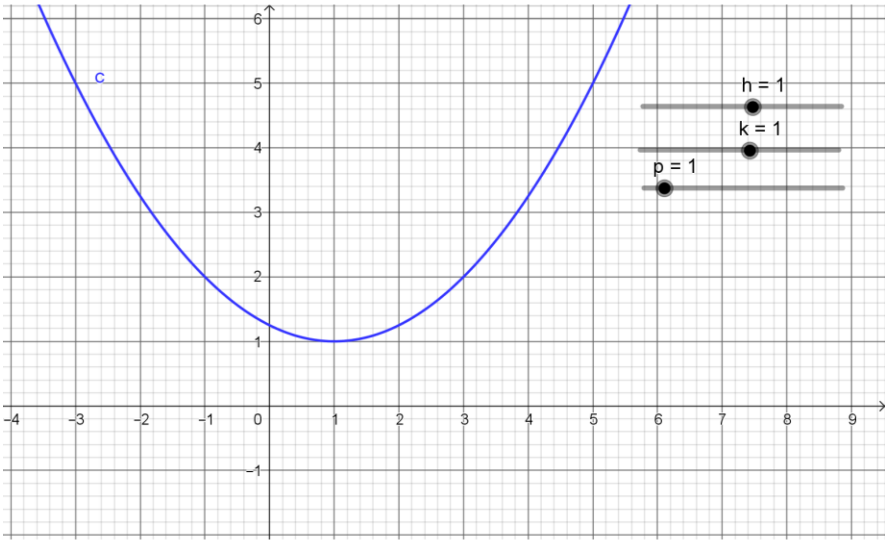


Figura 59. Gráfica de parábola según deslizadores h, k y p

Fuente: Autor

4) Mueva los deslizadores y observe que sucede con cada uno de ellos.
5) Introduzca en la entrada V=(h, k), se grafica un punto sobre la parábola
   .
6) A continuación, se arrastra la ecuación de la parábola de la vista algebraica a la gráfica, previamente escoja el formato en él que se desea presentar (forma ordinaria).

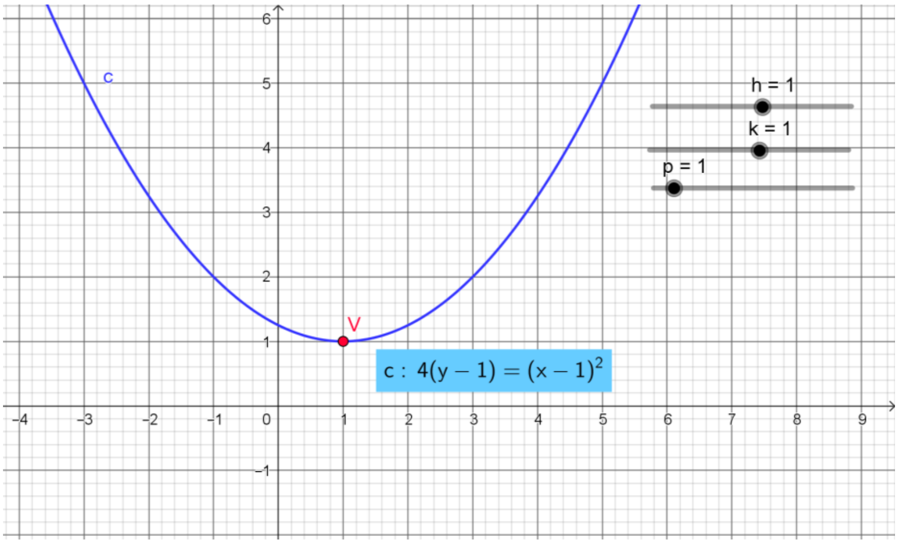


Figura 60. Parábola con su respectiva ecuación en forma ordinaria

Fuente: Autor

¿Qué representa el Punto V?

El vértice de la parábola

¿Qué representa *h*?

La abscisa del vértice de la parábola (coordenada en x)?

¿Qué representa *k*?

La ordenada del vértice de la parábola (coordenada en y)?

¿Qué representa *p*?

Representa la distancia focal.

¿Qué ocasiona un movimiento del deslizador h y k?

En el caso de h produce un desplazamiento horizontal de la parábola y en el de k un movimiento vertical de la misma.

El cambio de los deslizadores, ¿ocasiona un cambio en la parábola?

Desde luego, ya que los valores que se tienen en h, k y p están relacionados con la ecuación de la parábola $(x-h)^2 = 4p(y-k)$. *Por lo tanto cambia la ecuación observada en la vista gráfica.*

¿Qué sucede si *p>0*?

La apertura de las parábolas es hacia arriba.

¿Qué sucede si *p<0*?

La apertura de las parábolas es hacia abajo.

¿Qué pasa si se varía los valores de P?

La apertura de la parábola aumenta o disminuye según el valor absoluto de p sea mayor o menor.

7) Ahora, manteniendo los deslizadores y borrando la gráfica anterior Escriba en la entrada del programa $(y-k)^2 = 4p(x-h)$.
8) Manipule los deslizadores.

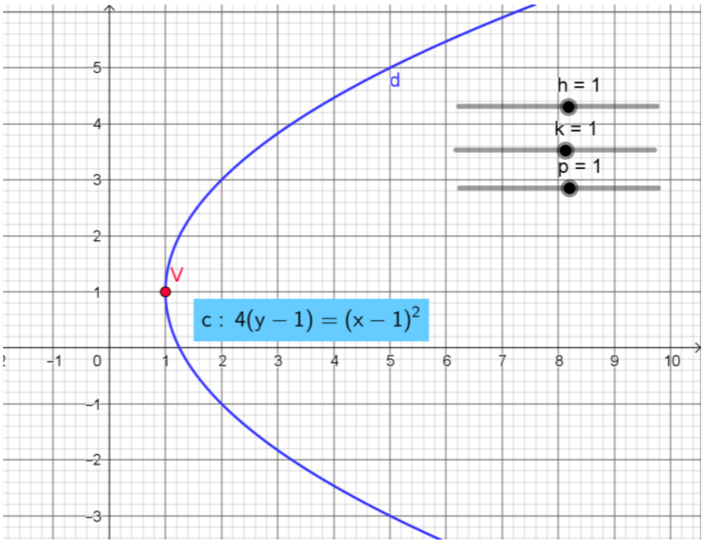


Figura 61. Parábola con ecuación forma $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

Fuente: Autor

¿Qué pasa con el gráfico de la parábola?

Se dibuja una parábola con el eje de simetría paralelo al eje x

¿Qué sucede si *p>0*?

La apertura de las parábolas es hacia la derecha.

¿Qué sucede si *p<0*?

La apertura de las parábolas es hacia la izquierda.

¿Qué pasa si se varía los valores de P?

La apertura de la parábola aumenta o disminuye según el valor absoluto de p sea mayor o menor.

Actividad 6.2. Ecuación canónica de la parábola: Del applet anterior se ubica los deslizadores h y k en0 y sigue lo planeado a continuación:

1) Realiza movimientos en el deslizador "p".

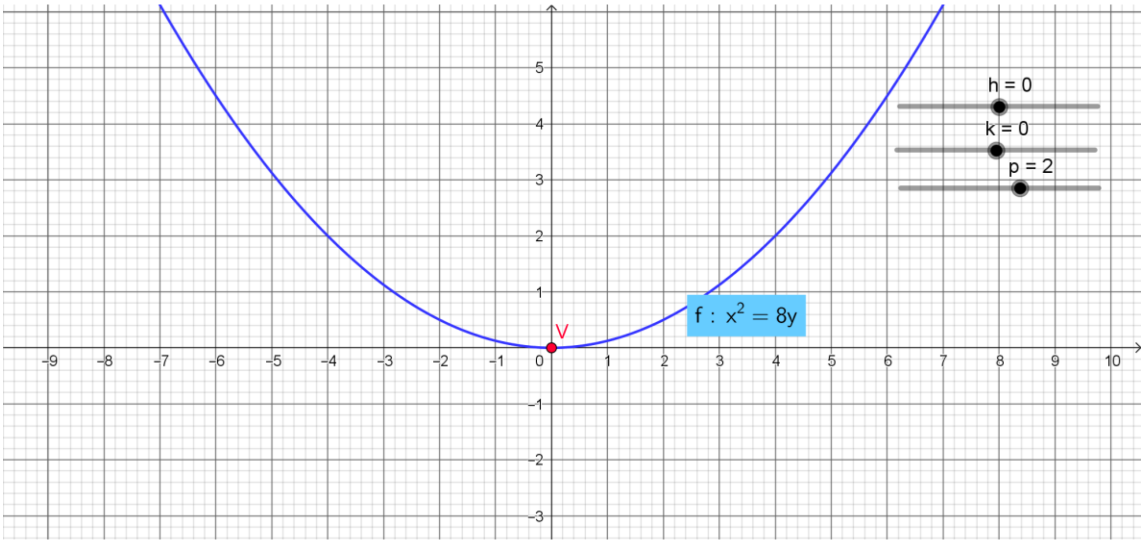


Figura 62. Parábola con ecuación forma $y^2 = 4px$
Fuente: Autor

¿Dónde se ubicó el vértice de la parábola?

El vértice de la parábola se ubicó ahora en el origen, cuyas coordenadas son (0,0).

¿Qué pasó con la ecuación de la parábola?

Al eliminarse los coeficientes h y k, queda de la forma $y^2 = 4px$, es la ecuación ordinaria de la parábola, también podría ser $x^2 = 4py$, dependiendo la dirección del eje de simetría.

Actividad 6.3. Determinar la ecuación de una parábola dadas ciertas condiciones: Se plantearon algunos ejercicios en los cuales se daban como datos las coordenadas del vértice, foco, recta directriz o existía una condición para determinar algunos de estos parámetros y con estos plantear la ecuación solicitada. Los estudiantes resolvían los ejercicios usando Geogebra, esta herramienta les brindaba apoyo en el planteamiento o resolución del problema, además les ayudaba en la interpretación o para comprobar los resultados.

Encuentre las ecuaciones de las siguientes parábolas y grafique:

a) Vértice (2,3) y recta directriz y=1

Con Geogebra:

1) Se ingresa en la entrada V=(2,3)
2) Ingrese en la entrada la recta directriz y=1

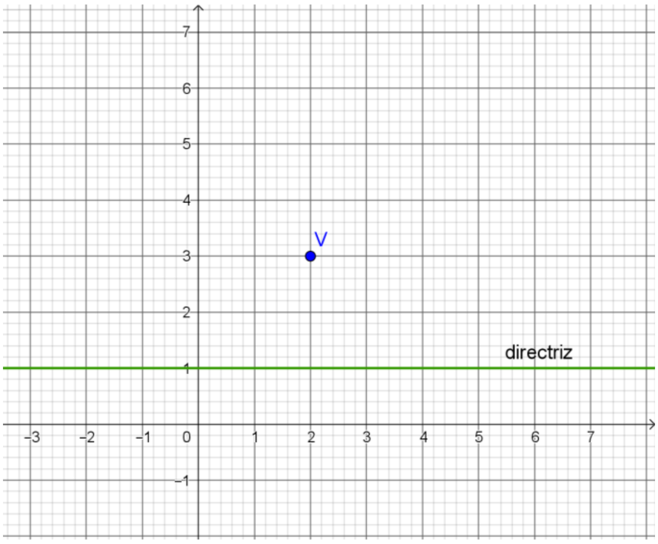
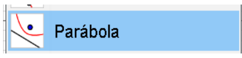


Figura 63. Vértice y recta directriz de la parábola
Fuente: Autor

3) La herramienta parábola de Geogebra usa de referencia el foco para graficarla, se identifica que el eje de simetría sería paralelo al eje y; por lo tanto para calcular las coordenadas del foco usamos F(h, k+p) tenemos que F(2,5). Con esto se introduce en la entrada F=(2,2)

4) Use la opción 

marque el punto F y luego la recta directriz.

5) En la vista algebraica escoja la ecuación de la parábola de la forma canónica y arrástrela a la vista gráfica, se tiene entonces:

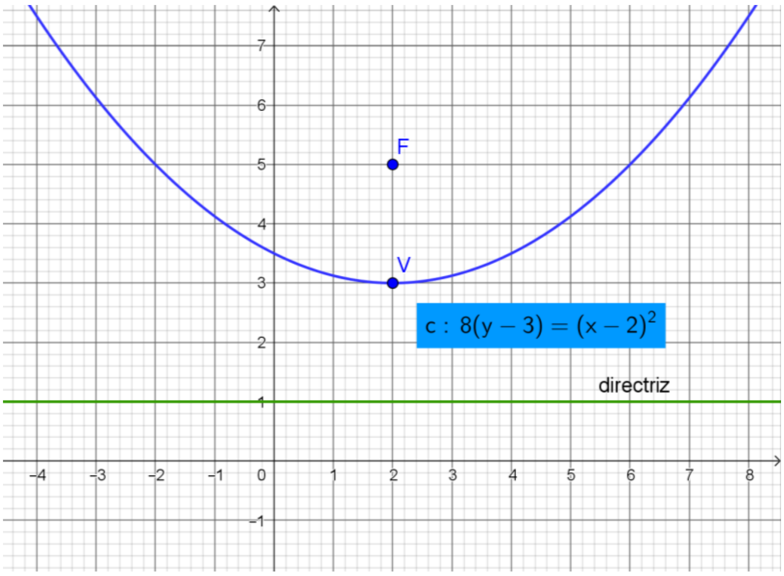


Figura 64. Gráfica de la parábola con vértice (2,3) y directriz y=1 con su ecuación
Fuente: Autor

6) La ecuación es $(x-2)^2 = 8(y-3)$

Analíticamente:

V(2,3)	h=2, k=3
y=1	Recta directriz
$p = k - y$	Distancia focal, distancia de recta directriz a vértice, abertura hacia arriba
$p = 3 - 1$	
$p = 2$	Distancia focal
$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	Ecuación canónica de la parábola con eje de simetría paralelo al eje y
$(x-2)^2 = 4*2(y-3)$	Sustituimos h=2, k=3 y p=2
$(x-2)^2 = 8(y-3)$	Se tiene la ecuación de la parábola

b) Vértice (-4,-3) y foco (-4,-5)

Con Geogebra:

1) Se ingresa en la entrada V= (0,-3) y F=(-3,-3)
2) La herramienta parábola de Geogebra usa de referencia el foco y la recta directriz, se identifica que el eje de simetría sería paralelo al eje x; por lo tanto para calcular la recta directriz se usa y=h-p, sabiendo que p=-3(abertura hacia izquierda), entonces y= 3, introduciendo a esta en la entrada.

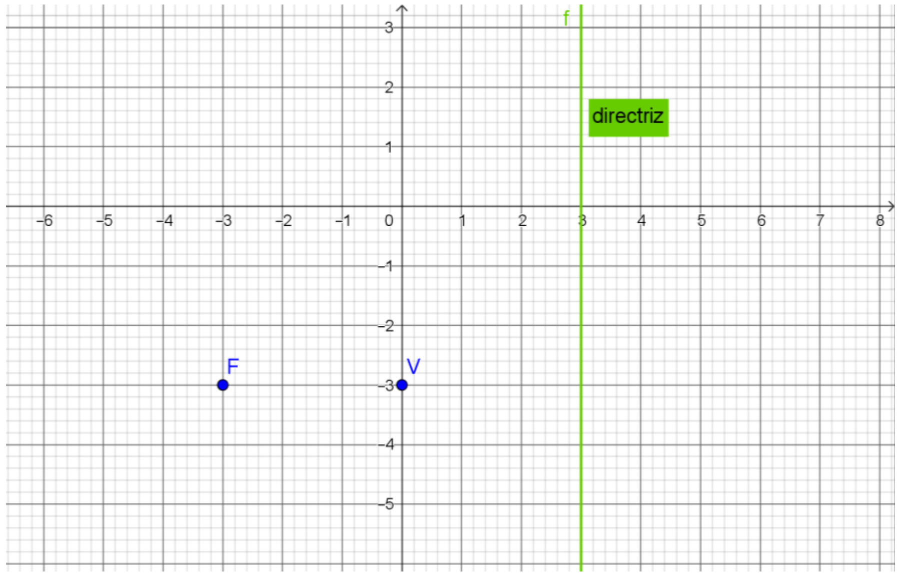
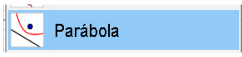


Figura 65. Foco, Vértice y directriz de la parábola
Fuente: Autor

3) Use la opción  marque el punto F y luego la recta directriz.

4) En la vista algebraica escoja la ecuación de la parábola de la forma canónica y arrástrela a la vista gráfica, se tiene entonces:

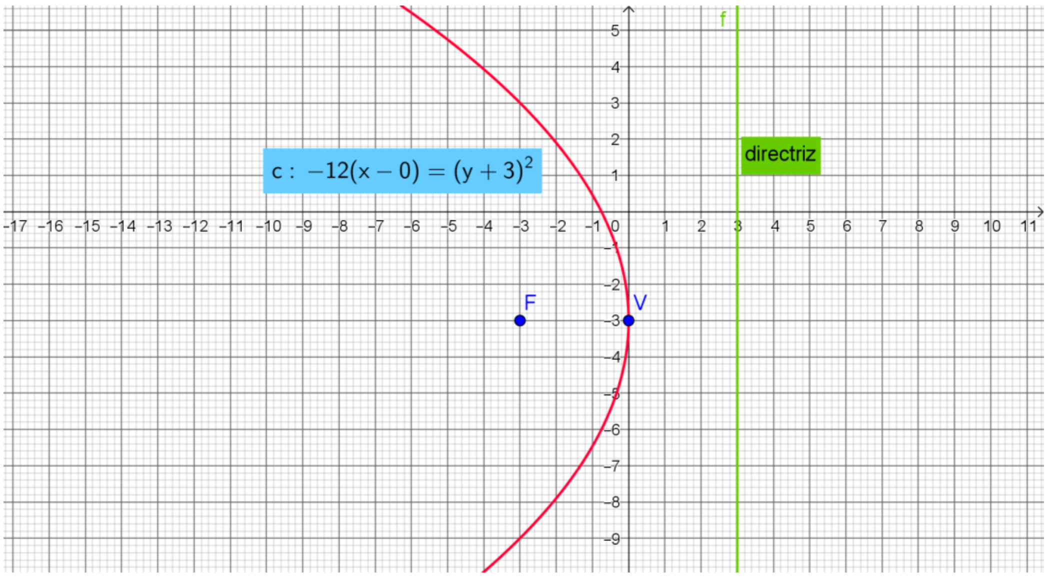


Figura 66. Gráfica de la parábola con vértice (0,-3) y foco (-3,-3) con su ecuación
Fuente: Autor

5) La ecuación es $(y+3)^2 = -12(x)$

Analíticamente:

V(0,-3) h=0, k=-3

F(-3,-3)

$p = -3 - 0$ Distancia focal, distancia de recta directriz a vértice

$p = -3$ Distancia focal

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$ Ecuación canónica de la parábola con eje de simetría paralelo al eje x

$(y-(-3))^2 = 4*(-3)(x-0)$ Sustituimos h=2, k=3 y p=2

$(y+3)^2 = -12(x)$ Se tiene la ecuación de la parábola

c) Vértice (-3,5), pasa por el punto (5,9) y eje simetría paralelo al eje x

Con Geogebra:

1) Se ingresa en la entrada V=(-3,5) y P=(5,9)
2) La herramienta parábola de Geogebra usa de referencia el foco y la recta directriz, se identifica que el eje de simetría sería paralelo

al eje y; por lo tanto se procede a calcular el valor de p, para esto se usa la vista cálculo simbólico e introducimos la ecuación $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

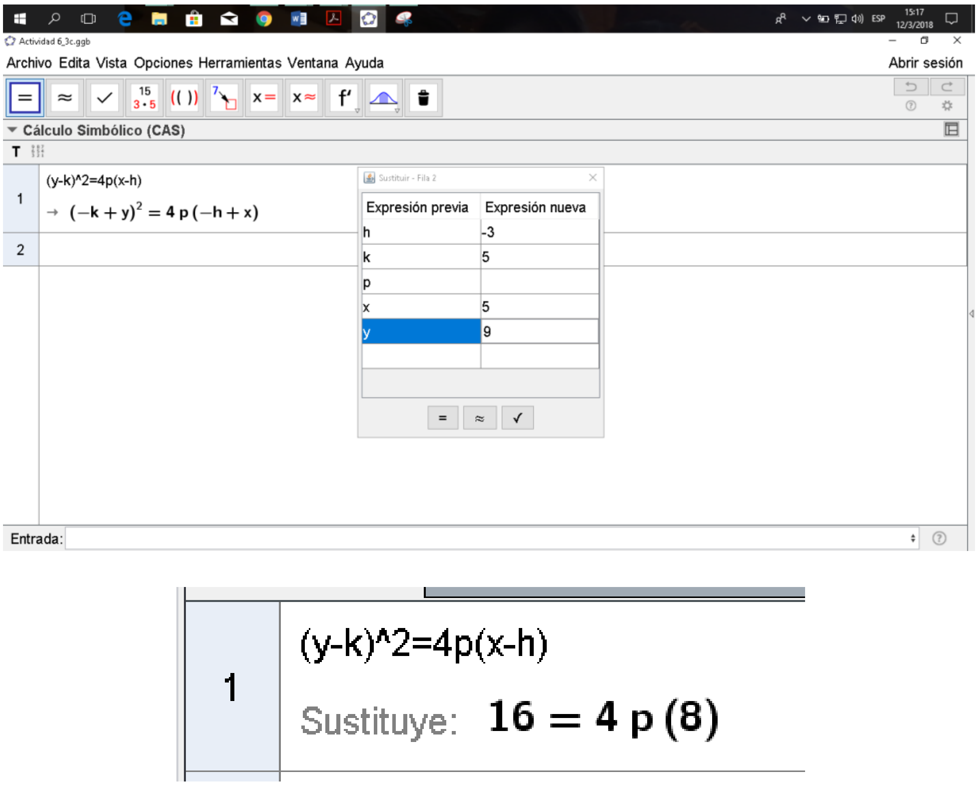


Figura 67. Cálculo de la distancia focal

Fuente: Autor

3) Intercambio la variable “p” por “x”, para poder calcular el valor de p.

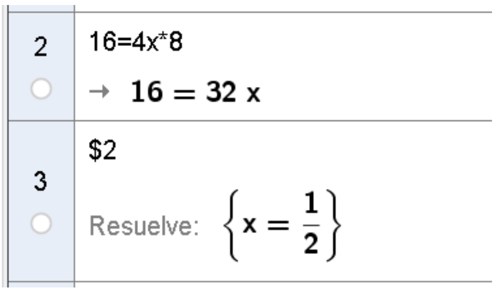


Figura 68. Cálculo de la distancia focal como una variable x, donde se tendría que p=1/2

Fuente: Autor

4) Ahora se tiene que h=-3, k=5 y p=1/2, use la ecuación $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ introduciéndola en la entrada sustituyendo los valores.

