UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA, LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

“GUÍA DIDÁCTICA Y VÍDEOS PARA LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, MOVIMIENTO RECTILÍNEO, REGLA DE LA CADENA Y DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA”

Trabajo de Titulación previo a la obtención del Título de Licenciado en Ciencias de la Educación en Matemáticas y Física

AUTOR: MAURO LEONARDO SINCHI CHUYA

DIRECTORA: Mgst. CARMEN EULALIA CALLE PALOMEQUE

Cuenca - Ecuador

2016

RESUMEN

Debido a las actuales exigencias que presentan las normativas para la educación ecuatoriana y dada la importancia del Cálculo Diferencial, como una rama de las matemáticas y sus aplicaciones en el mundo contemporáneo, se ha desarrollado la presente guía didáctica para el maestro, la cual se enfoca en cuatro temas principales de la derivada de una función.

Para cumplir con este propósito se ha usado material impreso como tablas y gráficos en la estructura de esta guía. También se han utilizado recursos tecnológicos como la calculadora y el vídeo. De esta manera, se pretende mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la materia.

Con lo anterior, se busca crear un vínculo entre los conceptos teóricos que presentan los textos de Cálculo Diferencial, con recursos que los estudiantes puedan manipular y relacionar fácilmente con la realidad en la que viven.

Así pues, se pretende conseguir una educación integral, en donde el profesor es un facilitador y un guía en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial. Además, mediante el uso de los materiales presentados en esta guía didáctica, se convierta en un motivador, para lograr aprendizajes de calidad y un mejor rendimiento académico.

Palabras Clave: Guía Didáctica, Vídeo Educativo, Cálculo Diferencial, Derivada.

ABSTRACT

Given the current requirements regulations for Ecuadorian education and the importance of differential calculus as a branch of mathematics and its applications in the contemporary world, it has been developed this teacher's guide, which focuses on four main themes of the derivative's functions.

To fulfill this purpose it has been used printed material such as charts and graphs on the guide's structure. Also, it has been used technological resources such as the calculator and the video. So, this guide tries to improve the teaching and learning of the subject.

This work searches to create a link between the theoretical concepts presented in differential calculus' texts and the resources that students can manipulate and relate them to the reality where they live.

Thus, it is intended to achieve an integral education, where the teacher is a facilitator and a guide in the teaching and learning of differential calculus. In addition, by using the materials presented in this guide, teachers will be motivators to achieve quality learnings and improve academic performance.

Keywords: Didactics Guides, Educational Video, Differential Calculus, Derived.

ÍNDICE

Universidad de Cuenca

Cláusula de Derechos de Autor

Yo, MAURO LEONARDO SINCHI CHUYA, autor de la tesis "GUÍA DIDÁCTICA Y VÍDEOS PARA LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, MOVIMIENTO RECTILÍNEO, REGLA DE LA CADENA Y DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA" reconozco y acepto el derecho de la Universidad de Cuenca, en base al Art. 5 literal c) de su Reglamento de Propiedad Intelectual, de publicar este trabajo por cualquier medio conocido o por conocer, al ser este requisito para la obtención de mi título de Licenciado en Ciencias de la educación, Especialidad de Matemáticas y Física. El uso que la Universidad de Cuenca hiciere de este trabajo, no implicará afección alguna de mis derechos morales o patrimoniales como autor

Cuenca, junio de 2016

Mauro Leonardo Sinchi Chuya

030244627-3

Universidad de Cuenca

Cláusula de Propiedad Intelectual

Yo, MAURO LEONARDO SINCHI CHUYA, autor de la tesis “GUÍA DIDÁCTICA Y VÍDEOS PARA LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, MOVIMIENTO RECTILÍNEO, REGLA DE LA CADENA Y DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA”, certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor.

Cuenca, junio de 2016

Mauro Leonardo Sinchi Chuya

030244627-3

AGRADECIMIENTO

Agradezco al Padre Dios quien siempre ha guiado mis acciones desde que tengo uso de razón y antes. A mis queridos padres, quienes siempre confían en mí, sin ustedes nunca lo hubiese conseguido.

A la Magíster Eulalia Calle, quien me ha guiado en este largo y fecundo camino del trabajo de titulación.

A todos los maestros a quienes he tenido el honor de conocer en mi vida estudiantil, ellos han tenido la paciencia de encaminar mis emociones y sentimientos y de ayudarme a descubrir quién soy.

A la Ing. Paola Pesantez y al Ing. Fabián Bravo y por ser los primeros que guiaron mis pasos en el estudio del Cálculo Diferencial.

DEDICATORIA

A ti querida madre que fuiste la primera persona en haberme hecho conocer lo maravilloso de los números y las letras, a mi padre que cada día espera lo mejor de nosotros, a mis hermanos: Marco, Armando, Byron, Moisés, por ser maravillosos en los momentos compartidos

Al querido profesor y amigo Marcelo Bernal, quien supo enseñarnos a creer en lo que somos y a volar alto.

A mis queridos compañeros de estudio, con los cuales logramos cumplir muchos sueños, Eduardo, Carlos, Paolo, Wilman, Pablo.

A las personas que han sabido apoyarme y han sido una luz cuando todo parece estar oscuro, en especial al Rvdo. Víctor Manuel, Rvdo. José Manuel, Rvdo. Néstor.

A todos los niños y jóvenes a quienes he tenido el gusto de guiar en los caminos de los números y para quienes estudian por el simple gusto de conocer.

