

- d. Situamos la partícula en cierto punto del plano inclinado, al soltar la partícula, esta se deslizará hasta chocar con el resorte en el que se puede observar que se deformará cierta cantidad x .



Imagen 4-11.



Imagen 4-12.



Imagen 4-13.



Imagen 4-14.

Las imágenes 4-11, 4-12, 4-13, 4-14, muestran como el resorte se comprime dicha cantidad x .

- e. Esto hace que la fuerza recuperadora desplaze a la partícula cierta distancia pero en sentido contrario (rebote), lo cual genera un trabajo. Por lo tanto:

$$E_{PE} = \frac{1}{2} kx^2$$



Imagen 4-15. Se muestra el instante en el que la partícula comprime el resorte.



Imagen 4-16. Muestra el instante en el que la fuerza recuperadora del resorte empuja la partícula.



CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA CINÉTICA TOTAL. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

Objetivo: Desarrollar y aprender esta ley. Relacionar el concepto de energía cinética de rotación de espín con el correspondiente en la traslación. Aplicarlo a los problemas propuestos.

Procedimiento

- a. La expresión de la energía cinética de rotación de espín (E_{CR}) es análoga a la de traslación:

$$E_{CR} = \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad E_{CT} = \frac{1}{2}mv^2$$

Donde el momento de inercia y la masa representan la resistencia que presenta la partícula a la rotación y al desplazamiento respectivamente. Mientras que la velocidad angular y lineal representan el cambio de posición respecto al tiempo.

- b. En este apartado estudiaremos cuerpos que presenten simultáneamente movimientos de traslación y rotación, donde la energía cinética total (E_C) es la suma de sus energías cinéticas de traslación y rotación de espín.

$$E_C = E_{CT} + E_{CR}$$
$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

- c. Para esta práctica usaremos el plano inclinado y el disco como partícula.
- d. Ubicamos el plano inclinado en cierto ángulo (10, 20, 30°) y situaremos la partícula en un punto (A) del plano inclinado.

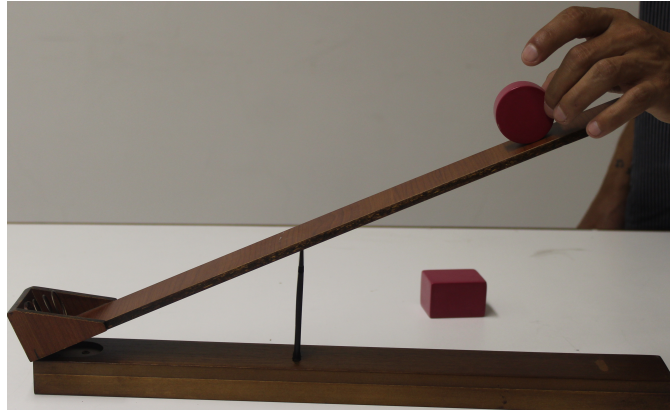


Imagen 4-17. Partícula en su posición inicial (A).

- e. En este punto, antes de soltar la partícula, observamos que la velocidad lineal y angular son cero. Por lo que:

$$E_{CA} = E_{CTA} + E_{CRA}$$

$$E_{CA} = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}I\omega_A^2$$

$$E_{CA} = \frac{1}{2}m \cdot 0 + \frac{1}{2}I \cdot 0 = 0$$

- f. Ahora analizaremos la E_C en un punto B, después de haber soltado la partícula. En este punto la velocidad lineal y angular del disco será distinta de 0. Entonces:

$$E_{CB} = E_{CTB} + E_{CRB}$$

$$E_{CB} = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}I\omega_B^2$$

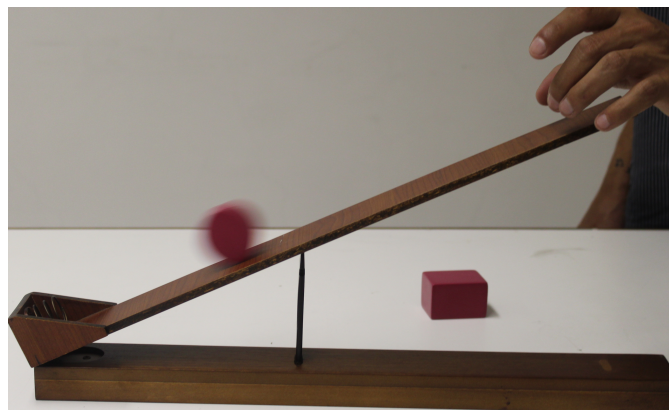


Imagen 4-18. Partícula en la posición B, después de haberla soltado.

- g. Por otro lado, si un cuerpo se mueve con traslación y rotación de espín dentro de un campo conservativo, la energía total (E) se conserva, esto es:

$$E = E_C + E_P = \text{constante}$$

$$E = E_{CT} + E_{CR} + E_{PG} + E_{PE} = \text{constante}$$

- h. En esta práctica, usaremos los mismos objetos. En un primer momento, ubicaremos el plano inclinado en un ángulo (10, 20, 30°), donde la superficie de la base del plano inclinado será nuestro eje de referencia A ($E_p = 0$). $\vec{g} = \text{constante}$.
- i. Situaremos la partícula en un punto (B) del plano inclinado. Analizamos la energía de la partícula antes de soltarla.