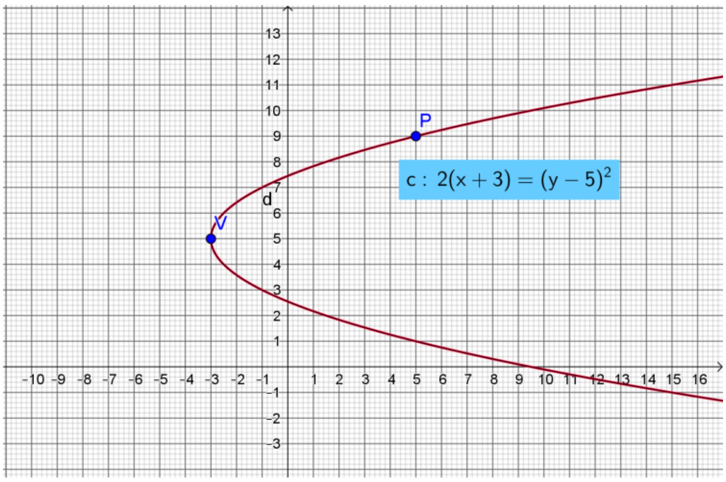


Figura 69. Gráfica de la parábola con vértice (-3,5), pasa por el punto (5,9) y eje simetría paralelo al eje x
Fuente: Autor

Analíticamente:

Vértice V(-3,5) y Punto P(5,9) h=-3, k=5

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$ El punto P pertenece a la parábola, por lo tanto satisface a la ecuación.

$(9-5)^2 = 4p(5+3)$ Sustituya x, y, h y k

$16 = 32p$ Resolviendo operaciones

$p = \frac{1}{2}$ Hallando el valor de p

$(y-k)^2 = 4p(x+h)$ Sustituya h,k y p

$(y-5)^2 = 4 * \frac{1}{2}(x+3)$ Resolviendo producto

$(y-5)^2 = 2(x+3)$ Ecuación de la parábola

Actividad 7

Tema: Ecuación general de la parábola y aplicaciones

Objetivos:

- Conocer la ecuación general de la circunferencia, a través de la identificación de los coeficientes D, E y F
- Determinar los elementos de la parábola dada su ecuación general.
- Usar la ecuación de la parábola para resolver problemas

- **Forma de trabajo:** Individual.
- **Tiempo aproximado:** Tres horas pedagógicas
- **Planificación (plan de clase):** Anexo 5
- **Descripción de la actividad:** En primera instancia se presenta la ecuación general de la circunferencia, se desarrolla applets en Geogebra para analizar a la parábola a través de los coeficientes D, E y F.

Se plantea la obtención de la ecuación general de la parábola dadas diferentes condiciones, también como pasar de la ecuación general a la ordinaria para identificar elementos de la parábola. Finalmente, la aplicación de la ecuación de la parábola en la resolución de problemas (aplicaciones).

Desarrollo:

- **Primera Etapa**

  Determinación de los temas a tratarse

  -Ecuación general de la parábola según eje de simetría

  -Relación entre coeficientes D, E, F y h, k y p.

Revisión Conceptual

Ecuación general de la parábola

A partir de la ecuación ordinaria de la parábola se puede encontrar la ecuación general de esta, se va a tomar la ecuación cuando el eje de simetría es paralelo al eje y.

Por lo visto anteriormente se tiene que:

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	Ecuación ordinaria de la parábola con eje de simetría paralelo al eje y
$x^2 - 2xh + h^2 = 4py - 4pk$	Resolviendo operaciones
$x^2 - 2xh + h^2 - 4py + 4pk = 0$	Igualando a cero
Si $D = -2h$, $E = -4p$ y $F = h^2 + 4pk$	Entonces la ecuación general de la parábola es:
$x^2 + Dx + Ey + F = 0$	Ecuación general de la parábola

Al hacer el análisis pero con la ecuación $(y-k)^2 = 4p(x+h)$, en la que el eje de simetría es paralelo al eje x, la ecuación general quedaría:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Donde:

$$D = -4p,\ E = -2k \text{ y } F = h^2 + 4ph$$

Actividad 7.1. Ecuación general de la parábola: En este ejercicio se desarrolló un applet en Geogebra en donde se varía los deslizadores D, E y F para identificar cuáles son los cambios en la parábola y encontrar de esta manera la relación con los parámetros h, k y p.

Grafique una circunferencia usando la ecuación general de la circunferencia, use deslizadores para los coeficientes D, E y F.

a) Se crea tres deslizadores D, E y F usando la herramienta con intervalo mínimo de -10 y máximo de 10, con un incremento de 1.

b) Escriba en la entrada del programa $x^2 + Dx + Ey + F = 0$.

c) Se mueve los deslizadores D, E y F; se analiza que sucede al movimiento de cada uno.

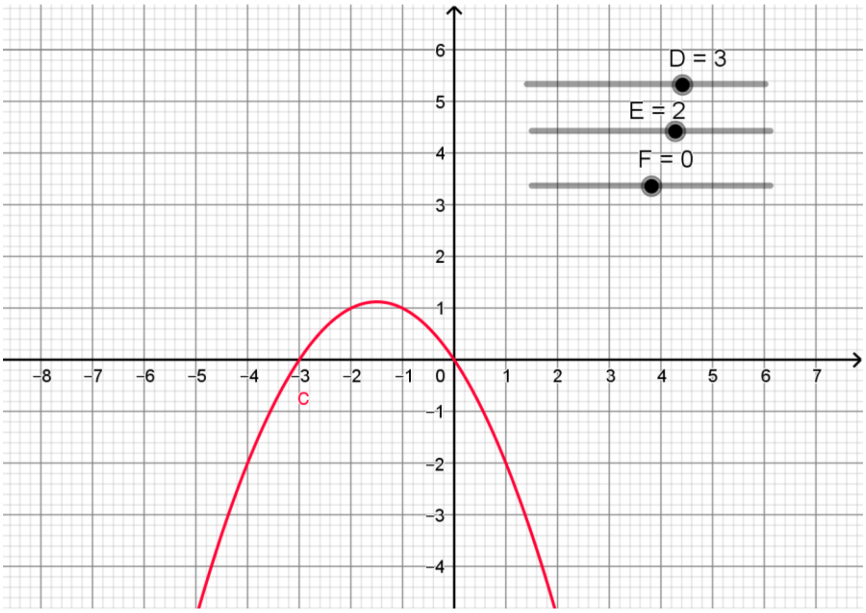


Figura 70. Gráfica de parábola según movimiento de deslizadores D, E y F
Fuente: Autor

Actividad 7.2. Dada ecuación general de la parábola determine ecuación ordinaria: Para esta actividad se plantea que a partir de tener la ecuación general de la parábola se obtenga la ordinaria, pues de esta manera se podrá identificar algunos parámetros de la parábola como Foco, vértice, recta directriz, etc.

Dada la ecuación $x^2 + 8x + 8y + 40 = 0$, encuentre la ecuación ordinaria de la parábola, las coordenadas del foco y vértice, la recta directriz y la longitud del lado recto.

Con Geogebra:

1) Se ingresa en la entrada $x^2 + 8x + 8y + 40 = 0$

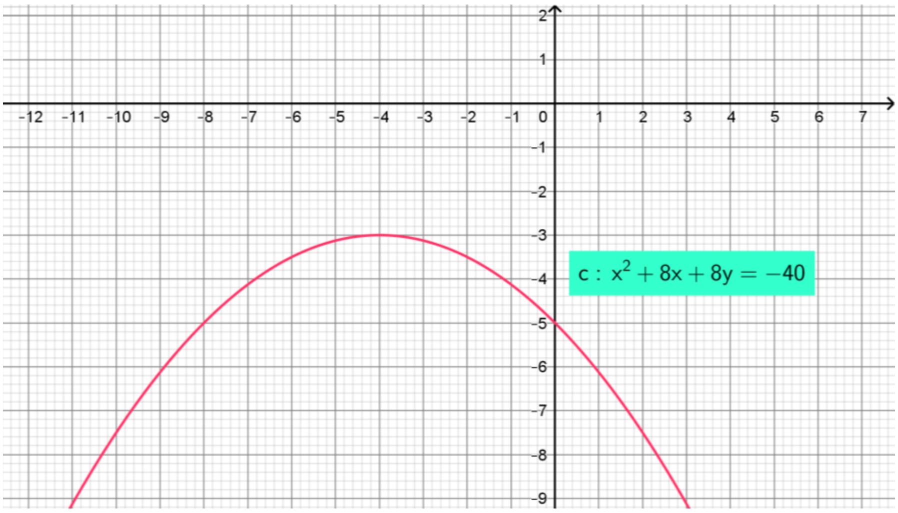


Figura 71. Gráfica de parábola $x^2 + 8x + 8y + 40 = 0$*,*
Fuente: Autor

2) En entrada se coloca la función Foco(<Cónica>), en donde <Cónica> representa el nombre para nuestro caso “c:”
3) Lo mismo se hace con la función Vértices(<Cónica>), que colocamos en la entrada, así mismo usamos la función Directriz(<Parábola>) y obtenemos los elemento de la gráfica 68.

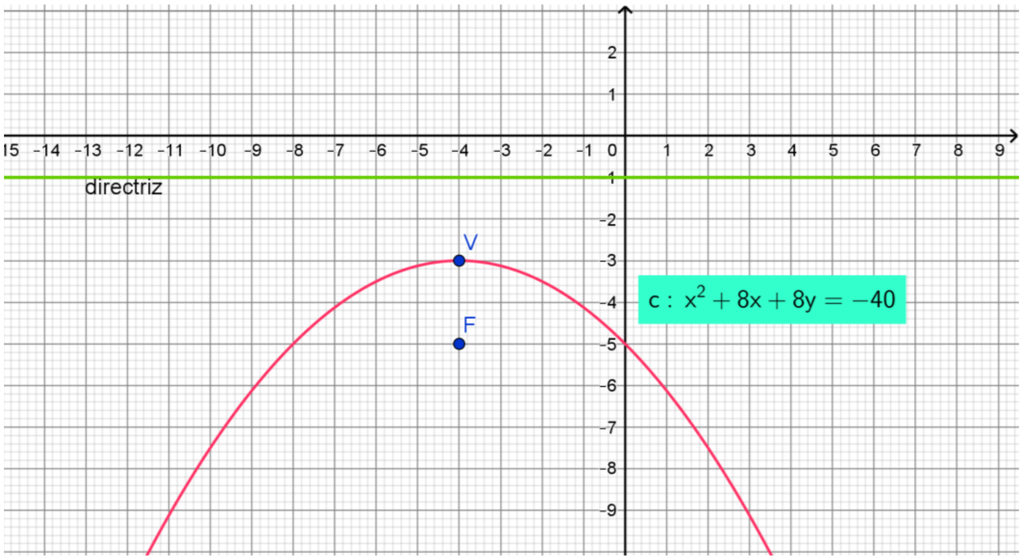


Figura 72. Elementos foco F, vértice V y recta directriz de la parábola $x^2 + 8x + 8y + 40 = 0$,
Fuente: Autor

4) En la figura 68 se puede observar que la distancia focal es 2, por lo tanto la ecuación ordinaria de esta parábola sería:

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$ Partiendo de ecuación ordinaria de la parábola con eje de simetría paralelo al eje y

V=(-4,-3) y p=2

$(x + 4)^2 = 4 * 2(y + 3)$ Sustituyendo

$(x + 4)^2 = 8(y + 3)$ Resolviendo se tiene la ecuación ordinaria.

5) También se puede cambiar la presentación de la ecuación en la vista algebraica para que se muestre la ecuación ordinaria

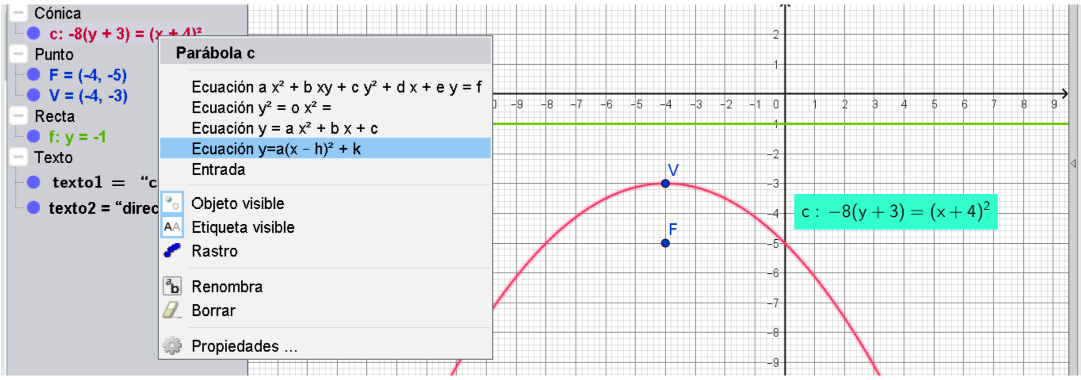


Figura 73. Presentación de la ecuación de la parábola de la forma ordinaria.

Fuente: Autor

Analíticamente:

Se tiene la ecuación $x^2 + 8x + 8y + 40 = 0$, para expresar como ordinaria se debe trabajar completando el trinomio en el literal cuadrático

$x^2 + 8x = -8y - 40$	Desplazo términos
$x^2 + 8x + 16 = -8y - 40 + 16$	Completo los cuadrados
$(x + 4)^2 = -8y - 24$	Factorando el trinomio
$(x + 4)^2 = -8(y + 3)$	Factorando el segundo miembro y obtengo la ecuación ordinaria

De la anterior puede determinarse que el vértice tiene de coordenadas V(-4,-3)

$-8 = 4p$	Para obtener p calculo
$p = -2$	

Las coordenadas del foco serían (h, k+p) pues eje focal paralelo a eje y

Foco(-4,-5)

Lado recto =|4p|

Lado recto=8

Actividad 7.3. Resuelva el siguiente problema:

El espejo de una linterna tiene la forma de un paraboloide de 3 pulgadas de diámetro y 1 pulgada de profundidad. Establecer el punto donde debe colocarse el bombillo para que los rayos emitidos sean paralelos al eje de simetría del paraboloide.

1) Se dibuja de la sección transversal de la linterna (parábola), con vértice en el origen para simplificar los cálculos.
2) Al ser el diámetro=3, significa que la parábola pasa por los puntos A(1, 3/2) y B(1,-3/2)

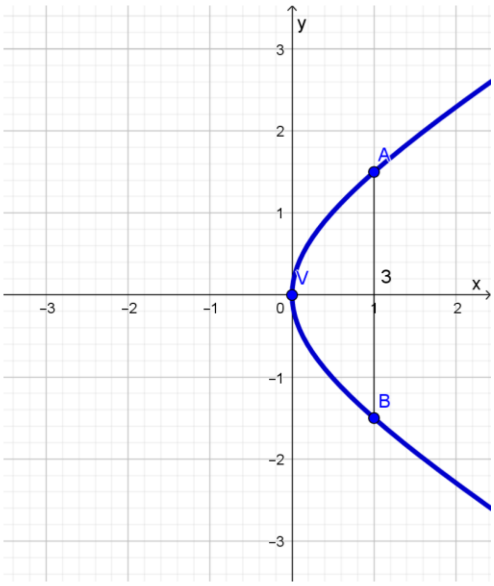


Figura 74. Sección de la linterna ubicada en el plano cartesiano
Fuente: Autor

3) Se denota que el eje de simetría es el eje x, por lo tanto su ecuación es $y^2 = 4px$

4) Como los puntos A y B pertenecen a la parábola, por lo tanto pertenecen a su ecuación.

5) Sustituyo x por 3/2 y y por 1

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4p(1)$$

6) Despejamos p, y tenemos

$$p = \frac{9}{16}$$

7) Así el foco de la parábola es F($\frac{9}{16}$,0) y como $\frac{9}{16} \approx 0{,}56$ se concluye que la distancia focal es 0,56. Por lo tanto el bombillo debe colocarse a 0,56 pulgadas del vértice.

Actividad 8

Tema: La elipse (definición, lugar geométrico)

- **Objetivo:**
  - Aplicar las herramientas de Geogebra para reconocer el lugar geométrico que representa a la elipse aplicando su definición.
- **Forma de trabajo:** Grupal.
- **Tiempo aproximado:** Una hora pedagógica
- **Planificación (plan de clase):** Anexo 5
- **Descripción de la actividad:**

  Se partió de la definición de elipse como lugar geométrico, se solicitó que usen las herramientas de Geogebra para dibujar la elipse tomando en cuenta su definición y demostrar que en esta se cumple lo planteado.

Desarrollo:

- **Primera Etapa**

Determinación de los temas a tratarse

-Definición de elipse

Revisión conceptual

Definición elipse:

Una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijo en ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los puntos. (Lehmann, 1990, p.173).

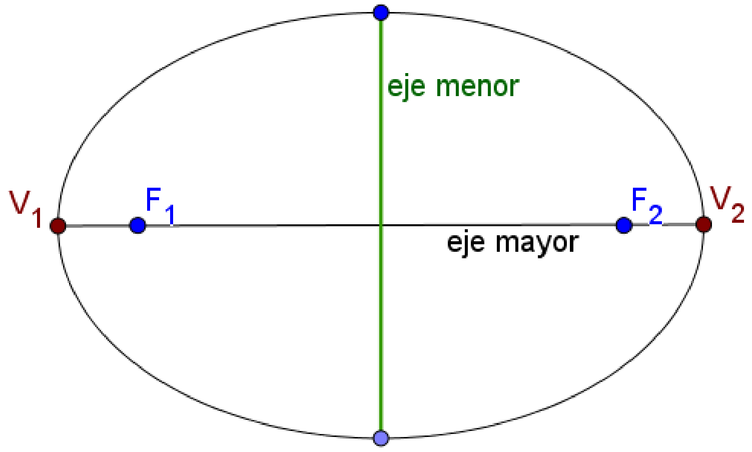


Figura 75. Elipse y sus elementos focos F, vértice V y ejes

Fuente: Autor

- **Segunda Etapa**

Actividad 8.1. Definición de elipse: Dibuje el lugar geométrico que representa una elipse usando su definición y herramientas de Geogebra, tome en cuenta los siguientes pasos:

12) Ingrese un deslizador llamado distancia con un intervalo (0,20) e incremento 0.5.

13) Se crea un deslizador d1 con intervalo (0,20) e incremento de 0.00001

14) En entrada describo un número d2=distancia-d1 (para garantizar que la suma de las distancias d1 y d2 sea constante).

15) Coloco dos puntos colineales A y B.

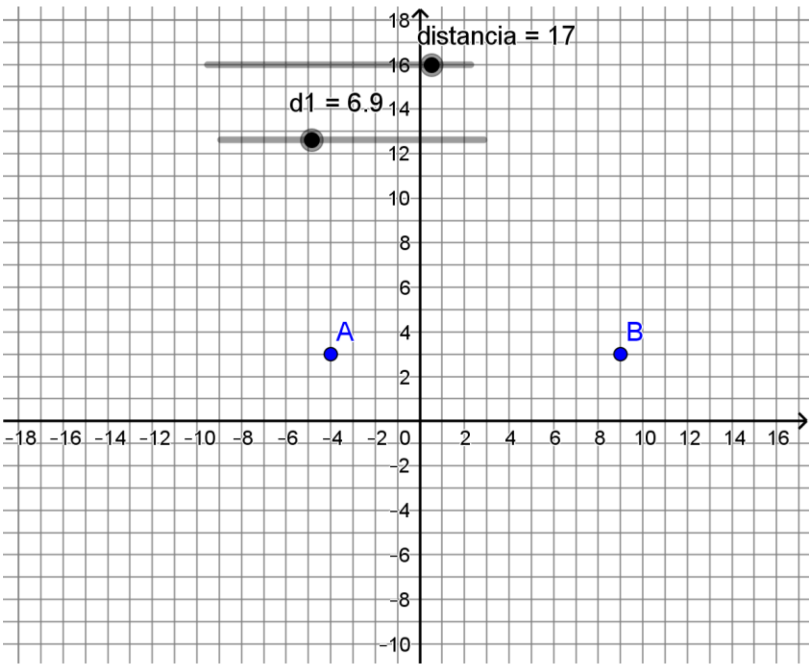


Figura 76. Deslizadores y puntos A, B colineales

Fuente: Autor

16) A continuación, se grafica dos circunferencias con centro en A y radio igual a d1; y otra con centro en B y radio igual a d2. Se mueven los puntos hasta identificar que se corten las circunferencias.

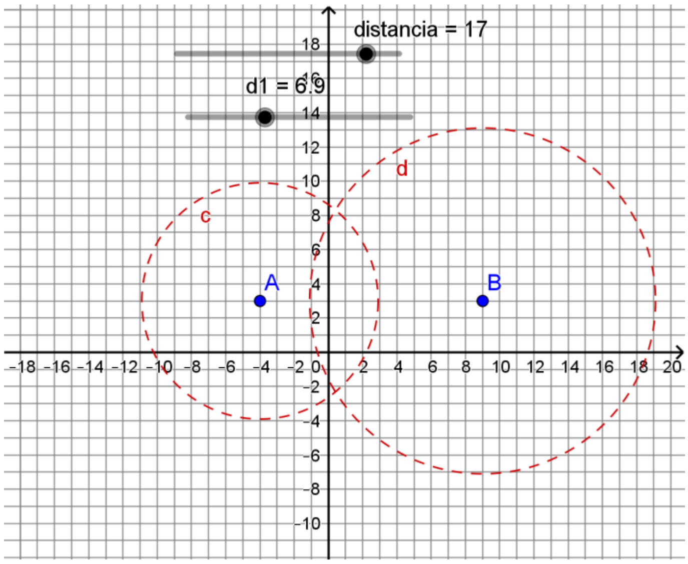


Figura 77. Circunferencia con centro en A y B.

Fuente: Autor

17) Con la opción intersección, marco los puntos de intersección entre las circunferencias (puntos C y D).

18) Dibuje segmentos AC y BC, y coloque el valor de sus longitudes.

19) Enseguida se agrega un texto con la siguiente configuración

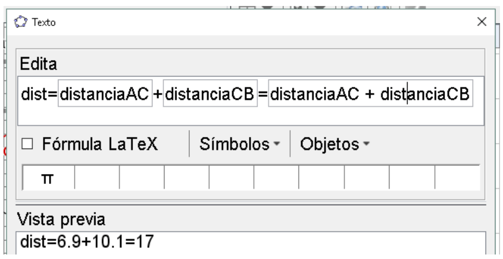


Figura 78. Configuración del texto dist.

Fuente: Autor

20) En propiedades de los puntos C y D marcamos rastro y a continuación movemos el deslizador d1, se observa que se grafica la elipse y el valor de “dist” siempre se mantienes constante.

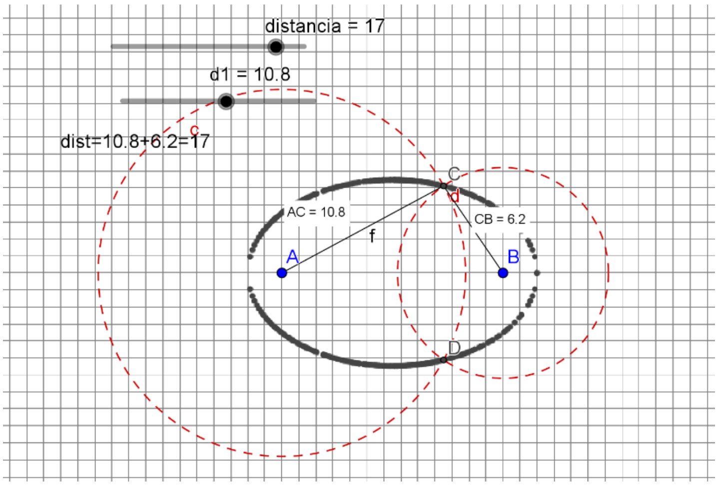


Figura 79. Gráfica de la elipse usando su definición

Fuente: Autor

21) Para demostrar que en realidad es una elipse se usa la herramienta "elipse", con la cual se marca los puntos A y B, luego C y se dibuja la elipse sobre el rastro.