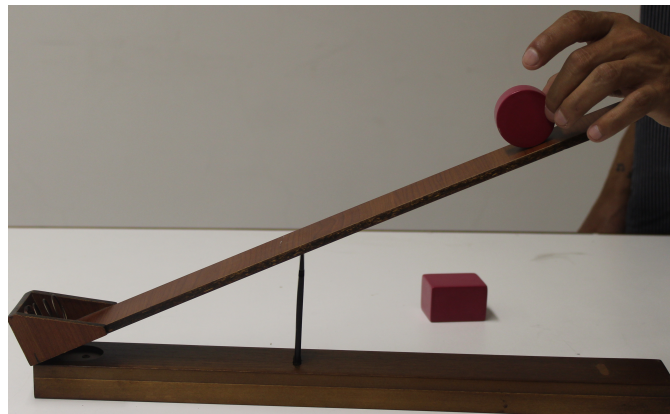


Imagen 4-19. Partícula en su posición inicial (B).

$$v_B = 0 \quad E_{CTB} = \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} m \cdot 0 = 0$$

$$\omega_B = 0; \quad E_{CRB} = \frac{1}{2} I \omega_B^2 = \frac{1}{2} I \cdot 0 = 0$$

$$x = 0; \quad E_{PE} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k \cdot 0 = 0$$

$$h_B = \text{máx}; \quad E_{PG} = mgh_B$$

Por lo tanto:

$$E_B = E_{CT} + E_{CR} + E_{PE} + E_{PG}$$

$$E_B = 0 + 0 + 0 + mgh_B$$

$$E_B = mgh_B$$

Tenemos que la energía de la partícula en el punto más alto es puramente potencial cuando esta está en reposo. Así: $E = E_B = \text{cte}$.

- j. Ahora analizaremos la partícula en un punto cualquiera D, después de haber soltado la partícula del reposo:

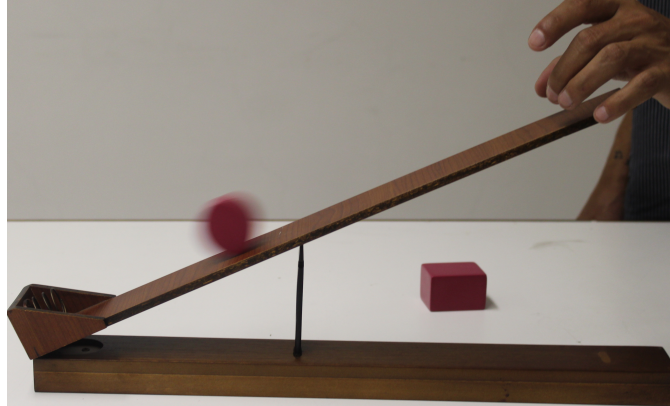


Imagen 4-20. Partícula después de soltarla, en una posición (D).

$$\begin{aligned}
 v_D &\neq 0; & E_{CTD} &= \frac{1}{2}mv_D^2 \\
 \omega_B &\neq 0; & E_{CRD} &= \frac{1}{2}I\omega_D^2 \\
 x &= 0; & E_{PE} &= \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k \cdot 0 = 0 \\
 h_D &\neq 0; & E_{PGD} &= mgh_D
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 E_D &= E_{CTD} + E_{CRD} + E_{PE} + E_{PGD} \\
 E_D &= \frac{1}{2}mv_D^2 + \frac{1}{2}I\omega_D^2 + 0 + mgh_D \\
 E_D &= \frac{1}{2}mv_D^2 + \frac{1}{2}I\omega_D^2 + mgh_D
 \end{aligned}$$

Al disminuir la altura h , la energía potencial de la partícula también disminuye y para que la energía total permanezca constante, la partícula adquiere energía cinética de traslación y de rotación de espín gracias a su velocidad lineal y angular respectivamente. Por lo tanto la energía potencial gravitacional se transforma en cinética de traslación y rotación de espín. De este modo: $E = E_B = E_D = \text{constante}$.

- k. Justo, el instante antes del choque de la partícula con el resorte (posición A), tenemos que:



Imagen 4-21. Partícula en la posición más baja, justo en el instante antes de chocar con el resorte.

$$\begin{aligned}
 v_A &= \text{máx}; & E_{CTA} &= \frac{1}{2}mv_A^2 \\
 \omega_B &= \text{máx}; & E_{CRA} &= \frac{1}{2}I\omega_A^2 \\
 x &= 0; & E_{PE} &= \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k \cdot 0 = 0 \\
 h_A &= 0; & E_{PGA} &= mg \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 E_A &= E_{CTA} + E_{CRA} + E_{PE} + E_{PGA} \\
 E_A &= \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}I\omega_A^2 + 0 + 0 \\
 E_A &= \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}I\omega_A^2
 \end{aligned}$$

La energía total de la partícula en este punto se ha convertido en puramente cinética, tanto de traslación como de rotación de espín. De este modo se cumple la ley de la conservación de la energía total:

$$E = E_B = E_D = E_A = \text{constante}.$$

- I. Por último, después del choque de la partícula con el resorte, a causa de su energía cinética el resorte se deformó una distancia “x” mientras que la velocidad v_A empezó a disminuir hasta frenar por completo. Para analizar la energía en este punto, consideramos que igual que antes, la partícula está sobre el eje de referencia A, pero que en este caso denotaremos por la letra O:

$$\begin{aligned}
 v_O &\approx 0; & E_{CTO} &= \frac{1}{2}mv_O^2 = \frac{1}{2}m \cdot 0 = 0 \\
 \omega_O &\approx 0; & E_{CRO} &= \frac{1}{2}I\omega_O^2 = \frac{1}{2}I \cdot 0 = 0 \\
 x &\neq 0; & E_{PE} &= \frac{1}{2}kx^2
 \end{aligned}$$



$$h_O = 0;$$

$$E_{PGO} = mg \cdot 0 = 0$$

Por lo tanto:

$$E_O = E_{CTO} + E_{CRO} + E_{PE} + E_{PGO}$$

$$E_O = 0 + 0 + \frac{1}{2}kx^2 + 0$$

$$E_O = \frac{1}{2}kx^2$$

En este trayecto, la energía cinética de la partícula se convierte puramente en energía potencial elástica de modo que:

$$E = E_B = E_D = E_A = E_O = \text{constante}.$$



ENERGÍA CINÉTICA DE TRASLACIÓN MARCO TEÓRICO:

Para empujar un bloque, el desplazamiento de éste será mayor mientras mayor sea la masa o la velocidad del cuerpo que lo empuja. Al existir un desplazamiento causado por una fuerza externa (cuerpo que lo empuja) implica un trabajo realizado por dicha fuerza. Por lo tanto la energía cinética de un cuerpo es la capacidad de realizar trabajo en función de su “condición de movimiento”. Por lo tanto, el trabajo necesario para llevar una partícula de un punto A a otro B es:

$$W_{AB} = \Delta E_{CT} = E_{CB} - E_{CA}$$

Donde:

$$\vec{r}_{AB} \cdot \vec{F} = \Delta E_{CT}$$

Por lo que:

$$\Delta E_{CT} = \vec{r}_{AB} \cdot m\vec{a} = m\vec{a}(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = m\vec{a}\Delta\vec{r} \quad (1)$$

Pero, de los estudios de MRUV sabemos que:

$$2\vec{a}\Delta\vec{r} = v_B^2 - v_A^2$$

Donde:

$$\vec{a}\Delta\vec{r} = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2}$$

Y sustituyendo en la ecuación (1):

$$\Delta E_{CT} = m\left(\frac{v_B^2 - v_A^2}{2}\right)$$

$$\Delta E_{CT} = \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2)$$

Es decir:

$$\Delta E_{CT} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_{CB} - E_{CA}$$

o en general:

$$E_{CT} = \frac{1}{2}mv^2$$



ENERGÍA POTENCIAL

Se define la energía potencial de un campo vectorial conservativo como el trabajo que debe realizar el propio campo para desplazar una partícula desde un punto B hasta una posición de referencia A, en la cual por convenio, la energía potencial es cero. Dicho trabajo lo realiza una fuerza propia del campo llamada “fuerza conservativa” $\vec{F}_C$. Por lo tanto:

$$E_p = W_{BA}$$

Donde:

$$E_p = \vec{r}_{BA} \cdot \vec{F}_C$$

Para el caso del campo gravitacional superficial (proximidades de la superficie del planeta), región en la que $\vec{g} = \text{constante}$; tenemos que:

$$\vec{F}_C = -mg\vec{k}$$

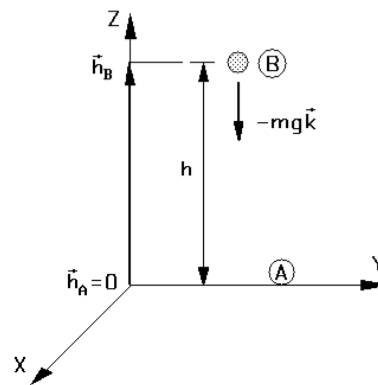
$$\vec{r}_{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = 0 - \vec{h}_B = -h\vec{k}$$

$$E_{pg} = \vec{r}_{BA} \cdot \vec{F}_C$$

$$E_{pg} = -h\vec{k} \cdot (-mg\vec{k})$$

es decir:

$$E_{pGS} = mgh$$



CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Llamaremos energía mecánica a la suma de la energía potencial y cinética que tiene un sistema cualquiera. Así, para una partícula que se mueve dentro de un campo conservativo, la energía mecánica total es:

$$E = E_C + E_P$$

La ley de la conservación de la energía nos dice que la suma de las energías potenciales y cinéticas es un valor constante. Esto es que para una masa que se mueve dentro de un campo conservativo bajo la acción de fuerzas conservativas, la energía en dos posiciones (o instantes) es la misma:

$$E_{CA} + E_{PA} = E_{CB} + E_{PB}$$

ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA

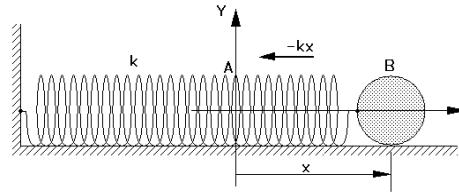
Como ya sabemos, al deformar un resorte en una cantidad x , este presenta una fuerza recuperadora $\vec{F} = -kx\vec{i}$, la cual es conservativa y depende del valor de x . La energía potencial elástica que almacena el resorte deformado se halla mediante la ecuación: $E_p = \vec{r}_{BA} \cdot \vec{F}_C$, donde $\vec{F}_C$ hace referencia a la fuerza recuperadora, la cual no es constante ya que depende del valor de x en cada instante de la deformación del resorte; enronces, para sustituirla en la ecuación de energía potencial trabajaremos con su valor medio, por lo tanto:

$$\vec{F}_C = -\frac{1}{2}kx\vec{i}; \vec{r}_{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = 0 - \vec{r}_B = -x\vec{i}$$

$$E_{PE} = -x\vec{i} \cdot \left(-\frac{1}{2}kx\right)\vec{i}$$

es decir:

$$E_{PE} = \frac{1}{2}kx^2$$



ENERGÍA CINÉTICA TOTAL. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

Dentro del estudio de la energía cinética, tenemos la energía cinética de traslación y de rotación de espín. Las ecuaciones de estas son muy parecidas, partiendo del concepto de la energía cinética de traslación:

$$E_{CT} = \frac{1}{2}mv^2$$

Entonces la energía cinética de traslación de la partícula m_i es:

$$E_{Ci} = \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

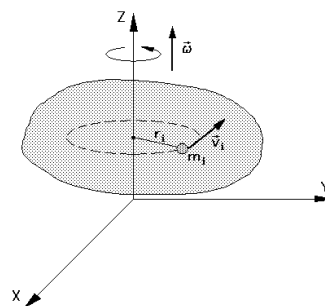
pero:

$$v_i = \omega r_i$$

luego:

$$E_{Ci} = \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2$$

Para hallar la energía cinética total realizamos la sumatoria sobre todas la partículas, entonces:





$$E_C = \frac{1}{2} \sum m_i r_i^2 \omega^2$$

Donde, $\sum m_i r_i^2$ es el momento de inercia (I) del cuerpo respecto a un eje de rotación; entonces:

$$E_{CR} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Con frecuencia encontramos cuerpos que presentan simultáneamente movimientos de traslación y rotación. Para estos casos la energía cinética total es la suma de las energías cinéticas de traslación y de rotación de espín.