¿Qué sucede si movemos el deslizador distancia?

Continúa representándose una elipse, es decir $\overline{AC} + \overline{BC}$*=constante, pero hay que tomar en cuenta que la distancia entre los puntos A y B debe ser suficiente para que exista un corte entre las circunferencias, caso contrario no se grafica la elipse.*

Actividad 9

Tema: La elipse (Ecuación ordinaria y canónica)

- **Objetivo:**
  - Identificar los elementos de la elipse
  - Conocer la ecuación de la parábola (canónica y ordinaria)
  - Determinar la ecuación de la parábola identificados su centro, focos, vértices y ejes.

- **Forma de trabajo:** Individual.
- **Tiempo aproximado:** Una hora pedagógica
- **Planificación (plan de clase):** Anexo 5
- **Descripción de la actividad:**

  Se partió de la revisión de la definición de cada uno de los elementos de la elipse, con la ayuda de Geogebra se plantearon ejercicios para identificarlos y reconocer sus características.

  Se continua del planteamiento de la ecuación ordinaria de la elipse, a partir de ahí se plantearon ejercicios para identificar adecuadamente los coeficientes h, k, a y b

  Luego se proponen actividades para inferir como hallar las ecuaciones dadas las coordenadas o los valores de algunos elementos de la elipse, además como representarlas gráficamente. En base a la ecuación ordinaria se planteó uno ejercicios en clase y otros a casa (actividades texto guía) para identificar a la ecuación en forma canónica de la elipse. Todas las actividades las realizaron primero en Geogebra y luego de manera analítica, para de esta forma buscar que el software brinda apoyo tanto al entendimiento del ejercicio como a la comprobación de la resolución.

Desarrollo:

- **Primera Etapa**

  Determinación de los temas a tratarse

  -Elementos de la elipse

  -Ecuación ordinaria de la elipse

  -Ecuación canónica de la elipse

Revisión conceptual

Elementos de la parábola

Según Santillana (2017) los elementos de la elipse son:

Focos: puntos fijos del plano, F1 y F2.

Eje focal o eje principal: recta a la que pertenecen los dos focos

Centro: punto medio C del segmento cuyos puntos extremos son los focos

Eje normal o secundario: recta perpendicular al eje focal, que pasa por el centro de la elipse.

Vértices: puntos de intersección V1 y V2 de la elipse con el eje focal.

Eje mayor: segmento del eje focal que une los vértices.

Eje menor: segmento cuyos puntos extremos B1 y B2 son los puntos de intersección de la elipse con el eje normal.

Lado recto: segmento perpendicular al eje focal que pasa por uno de los focos y que une a dos puntos L y R de la elipse.

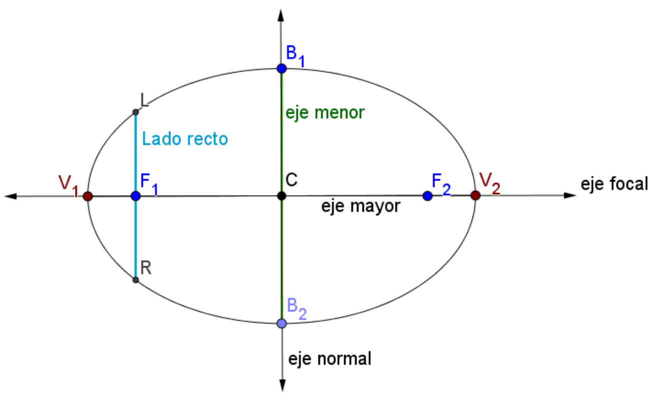


Figura 80. Elementos de la elipse

Fuente: Autor

Ecuación ordinaria de la elipse

La ecuación ordinaria de la elipse cuando tiene centro C(h,k) y eje focal paralelo al eje x es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad \text{donde a>b>0 y } a^2=b^2+c^2$$

Y tomando en cuenta la figura 80 se puede determinar que:

Centro (h,k)

Focos: F1(h-c, k); F2(h+c,k)

Vértices: V1(h-a,k); V2(h+a,k)

Puntos de corte con el eje normal: B1(h, k-b) y B2 (h, k+b)

Longitud del lado mayor: 2a

Longitud del lado menor: 2b

Eje focal: y=k

Longitud del lado recto: $2b^2/a$

En cambio la ecuación ordinaria de la elipse cuando tiene centro C(h,k) y eje focal paralelo al eje y es:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \qquad \text{donde a>b>0 y } a^2=b^2+c^2$$

Ecuación canónica de la elipse

Para este caso se analizará la situación particular en la cual el vértice está en el origen, es decir h=0 y k=0; entonces tendremos

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{eje focal paralelo al eje x}$$

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad \text{eje focal paralelo al eje y}$$

Segunda Etapa

Actividad 9.1. Ecuación ordinaria de la elipse: Grafique la elipse usando la ecuación ordinaria, use deslizadores para los coeficientes h, k, a y b se usa como guía lo siguiente:

9) Cree tres deslizadores h, k, a y b usando la 

herramienta con las configuraciones intervalo (-5,5) e incremento de 0.1

10) Escribe en la entrada del programa $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, se ve que se crea una elipse "c", vaya a propiedades y configure colores.

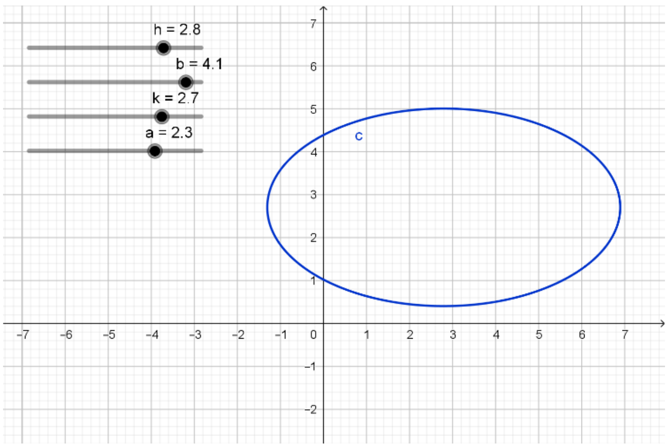


Figura 81. Gráfica de elipse según deslizadores h, k, a y b
Fuente: Autor

11) Mueva los deslizadores y observe que sucede con cada uno de ellos.

12) Para determinar los vértices y focos se escribe en entrada "Vértices(c)" y "Foco(c)"

13) A continuación, se arrastra la ecuación de la elipse de la vista algebraica a la gráfica, previamente escoja el formato en él que se desea presentar (forma ordinaria).

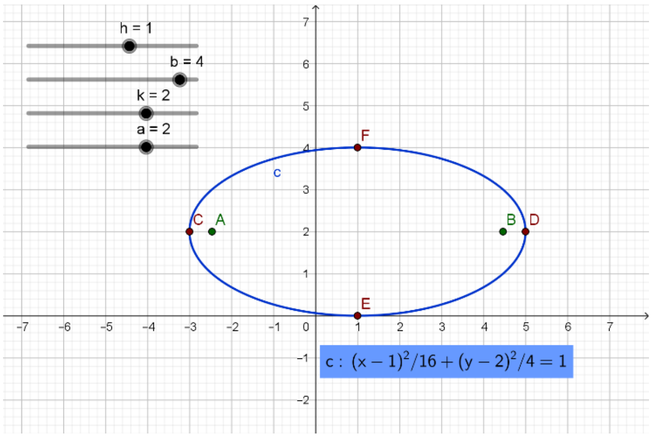


Figura 82. Elipse con su respectiva ecuación en forma ordinaria, vértices y focos
Fuente: Autor

¿Qué representa *h*?

La abscisa del vértice de la elipse (coordenada en x)?

¿Qué representa *k*?

La ordenada del vértice de la elipse (coordenada en y)?

¿Qué ocasiona un movimiento del deslizador h y k?

En el caso de h produce un desplazamiento horizontal de la elipse y en el de k un movimiento vertical de la misma.

¿Qué sucede al mover los deslizadores a y b en diferentes posiciones?

Cambia de forma la elipse, pero existen dos situaciones concretas cuando a=b se grafica una circunferencia por la excentricidad e=c/a y si b es menor que a cambia a ser de una elipse con eje focal paralelo al eje x a ser una con eje focal paralelo al eje y.

Actividad 9.2. Ecuación canónica de la elipse: Del applet anterior se ubica los deslizadores h y k en 0 y sigue lo planeado a continuación:

1) Realiza movimientos con los deslizadores a y b:

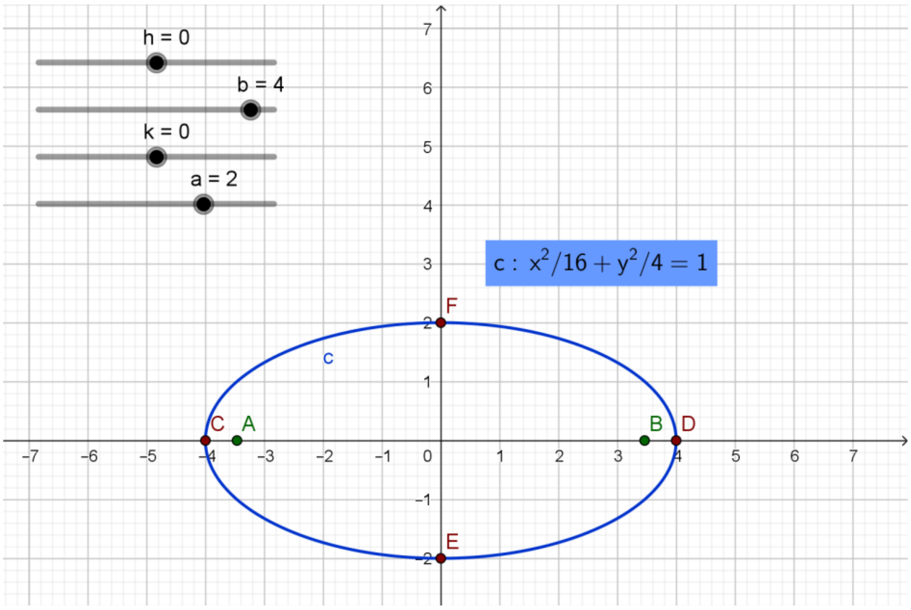


Figura 83. Elipse con ecuación forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Fuente: Autor

¿Dónde se ubicó el centro de la parábola?

El centro de la parábola se ubicó ahora en el origen, cuyas coordenadas son (0,0).

¿Qué pasó con la ecuación de la elipse?

Al eliminarse los coeficientes h y k, queda de la forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$*, es la ecuación ordinaria de la parábola, también podría ser* $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$*, dependiendo la dirección del eje focal y relación de los coeficientes a y b.*

Actividad 9.3. Determinar la ecuación de una elipse dadas ciertas condiciones: Se plantearon algunos ejercicios en los cuales se daban como datos las coordenadas de los vértices, focos, eje mayor, eje menor o existía una condición para determinar algunos de estos parámetros y con estos plantear la ecuación solicitada. Los estudiantes resolvían los ejercicios usando Geogebra, esta herramienta les brindaba apoyo en el planteamiento o resolución del problema, además les ayudaba en la interpretación o para comprobar los resultados.

Encuentre las ecuaciones de las siguientes elipses y grafique:

d) Centro (-4,5) eje mayor igual a 8 y eje menor igual a 6, con eje focal paralelo al eje y

Con Geogebra:

1) Se ingresa en la entrada C=(-4,5), la función elipse de Geogebra usa de referencia los focos y un punto de la cónica.
2) Como es una elipse con eje focal paralelo al eje y, entonces a=eje mayor/2, por lo tanto a=4; además b=eje mayor/2, por lo tanto b=3
3) De aquí usamos la relación $a^2 = b^2 + c^2$, determinando que $c = \sqrt{7}$; sabiendo que F1(h,k-c) y F2(h,k-c), tenemos de coordenadas F1=(-4, 5-$\sqrt{7}$) y F2=(-4, 5+$\sqrt{7}$) introduciendo a estos en entrada.

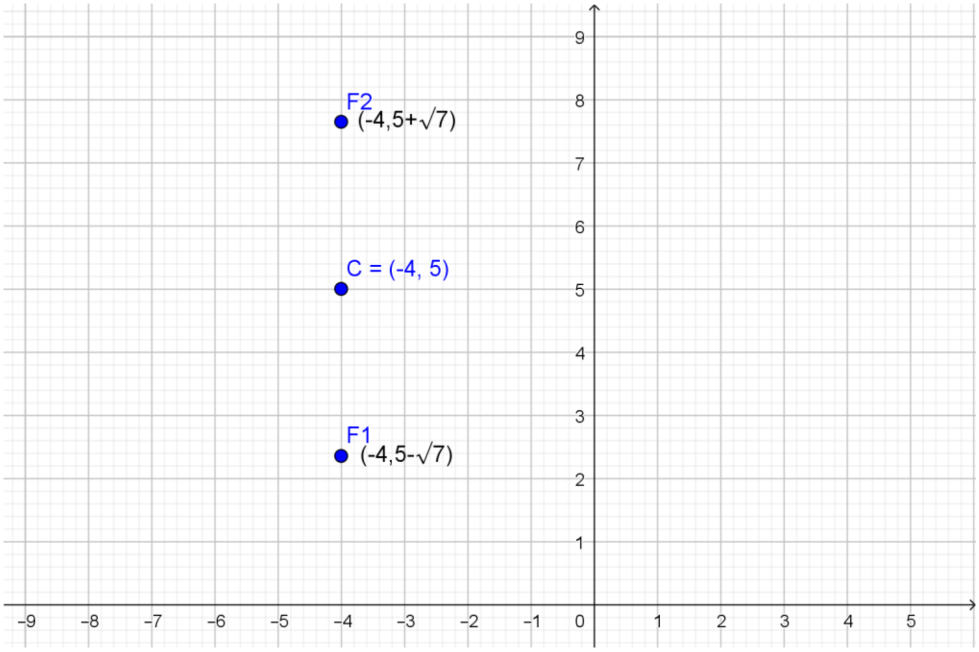
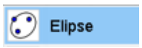


Figura 84. Centro y focos de la elipse

Fuente: Autor

4) Hace falta encontrar un punto de la elipse por lo tanto ubicaremos a uno de los vértices V1(h,k-a) o V2 (h, k+a), teniendo entonces V1(-4,9) y V2(-4,1); introduciendo a uno de estos en entrada.

5) Luego de esto usamos la herramienta elipse 

en donde marcamos los focos y uno de los vértices.

6) Se grafica la elipse y a continuación desplazamos la ecuación de la parte algebraica a la gráfica.

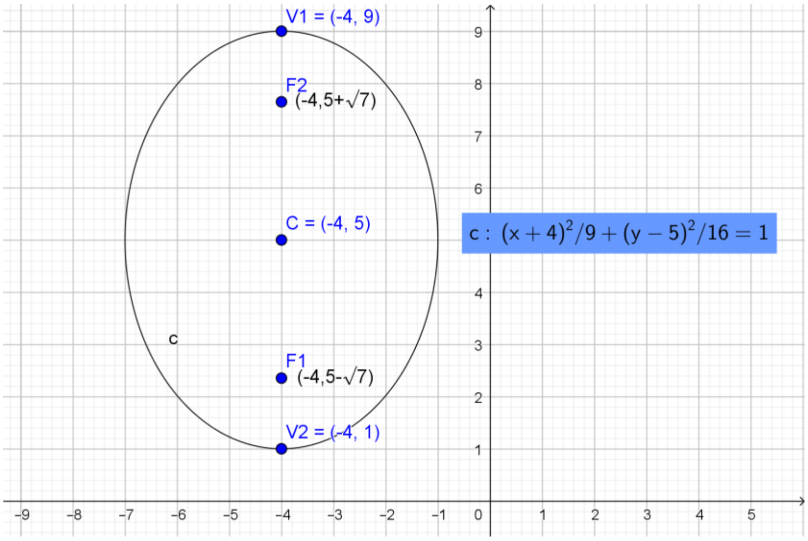


Figura 85. Elipse con su ecuación respectiva.

Fuente: Autor

7) La ecuación es $\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-5)^2}{16}=1$

Analíticamente:

C=(-4,5)

$a=4$ Pues eje mayor 8

$b=3$ Pues eje menor 3

$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ Usamos esta ecuación pues eje focal es paralelo al eje y

$\frac{(x-(-4))^2}{3^2}+\frac{(y-5)^2}{4^2}=1$ Sustituyendo valores de h, k , a y b.

$\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-5)^2}{16}=1$ Se tiene la ecuación de la elipse

8) Centro (2,1) y vértices (-3,1) y (7,1) y eje menor =6

Con Geogebra:

1) Se ingresa en la entrada C=(2,1).
2) Ingreso V1=(-3,1) y V2=(7,1)
3) La longitud a=5 (centro vértice) y b=3 (eje menor=6) De aquí usamos la relación $a^2 = b^2 + c^2$, determinando que $c = 4$; sabiendo que F1(h-c,k) y F2(h-c,k), pues es una elipse con eje focal paralelo a eje x, tenemos de coordenadas F1=(-2, 1) y F2=(6,1) introduciendo a estos en entrada.

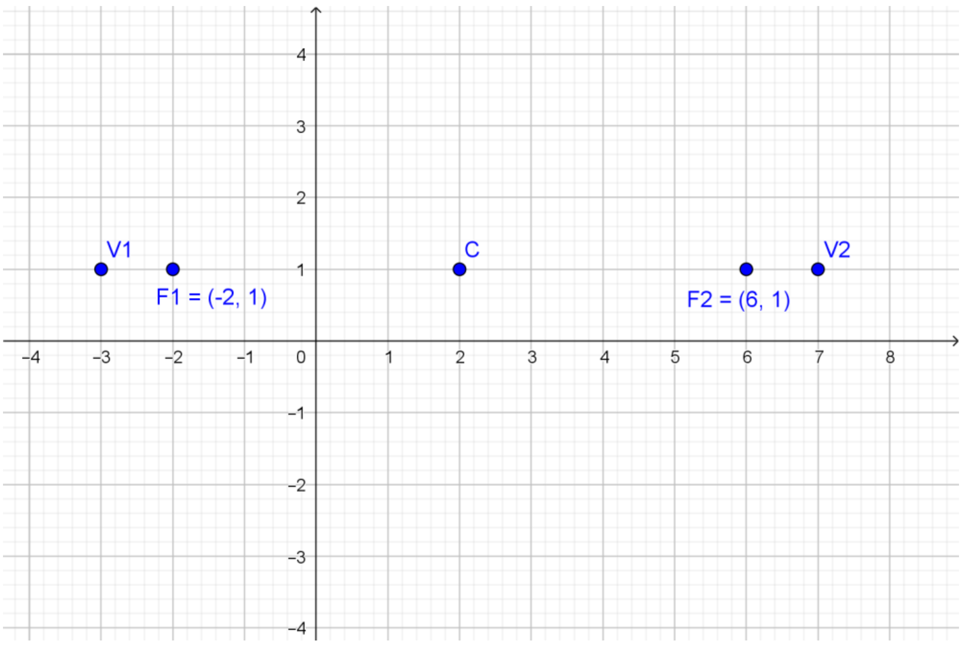
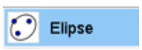


Figura 86. Vértices y focos de elipse con centro(2,1).
Fuente: Autor

4) Luego de esto usamos la herramienta elipse 

en donde marcamos los focos y uno de los vértices.
5) Se grafica la elipse y a continuación desplazamos la ecuación de la parte algebraica a la gráfica.

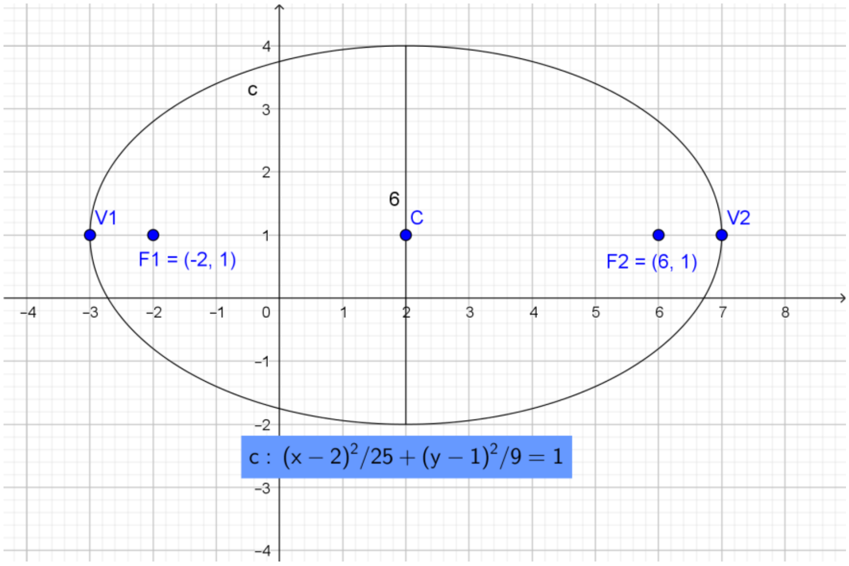


Figura 87. Vértices y focos de elipse con centro(2,1).

Fuente: Autor

6) La ecuación es $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$

Analíticamente:

C=(2,1)

Vértices (-3,1) y (7,1)

$b=3$ Pues eje menor 3

$a=\sqrt{(-3-2)^2+(1-1)^2}$ Distancia entre dos puntos V y C

$a=5$

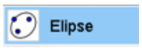
$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ Usamos esta ecuación pues eje focal es paralelo al eje y

$\frac{(x-2)^2}{5^2}+\frac{(y-1)^2}{3^2}=1$ Sustituyendo valores de h, k , a y b.

$\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$ Se tiene la ecuación de la elipse

9) ***Centro origen y distancia focal c=6 y eje focal paralelo a eje y, eje mayor es 16, además identifique los vértices***

Con Geogebra:

1) Se ingresa en la entrada C=(0,0).
2) Al ser la c=0 y eje focal paralelo a eje y entonces F1(0,6) y F2(0,-6), entonces se ingresa estos valores de los focos en Geogebra.
3) Se tiene que eje mayor es 16, por lo tanto vértices serían (0,8) y (0,-8), se los ingresa en entrada del software.
4) Luego de esto usamos la herramienta elipse 

en donde marcamos los focos y uno de los vértices.

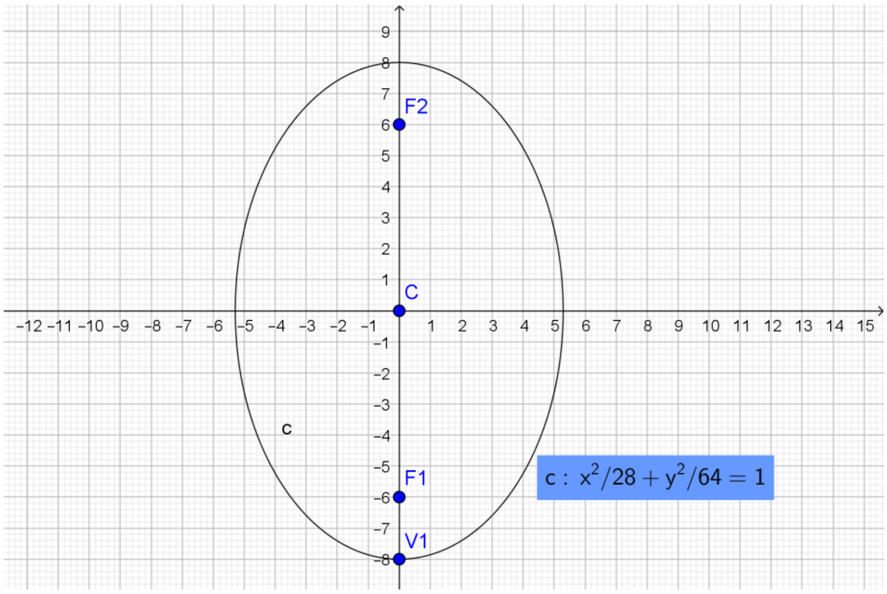


Figura 88. Elipse con distancia focal c=6 y eje focal paralelo a eje y
Fuente: Autor

10) La ecuación es $\frac{x^2}{28} + \frac{y^2}{64} = 1$

Analíticamente:

C=(0,0)

c=6

a=8 — Eje mayor es 16

$b = \sqrt{8^2 - 6^2}$ — Usandos la relación $a^2 = b^2 + c^2$,

$b = \sqrt{28}$

$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ — Usamos esta ecuación pues eje focal es paralelo al eje y

$\frac{(x-0)^2}{\sqrt{28}} + \frac{(y-0)^2}{8^2} = 1$ — Sustituyendo valores de h, k , a y b.

$\frac{x^2}{28} + \frac{y^2}{64} = 1$ — Se tiene por ecuación de la elipse.

Actividad 10

Tema: Ecuación general de la elipse y aplicaciones

Objetivos:

- Conocer la ecuación general de la elipse, a través de la identificación de los coeficientes A, B, D, E y F
- Determinar los elementos de una elipse dada su ecuación general.
- Usar la ecuación de la elipse para resolver problemas

- **Forma de trabajo:** Individual.
- **Tiempo aproximado:** Tres horas pedagógicas
- **Planificación (plan de clase):** Anexo 5
- **Descripción de la actividad:** En primera instancia se presenta la ecuación general de la elipse, se desarrolla un applet en Geogebra para analizar a la elipse a través de los coeficientes A, B, D, E y F.

Se plantea la obtención de la ecuación general de la elipse dadas diferentes condiciones, también como pasar de la ecuación general a la ordinaria para identificar elementos de la elipse. Finalmente, la aplicación de la ecuación de la elipse en la resolución de problemas (aplicaciones).

Desarrollo:

- **Primera Etapa**

  Determinación de los temas a tratarse

  -Ecuación general de la elipse

  -Relación entre coeficientes A, B, D, E, F y a, b, h y k

Revisión Conceptual

Ecuación general de la elipse

A partir de la ecuación ordinaria de la elipse se puede encontrar la ecuación general de esta, se va a tomar la ecuación cuando el eje focal es paralelo al eje x.

Por lo visto anteriormente se tiene que:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$ Ecuación ordinaria de la elipse

$$b^2(x^2-2xh+h^2)+a^2(y^2-2yk+k^2)=a^2b^2$$ Resolviendo operaciones

$$b^2x^2-a^2y^2-2b^2hx-2a^2ky+a^2k^2+b^2h^2-a^2b^2 \quad =0$$

Si $A=b^2$, $B=a^2$, $D=-2b^2hx$, $E=-2a^2k$ y $F=b^2h^2-a^2k^2-a^2b^2$

$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ Ecuación general de la elipse

Actividad 10.1. Ecuación general de la elipse: En este ejercicio se desarrolló un applet en Geogebra en donde se varía los deslizadores A, B, D, E y F para identificar cuáles son los cambios en la elipse y encontrar de esta manera la relación con los parámetros h, k, a y b

Grafique una elipse usando la ecuación general, use deslizadores para los coeficientes A, B, D, E y F.

d) Se crea deslizadores A, B, D, E y F usando la herramienta con intervalo mínimo de -10 y máximo de 10, con un incremento de 1.

e) Escriba en la entrada del programa $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$.

f) Se mueve los deslizadores A, B, D, E y F; se analiza que sucede al movimiento de cada uno.

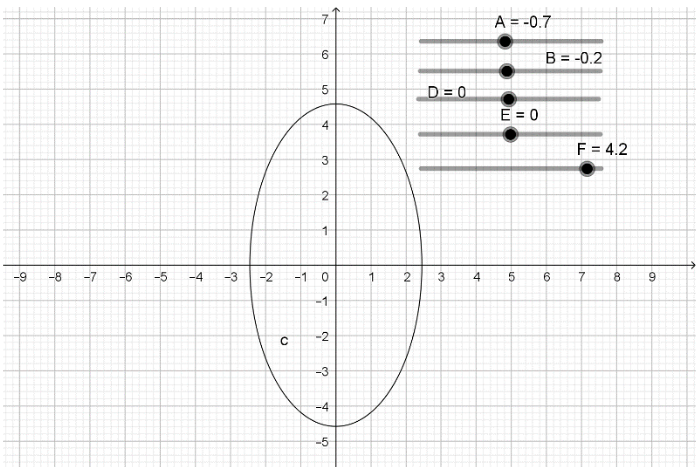


Figura 89. Elipse con variación de deslizadores

Fuente: Autor

¿Qué sucede *cuando D=E=0?*

En este caso el centro de la elipse se ubica en el origen.

¿Qué sucede *cuando se cambia los otros deslizadores?*

Varía los ejes mayor y menor, pero solo en algunos rangos pues luego de estos se gráfica otra cónica (hipérbola).

Actividad 10.2. Dada ecuación general de la elipse determine ecuación ordinaria: Para esta actividad se plantea que a partir de tener la ecuación general de la elipse se obtenga la ordinaria, pues de esta manera se podrá identificar algunos parámetros de la elipse como Focos, vértices, ejes, etc.

Dada la ecuación $4x^2 + 9y^2 - 24x + 18y + 9 = 0$, encuentre la ecuación ordinaria de la elipse, las coordenadas de los focos y vértices, los ejes mayor y menor y el centro

Con Geogebra:

8) Se ingresa en la entrada $4x^2 + 9y^2 - 24x + 18y + 9 = 0$

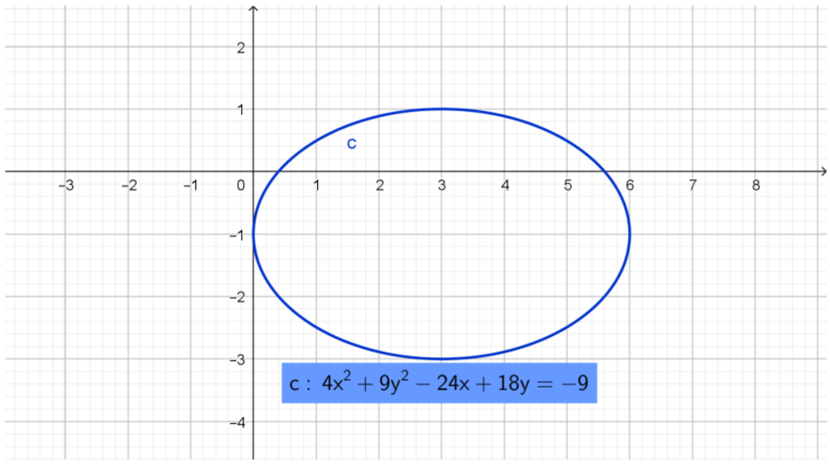


Figura 90. Elipse con ecuación general $4x^2 + 9y^2 - 24x + 18y + 9 = 0$
Fuente: Autor

9) En entrada se coloca la función Foco(<Cónica>), en donde <Cónica> representa el nombre para nuestro caso “c:”

Lo mismo se hace con la función Vértices(<Cónica>) y con Centro (<Cónica>).

10) En la figura 91 se puede observar que el centro es (3,1) y la distancia a=3 y b=2, por lo tanto la ecuación ordinaria de esta parábola sería:

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$$

11) También se puede cambiar la presentación de la ecuación en la vista algebraica para que se muestre la ecuación ordinaria

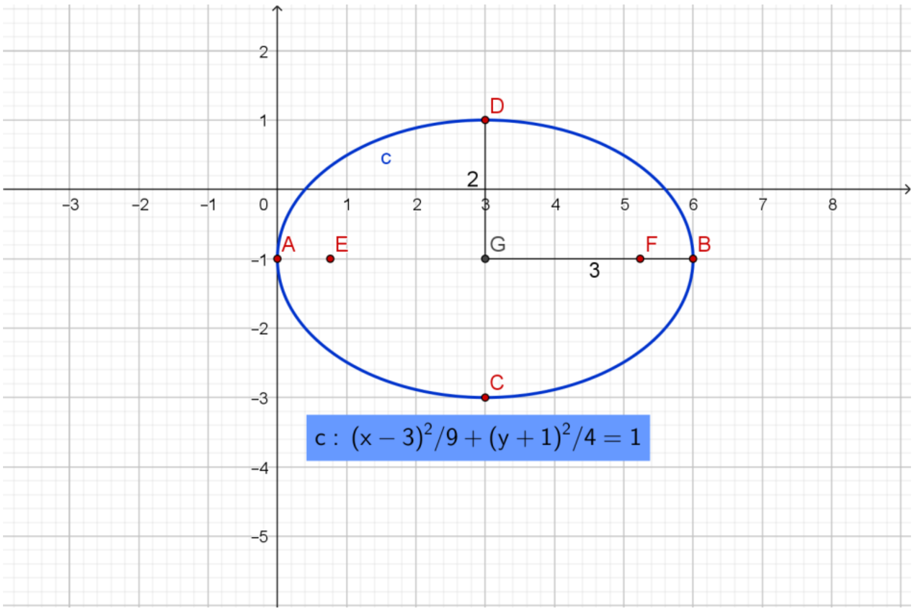


Figura 91. Elipse con ecuación general $4x^2+9y^2-24x+18y+9=0$ *con sus vértices, focos y centro*

Fuente: Autor

Analíticamente:

Se tiene la ecuación $4x^2 + 9y^2 - 24x + 18y + 9 = 0$ para expresar como ordinaria se debe trabajar completando el trinomio en el literal cuadrático.

$4(x^2 - 6x) + 9(y^2 - 2y) + 9 = 0$ Factorizo agrupando según las variables

$4(x^2 - 6x + 9 - 9) + 9(y^2 - 2y + 1 - 1) + 9 = 0$ Completo cuadrados y determina cada trinomio

$4(x^2 - 6x + 9) - 36 + 9(y^2 - 2y + 1) + 9 - 9 = 0$

$4(x - 3)^2 + 9(y + 1)^2 = 36$ Factorice cada trinomio

$\frac{4(x-3)^2}{36} + \frac{9(y+1)^2}{36} = \frac{36}{36}$ Dividiendo para 36

$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$ Se tiene la ecuación canónica de la elipse.

De lo anterior puede identificarse que a=3 y b=2, el centro tiene coordenadas (3,-1), tomando en cuenta que los vértices son (h-a,k) y (h+a,k), tenemos V1(0,-1) y V2(6,-1).

Para determinar los focos:

$c = \sqrt{3^2 - 2^2}$ Usando la relación $a^2 = b^2 + c^2$,

$c = \sqrt{5}$

Como los focos son F1(h-c,k) y F2(h+c,k), entonces F1=(3-$\sqrt{5}$,-1) y F2=(3+$\sqrt{5}$,-1)

Actividad 10.3. Resuelva el problema: A los puntos M y N de una pared se han fijado los extremos de una cuerda, a la que, con una argolla, está sujeto un perro muy peligroso como lo planteado en la figura 92.

Encuentre la ecuación que describe el alcance máximo del desplazamiento del perro.

¿Cuál es la distancia máxima que puede separarse el perro de la pared.

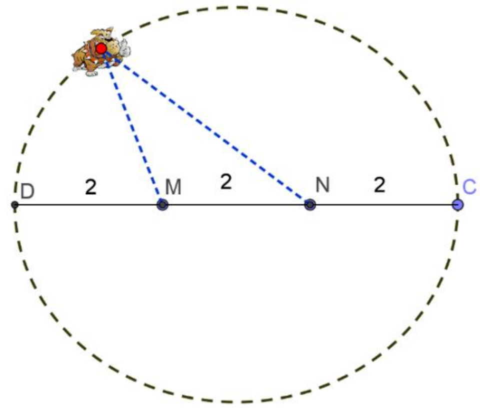


Figura 92. Perro sujeto a cuerda por una argolla, describiendo una elipse

Fuente: Autor

Con Geogebra:

1) Coloco la situación en el plano cartesiano, donde los puntos M y N son los focos. D y C son los vértices.
2) Uso la herramienta elipse marcando los puntos M, N (focos) y D (punto de la elipse).
3) Desplazamos la ecuación resultante de la parte algebraica a la gráfica teniendo.

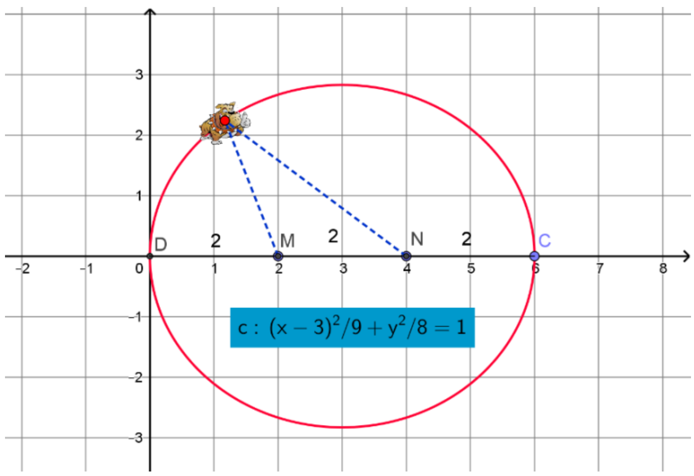


Figura 93. Ecuación de problema perro sujeto a cuerda por una argolla

Fuente: Autor

4) La distancia máxima que separa el perro de la pared se determina identificando el valor de b, que en este caso es $\sqrt{8} \approx 2{,}82$.

Analíticamente:

1) Para esta parte tomamos en cuenta le referencia gráfica de la figura 93, donde determinamos que el centro es (3,0), el vértice está ubicado en (6,0) y focos (2,0) y (4,0).

a=3 distancia centro y vértice

c=1 distancia centro foco

$b = \sqrt{3^2 - 1^2}$ Usandos la relación $a^2 = b^2 + c^2$,

$b = \sqrt{8}$

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ Usamos esta ecuación pues eje focal es paralelo al eje x

$\frac{(x-3)^2}{3^2} + \frac{(y-0)^2}{\sqrt{8}^2} = 1$ Sustituyendo valores de h, k , a y b.

$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ Se tiene por ecuación de la elipse

Se determina que la mayor distancia del perro a la pared es b, por lo tanto $\sqrt{8} \approx 2{,}82$.

Actividad 11

Tema: La hipérbola (definición, lugar geométrico)

- **Objetivo:**
  - Aplicar las herramientas de Geogebra para reconocer el lugar geométrico que representa a la hipérbola aplicando su definición.
- **Forma de trabajo:** Grupal.
- **Tiempo aproximado:** Dos horas pedagógicas
- **Planificación (plan de clase):** Anexo 5

- **Descripción de la actividad:**

  Se partió de la definición de hipérbola como lugar geométrico, se solicitó que usen las herramientas de Geogebra para dibujar la hipérbola tomando en cuenta su definición y demostrar que en esta se cumple lo planteado.

Desarrollo:

- **Primera Etapa**

  Determinación de los temas a tratarse

  -Definición de hipérbola

  Revisión conceptual

Definición hipérbola:

Una hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancia a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos (Lehmann, 1990, p.191).

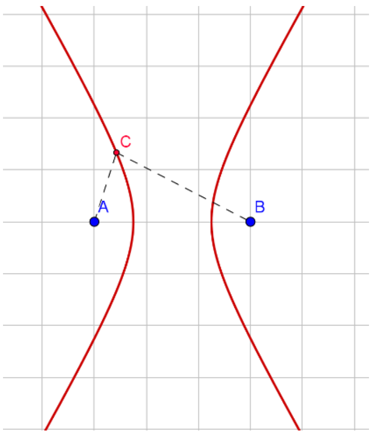


Figura 94. Hipérbola

Fuente: Autor

- **Segunda Etapa**

Actividad 11.1. Definición de hipérbola: Dibuje el lugar geométrico que representa una hipérbola usando su definición y herramientas de Geogebra, tome en cuenta los siguientes pasos:

1) Cree los deslizadores l"resta" con intervalo (1,5) e incremento 0.1 y otro llamado "a" con intervalo (0,10) e incremento 0.1.
2) Se ubica dos puntos A y B colineales.
3) Se realiza dos circunferencia cada uno de los puntos anteriores, con radios igual a "a" y con radio "a+resta".
4) Los puntos A y B deben estar a una distancia en la que exista cortes entre las circunferencias.

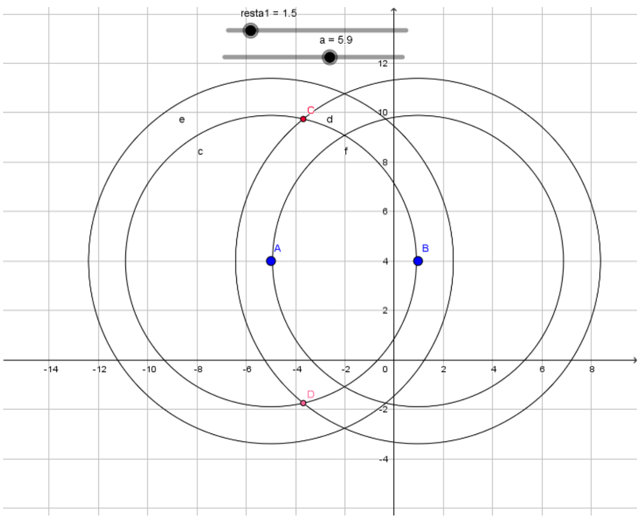


Figura 95. Circunferencia cortadas para graficar hipérbola

Fuente: Autor

5) Se marcan los puntos de intersección entre una circunferencia pequeña y otra grande, activo el rastro de estos puntos.
6) Ubique en un valor el deslizador resta y muevo el deslizador a, observándose la gráfica de la hipérbola, antes se debe ocultar la circunferencias para una mejor visualización.

7) Para demostrar que en realidad es una hipérbola se usa la herramienta "hipérbola", con la cual se marca los puntos A y B(focos), luego uno de los puntos de intersección y se dibuja la elipse sobre el rastro.

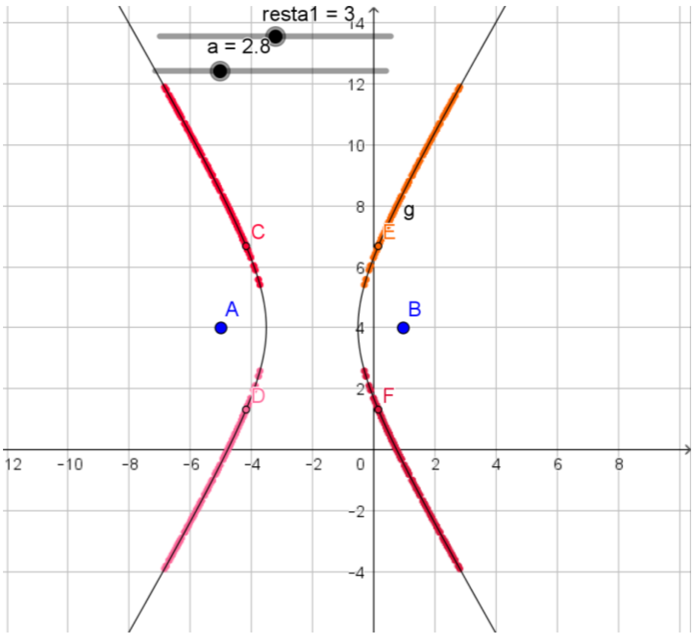


Figura 96. Gráfica de hipérbola según su definición
Fuente: Autor

¿Qué sucede si movemos el deslizador resta?

En este caso cambia la abertura de la hipérbola.

Actividad 12

Tema: La hipérbola (Ecuación ordinaria y canónica)

- **Objetivo:**
  - Identificar los elementos de la hipérbola
  - Conocer la ecuación de la hipérbola (canónica y ordinaria)
  - Determinar la ecuación de la hipérbola identificados su centro, focos, vértices y ejes.

- **Forma de trabajo:** Individual.
- **Tiempo aproximado:** Una hora pedagógica
- **Planificación (plan de clase):** Anexo 5
- **Descripción de la actividad:**

  Se partió de la revisión de la definición de cada uno de los elementos de la hipérbola, con la ayuda de Geogebra se plantearon ejercicios para identificarlos y reconocer sus características.

  Se continua del planteamiento de la ecuación ordinaria de la hipérbola, a partir de ahí se plantearon ejercicios para identificar adecuadamente los coeficientes h, k, a y b

  Luego se proponen actividades para inferir como hallar las ecuaciones dadas las coordenadas o los valores de algunos elementos de la hipérbola, además como representarlas gráficamente. En base a la ecuación ordinaria se planteó unos ejercicios en clase y otros a casa (planteados en el texto guía) para identificar a la ecuación en forma canónica de la hipérbola. Todas las actividades las realizaron primero en Geogebra y luego de manera analítica, para de esta forma buscar que el software brinda apoyo tanto al entendimiento del ejercicio como a la comprobación de la resolución.

Desarrollo:

- **Primera Etapa**

  Determinación de los temas a tratarse

  -Elementos de la hipérbola

  -Ecuación ordinaria de la hipérbola

  -Ecuación canónica de la hipérbola

Revisión conceptual

Elementos de la hipérbola

Según Santillana (2017) los elementos de la hipérbola son:

Focos: puntos fijos del plano, F1 y F2.

Eje focal: recta a la que pertenecen los dos focos

Vértices: puntos de la hipérbola que están sobre el eje focal, V1 y V2

Eje transverso: segmento cuyos extremos son los vértices de la hipérbola.

Centro: punto medio C del segmento cuyos puntos extremos son los focos

Eje normal: recta perpendicular al eje focal, que pasa por el centro de la hipérbola.

Eje conjugado: segmento perpendicular al eje transverso que pasa por el centro de la hipérbola; sus puntos extremos son B1 y B2.

Asíntotas: dos rectas que pasan por el centro de la hipérbola, las cuales se aproximan a las ramas de la hipérbola sin tocarla y se extienden indefinidamente.

Lado recto: segmento perpendicular al eje focal que pasa por un punto de los focos y que une a dos puntos de la hipérbola.

Eje menor: segmento cuyos puntos extremos B1 y B2 son los puntos de intersección de la elipse con el eje normal.

Lado recto: segmento perpendicular al eje focal que pasa por uno de los focos y que une a dos puntos L y R de la elipse.