$$E_C = E_{CT} + E_{CR}$$

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Si un cuerpo se mueve con traslación y rotación de espín dentro de un campo conservativo, la energía mecánica total se conserva, esto es:

$$E_{CT} + E_{CR} + E_P = E = \text{constante}$$



EJERCICIO MODELO

1) Una partícula de 5 kg parte del reposo y acelera a razón de 4 m/s².

a) ¿Al cabo de que tiempo tendrá una energía cinética de 600 J? b) ¿Qué trabajo se realiza sobre la partícula entre $t_1 = 5$ s y $t_2 = 16$ s?

Respuesta:

a) de la expresión de E_{CT} despejamos y calculamos v_B :

$$v_B = \sqrt{\frac{2E_{CT}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 600}{5}} = 15,492 \text{ m/s}$$

además:

$$a = \frac{v_B - v_O}{t}$$

de donde:

$$t = \frac{v_B - v_O}{a} = \frac{15,492 - 0}{4} = 3,873 \text{ s}$$

b) Hallamos las velocidades v_A y v_B correspondientes a $t_1 = 5$ s y $t_2 = 16$ s:

$$v_A = v_O + at_1 = 0 + 4 \cdot 5 = 20 \text{ m/s}$$

$$v_B = v_O + at_2 = 0 + 4 \cdot 16 = 64 \text{ m/s}$$

Calculamos las correspondientes energías cinéticas:

$$E_{CA} = \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 20^2 = 1000 \text{ J}$$

$$E_{CB} = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 64^2 = 10\,240 \text{ J}$$

Luego:

$$W_{AB} = \Delta E_{CT} = 10\,240 - 1000 = 9\,240 \text{ J}$$

2) Desde la terraza de un edificio que se encuentra a 350 m del suelo se suelta una piedra de masa m . ¿Luego de cuánto tiempo su energía potencial se habrá reducido a la quinta parte?

Respuesta:

Mientras está en la terraza su energía total de la piedra es puramente energía potencial.

$$E_{PGS1} = mgh_1 = 9,8 \cdot 350 \cdot m = 3\,430 \text{ J}$$

Su energía potencial descenderá a un quinto cuando la altura de la piedra sea un quinto de la altura inicial:

$$h_2 = \frac{1}{5}h = \frac{1}{5}350 = 70 \text{ m}$$



Para determinar el tiempo que requiere la piedra para llegar a h_2 utilizamos ecuaciones de caída libre:

$$\Delta \vec{h} = \vec{v}_1 \Delta t + \frac{1}{2} \vec{g} \Delta t^2 = \frac{1}{2} \vec{g} \Delta t^2$$

como la partícula parte del reposo:

$$\vec{v}_1 = 0$$

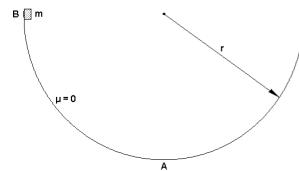
de donde:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2\Delta \vec{h}}{\vec{g}}} = \sqrt{\frac{2(70\vec{j} - 350\vec{j})}{-9,8\vec{j}}}$$

Es decir:

$$\Delta t = 7,559 \text{ s}$$

3) Se suelta la masa m en el punto B de la pista circular de la figura. Determine la reacción de la pista sobre la masa cuando ésta pasa por la posición de A (punto más bajo), desprecie el rozamiento.



Respuesta:

En este caso se trata de un campo conservativo ya que $\mu = 0$ y la única fuerza que actúa sobre la partícula es su propio peso. De la ley de conservación de la energía mecánica, con el nivel de referencia en A, tenemos que:

$$E_A = E_B$$

$$E_{CA} + E_{PA} = E_{CB} + E_{PB}$$

pero:

$$E_{CB} = 0$$

y:

$$E_{PA} = 0$$

luego:

$$E_{PB} = E_{CA}$$

$$mgR = \frac{1}{2}mv_A^2$$

de donde:

$$v_A^2 = 2gR \quad (a)$$

Cuando la partícula pasa por el punto A ejerce dos fuerzas sobre la pista: su

peso mg y la fuerza centrífuga $m\frac{v^2}{R}$, ambas hacia abajo. Por lo que la pista debe de neutralizar la suma de estas dos:

$$N = mg + \frac{mv^2}{R} \quad (b)$$

Sustituyendo (a) en (b) tenemos:

$$N = mg + \frac{2gR}{R}$$

$$N = 3mg$$

4) Un disparador de partículas está constituido por un resorte helicoidal de constante $k = 350 \text{ N/m}$. ¿Qué energía potencial almacena el disparador cuando se le carga comprimiendo el resorte 10 cm ?

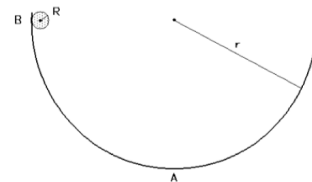
Respuesta:

$$E_{PE} = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_{PE} = \frac{1}{2}350 \cdot 0,1^2$$

$$E_{PE} = 1,75 \text{ J}$$

5) El cilindro macizo de la figura parte desde el punto B y rueda sin deslizar sobre la pista. Determine la reacción de la pista sobre el cilindro cuando éste pasa por el punto A.