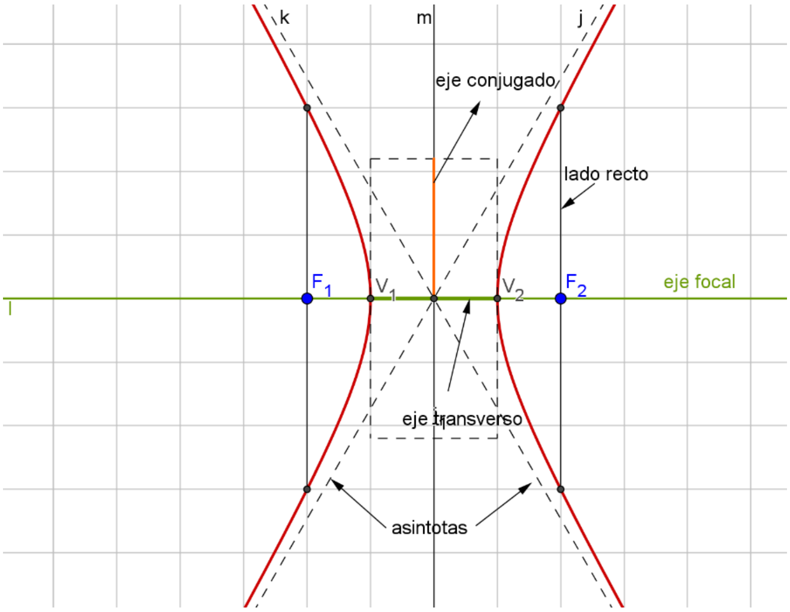


Figura 97. Elementos de la hipérbola

Fuente: Autor

Ecuación ordinaria de la hipérbola

La ecuación ordinaria de la hipérbola cuando tiene centro C(h,k) y eje focal paralelo al eje x es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{donde c>a y } c^2 = a^2 + b^2$$

Y tomando en cuenta la imagen 97 se puede determinar que:

Centro (h,k)

Focos: F1(h-c, k); F2(h+c,k)

Vértices: V1(h-a,k); V2(h+a,k)

Puntos de corte con el eje normal: B1(h, k-b) y B2 (h, k+b)

Longitud del eje transverso: 2a

Longitud del eje conjugado: 2b

Asíntotas: y-k=$\frac{b}{a}$(x-h) ; y-k=-$\frac{b}{a}$(x-h)

En cambio la ecuación ordinaria de la hipérbola cuando tiene centro C(h,k) y eje focal paralelo al eje y es:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1 \qquad \text{donde c>a y } c^2=a^2+b^2$$

Ecuación canónica de la elipse

Para este caso se analizará la situación particular en la cual el vértice está en el origen, es decir h=0 y k=0; entonces tendremos

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{eje focal paralelo al eje x}$$

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \qquad \text{eje focal paralelo al eje y}$$

Segunda Etapa

Actividad 12.1. Ecuación ordinaria de la hipérbola: Grafique la hipérbola usando la ecuación ordinaria, use deslizadores para los coeficientes h, k, a y b se usa como guía lo siguiente:

14) Cree tres deslizadores h, k, a y b usando la 

herramienta con las configuraciones intervalo (-5,5) e incremento de 0.1

15) Escribe en la entrada del programa $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, se ve que se crea una hipérbola "c", vaya a propiedades y configure colores.

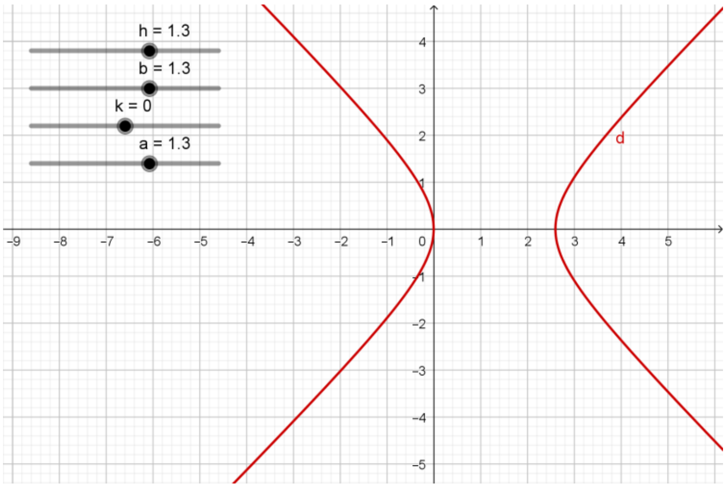


Figura 98. Gráfica de hipérbola usando los deslizadores h, k , a y b

Fuente: Autor

16) Mueva los deslizadores y observe que sucede con cada uno de ellos.

17) Para determinar los vértices y focos se escribe en entrada "Vértices(c)" "Foco(c)", "asíntotas (c)"

18) A continuación, se arrastra la ecuación de la hipérbola de la vista algebraica a la gráfica, previamente escoja el formato en él que se desea presentar (forma ordinaria).

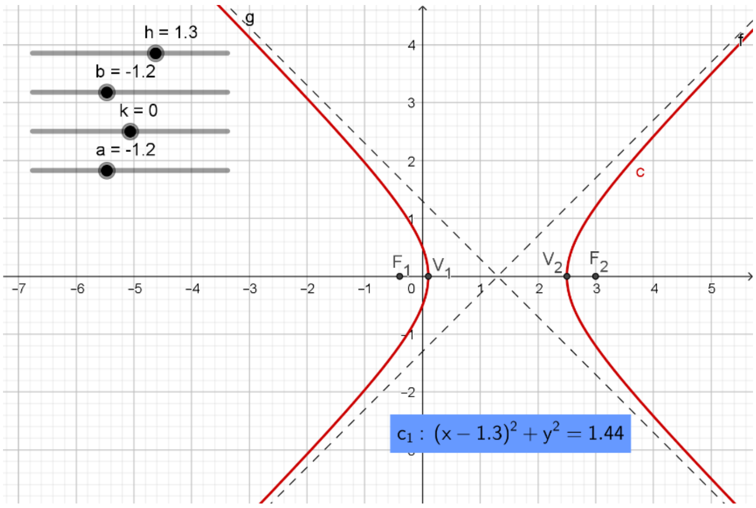


Figura 99. Hipérbola con su respectiva ecuación en forma ordinaria, vértices y focos

Fuente: Autor

Actividad 12.2. Ecuación canónica de la hipérbola: Del applet anterior se ubica los deslizadores h y k en 0 y sigue lo planeado a continuación:

1) Realiza movimientos con los deslizadores a y b:

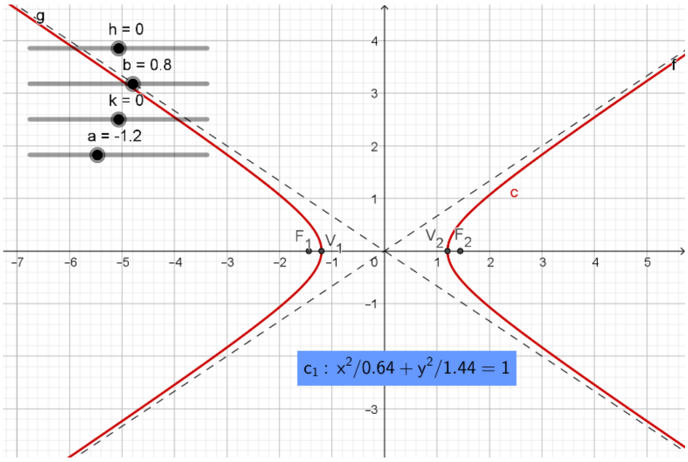


Figura 100. Elipse con ecuación forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Fuente: Autor

Actividad 12.3. Determinar la ecuación de una hipérbola dadas ciertas condiciones: Se plantearon algunos ejercicios en los cuales se daban como datos las coordenadas de los vértices, focos, eje conjugado, eje transverso o existía una condición para determinar algunos de estos parámetros y con estos plantear la ecuación solicitada. Los estudiantes resolvían los ejercicios usando Geogebra, esta herramienta les brindaba apoyo en el planteamiento o resolución del problema, además les ayudaba en la interpretación o para comprobar los resultados.

Encuentre las ecuaciones de las siguientes hipérbolas y grafique(Geogebra):

a) ***Centro (-3,6) eje transverso igual a 10 y eje conjugado igual a 4, con eje focal paralelo al eje y***

Con Geogebra:

11) Se ingresa en la entrada C= (-3,6), la función hipérbola de Geogebra usa de referencia los focos y un punto de la cónica.
12) Como es una hipérbola con eje focal paralelo al eje y, entonces a=eje transverso/2, por lo tanto a=5; además b=eje conjugado/2, por lo tanto b=2.
13) De aquí usamos la relación $c^2 = a^2 + b^2$, determinando que $c = \sqrt{29}$; sabiendo que F1(h, k-c) y F2(h,k-c), tenemos de coordenadas F1=(-3, 6-$\sqrt{29}$) y F2=(-3, 6+$\sqrt{29}$) introduciendo a estos en entrada. Al ser a=5, las coordenadas del vértice seríanV1(h, k-a) y V2(h, k+a), teniendo entonces V1(-3, 11) y V2(-3,1)
14) Luego de esto usamos la herramienta "hipérbola" en donde marcamos los focos y uno de los vértices.
15) Se grafica la elipse y a continuación desplazamos la ecuación de la parte algebraica a la gráfica.

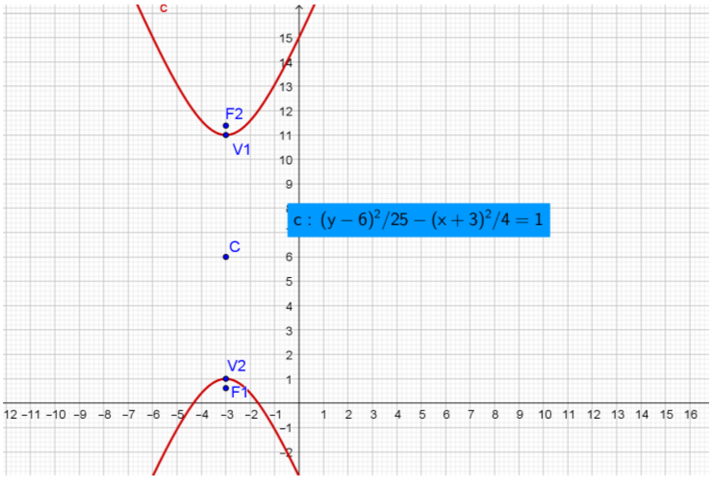


Figura 101.Hipérbola con su ecuación respectiva

Fuente: Autor

Analíticamente:

C=(-3,6)

$a = 5$ Pues eje transverso 10

$b = 2$ Pues eje conjugado 4

$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ Usamos esta ecuación pues eje focal es paralelo al eje y

$\frac{(y-6)^2}{5^2} - \frac{(x-(-3))^2}{2^2} = 1$ Sustituyendo valores de h, k , a y b.

$\frac{(y-6)^2}{25} - \frac{(x+3)^2}{4} = 1$ Se tiene la ecuación de la hipérbola

b) Focos(-5/2,0) y (5/2,0) y extremo de eje conjugado (0,-3/2).

Con Geogebra:

1) Se ingresa en la entrada F1=*(-5/2,0), F2= (5/2,0), B1(0, -3/2) y B2 (0,3/2). Hipérbola con vértice en el origen*
2) Entonces se tiene que c=5/2 y usando la relación $c^2 = a^2 + b^2$ se determina que a=2. Por lo cual los vértices tienen coordenadas V1(-2,0) y V2(2,0), ingresándolos en entrada del software.

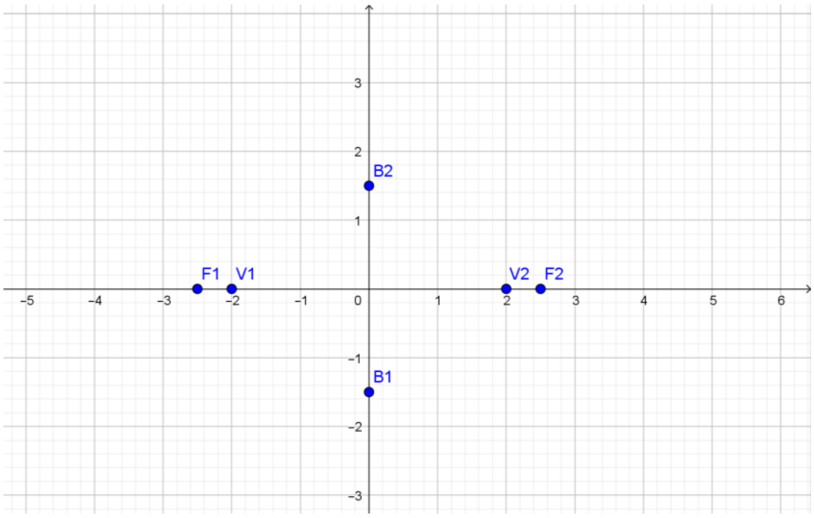


Figura 102. Focos, vértices y puntos de eje conjugado de hipérbola

Fuente: Autor

3) Luego de esto usamos la herramienta hipérbola en donde marcamos los focos y uno de los vértices.

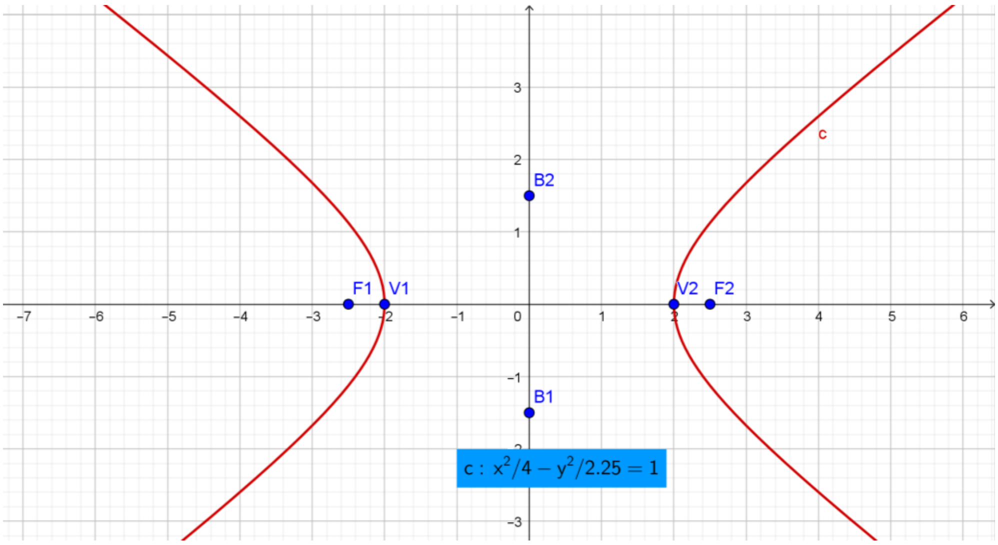


Figura 103. Hipérbola con Focos(-5/2,0) y (5/2,0) y extremo de eje conjugado (0,-3/2).

Fuente: Autor

16) La ecuación es $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2.25} = 1$

Analíticamente:

Focos(-5/2,0) y (5/2,0)

b=3/2	Pues extremo eje transverso
(0,3/2)	
c=5/2	Pues se denota hipérbola
centro(0,0)	
$a = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}$	Usandos la relación $c^2 = a^2 + b^2$,
$a = 2$	
$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	Usamos esta ecuación pues eje focal es paralelo al eje x
$\frac{(x-0)^2}{2^2} + \frac{(y-0)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1$	Sustituyendo valores de h, k , a y b.
$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2.25} = 1$	Se tiene por ecuación de la hipérbola.

Actividad 13

Tema: Ecuación general de la hipérbola

Objetivos:

- Conocer la ecuación general de la elipse, a través de la identificación de los coeficientes A, B, D, E y F
- Determinar los elementos de una hipérbola dada su ecuación general.
- Usar la ecuación de la hipérbola para resolver problemas

- **Forma de trabajo:** Individual.
- **Tiempo aproximado:** Dos horas pedagógicas
- **Planificación (plan de clase):** Anexo 5

- **Descripción de la actividad:** En primera instancia se presenta la ecuación general de la hipérbola, se desarrolla un applet en Geogebra para analizar a la elipse a través de los coeficientes A, B, D, E y F.

Se plantea la obtención de la ecuación general de la hipérbola dadas diferentes condiciones, también como pasar de la ecuación general a la ordinaria para identificar elementos de la hipérbola.

Desarrollo:

- **Primera Etapa**

  Determinación de los temas a tratarse

  -Ecuación general de la hipérbola

  -Relación entre coeficientes A, B, D, E, F y a, b, h y k

Revisión Conceptual

Ecuación general de la elipse

A partir de la ecuación ordinaria de la hipérbola se puede encontrar la ecuación general de esta, se va a tomar la ecuación cuando el eje focal es paralelo al eje x.

Por lo visto anteriormente se tiene que:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$ Ecuación ordinaria de la hipérbola

$$b^2(x^2 - 2xh + h^2) - a^2(y^2 - 2yk + k^2) = a^2b^2$$ Resolviendo operaciones

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2hx + 2a^2ky - a^2k^2 + b^2h^2 - a^2b^2 \quad = 0$$

Si $A = b^2$, $B = -a^2$, $D = -2b^2h$, $E = 2a^2k$ y $F = b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2$

$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ Ecuación general de la hipérbola

Actividad 13.1. Ecuación general de la hipérbola: En este ejercicio se desarrolló un applet en Geogebra en donde se varía los deslizadores A, B, D, E y F para identificar cuáles son los cambios en la hipérbola.

Grafique una elipse usando la ecuación general de esta, use deslizadores para los coeficientes A, B, D, E y F.

a) Se crea deslizadores A, B, D, E y F usando la herramienta con intervalo mínimo de -10 y máximo de 10, con un incremento de 1.

b) Escriba en la entrada del programa $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$.

c) Se mueve los deslizadores A, B, D, E y F; se analiza que sucede al movimiento de cada uno.

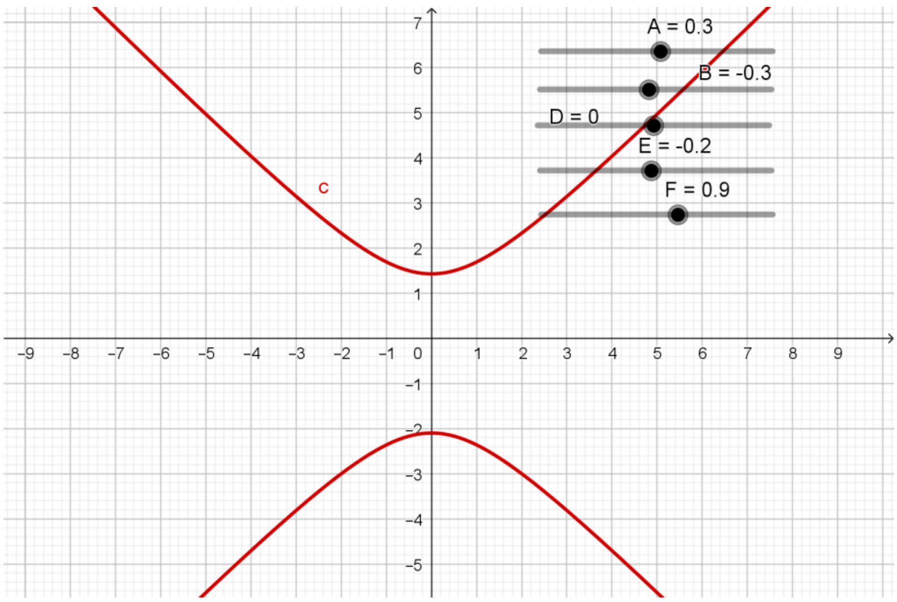


Figura 104.Hipérbola según variación de parámetros A, B, D, E y f

Fuente: Autor

¿Bajo qué condiciones se dibuja una hipérbola?

Cuando A>0 y B<0, aquí tiene el eje focal paralelo a x

Cuando A<0 y B>0, aquí tiene el eje focal paralelo a y

Actividad 10.2. Dada ecuación general de la hipérbola determine ecuación ordinaria: Para esta actividad se plantea que a partir de tener la ecuación general de la elipse se obtenga la ordinaria, pues de esta manera se podrá identificar algunos elementos de la hipérbola

Dada la ecuación $2x^2 - y^2 - 12x + 2y + 5 = 0$, encuentre la ecuación ordinaria de la hipérbola, además los focos, vértices, longitud de ejes transverso y conjugado y asíntotas.

Con Geogebra:

1) Se ingresa en la entrada $2x^2 - y^2 - 12x + 2y + 5 = 0$

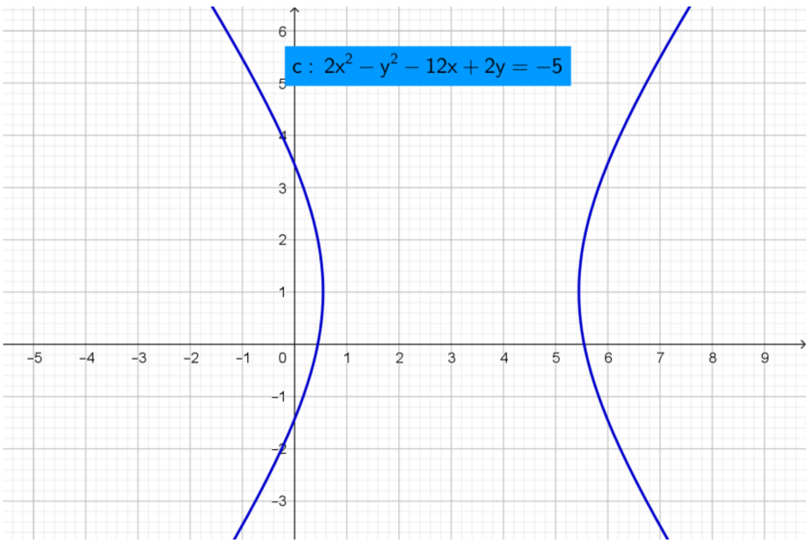


Figura 105. Hipérbola con ecuación general $2x^2 - y^2 - 12x + 2y + 5 = 0$
Fuente: Autor

2) En entrada se coloca la función Foco(<Cónica>), en donde <Cónica> representa el nombre para nuestro caso "c:"

Lo mismo se hace con la función Vértices(<Cónica>), Centro (<Cónica>) y asíntota (<Cónica>).

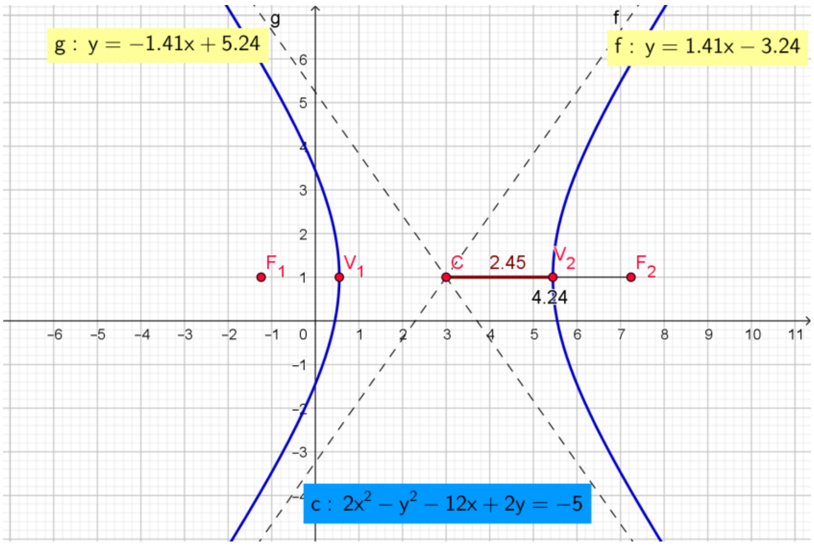


Figura 106. Hipérbola con ecuación general $2x^2 - y^2 - 12x + 2y + 5 = 0$ *con sus elementos*

Fuente: Autor

3) En la figura 106 se puede observar que el centro es (3,1) y la distancia a=2.45 y c=4.24, usando la relación $c^2 = a^2 + b^2$ se tendría a b=3.46 por lo tanto la ecuación ordinaria de esta hipérbola sería:

$$\frac{(x-3)^2}{2.45^2} + \frac{(y-1)^2}{3.46^2} = 1$$

$$\frac{(x-3)^2}{6.002} + \frac{(y-1)^2}{11.98} = 1$$

4) También se puede cambiar la presentación de la ecuación en la vista algebraica para que se muestre la ecuación ordinaria

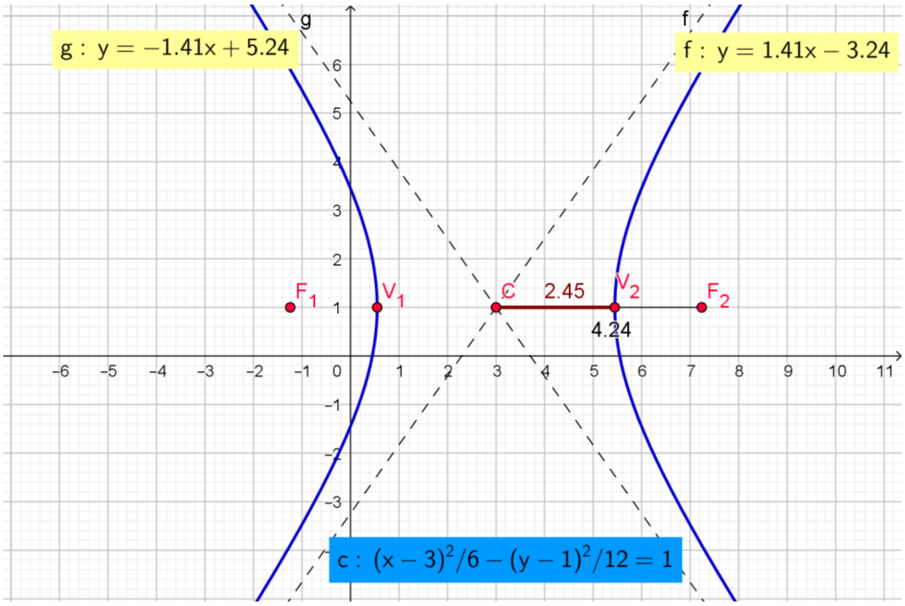


Figura 107. Hipérbola con ecuación ordinaria

Fuente: Autor

5) La longitud del eje transverso=2a=4.9 y longitud del eje conjugado=2b=6.92

Analíticamente:

Se tiene la ecuación $2x^2 - y^2 - 12x + 2y + 5 = 0$ para expresar como ordinaria se debe trabajar completando el trinomio en el literal cuadrático.

$2(x^2 - 6x) - (y^2 - 2y) + 5 = 0$ Factorizo agrupando según las variables

$2(x^2 - 6x + 9) - (y^2 - 2y + 1) + 5 - 18 + 1 = 0$ Completo cuadrados y determina cada trinomio

$2(x-3)^2-(y-1)^2=12$ Factorice cada trinomio

$\frac{2(x-3)^2}{12}-\frac{(y-1)^2}{12}=\frac{12}{12}$ Dividiendo para 12

$\frac{(x-3)^2}{6}-\frac{(y-1)^2}{12}=1$ Se tiene la ecuación canónica de la elipse.

De lo anterior puede identificarse que a=$\sqrt{6}$ y b=$\sqrt{12}$=2$\sqrt{3}$, el centro tiene coordenadas (3,1),

Para determinar los focos:

$c=\sqrt{\sqrt{6}^2+2\sqrt{3}^2}$ Usando la relación $c^2=a^2+b^2$,

$c=3\sqrt{2}$

Como los focos son F1(h-c, k) y F2(h+c, k), entonces F1=(3-3$\sqrt{2}$,1) y F2=(3+3$\sqrt{2}$,1)

Tomando en cuenta que los vértices son (h-a, k) y (h+a, k), tenemos V1(3-$\sqrt{6}$,1) y V2(3+$\sqrt{6}$,1).

La longitud del eje transverso=2a=2$\sqrt{6}$ y longitud del eje conjugado=2b=4$\sqrt{3}$

Finalmente las asíntotas serían $y-k=\frac{b}{a}(x-h)$ y $y-k=-\frac{b}{a}(x-h)$, tenemos entonces:

$y-k=\frac{b}{a}(x-h)$ Sustituyendo h, b y a

$y-3=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}(x-3)$ Haciendo aproximaciones

$y=1.41x+5.23$ Se tiene la ecuación de la una asíntota

$y-k=-\frac{b}{a}(x-h)$ Sustituyendo h, b y a

$y - 3 = -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}(x - 3)$ Haciendo aproximaciones

$y = 1.41x - 3.24$ Se tiene la ecuación de la otra asíntota

3.2. RESULTADOS

3.2.1. Fases para el análisis estadístico:

Para la determinación de conocimientos correctos e incorrectos se realizó una calificación dicotómica: 1 para los correctos y 0 para los incorrectos los que fueron analizados en tres fases:

Inicialmente se realizó una suma de los indicadores de todas las preguntas; dando como resultado: Interpretación del lenguaje (5), Aplicación de conocimientos previos (7), Deducción de la información/utilización de datos/conceptos (7), Inferencia correcta (6), Operacionalización algebraica (9), Procesos de solución de problemas (10); por lo que para el análisis se ponderaron los resultados para ser calificados sobre 10.

En la segunda fase se realizó una evaluación por pregunta en el que se sumaron todas las destrezas de los estudiantes (Indicadores) para determinar el ítem con mejores resultados; así mismo se realizó una ponderación para la primera pregunta (14 puntos) para normalizar y trabajar sobre 10 puntos, para las otras preguntas no fue necesaria la ponderación pues ya se tuvo los diez puntos.

Finalmente se realizó un análisis por pregunta considerando cada uno de los indicadores desglosados y explicados en la sección de presentación de resultados.

Para la primera y segunda fase se hizo uso de medidas de tendencia central y dispersión, y para la tercera fase un análisis de frecuencias absolutas. El procesamiento de la información se realizó en el programa estadístico SPSS 23 y la edición de tablas en Excel 2016.

3.2.2. Resultados

Los resultados revelaron que el indicador con mayor calificación (conocimientos correctos) correspondió a la interpretación del lenguaje con puntuaciones entre 2 y 10 con una media de 8.00 (DE=2.6), seguido por la aplicación de conocimientos con puntuaciones entre 2.9 y 10 ($\bar{x}$=7.4; DE = 2.7), ambos pertenecientes a la dimensión de comprensión del concepto.

Por otra parte, la dimensión de resolución de ejercicios fue la que exhibió menos aciertos; en el caso de los procesos de resolución de problemas se registraron puntuaciones entre 0 y 9 con una media de 4.00 (DE=3.6) y en el indicador referente a operacionalización algebraica entre 0 y 10 con una media de 4.5 (DE=3.9). Detalles en la tabla 7.

Tabla 7. Estadísticos descriptivos de los indicadores de conocimientos

Dimensión	Indicadores	Mínimo	Máximo	Media	DE
Comprensión del concepto	Interpretación del lenguaje	**2.0**	**10.0**	**8.0**	**2.6**
	Aplicación de conocimientos previos	2.9	10.0	7.4	2.7
Planteamiento del problema	Deducción de la información/utilización de datos/conceptos	0.0	10.0	5.9	3.9
	Inferencia correcta	0.0	10.0	5.0	3.4
Resolución de ejercicios	Operacionalización algebraica	0.0	10.0	4.5	3.9
	Procesos de solución de problemas	0.0	9.0	4.0	3.6

Fuente: Autor

La pregunta 2, referente a: encontrar los elementos de una cónica y graficar, fue la que mayor puntuación de conocimientos correctos registró con un mínimo de 1, un máximo de 10 y una media de 6.0 (DE=3.6), mientras que la puntuación de conocimientos en las preguntas: 1, 3 y 4 resultaron con medias similares: 5.3 (DE=3.9); 5.4 (DE=2.8) y 5.5 (DE=4.2) respectivamente. Los detalles se pueden observar en la tabla 8.

Tabla 8. Estadísticos descriptivos de conocimientos por pregunta (Suma de indicadores por pregunta)

	Mínimo	Máximo	Media	DE
Pregunta 1	0,0	10,0	5,3	3,9
Pregunta 2	**1,0**	**10,0**	**6,0**	**3,6**
Pregunta 3	1,0	10,0	5,4	2,8
Pregunta 4	0,0	10,0	5,5	4,2

Fuente: Autor

3.2.3. Identificación de conocimientos correctos e incorrectos:

En la pregunta 1 que se refiere a la determinación de las ordenadas de los puntos de intersección de una elipse que pasa por el origen y foco con abscisa negativa; se encontró que 13 de los 15 estudiantes habían aplicado correctamente los conocimientos previos (c). Mientras que la operacionalización algebraica (c) figuró como el conocimiento con mayor cantidad de errores (n=11). *Tabla 9*.

Tabla 9. Conocimientos – Pregunta 1: Determinación de las ordenadas de los puntos de intersección de una elipse que pasa por el origen y foco con abscisa negativa

Dimensión	Indicador	Frecuencia de conocimientos correctos	Frecuencia de errores
Comprensión del concepto	Interpretación del lenguaje	9	6
	Aplicación de conocimientos previos (a)	9	6
	Aplicación de conocimientos previos (b)	10	5
	Aplicación de conocimientos previos (c)	**13**	2
Planteamiento del problema	Deducción de la información/Utilización de datos/Conceptos (a)	9	6
	Deducción de la información/Utilización de datos/Conceptos (b)	8	7
	Inferencia (a)	8	7
	Inferencia (b)	9	6
Resolución de ejercicios	Operacionalización algebraica (a)	9	6
	Operacionalización algebraica (b)	5	10
	Operacionalización algebraica (c)	4	**11**
	Proceso de solución de problemas (a)	7	8
	Proceso de solución de problemas (b)	7	8
	Proceso de solución de problemas (c)	5	10

Fuente: Autor

En la segunda pregunta que solicita encontrar y graficar elementos de cónicas a partir de una ecuación general se encontró que todos los estudiantes tuvieron una correcta interpretación del lenguaje, además que 12 de ellos aplicaron correctamente los conocimientos previos (a).

Por otra parte, el proceso de resolución de problemas (b y c) en la dimensión de resolución de ejercicios se registró una alta incidencia de errores (n=10). Los detalles se pueden observar en la *tabla 10.*

Tabla 10.Conocimientos – Pregunta 2: Encontrar y graficar elementos de cónicas a partir de una ecuación en su forma general

Dimensión	Indicador	Frecuencia de conocimientos correctos	Frecuencia de errores
Comprensión del concepto	Interpretación del lenguaje	**15**	0
	Aplicación de conocimientos previos (a)	12	3
	Aplicación de conocimientos previos (b)	9	6
Planteamiento del problema	Deducción de la información/Utilización de datos/Conceptos (a)	10	5
	Inferencia	10	5
Resolución de ejercicios	Operacionalización algebraica (a)	6	9
	Operacionalización algebraica (b)	8	7
	Proceso de solución de problemas (a)	10	5
	Proceso de solución de problemas (b)	5	**10**
	Proceso de solución de problemas (c)	5	**10**

Fuente: Autor

Todos los estudiantes, en la tercera pregunta que hace referencia a: Determinar la ecuación de una circunferencia con conocimiento de un punto (origen de coordenadas), el radio y la abscisa del centro, tuvieron conocimientos correctos en la aplicación de conocimientos previos y 12 personas una interpretación correcta del lenguaje (a).

14 de los 15 participantes presentaron errores de conocimientos en el proceso de solución de problemas (b) y 13 personas en inferencia (b). Los detalles se encuentran en la tabla 11.

Tabla 11. Conocimientos - Pregunta 3: Determinar la ecuación de una circunferencia con conocimiento de un punto (origen de coordenadas), el radio y la abscisa del centro

Dimensión	Indicador	Frecuencia de conocimientos correctos	Frecuencia de errores
Comprensión del concepto	Interpretación del lenguaje (a)	12	3
	Interpretación del lenguaje (b)	11	4
	Aplicación de conocimientos previos	**15**	0
Planteamiento del problema	Deducción de la información/Utilización de datos/Conceptos (a)	11	4
	Inferencia (a)	9	6
	Inferencia (b)	2	13
Resolución de ejercicios	Operacionalización algebraica (a)	6	9
	Operacionalización algebraica (a)	7	8
	Proceso de solución de problemas (a)	7	8
	Proceso de solución de problemas (b)	1	**14**

Fuente: Autor

La interpretación del lenguaje fue el indicador con mayor incidencia de aciertos (n=13) en la pregunta 4 que solicita analizar las características de una parábola y encontrar longitudes, seguida por la aplicación de conocimientos previos (n=10), ambas pertenecientes a la dimensión de comprensión de concepto.

El proceso de solución de problemas (b) fue el indicador con mayor incidencia de errores (n=9) en el grupo de estudiantes, seguido por: Deducción de la información/Utilización de datos/Conceptos (c), inferencia y proceso de solución de problemas (a) (n=8). Detalles en la tabla 12.

Tabla 12.Conocimientos - Pregunta 4: Analizar las características de una parábola y encontrar longitudes

Dimensión	Indicador	Frecuencia de conocimientos correctos	Frecuencia de errores
Comprensión del concepto	Interpretación del lenguaje	**13**	2
	Aplicación de conocimientos previos	10	5
Planteamiento del problema	Deducción de la información/Utilización de datos/Conceptos (a)	9	6
	Deducción de la información/Utilización de datos/Conceptos (b)	8	7
	Deducción de la información/Utilización de datos/Conceptos (c)	7	8
	Inferencia	7	8
Resolución de ejercicios	Operacionalización algebraica (a)	8	7
	Operacionalización algebraica (b)	8	7
	Proceso de solución de problemas (a)	7	8
	Proceso de solución de problemas (b)	6	**9**

Fuente: Autor

El instrumento utilizado para realizar el trabajo de investigación permitió encontrar algunos resultados como el aprovechamiento en la asignatura el mismo que se dará a conocer en las limitaciones de la investigación.

CAPITULO IV

4. DISCUSIÓN

4.1. Conclusiones:

Los errores presentados durante los procesos de adquisición y consolidación de los conocimientos se los puede aprovechar como una oportunidad de aprendizaje, pues tener a nuestro alcance la identificación tanto de los conocimientos correctos alcanzados por los estudiantes, como de los errores de conocimiento en los que incurren, permitirán reorganizar las planificaciones realizadas por el docente y los trabajos planteados con el software; de la misma manera se podrán proponer otras estrategias metodológicas y didácticas para compensar los errores conceptuales que no han sido solventados con el uso de Geogebra.

La inmersión de las TIC dentro del proceso de aprendizaje de la matemática incide de manera favorable en los conocimientos de los estudiantes, sin embargo en la revisión conceptual no se ha encontrado con claridad cuales han sido estos conocimientos, pero con la investigación se pudo identificar con mayor facilidad los errores de conocimiento que fueron: el *proceso de solución de problemas*, la *operacionalización algebraica* pues están debajo de la media; en tanto que la *interpretación correcta del* lenguaje seguido por la *aplicación de conocimientos previos* y *deducción de la información/utilización de datos/conceptos* se han reconocido con un mejor desarrollo dentro de lo que corresponde a conocimientos correctos, y en una determinación intermedia se encuentra la *inferencia correcta.*

Respecto a los conocimientos correctos (interpretación del lenguaje), se evidenció que al manipular directamente los objetos con el software ayudó a un mayor entendimiento de lo que se pedía en cada pregunta e identificar la simbología y lenguaje usado, esto al enlazar situaciones abstractas con representaciones gráficas; además se lograba realizar un mayor engranaje de los conceptos nuevos con lo que conoce pues se generaba ese desequilibrio cognitivo necesario para el aprendizaje (aplicación de conocimientos previos); en lo que se refiere a deducción de la información/utilización de datos/conceptos, el uso del software permitió que trabajen estos conocimientos a través interpretación de los elementos de una cónica o la representación imagen – ecuación.

En contraposición a lo planteado en el marco teórico, el software no fue una herramienta que aporte al conocimiento solución de problemas, pues en este indicador se denotó un error de conocimiento, pudo haber ayudado para determinar datos y variables, pero no para plantear estrategias de solución a los problemas.

A parte de lograr interpretar y comprender de mejor manera las preguntas (Interpretación del lenguaje), el poder identificar y relacionar las gráficas y las ecuaciones (conocimientos previos), el reconocimiento y determinación de elementos de las cónicas (Deducción correcta de la información. Datos correctamente utilizados. Concepto) son los conocimientos correctos específicos alcanzados con el uso de Geogebra.

(Santos, Trigo, 2007) plantea que la inserción del software Geogebra mejora notablemente la adquisición de conocimientos, sin embargo, existen otros factores que influyen en estos resultados, y en concordancia con lo obtenido de la investigación se demuestra que pese a trabajar con el recurso aún se denotan errores de conocimientos. Se identificó que los estudiantes incurren aún en errores de conocimiento (Proceso de solución de problemas, operacionalización algebraica) por los bajos desarrollos obtenidos en estos indicadores, por lo tanto, sería trascendental lograr ampliar el campo de investigación y delimitar con exactitud cuáles serían los conocimientos que se enlazan directamente con el uso del software y cuales, con otras estrategias metodológicas, tomando en cuenta los resultados obtenidos.

El uso de TIC siempre ha planteado beneficios dentro del proceso de enseñanza aprendizaje, sin embargo a la luz de los resultados y conclusiones planteadas se puede advertir que en realidad no son una solución definitiva frente a los errores de conocimiento y tampoco una garantía de la consecución de conocimientos correctos; pero el saber cuáles son las bondades del uso de algún software ayudaría a que los docentes prevean la utilización de otras alternativas o recursos metodológicos.

De la experiencia como profesional en el área de matemática y en concordancia con la teoría, los errores se pueden aprovechar como fuente de aprendizaje y motivación para los estudiantes, sin embargo, si no se identifica los conocimientos que poseen, es muy probable que todo el esfuerzo delegado en los procesos de enseñanza aprendizaje no den los resultados esperados.

4.2. Recomendaciones:

Continuar haciendo investigación en el campo de las cónicas pues es una unidad fundamental dentro del estudio de la Matemática, se puede enfocar el trabajo en ámbitos como la mejora de los procesos de enseñanza aprendizaje y el rendimiento de los estudiantes pudiendo aplicar el mismo instrumento (cuestionario) pues ha sido validado.

Es importante que se pueda realizar la investigación con un tamaño de muestra mayor para comprobar los resultados obtenidos, a la vez que los docentes puedan apoyarse en las conclusiones para reconfigurar las actividades planteadas y de esta manera mejorar los conocimientos correctos y corregir la media obtenida en cada uno de ellos con el fin de optimizar la adquisición de los saberes.

Realizar una investigación cuasi-experimental bajo la misma temática de cónicas con los mismos instrumentos donde se trabaje en dos grupos, el uno usando el software y otro sin usarlo, con el fin de cotejar los resultados obtenidos con estos y llegar a otras conclusiones.

El instrumento (cuestionario) empleado en la investigación, puede servir como un documento que se puede aplicar en las estrategias metodológicas de la clase, con el fin de identificar en cada etapa de trabajo de las cónicas los conocimientos correctos y errores de conocimiento y realizar una retroalimentación

4.3. Limitaciones de la investigación:

Aunque la investigación no toma en cuenta las calificaciones de los estudiantes, se evidencia que el curso tiene un promedio de 6,55; es decir que es un grupo que normalmente no alcanza los aprendizajes requeridos. Razón por la cual es importante seguir investigando sobre ¿cómo influyen el uso de las *herramientas tecnológicas en el proceso de aprendizaje?*

Pese a que el objetivo de la investigación se enfocaba en identificar los conocimientos correctos e incorrectos en el estudio de las cónicas con el uso del software, también permitió hacer un hallazgo en cuanto al aprovechamiento de los estudiantes en la asignatura, ya que como parte de la motivación para los estudiantes se les asignaba una calificación para cada una de las actividades realizadas, con el fin de que las ejecuten de la mejor manera, pues los estudiantes limitan su trabajo si no tienen algo a cambio.

Los estudiantes fueron evaluados de acuerdo a la normativa establecida por la LOEI y el instructivo para la aplicación de la evaluación estudiantil dado por el Ministerio de Educación. La escala de calificaciones seguida fue la siguiente:

Tabla 13. Escala de calificaciones

Escala cualitativa	***Escala cuantitativa***
Domina los aprendizajes requeridos	9,00-10,00
Alcanza los aprendizajes requeridos	7,00-8,99
Está próximo a alcanzar los aprendizajes requeridos	4,01-6,99
No alcanza los aprendizajes requeridos	≤ 4

Fuente: Autor

Las calificaciones en la asignatura de matemáticas estuvieron entre: 3.58 y 9.71 con una media de 6.55 (DE=2.0). Un estudiante no alcanzó los aprendizajes requeridos ($X \leq 4$), 7 estaban próximos a alcanzar ($4.01 \leq X \leq 6.99$), 5 alcanzaron los aprendizajes requeridos ($7 \leq X \leq 8.99$) y dos los dominaban ($X \geq 9$).

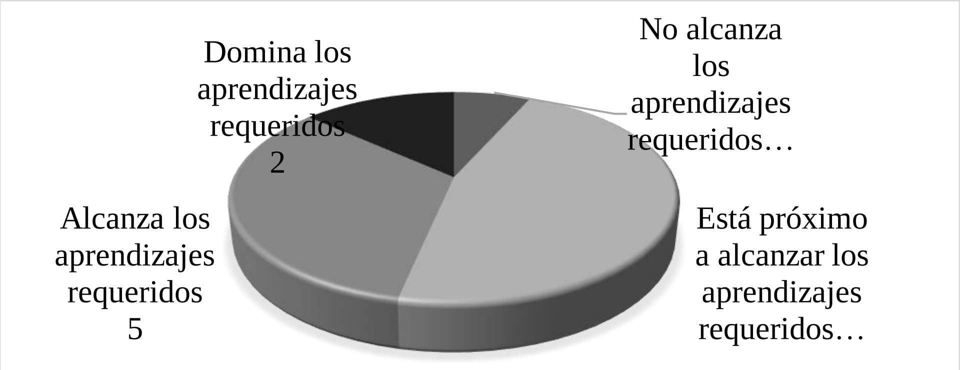


Figura 108. El gráfico de pastel muestra la frecuencia de estudiantes dentro de la escala cualitativa de calificación según el ministerio de educación
Fuente: Autor

La introducción y uso del software en el trabajo con cónicas no es el único factor que interviene para la adquisición de conocimientos, sino también está la motivación hacia la materia, la responsabilidad para el desarrollo de las actividades e incluso el planteamiento adecuado de estas.

BIBLIOGRAFÍA

Aravena, M., Kimelman, E., Micheli, B., Torrealba, R., & Zuñiga, J. (2006). *Investigación Educativa I.* Chile, Chile: Universidad Arcis.

Arrieta, J. (2013). *Las TIC y las matemáticas, avanzando hacia el futuro.* Obtenido de https://repositorio.unican.es/xmlui/handle/10902/3012

Arrieta, X., Delgado , M., & Riveros, V. (2009). Uso de las TIC en educación, una propuesta. *Omnia*(3), 58-77.

Ausubel, D., Novak, J., & Hanesian, H. (1976). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo .* México: Trillas.