Respuesta:

$$E_A = E_B$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}I\omega_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}I\omega_B^2 + mgh_B$$

Pero:

$$mgh_A = 0 ;$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = 0 ;$$

$$\frac{1}{2}I\omega_B^2 = 0$$

además:

$$I = \frac{1}{2}mR^2 ;$$

$$\omega_A = \frac{v_A}{R} ;$$

$$h_B = r$$

Entonces:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mR^2 \frac{v_A^2}{R^2} = mgr$$



es decir:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{4}mv_A^2 = mgr$$

de donde:

$$\frac{3}{4}v_A^2 = gr$$

y:

$$v_A^2 = \frac{4gr}{3}$$

La reacción N de la pista en el punto A debe neutralizar al peso y la fuerza centrífuga, es decir:

$$N = mg + \frac{mv_A^2}{r}$$

Entonces:

$$N = mg + \frac{m \cdot 4gr}{3r} = mg + \frac{4}{3}mg = \frac{7}{3}mg$$



ACTIVIDAD PROPUESTA:

- 1) *Un móvil de 72 kg se mueve sobre un riel circular de 4 m de radio. Parte del reposo y acelera a razón de $1,3 \text{ rad/s}^2$. ¿Cuál será su energía cinética luego de haber girado 85 rev?*
- 2) *Desde el suelo se dispara verticalmente y hacia arriba una piedra de 5 kg con una velocidad de 75 m/s. Halle la energía potencial gravitacional de la piedra: a) en el instante del disparo; b) luego de 3 s; c) en su máxima altura.*
- 3) *Se deja caer una piedra desde 32 m de altura. ¿Con qué velocidad llegará al suelo?*
- 4) *Sobre un resorte se coloca un bloque de 12 kg. El resorte se comprime 12 cm. ¿Cuál es la energía potencial que almacena el sistema?*
- 5) *Un cilindro de 20 kg y 15 cm de radio parte del reposo y rueda sin deslizar sobre una pista horizontal. Acelera a razón de $2,5 \text{ m/s}^2$. Determine su energía cinética total luego de 8 s.*

NOMBRE DEL MATERIAL DIDÁCTICO

Cilindro de torque

TEMAS QUE CUBRE

- Trabajo de un torque constante.

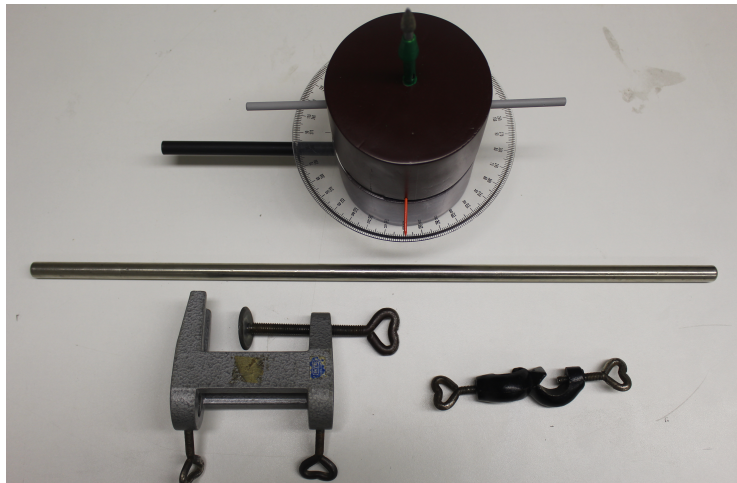


Imagen 5-1. Materiales de Cilindro de torque.



Imagen 5-2. Cilindro de torque.

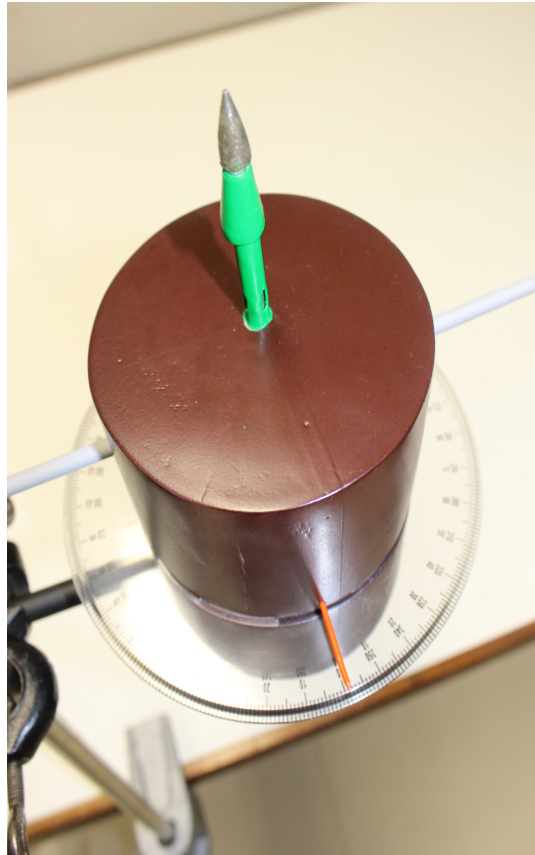


Imagen 5-3. Graduador y aguja indicadora.