Azcarate, C., & Camacho, M. (2003). *Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático.* Recuperado el 23 de Abril de 2016, de Boletín de la Asociación Matemática Venezolana : ftp://ftp.math.ethz.ch/EMIS/journals/BAMV/conten/vol10/matias-carmen.pdf

Balderas, A. (2016). Didáctica de las Ecuaciones Diferenciales. *Trabajo presenta en clase de Didáctica de las Ecuaciones Diferenciales*. Ecuador.

Bermejo, B., & Vieira, I. (2007). El aprendizaje de las matemáticas en la enseñanza secundaria . *Revista de Medios y Educación*, 119-141.

Bocco, M., & Canter, C. (2010). *Revista Iberoamericana de Educación.* Recuperado el 10 de Febrero de 2016, de http://rieoei.org/deloslectores/3241Bocco.pdf

Cadenas, R. (2007). CARENCIAS, DIFICULTADES Y ERRORES EN LOS CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS EN ALUMNOS DEL PRIMER SEMESTRE DE LA ESCUELA DE EDUCACIÓN DE LA UNIVERSIDAD DE LOS ANDES. *ORBIS, II*(6), 68-84.

Castillo, S. (2008). *Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.* Venezuela: Universidad Nacional Experimental de Guayana.

César, C. (2011). *Aprender y enseñar con las TIC: expectativas, realidad y potencialidad.* Metas Educativas.

Coll, C., & Monereo, C. (2008). *Psicología de la educación virtual: aprender y enseñar con las tecnologías de la información y comunicación.* Madrid: Morata.

Confrey, J. (1990). A Review of the Research on Student Conceptions in Mathematics, Science, and Programming. *Review of research in education, 16*, 3-56.

Corrales, A. (2009). La integración de las tecnologías de la información y comunicación (TIC) en el Área. *Hekademos: Revista Educativa Digital.*(4), 45-56.

Dienes, Z. (1970). *La construcción de las Matemáticas.* Barcelona: Vicens - Vives.

Dubinsky, E., & McDonald, M. (2001). *A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Edwards, V. (1985). *La relación de los sujetos con el conocimiento.* México: Instituto Politécnico Nacional.

Engler, A., & Hecklein, M. (2002). *Los errores en el aprendizaje de Matemática.* Santa Fe: Universidad Nacional del Litoral.

Esteban, J. G., & Vigueras, M. (2007). *Enseñar y aprender a estudiar.* Recuperado el 12 de Noviembre de 2016, de http://servicios.educarm.es/templates/portal/ficheros/websDinamicas/93/publicaDiver/aprenderaestudiar.pdf

Flores, P., Lupiañez, J., Berenguer, L., Marín, A., & Molina, M. (2011). *Materiales y recursos en el aula de matemáticas.* Granada: Universidad de Granada.

Fonseca, H., & Benconmo, M. (2011). Teorías del aprendizaje y modelos educativos. *Revista de enfermería y otras ciencias de la salud, No.4*.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticaspara maestros.* Granada: Universidad de Granada.

Golbach, M., Mena, A., Abraham, G., & Rodriguez, M. (2009). *Identificación de los errores en la resolución de problemas de geometría analítica y su comparación con el rendimiento académico en alumnos de ingeniería.* Tucumán: Universidad Tecnológica Nacional.

Hernández, C. (2013). *Consideraciones para el uso del GeoGebra en ecuaciones, inecuaciones, sistemas y funciones.* Cuba: Universidad de Ciencias Pedagógicas Frank País García.

Iturbe, A., Ruiz, E., Pistonesi, M., & Fantini, S. (2012). *Uso del Geogebra en la enseñanza de la geometría en la carrera de diseño.* Uruguay: Conferencia latinoamericana de Geogebra.

Lanail, F. (2001). *Estudiar,aprender,razonar y entender.* Obtenido de http://www.escatep.ipn.mx/Documents/ClubLectura/palabras/Estudiar%20aprender%20entender.pdf

Lastra, S. (2005). *Propuesta metodológica de enseñanza y aprendizaje de la geometría, aplicada en escuelas críticas.* Recuperado el 25 de Marzo de 2016, de www.tesis.uchile.cl/tesis/uchile/2005/lastra_s/sources/lastra_s.pdf

Lehmann, C. (1989). *Geometría Analítica.* España: Limusa.

Martinez, F. (2003). *El profesorado ante las nuevas tecnologías: Medios y herramientas de comunicación para la educación universitaria.* Ciudad de Panamá: Sucesos Publicidad.

Monsalve, M. (2011). *IMPLEMENTACION DE LAS TICS COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA GENERAR UN APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LOS PROCESOS CELULARES EN LOS ESTUDIANTES DE GRADO SEXTO DE LA INSTITUCION EDUCATIVA SAN ANDRÉS DEL MUNICIPIO DE GIRARDOTA.* Medellín: Universidad Nacional de Colombia.

Moreira, M. A. (1997). *Aprendizaje significativo: Un concepto Subyacente.* Brasil: UFRGS. Recuperado el 13 de Marzo de 2016, de http://www.if.ufrgs.br/~moreira/apsigsubesp.pdf.

Movshovitz, H. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 3-14.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics.* USA: NTCM.

Perez, A. (1988). *Análisis didáctico de las Teorías del Aprendizaje.* Málaga: Universidad de Málaga.

Pérez, M. (2016). GeoGebra en el principio de las cónicas (Elipse): Esferas de Dandelin. *Números*, 135-145.

Pérez, M. (2016). GeoGebra en el principio de las cónicas (Elipse): Esferas de Dandelin. *Revista de didáctica de las Matemáticas*.

Piaget, J. (1964). Part I: Cognitive development in children: Piaget development and learning. . *Journal of research in science teaching*, 176-186.

Piaget, J. (1967). *Psicología de la inteligencia.* Buenos Aires: Psique.

Piaget, J., & García, R. (2004). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* México: Siglo XXI Editores.

Picard, N. (1970). *La matemática moderna en los primeros grados.* Buenos Aires: Angel Estrada.

Polya, G. (1995). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 163-172.

Roa, S., & Asuman, O. (2009). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 13*(1), 1-15.

Rodriguez, J. (1993). *El conocimiento*. Obtenido de http://personal.us.es/jluque/Libros%20y%20apuntes/1994%20Conocimiento.pdf

Sánchez, J. (2000). *Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación para la construcción del.* Santiago: Universidad de Chile.

Sarmiento, W. (2014). *Journal for Research in Mathematics Education.* Cuenca: Universidad de Cuenca.

Segura, A. (2003). *Diseños Cuasiexperimentales.* Antioquía: Universidad de Antioquía.

Tamayo, E. (2013). *Implicaciones didácticas de Geogebra sobre el aprendizaje significativo de los tipos de funciones en estudiantes de secundaria.* Recuperado el 2 de Mayo de 2016, de http://oai.redalyc.org/articulo.oa?id=68830444006

Vargas, G., & Gamboa, R. (2013). *El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la Geometría.* Costa Rica: Revista UNICIENCIA.

Victor, V. (2014). *Implementación y aplicación de software educativo y material concreto en el aprendizaje de las ecuaciones de las cónicas en geometría analítica plana de los estudiantes del tercer año de bachillerato.* Cuenca: Universidad de Cuenca.

Villareal, J., Carmona, J., & Arango, C. (2013). *La enseñanza aprendizaje de la geometría analítica. Una propuesta de desarrollo del pensamiento a partir del modelo de van hiele y la metodología de aula taller.* Montevideo: VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática.

Zaida, S., & Jaramillo, C. (2011). Comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* Brasil: Recifa.

ANEXOS

Anexo 1: Consentimientos informados estudiantes

TITULO DE LA INVESTIGACIÓN:

Conocimientos correctos y errores de conocimiento en el estudio de las cónicas con uso de Geogebra por estudiantes del tercero de bachillerato

INVESTIGADOR: Ing. William González Gallegos (Estudiante de la Maestría en Docencia de las Matemáticas)

NÚMEROS ASOCIADOS A LA INVESTIGACIÓN:

072883927-0987209364

LUGAR: Unidad Educativa Los Andes

Estimado/a alumno/a:

Mediante la presente usted es invitado a participar en esta investigación la cual tiene como propósito aportar, a partir de sus resultados, a la identificación de los aprendizajes cognitivos que alcanzan los estudiantes en el estudio de cónicas usando el software Geogebra; es decir tener a nuestro alcance la información conocimientos correctos que se alcanzan y los errores de conocimiento que se presentan pese a la introducción del recurso en el proceso de enseñanza aprendizaje. Cabe recalcar que se ha conversado con las autoridades de la institución explicándoles los objetivos de la investigación y se ha obtenido los permisos respectivos.

En base a la información obtenida, se desea establecer pautas para desarrollar conocimiento basado en investigación que oriente en el mejoramiento de los procesos de aprendizaje del tópico planteado.

En este contexto, deseo solicitarle su participación en el proyecto, lo que se materializaría realizando las siguientes actividades:

-Participar en las clases sobre el tema de cónicas

-Participar en las actividades planificadas por el docente de la materia,

-Realizar un cuestionario (prueba) que pretende recolectar la información de conocimientos correctos y errores de conocimientos.

Para su conocimiento se puntualiza que su participación es voluntaria y anónima.

Riesgos y Beneficios

Para los participantes, este estudio no presenta ningún riesgo en términos de su integridad como alumno. Se trata de una actividad complementaria y voluntaria; y no de una evaluación. No es posible prometer beneficios inmediatos. Sin embargo, los resultados de esta investigación podrían, eventualmente, ayudar a mejorar la experiencia de aprendizaje y enseñanza de los involucrados.

Almacenamiento de los datos para la confidencialidad del proyecto

Los resultados del cuestionario serán transcritos posteriormente. Esta investigación preservará la confidencialidad de su identidad y usará los datos con propósitos profesionales, codificando la información y manteniéndola en archivos seguros. Solos el investigador tendrá acceso a esta información y cualquier reporte que se genere presentará los datos de manera agregada. En ningún caso se identificarán personas individuales.

Lugar y tiempo involucrado

Usted participará de manera habitual en sus clases, el investigador documentará las actividades propuestas y realizadas. Luego de trabajadas todas la temáticas responderá al cuestionario, el cual tomará entre 80 y 90 minutos y se llevará a cabo en el salón de clase.

Cómo se usarán los resultados

Los resultados del estudio serán usados para generar nuevo conocimiento en el área de aprendizaje de geometría analítica y el uso de TIC. En cada una de estas instancias se velará por mantener la estricta confidencialidad y privacidad de los participantes.

Derecho de los participantes

He leído y discutido la descripción de la investigación con el investigador. He tenido la oportunidad de hacer preguntas acerca del propósito y procedimientos en relación con el estudio.

Mi participación en esta investigación es voluntaria. Puedo negarme a participar o renunciar a participar en cualquier momento sin perjuicio para mi futuro estatus como alumno.

El investigador puede eliminarme de la investigación bajo su discreción profesional.

Si durante el transcurso del estudio, llega a estar disponible nueva información significativa que haya sido desarrollada y se relaciona con mi voluntad de continuar participando, el investigador deberá entregarme esta información.

Cualquier información derivada del proyecto de investigación que me identifique personalmente no será voluntariamente publicada o revelada sin mi consentimiento particular.

Si en algún momento tengo alguna pregunta relacionada con la investigación o mi participación, puedo contactarme con el investigador para que responda mis inquietudes.

Consentimiento informado

Yo,____

Alumno del ____

Estoy de acuerdo en participar del estudio titulado "Conocimientos correctos y errores de conocimiento en el estudio de las cónicas con uso de Geogebra por estudiantes del tercero de bachillerato.". El propósito y naturaleza de la investigación me ha sido descrito por el investigador. Yo comprendo que se me solicita y también sé que puedo hacer las consultas que estime pertinentes. Sé que puedo contactarme con el investigador en cualquier momento. También comprendo que puedo suspender mi participación en cualquier instante.

Firma del participante:_____________________________________

Fecha:________________________________

Anexo 2: Consentimiento informado representantes

TITULO DE LA INVESTIGACIÓN:

Conocimientos correctos y errores de conocimiento en el estudio de las cónicas con uso de Geogebra por estudiantes del tercero de bachillerato

INVESTIGADOR: Ing. William González Gallegos (Estudiante de la Maestría en Docencia de las Matemáticas)

NÚMEROS ASOCIADOS A LA INVESTIGACIÓN:

072883927-0987209364

LUGAR: Unidad Educativa Los Andes

Estimado/a Representante:

Mediante la presente le informo que su representado es invitado a participar en esta investigación la cual tiene como propósito aportar, a partir de sus resultados, a la identificación de los aprendizajes cognitivos que alcanzan los estudiantes en el estudio de cónicas usando el software Geogebra; es decir tener a nuestro alcance la información conocimientos correctos que se alcanzan y los errores de conocimiento que se presentan pese a la introducción del recurso en el proceso de enseñanza aprendizaje. Cabe recalcar que se ha conversado con las autoridades de la institución explicándoles los objetivos de la investigación y se ha obtenido los permisos respectivos.

En base a la información obtenida, se desea establecer pautas para desarrollar conocimiento basado en investigación que oriente en el mejoramiento de los procesos de aprendizaje del tópico planteado.

En este contexto, deseo solicitarle su participación en el proyecto, lo que se materializaría realizando las siguientes actividades:

-Participar en las clases sobre el tema de cónicas

-Participar en las actividades planificadas por el docente de la materia,

-Realizar un cuestionario (prueba) que pretende recolectar la información de conocimientos correctos y errores de conocimientos.

Para su conocimiento se puntualiza que su participación es voluntaria y anónima

Riesgos y Beneficios

Para los participantes, este estudio no presenta ningún riesgo en términos de su integridad como alumno. Se trata de una actividad complementaria y voluntaria; y no de una evaluación. No es posible prometer beneficios inmediatos. Sin embargo, los resultados de esta investigación podrían, eventualmente, ayudar a mejorar la experiencia de aprendizaje y enseñanza de los involucrados.

Almacenamiento de los datos para la confidencialidad del proyecto

Los resultados del cuestionario serán transcritos posteriormente. Esta investigación preservará la confidencialidad de su identidad y usará los datos con propósitos profesionales, codificando la información y manteniéndola en archivos seguros. Solos el investigador tendrá acceso a esta información y cualquier reporte que se genere presentará los datos de manera agregada. En ningún caso se identificarán personas individuales.

Lugar y tiempo involucrado

Los estudiantes participarán de manera habitual en sus clases, el investigador documentará las actividades propuestas y realizadas. Luego de trabajadas todas las temáticas responderán al cuestionario, el cual tomará entre 80 y 90 minutos y se llevará a cabo en el salón de clase.

Cómo se usarán los resultados

Los resultados del estudio serán usados para generar nuevo conocimiento en el área de aprendizaje de geometría analítica y el uso de TIC. En cada una de estas instancias se velará por mantener la estricta confidencialidad y privacidad de los participantes.

Derecho de los participantes

He leído y discutido la descripción de la investigación. He tenido la oportunidad de hacer preguntas acerca del propósito y procedimientos en relación con el estudio.

La participación en esta investigación es voluntaria. Puedo negar que mi representante participe en cualquier momento sin perjuicio alguno.

El investigador puede eliminar a mi representado de la investigación bajo su discreción profesional.

Si durante el transcurso del estudio, llega a estar disponible nueva información significativa que haya sido desarrollada y se relaciona con mi voluntad de continuar participando, el investigador deberá entregarme esta información.

Cualquier información derivada del proyecto de investigación que identifique personalmente a mi representado no será voluntariamente publicada o revelada sin mi consentimiento particular.

Si en algún momento tengo alguna pregunta relacionada con la investigación o mi participación, puedo contactarme con el investigador para que responda mis inquietudes.

Consentimiento informado

Yo,____

Representante del estudiante______________________________________

Alumno del_____________________________

Estoy de acuerdo en que mi representado participe del estudio titulado “Conocimientos correctos y errores de conocimiento en el estudio de las cónicas con uso de Geogebra por estudiantes del tercero de bachillerato”. El propósito y naturaleza de la investigación me ha sido descrito por el investigador. Yo comprendo que se me solicita y también sé que puedo hacer las consultas que estime pertinentes. Sé que puedo contactarme con el investigador en cualquier momento. También comprendo que puedo suspender mi participación en cualquier instante.

Firma del Representante_____________________________

Fecha:_________________________________

Anexo 3: Consentimiento informado rectora institución

FACULTAD DE FILOSOFÍA

FORMULARIO DE CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA RECTORA

TITULO DE LA INVESTIGACIÓN:

Conocimientos correctos y errores de conocimiento en el estudio de las cónicas con uso de Geogebra por estudiantes del tercero de bachillerato.

INVESTIGADOR: Ing. William González Gallegos (Estudiante de la Maestría en Docencia de las Matemáticas)

NÚMEROS ASOCIADOS A LA INVESTIGACIÓN:

072883927-0987209364

LUGAR: Unidad Educativa Los Andes

Estimado/a rectora:

Lic. Tatiana Cordero Salazar
Rectora Unidad Educativa Los Andes

Estimado/a Representante:

Mediante la presente solicito a usted la autorización para realizar la investigación "Conocimientos correctos y errores de conocimiento en el estudio de las cónicas con uso de Geogebra por estudiantes del tercero de bachillerato", la cual tiene como propósito aportar, a partir de sus resultados, a la identificación de los aprendizajes cognitivos que alcanzan los estudiantes en el estudio de cónicas usando el software Geogebra; es decir tener a nuestro alcance la información conocimientos correctos que se alcanzan y los errores de conocimiento que se presentan pese a la introducción del recurso en el proceso de enseñanza aprendizaje.

En base a la información obtenida, se desea establecer pautas para desarrollar conocimiento basado en investigación que oriente en el mejoramiento de los procesos de aprendizaje del tópico planteado.

En este contexto, le informo que las actividades a realizarse serán los estudiantes serán:

-Participar en las clases sobre el tema de cónicas

-Participar en las actividades planificadas por el docente de la materia,

-Realizar un cuestionario (prueba) que pretende recolectar la información de conocimientos correctos y errores de conocimientos.

Riesgos y Beneficios

Para los participantes, este estudio no presenta ningún riesgo en términos de su integridad como alumno. Se trata de una actividad complementaria y voluntaria; y no de una evaluación. No es posible prometer beneficios inmediatos. Sin embargo, los resultados de esta investigación podrían, eventualmente, ayudar a mejorar la experiencia de aprendizaje y enseñanza de los involucrados.

Almacenamiento de los datos para la confidencialidad del proyecto

Los resultados del cuestionario serán transcritos posteriormente. Esta investigación preservará la confidencialidad de la identidad de los participantes y usará los datos con propósitos profesionales, codificando la información y manteniéndola en archivos seguros. Solos el investigador tendrá acceso a esta información y cualquier reporte que se genere presentará los datos de manera agregada. En ningún caso se identificarán personas individuales.

Lugar y tiempo involucrado

Los estudiantes participarán de manera habitual en sus clases, el investigador documentará las actividades propuestas y realizadas. Luego de trabajadas todas las temáticas responderán al cuestionario, el cual tomará entre 80 y 90 minutos y se llevará a cabo en el salón de clase.

Cómo se usarán los resultados

Los resultados del estudio serán usados para generar nuevo conocimiento en el área de aprendizaje de geometría analítica y el uso de TIC. En cada una de estas instancias se velará por mantener la estricta confidencialidad y privacidad de los participantes.

Derecho de los participantes

He leído y discutido la descripción de la investigación con el investigador. He tenido la oportunidad de hacer preguntas acerca del propósito y procedimientos en relación con el estudio.

Consentimiento informado

Yo, Tatiana Cordero Salazar

Rectora de: Unidad Educativa Los Andes

Autorizo que el Ing. William González Gallegos realice estudio titulado "Conocimientos correctos y errores de conocimiento en el estudio de las cónicas con uso de Geogebra por estudiantes del tercero de bachillerato". El propósito y naturaleza de la investigación me ha sido descrito por el investigador. Yo comprendo que se me solicita y también sé que puedo hacer las consultas que estime pertinentes. Sé que puedo contactarme con el investigador en cualquier momento. También comprendo que puedo suspender mi participación en cualquier instante.

Firma de la rectora: Tatiana Cord

Fecha: 08/09/2017

LOS ANDES
UNIDAD EDUCATIVA
RECTORADO

Anexo 4: Instrumento para recolección de información (cuestionario)

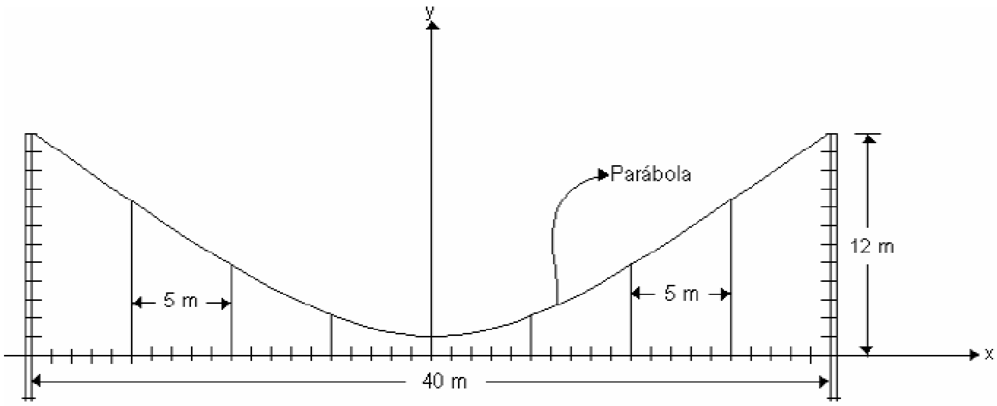
EVALUACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS SOBRE CÓNICAS

1. Determinar las ordenadas de los puntos de intersección de la elipse de ecuación: $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$, con la recta que contiene al punto (0,0) y al foco de abscisa negativa de la elipse

2. Encontrar los elementos de la siguiente cónica y graficar: $4x^2-9y^2-16x-36y-56=0$

3. Determinar la ecuación de la circunferencia que contiene al origen de coordenadas, tiene radio igual a 10 y la abscisa del centro es (-6). ¿Existe única solución? Grafique.

4. En la estructura colgante que se indica, el cable parabólico está suspendido de dos torres de 12 m de altura y la distancia entre ellas es 40 m. Calcule las longitudes de los cables verticales que se indican.



Anexo 5: Planificación Unidad Didáctica

LOS ANDES	UNIDAD EDUCATIVA **"LOS ANDES"** **PLANIFICACIÓN DE UNIDAD DIDÁCTICA**	Código: UELA.2.2.P3.F4 Versión: 2.0 Fecha: 14/SEP/2017

1. DATOS INFORMATIVOS:					
ÁREA:	Matemáticas	**ASIGNATURA:**	Matemáticas	**NIVEL/SUBNIVEL:**	BGU
DOCENTE (S):	Ing. William González G	**GRADO/CURSO:**	Tercero	**PARALELOS:**	A
No. DE LA UNIDAD:		**TÍTULO DE LA UNIDAD:**		**OBJETIVOS ESPECÍFICOS DE LA UNIDAD**	
2		Cónicas		O.M.5.1. Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, y el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático, que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto de nuestro país, y tomar decisiones con responsabilidad social. O.M.5.3. Desarrollar estrategias individuales y grupales que permitan un cálculo mental y escrito, exacto o estimado; y la capacidad de interpretación y solución de situaciones problémicas del medio.	

2. PLANIFICACIÓN:	
DESTREZAS CON CRITERIO DE DESEMPEÑO:	**INDICADORES ESENCIALES DE EVALUACIÓN**
M.5.2.16. Describir la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola como lugares geométricos en el plano. M.5.2.17. Escribir y reconocer las ecuaciones cartesianas de la circunferencia con centro en el origen y con centro fuera del origen para resolver y plantear problemas, identificando la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.	I.M.5.6.1. Grafica vectores en el plano; halla su módulo y realiza operaciones de suma, resta y producto por un escalar; resuelve problemas aplicados a la Geometría y a la Física. (I.2.)

LOS ANDES	UNIDAD EDUCATIVA **"LOS ANDES"**	Código: UELA.2.2.P3.F4
	PLANIFICACIÓN DE UNIDAD DIDÁCTICA	Versión: 2.0
		Fecha: 14/SEP/2017

EJES TRANSVERSALES:	Honestidad	**PERÍODOS:**	36	**SEMANA DE INICIO:**	1/Nov

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS	RECURSOS	INDICADORES DE LOGRO	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN/TÉCNICAS/INSTRUMENTOS
DCD: M.5.2.16. **Anticipación** • Observar la situación inicial de la página 48. • Distinguir el tipo de corte que sufrió cada cono. • Relacionar cada cono cortado con la vista que le corresponda. **Construcción** • Leer y comprender las características de una superficie cónica de revolución que se presenta en la página 48. • Leer y comprender las características de una sección cónica de revolución que se presenta en la página 48. • Leer y comprender las características de cónicas degeneradas que se presenta en la página 49. • Realizar ejercicios en los que se diferencie cada tipo de figura geométrica. • ***Realizar actividades cónicas Geogebra.*** **Consolidación** • Realizar ejercicios en los que se tenga detallar paso a paso como obtener las diferentes cónicas. • Realizar ejercicios en los que se tenga que distinguir las diferentes cónicas que se puedan presentar. Relacionar las diferentes cónicas con figuras de la vida real.	• texto del estudiante • calculadora científica • computadora • Internet • dispositivo de almacenamiento externo • Software Geogebra	• Identifica las diferentes cónicas. • Relaciona las cónicas con figuras de la vida real. • Grafica cónicas • Realiza los trabajos con orden y limpieza. • Usa un lenguaje castellano y matemático correcto.	Técnica: Observación Instrumento: Lista de Cotejo Técnica: Análisis de producción del alumno. Instrumento: Cuaderno de Trabajo.
DCD: M.5.2.16. y M.5.2.17. **Anticipación** • Analizar la figura que se presenta en la situación inicial. • Explicar qué figuras geométricas son parte del gráfico que se encuentra en la situación inicial. • Determinar qué valores se toman en cuenta para el cálculo del perímetro de la figura de la sección *Anticipación.* • Responder la pregunta ¿variaría el cálculo si en lugar de un cuadrado se tiene un rectángulo? Enunciar argumentos que justifiquen la respuesta. **Construcción**	• texto del estudiante • calculadora científica • computadora • Internet • dispositivo de almacenamiento externo • Software Geogebra	• Identifica el centro y el radio de una circunferencia. • Escribe la ecuación de la circunferencia conocido el centro y el radio. • Escribe la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos. • Escribe la ecuación de la circunferencia conocidos los extremos de un diámetro de la circunferencia. • Determina la ecuación de una recta que interseca a una circunferencia. • Escribe la ecuación general de la circunferencia.	Técnica: Observación Instrumento: Lista de Cotejo Técnica: Análisis de producción del alumno. Instrumento: Cuaderno de Trabajo.

	UNIDAD EDUCATIVA **"LOS ANDES"**	Código: UELA.2.2.P3.F4
LOS ANDES	**PLANIFICACIÓN DE UNIDAD DIDÁCTICA**	Versión: 2.0
		Fecha: 14/SEP/2017

• Enunciar los elementos que son parte de una circunferencia. • Deducir la fórmula de la circunferencia con centro en (h, k) a partir del cálculo de la distancia entre dos puntos. • Deducir la ecuación general de la circunferencia a partir de la ecuación canónica de la circunferencia. • Determinar semejanzas y diferencias entre la ecuación general y la ecuación canónica de la circunferencia. • Determinar el cambio que sufre la ecuación de la circunferencia cuando el centro se encuentra en el origen de las coordenadas. • Describir el proceso para escribir la ecuación de la circunferencia conocidos el centro y el radio. • Enunciar semejanzas y diferencias en el cálculo de la ecuación de la circunferencia conocidos diferentes datos. • Escribir el centro y el radio de una circunferencia en función de los coeficientes numéricos de la ecuación general. • ***Realizar actividades cónica circunferencia Geogebra.*** **Consolidación** • Determinar el centro y el radio de una circunferencia. • Escribir ecuaciones de la circunferencia que cumplan con condiciones específicas. • Realizar la representación gráfica de una circunferencia conocida su ecuación canónica. • Analizar y resolver problemas geométricos relacionados con circunferencias y rectas.		• Escribe la ecuación canónica de la circunferencia. • Resuelve problemas geométricos de circunferencias. • Resuelve problemas de física relacionados con circunferencias. • Realiza los trabajos con orden y limpieza. • Usa un lenguaje castellano y matemático correcto. • Realiza los trabajos con orden y limpieza. • Usa un lenguaje castellano y matemático correcto.	
DCD: M.5.2.17. **Anticipación** • Observar la situación inicial de la página 51. •Tener en mente la fórmula de la ecuación de la circunferencia. • Obtener las tres ecuaciones que pide el ejercicio. **Construcción** • Leer y comprender las posiciones relativas entre una recta y circunferencia en el plano que se presentan en la página 51.	• texto del estudiante • calculadora científica • computadora • Internet • dispositivo de almacenamiento externo • Software Geogebra	• Distingue posiciones relativas entre rectas y circunferencia. • Distingue posiciones relativas entre circunferencias. • Resuelve ejercicios de aplicación en los que se involucren posiciones relativas de cónicas • Realiza los trabajos con orden y limpieza. • Usa un lenguaje castellano y matemático correcto.	Técnica: Observación Instrumento: Lista de Cotejo Técnica: Análisis de producción del alumno. Instrumento: Cuaderno de Trabajo.

UNIDAD EDUCATIVA **"LOS ANDES"**	Código: UELA.2.2.P3.F4
PLANIFICACIÓN DE UNIDAD DIDÁCTICA	Versión: 2.0
	Fecha: 14/SEP/2017

• Realizar ejercicios de posición relativa entre recta y circunferencia como los que se presentan en la página 51. • Resolver ejercicios en los que se tenga que encontrar la ecuación de la circunferencia como los que se muestran en la página 52. • Leer y comprender las posiciones relativas entre dos circunferencias en el plano que se presentan en la página 53. • Realizar ejercicios de posición relativa entre dos circunferencias como los que se presentan en las páginas 53 y 54. • Resolver problemas de aplicación como los de la página 55. • ***Realizar actividades cónica circunferencia Geogebra.*** **Consolidación** • Resolver ejercicios de posición relativa como los que se muestran en la página 56. • Resolver ejercicios en los que se deba obtener la ecuación de la circunferencia. • Resolver ejercicios de aplicación en los que se presenten situaciones reales que involucren posiciones relativas entre circunferencias y rectas y posiciones relativas entre circunferencias			
DCD: M.5.2.16. y M.5.2.17. **Anticipación** • Leer la información que se encuentra en la situación inicial. • Observar las gráficas y las ecuaciones cuadráticas que se proponen en la sección *Anticipación*. • Determinar el procedimiento para relacionar las ecuaciones con los gráficos. • Analizar el discriminante de cada una de las ecuaciones cuadráticas. • Encontrar las raíces de las ecuaciones cuadráticas y relacionarlas con los puntos de corte con el eje x de las gráficas propuestas. • Utilizar el discriminante para verificar las respuestas. **Construcción**	• texto del estudiante • calculadora científica • computadora • Internet • dispositivo de almacenamiento externo • Software Geogebra	• Escribe la ecuación de una parábola, conocido el vértice y el foco. • Grafica las parábolas, conocidos sus elementos. • Identifica la ecuación de una parábola vertical. • Deduce la ecuación de la parábola representada en un gráfico. • Analiza proposiciones. • Relaciona ecuaciones canónicas de la parábola con sus elementos. • Determina los elementos de una parábola basado en la ecuación. • Resuelve problemas relacionados con parábolas.	Técnica: Observación Instrumento: Lista de Cotejo Técnica: Análisis de producción del alumno. Instrumento: Cuaderno de Trabajo.

UNIDAD EDUCATIVA **"LOS ANDES"**	Código: UELA.2.2.P3.F4
PLANIFICACIÓN DE UNIDAD DIDÁCTICA	Versión: 2.0
	Fecha: 14/SEP/2017

• Seguir los pasos que se proponen en el texto y trazar una parábola. • Identificar gráficamente los elementos de una parábola. • Deducir la fórmula que permite calcular la longitud del lado recto de la parábola. • Deducir la ecuación canónica de la parábola con vértice en (0, 0), a partir del cálculo de distancia entre puntos. • Analizar las características que cumplen las parábolas que sean verticales u horizontales. • Determinar la ecuación canónica de la parábola. • Establecer semejanzas y diferencias entre las fórmulas de los elementos de la parábola con vértice en (0, 0) y vértice en (h, k). • Analizar procedimientos en la solución de problemas relacionados con parábolas. • ***Realizar actividades cónica parábola Geogebra.*** **Consolidación** • Determinar la ecuación de la parábola, conocido el vértice y el foco. • Calcular la ecuación de una parábola representada gráficamente. • Graficar parábolas, conocidas su ecuaciones. • Graficar parábolas, conocidos sus elementos. • Relacionar proposiciones con las características de las parábolas. • Resolver problemas en los que intervienen parábolas.		• Realiza los trabajos con orden y limpieza. • Usa un lenguaje castellano y matemático correcto.	
DCD: M.5.2.17. **Anticipación** • Analizar la información que se presenta en la situación inicial. • Explicar qué significa que la parábola pasa por el punto dado. • Determinar cómo se verifica que un punto pertenece a la parábola. • Responder a la pregunta: ¿Qué procedimiento seguiste para resolver el problema? **Construcción**	• texto del estudiante • calculadora científica • computadora • Internet • dispositivo de almacenamiento externo • Software Geogebra	• Identifica características de la parábola. • Analiza los coeficientes de la ecuación general de la parábola. • Escribe ecuación general de la parábola a partir de la canónica. • Calcula la ecuación de la parábola, conocidos tres puntos. • Determina la ecuación de la tangente a una parábola. • Determina la ecuación de la secante a una parábola. • Aplica las parábolas en la solución de problemas de tiro parabólico.	Técnica: Observación Instrumento: Lista de Cotejo Técnica: Análisis de producción del alumno. Instrumento: Cuaderno de Trabajo.

LOS ANDES	UNIDAD EDUCATIVA **"LOS ANDES"**	Código: UELA.2.2.P3.F4
	PLANIFICACIÓN DE UNIDAD DIDÁCTICA	Versión: 2.0
		Fecha: 14/SEP/2017

• Deducir la ecuación general de la parábola a partir de la ecuación canónica de la parábola con vértice en (h, k). • Analizar las ecuaciones generales de las parábolas con vértice en (h, k) verticales y horizontales, y determinar semejanzas y diferencias. • Enunciar las características que deben cumplir los coeficientes de una parábola vertical para que se abra hacia arriba o hacia abajo. • Determinar el procedimiento para una parábola horizontal que se abre hacia la derecha o la izquierda. • Analizar las aplicaciones que tiene la parábola en la vida cotidiana. • Identificar la relación que existe entre una parábola y un espejo cóncavo. • Relacionar la parábola y sus elementos con el funcionamiento de una linterna. • Resolver problemas de Física mediante modelos matemáticos. • ***Realizar actividades cónica parábola Geogebra.*** **Consolidación** • Analizar los coeficientes de la ecuación general de la parábola. • Determinar la ecuación general de la parábola a partir de la ecuación canónica. • Determinar la ecuación canónica de la parábola a partir de la ecuación general de la misma. • Establecer el procedimiento para determinar la ecuación general de la parábola, conocidos tres puntos. • Establecer el procedimiento para demostrar que una recta es tangente a una parábola. • Resolver problemas de tiro parabólico y de espejos mediante las ecuaciones de parábolas. • Resolver problemas relacionados con la vida cotidiana mediante ecuaciones de parábolas.		• Aplica las parábolas en la solución de problemas de espejos. • Aplica las parábolas en la solución de problemas cotidianos. • Realiza los trabajos con orden y limpieza. • Usa un lenguaje castellano y matemático correcto.	

	UNIDAD EDUCATIVA "LOS ANDES"	Código: UELA.2.2.P3.F4
LOS ANDES	PLANIFICACIÓN DE UNIDAD DIDÁCTICA	Versión: 2.0
		Fecha: 14/SEP/2017

DCD: M.5.2.16. y M.5.2.17. **Anticipación** • Leer la situación problema que se presenta en *Anticipación*. • Relacionar la información con el gráfico propuesto. • Reproducir, con material de reciclaje, la situación inicial. • Identificar las zonas que quedan pintadas con los colores indicados. • Responder a la pregunta: ¿Con la estructura del gráfico se puede formar una circunferencia? Justificar. • Consensuar las respuestas analizando las respectivas justificaciones. • ***Realizar actividades cónica elipse Geogebra.*** **Construcción** • Seguir los pasos que se proponen en el texto y trazar una elipse. • Identificar gráficamente los elementos de una elipse. • Deducir la fórmula que permite calcular la longitud del lado recto de la elipse. • Deducir la ecuación canónica de la elipse con vértice en (0, 0), a partir del cálculo de la suma de las distancias a dos puntos fijos es igual a una constante. • Analizar las características que cumplen las elipses que sean verticales u horizontales. • Determinar la ecuación canónica de la elipse. • Establecer semejanzas y diferencias entre las fórmulas de los elementos de la elipse con vértice en (0, 0) y vértice en (h, k). • Analizar procedimientos en la solución de problemas relacionados con elipses. • ***Realizar actividades cónica circunferencia Geogebra.*** **Consolidación** • Reconocer los elementos de una elipse vertical y una horizontal con centro en el origen. • Deducir el procedimiento para determinar la ecuación canónica de una semielipse. • Determinar los elementos de una elipse. Calcular el punto de tangencia de una recta a una elipse.	• texto del estudiante • calculadora científica • computadora • internet • dispositivo de almacenamiento externo • Software Geogebra	• Identifica elementos de una elipse a partir de su gráfico. • Grafica elipses, conocidas sus ecuaciones canónicas. • Determina la ecuación de una semielipse. • Escribe la ecuación canónica de la elipse, conocidos sus elementos. • Resuelve problemas relacionados con elipses. • Realiza los trabajos con orden y limpieza. • Usa un lenguaje castellano y matemático correcto.	Técnica: Observación Instrumento: Lista de Cotejo Técnica: Análisis de producción del alumno. Instrumento: Cuaderno de Trabajo.

	UNIDAD EDUCATIVA **"LOS ANDES"**	Código: UELA.2.2.P3.F4
LOS ANDES	**PLANIFICACIÓN DE UNIDAD DIDÁCTICA**	Versión: 2.0
		Fecha: 14/SEP/2017

DCD: M.5.2.17. **Anticipación** • Leer la situación inicial. • Calcular el diámetro de la circunferencia del rollo de papel. • Comparar el diámetro de la circunferencia con el alto y la profundidad del dintel. • Obtener conclusiones al comparar los datos calculados. • Responder a la pregunta propuesta en el texto. **Construcción** • Analizar la ecuación general de segundo grado que se encuentra en la sección *Construcción*. • Analizar y ejemplificar los valores que deben tomar los coeficientes para obtener las diferentes cónicas. • Establecer semejanzas y diferencias entre los valores de los coeficientes de la ecuación general de segundo grado. • Explicar la variación de los signos que se debe dar para que la ecuación sea una elipse o una hipérbola. • Determinar semejanzas entre las ecuaciones generales de la circunferencia y de la elipse. • Identificar las características de una cónica degenerada, y proponer estrategias para reconocer si es un punto, dos rectas que se cortan o una recta. • ***Realizar actividades cónica circunferencia Geogebra.*** **Consolidación** • Analizar coeficientes y determinar el tipo de cónica que representan las ecuaciones generales de segundo grado dadas. • Escribir la ecuación general de segundo grado que representa cada uno de los gráficos. • Analizar parámetros que permiten identificar la cónica representada en una ecuación general de segundo grado. • Resolver problemas relacionados con las cónicas representadas por una ecuación general de segundo grado	• texto del estudiante • calculadora científica • computadora • Internet • dispositivo de almacenamiento externo • Software Geogebra	• Identifica la cónica representada en la ecuación de segundo grado. • Relaciona la gráfica con la ecuación general de segundo grado correspondiente. • Analiza signos de los coeficientes e identifica la cónica representada en una ecuación de segundo grado. Resuelve problemas relacionados con la ecuación general de segundo grado. • Realiza los trabajos con orden y limpieza. • Usa un lenguaje castellano y matemático correcto.	Técnica: Observación Instrumento: Lista de Cotejo Técnica: Análisis de producción del alumno. Instrumento: Cuaderno de Trabajo.

LOS ANDES	UNIDAD EDUCATIVA **"LOS ANDES"**	Código: UELA.2.2.P3.F4
	PLANIFICACIÓN DE UNIDAD DIDÁCTICA	Versión: 2.0
		Fecha: 14/SEP/2017

DCD: M.5.2.16. y M.5.2.17. **Anticipación** • Observar la situación inicial de la página 81. • Analizar los cortes que se han realizado en cada figura. • Indica las nuevas figuras que se formar luego de realizar los cortes en cada figura. **Construcción** • Leer y comprender la definición de hipérbola que se presenta en la página 81. • Distinguir todos los elementos que conforman una hipérbola, observar la figura y definiciones de la página 81. • Comprender como obtener la ecuación canónica de una hipérbola con centro en el origen, leer página 82. • Distinguir la ecuación canónica de la hipérbola con centro en el origen con eje focal paralelo al eje x y la ecuación canónica de la hipérbola con centro en el origen con eje focal paralelo al eje y. • Resolver ejercicios en los que se tenga que encontrar los elementos que conforman una hipérbola, realizar ejercicios como los de la página 84. • ***Realizar actividades cónica hipérbola Geogebra.*** **Consolidación** • Realizar ejercicios en los que se tenga que encontrar la ecuación canónica de la hipérbola por medio de su gráfica. • Determinar las ecuaciones de hipérbolas según condiciones dadas, resolver ejercicios como los de la página 85. Encontrar la ecuación de la hipérbola distinguiendo si el eje focal es paralelo al eje x o al eje y.	• texto del estudiante • calculadora científica • computadora • Internet • dispositivo de almacenamiento externo • Software Geogebra	• Identifica una hipérbola. • Encuentra la ecuación canónica de la hipérbola. • Diferencia si la hipérbola tiene eje focal paralelo al eje x o eje y. Encuentra la ecuación de la hipérbola a partir de su gráfica. • Realiza los trabajos con orden y limpieza. • Usa un lenguaje castellano y matemático correcto.	Técnica: Observación Instrumento: Lista de Cotejo Técnica: Análisis de producción del alumno. Instrumento: Cuaderno de Trabajo.

LOS ANDES	UNIDAD EDUCATIVA **"LOS ANDES"**	Código: UELA.2.2.P3.F4
	PLANIFICACIÓN DE UNIDAD DIDÁCTICA	Versión: 2.0
		Fecha: 14/SEP/2017

DCD: M.5.2.17. **Anticipación** • Leer la situación inicial de la página 86. • Reconocer que la ecuación planteada representa la ecuación canónica de la circunferencia. • Indicar los vértices y focos de la hipérbola planteada. **Construcción** • Leer la definición de la ecuación general de la hipérbola que se presenta en la página 86. • Realiza ejercicios en los que se relacionan la ecuación general y la ecuación canónica de la hipérbola, resolver ejercicios como los de la página 86. • Resolver problemas de aplicación como los que se plantean en la página 87. • ***Realizar actividades cónica hipérbola Geogebra.*** **Consolidación** • Realizar ejercicios en los que se deba obtener la ecuación general de la hipérbola a partir de su ecuación canónica, resolver ejercicios como los de la página 88. • Realizar ejercicios en los que se deba obtener la ecuación general de la hipérbola, a partir de condiciones iniciales dadas, resolver ejercicios como los de la página 88. • Resolver ejercicios en los que se deba obtener la ecuación canónica y general de la hipérbola a partir de su gráfica. Resolver ejercicios de aplicación en los que se involucren hipérbolas y rectas.	• texto del estudiante • calculadora científica • computadora • Internet • dispositivo de almacenamiento externo • Software Geogebra	• Calcula la ecuación general de la hipérbola. • Encuentra la ecuación general de la hipérbola a partir de su gráfica. • Obtiene la ecuación general de la hipérbola a partir de la su ecuación canónica. • Realiza los trabajos con orden y limpieza. • Usa un lenguaje castellano y matemático correcto.	Técnica: Observación Instrumento: Lista de Cotejo Técnica: Análisis de producción del alumno. Instrumento: Cuaderno de Trabajo

LOS ANDES	UNIDAD EDUCATIVA **"LOS ANDES"**	Código: UELA.2.2.P3.F4
	PLANIFICACIÓN DE UNIDAD DIDÁCTICA	Versión: 2.0
		Fecha: 14/SEP/2017

CD: M.5.2.17. **Anticipación** • Leer la situación inicial de la página 90. • Analizar las dimensiones del dindel y del rollo de papel. • Contestar la situación propuesta. **Construcción** • Leer y comprender la definición de la ecuación de segundo grado que se presenta en la página 90. • Distinguir las diferentes cónicas que puede representar la ecuación de segundo grado según el caso que se presente, leer los casos de la página 90. • Realizar ejercicios que involucren la ecuación de segundo grado como los de la página 90. **Consolidación** • Realizar ejercicios en los que se tenga que identificar a qué tipo de cónica representa la ecuación de segundo grado, resolver ejercicios como los de la página 91. • Realizar ejercicios en los que se tenga que encontrar la ecuación general de diferentes cónicas a partir de su gráfica. • Resolver ejercicios de aplicación en los que se involucre la ecuación de segundo grado.	• texto del estudiante • calculadora científica • computadora • Internet • dispositivo de almacenamiento externo • Software Geogebra	• Distingue la ecuación de segundo grado. • Distingue las diferentes cónicas que se pueden obtener de la ecuación de segundo grado. Resuelve aplicaciones que involucran la ecuación de segundo grado. • Realiza los trabajos con orden y limpieza. • Usa un lenguaje castellano y matemático correcto.	Técnica: Observación Instrumento: Lista de Cotejo Técnica: Análisis de producción del alumno. Instrumento: Cuaderno de Trabajo.

3. ADAPTACIONES CURRICULARES:	
ESPECIFICACIÓN DE LA NECESIDAD EDUCATIVA ESPECIAL:	**ESPECIFICACIÓN DE LA ADAPTACIÓN A APLICARSE:**

ELABORADO	**REVISADO**	**APROBADO**
NOMBRE: Ing. William González	**NOMBRE: Lcda. Dolores Orellana**	**NOMBRE: Lcda. Tatiana Cordero**
FIRMA: William G.	**FIRMA:**	**FIRMA:** Tatiana Cordero