DESCRIPCIÓN				
Elemento	Material	Color	Cant.	Representa
Cilindro	Madera	Café oscuro	2	Un objeto al cual se le aplica un torque par
Graduador	Plástico	Transparente	1	Sistema de medida
Clavo	Metal	Naranja	1	Indicador de medida
Varilla	Alambre galvanizado	Negro	1	Varilla de sujección
		Gris	2	Varillas de aplicación del torque
Vector	Alambre galvanizado	Gris	1	Vector del torque $\vec{\tau}$
		Verde	1	Vector desplazamiento angular $\vec{\phi}$
Material complementario				
Pinza de mesa	Hierro	Gris	1	Soporte de la maqueta
Varilla (50 cm)	Hierro	Gris	1	Soporte de la maqueta
Nuez doble	Plástico	Blanco	1	Soporte de la maqueta

GUÍA PARA EL MAESTRO

TRABAJO DE UN TORQUE CONSTANTE

Objetivo: Conocer estos conceptos y relacionarlos con los de trabajo y potencia realizada por una fuerza constante. Aplicarlos a la resolución de problemas propuestos.

Procedimiento:

- Un torque es constante cuando su magnitud, dirección, sentido permanecen inalterados a lo largo del tiempo.
- Se define el trabajo realizado por un torque constante mediante la expresión:

$$W_{AB} = \vec{\phi}_{AB} \cdot \vec{\tau}$$

- Con la pinza de mesa sujetamos la varilla de 50 cm y con la nuez doble sujetamos el cilindro de torque por la varilla negra.



Imagen 5-3. Pinza de mesa.

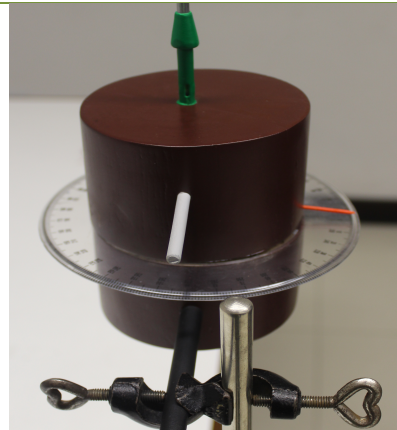


Imagen 5-4. Nuez doble.

- d. Al aplicar un torque constante a la maqueta, este será siempre en sentido antihorario. Aplicando la ley de la mano derecha, el vector $\vec{\tau}$ estará sobre el eje +z.

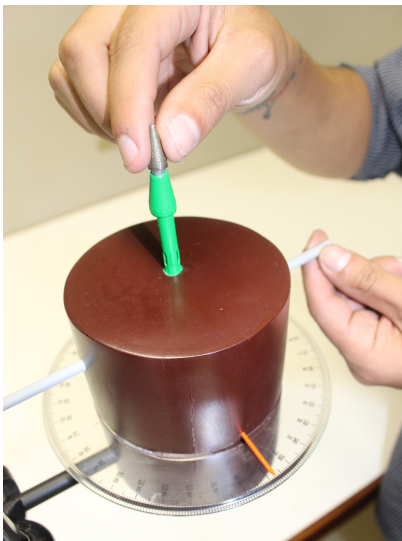


Imagen 5-5. Aplicación de torque.

Imagen 5-6. Desplazamiento del $\vec{\phi}$.

- e. La aguja indicará el desplazamiento angular $\vec{\phi}_{AB}$, representado por el vector de color verde.



TEORÍA DEL TRABAJO DE UN TORQUE CONSTANTE

MARCO TEÓRICO:

Un torque puede ser variable o constante. Se dice variable cuando alguna de sus características vectoriales (magnitud, dirección, sentido) varía a lo largo del tiempo. Por el contrario, se dice que es constante cuando dichas características no se alteran en el transcurso del tiempo. Como se mencionó anteriormente, el trabajo realizado por un torque se define mediante la expresión:

$$W_{AB} = \vec{\phi}_{AB} \cdot \vec{\tau}$$

Donde $\vec{\phi}_{AB}$ es una magnitud vectorial y representa el desplazamiento angular que sufre el cuerpo, $\vec{\tau}$ es otra magnitud vectorial que representa el torque aplicado y W_{AB} es una magnitud escalar que representa el trabajo realizado por dicho torque. Este trabajo puede ser positivo o negativo.

También se define la potencia media mediante:

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

y la potencia instantánea como:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

$$P = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$$



EJERCICIO MODELO

¿qué trabajo realiza el torque $\vec{\tau} = (12\vec{i} + 10\vec{j} + 8\vec{k}) \text{ N} \cdot \text{m}$ para desplazar un paralelepípedo desde la posición angular $\vec{\phi}_A = (12\vec{k}) \text{ rad}$ hasta $\vec{\phi}_B = (45\vec{k}) \text{ rad}$?

Respuesta:

Determinamos el desplazamiento angular:

$$\vec{\phi}_{AB} = \vec{\phi}_B - \vec{\phi}_A = 45\vec{k} - 12\vec{k} = 33\vec{k}$$

Entonces:

$$W_{AB} = (33\vec{k})(12\vec{i} + 10\vec{j} + 8\vec{k})$$

$$W_{AB} = 264 \text{ J}$$

ACTIVIDAD PROPUESTA:

Sobre un cilindro macizo se aplica un torque axial de $15 \text{ N} \cdot \text{m}$ para hacerlo describir 33 rpm . ¿Cuál es el trabajo realizado?

NOMBRE DEL MATERIAL DIDÁCTICO

Sistema: Sol-Planeta

TEMAS QUE CUBRE

- Leyes de Kepler.

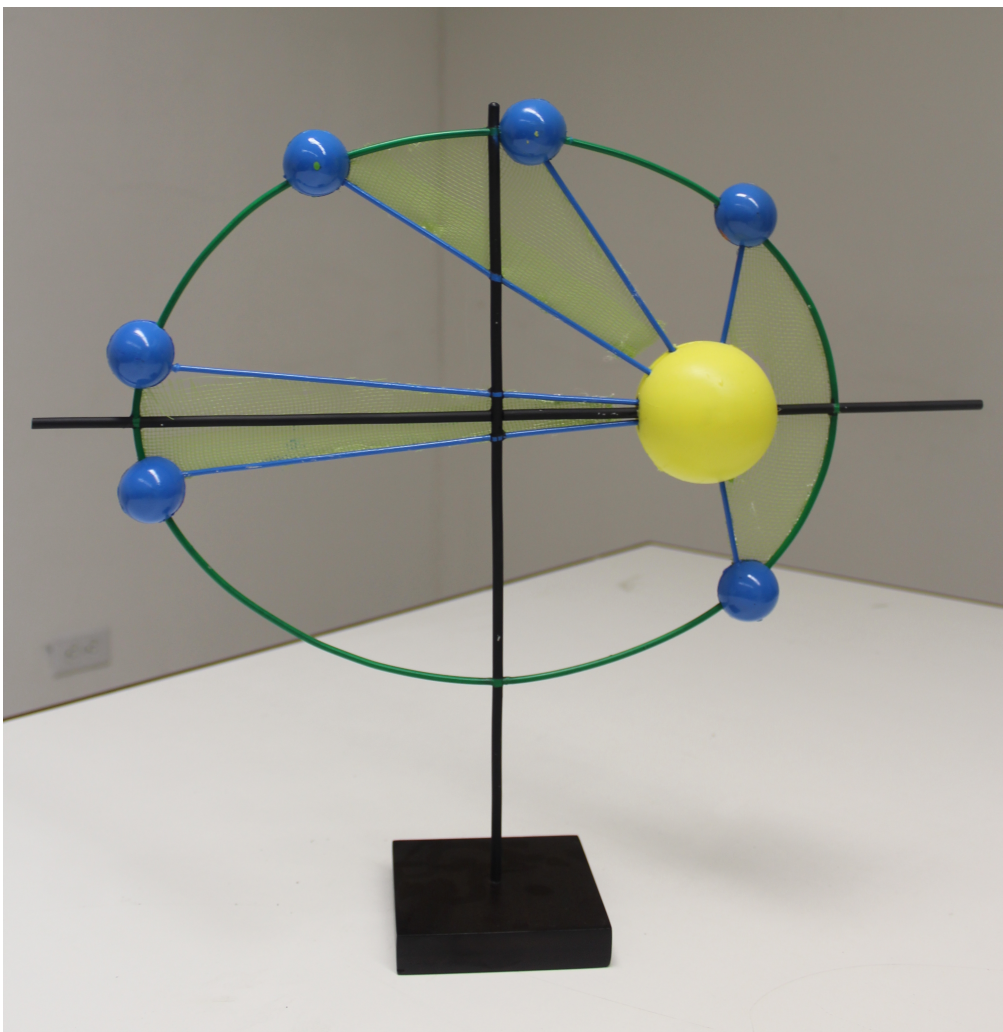


Imagen 6-1. Sistema: Sol-Planeta.

DESCRIPCIÓN				
Elemento	Material	Color	Cant.	Representa
Trayectoria elíptica	Alambre galvanizado	Verde	1	Trayectoria elíptica de los planetas
Esferas	Plástico	Amarillo	1	Sol
		Azul	6	Tierra
Malla	Plástico	Verde	3	Área
Radios	Alambre galvanizado	Azul	6	Vectores de posición del planeta
Ejes	Alambre galvanizado	Negro	2	Eje mayor y menor de la elipse

GUÍA PARA EL MAESTRO

CONSERVACIÓN DEL MOMENTUM DE ESPÍN

Objetivo: Conocer, aprender e interpretar correctamente las tres leyes de Kepler que sirvieron de base para los trabajos de Newton.

Procedimiento:

- Kepler enunció tres leyes sobre el movimiento de los planetas alrededor del Sol:
- Para este tema usaremos la maqueta “Sistema: Sol-Planeta” para mostrar de una forma visual las leyes de Kepler.

- Ley de las órbitas:** Los planetas se mueven en torno al Sol sobre trayectorias elípticas estando el Sol en uno de los focos de las mismas.

Representado por la trayectoria elíptica de color verde.

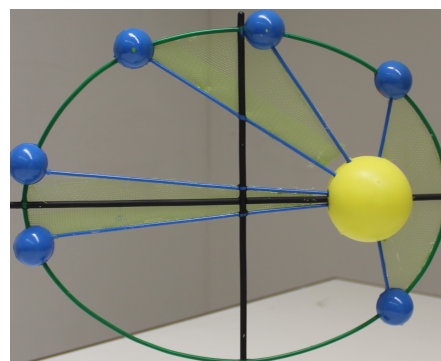


Imagen 6-2. Se muestra la trayectoria elíptica del planeta.

- d. Ley de las áreas:** Los radiovectores sol-planeta “barren” áreas iguales en tiempos iguales. Representado por la malla de color limón.

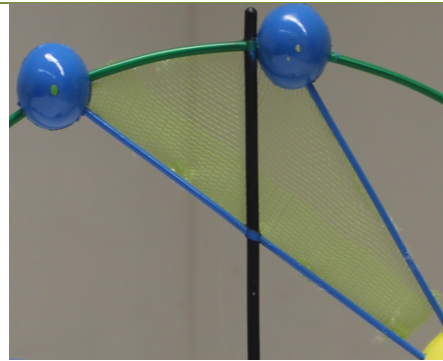


Imagen 6-3. Se muestra el área barrida por el radiovector Sol-Planeta.

- e. Ley de los períodos:** Los cuadrados de los periodos de revolución son proporcionales a los cubos de las distancias medias entre el Sol y los planetas (semieje mayor):

$$T^2 = k\bar{r}^3$$

Donde T es el period orbital del planeta alrededor del Sol; r es el radio medio o semieje mayor representado por la la mitad de la varilla negra; k es la constant de proporcionalidad.

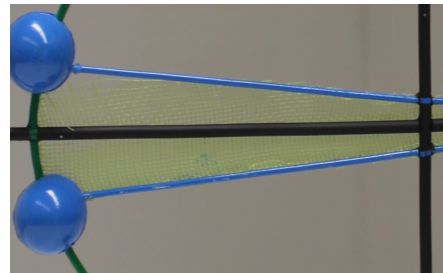


Imagen 6-4. Se muestra la distancia media entre el Sol y el planeta.



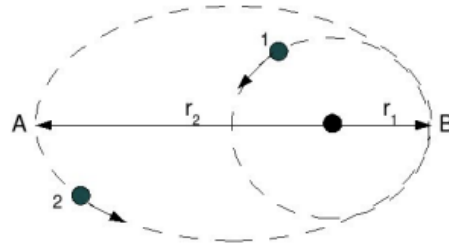
TEORÍA DE LAS LEYES DE KEPLER
MARCO TEÓRICO:

Hacia 1500, Nicolás Copérnico propuso que el Sol era el centro del Universo y todo giraba en torno a él. Tycho Brahe usó las ideas copérnicas para tomar datos sobre nuestro sistema solar, a partir de la observación de los demás planetas y satélites. A partir de estos datos, Johannes Kepler elaboró sus tres leyes relacionadas con el movimiento planetario mencionadas anteriormente. Finalmente fue Isaac Newton quien a partir de las leyes de Kepler, sintetizó la gran ley de la gravitación universal, la cual es manejada actualmente con muy pequeñas correcciones sugeridas por la Mecánica Relativista General del físico alemán Albert Einstein propuesta a inicios del siglo XX.

EJERCICIO MODELO

Dos planetas de masas iguales orbitan alrededor de una estrella de masa mucho mayor. El planeta 1 describe una órbita circular de radio $r_1 =$

10^7 km con un periodo de rotación $T_1 = 1,5$ años, mientras que el planeta 2 describe una órbita elíptica cuya distancia más próxima es $r_1 = 10^7$ km y la mas alejada es $r_2 = 1,8 \cdot 10^7$ km tal y como muestra la figura. ¿Cuál es el periodo de rotación del planeta 2?

**Respuesta:**

De la figura se deduce que la distancia media del planeta 2 a la estrella es:

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{10^7 + 1,8 \cdot 10^7}{2} = 1,4 \cdot 10^7 \text{ km}$$

Aplicando la tercera ley de Kepler:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r^3}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1,5^2}{(10^7)^3} = \frac{T_2^2}{(1,4 \cdot 10^7)^3}$$

$$T_2 = \sqrt{\frac{1,5^2 (1,4 \cdot 10^7)^3}{(10^7)^3}} = 2,485 \text{ años.}$$

ACTIVIDAD PROPUESTA:

Del ejercicio anterior calcule el radio del planeta 1 para el cual su periodo sea $\frac{5}{2}$ del periodo del planeta 2.

NOMBRE DEL MATERIAL DIDÁCTICO

Sistema: Planeta-Satélite

TEMAS QUE CUBRE

- Ley de gravitación universal

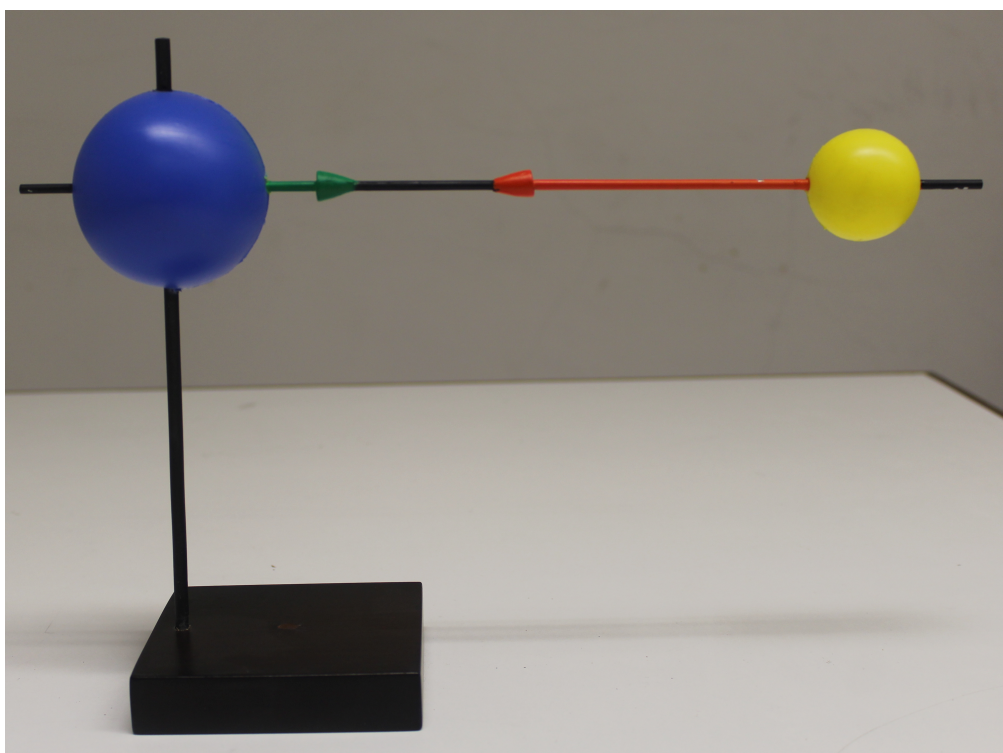


Imagen 7-1. Sistema: Planeta-Satélite.