A quien ha estado a mi lado a pesar de los cambios bruscos que nos trae la vida, porque ha confiado en mí y ha sabido ser paciente a pesar de todo.

INTRODUCCIÓN

La presente guía didáctica ha sido elaborada como un recurso para la implementación del Laboratorio de Matemáticas de la Carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca y como un recurso para orientar y motivar a la enseñanza-aprendizaje de la derivada de una función. Se ha incluido el vídeo como una herramienta motivadora para que el profesor pueda estimular los aprendizajes de los estudiantes que por algunas razones sienten poco interés en la materia o para aquellos que necesiten reforzar algunos temas o estudiar por cuenta propia.

En el capítulo I se hace un análisis teórico sobre temas como la educación, el constructivismo, la Constitución Ecuatoriana y la educación, etc. Además de ello, también se hace mención al uso de las TIC, entre ellas, el vídeo educativo como un recurso para la propuesta.

En el capítulo II se describe la investigación de campo realizada para la cual se utilizó la encuesta. Mediante tablas y gráficos estadísticos se hace el análisis y la interpretación de los resultados obtenidos. Al final se determinan las conclusiones de la etapa investigativa.

En el capítulo III se desarrolla la propuesta del trabajo de titulación, la cual consiste de ocho temas: cuatro introductorios y cuatro temas propiamente dichos. Cada tema presenta su respectivo plan de clase y las recomendaciones para que el maestro pueda llevar su clase de manera satisfactoria.

CAPÍTULO 1

1 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA: "Guía didáctica y vídeos para la enseñanza-aprendizaje de la derivada de funciones trigonométricas, movimiento rectilíneo, regla de la cadena y diferenciación implícita"

1.1 Antecedentes

La actividad educativa sin duda alguna es una de las labores más dignificantes e interesantes que pueden existir, ya que, a diferencia de otros oficios, se está trabajando con personas llenas de emociones y sentimientos individuales.

> "Para ser un buen maestro y convertir la docencia en un verdadero arte e incluso, en un estilo de vida, es imprescindible, en primer lugar, querer realmente enseñar, y luego, cumplir con toda las exigencias que una sólida preparación implica, estar dispuesto a enfrentar y vencer todos los problemas inherentes al ejercicio de la profesión y, sobre todo, ser capaz de sentir la mayor de las satisfacciones por el simple hecho de trabajar con alumnos; eso es tener vocación para la docencia" (Vázquez Valerio 18)

En la realidad ecuatoriana, tal como lo exigen la Constitución de la República del Ecuador, la Ley Orgánica de Educación Intercultural (LOEI) y la Ley Orgánica de Educación Superior (LOES), un profesor, maestro, docente o cualquier calificativo dado a quien realiza la actividad de enseñar, debe tener un completo dominio de la materia que enseña, además de poseer conocimientos en varios campos con énfasis en las teorías psicológicas y pedagógicas, y un buen grado de conocimientos en cultura general y en otros aspectos del diario vivir de la sociedad en general.

Por otra parte, el brindar una educación de calidad es un deber ineludible del estado ecuatoriano y todos quienes la reciben ya sean niños, jóvenes, o personas adultas tienen el derecho de ser partícipes en este proceso; un proceso que generará en ellos una modificación en su forma de ver al mundo y todo cuanto está presente en él. Con respecto al tercer nivel de educación, la LOES en su artículo 8, literal b, expresa que una de las finalidades de la Educación Superior es “Fortalecer en las y los estudiantes un espíritu reflexivo orientado al logro de la autonomía personal, en un marco de libertad de pensamiento y de pluralismo ideológico”

Se hace notar al lector que tanto la LOEI como la LOES tienen como su centro de interés al estudiante y su proceso de aprendizaje, en un marco del buen vivir. Al ser el estudiante el centro del proceso educativo, se pretende potenciarlo para que sea un ciudadano con conciencia ética y solidaria, capaz de servir a la sociedad en la que se desenvuelve. (LOES 6)

1.2 La educación

La Constitución de la República del Ecuador promulgada en el Registro oficial N° 449 de 20 de octubre de 2008 en su capítulo segundo, sección quinta, con respecto a la educación en sus artículos 26 y 27 dispone:

> Art. 26.- La educación es un derecho de las personas a lo largo de su vida y un deber ineludible e inexcusable del Estado. Constituye un área prioritaria de la política pública y de la inversión estatal, garantía de la igualdad e inclusión social y condición indispensable para el buen vivir. Las personas, las familias y la sociedad tienen el derecho y la responsabilidad de participar en el proceso educativo"

> Art. 27.- La educación se centrará en el ser humano y garantizará su desarrollo holístico, en el marco del respeto a los derechos humanos, al medio ambiente sustentable y a la democracia; será participativa, obligatoria, intercultural, democrática, incluyente y diversa, de calidad y calidez; impulsará la equidad de género, la justicia, la solidaridad y la paz; estimulará el sentido crítico, el arte y la cultura física, la iniciativa individual y comunitaria, y el desarrollo de competencias y capacidades para crear y trabajar.

Ahora bien, los últimos fragmentos del art. 26, mencionan a la educación como un proceso, el cual, no se da de manera individual sino colectivamente, puesto que participan las personas, familias y la sociedad en general y esto la hace compleja e influenciada por el contexto social en donde se desarrolla.

En concordancia con el artículo 27 y desde la perspectiva de muchos autores de las llamadas corrientes pedagógicas modernas, se dice que la educación es un proceso dinámico, pues no implica transmitir saberes unilaterales y separados, sino de manera integral: conocimientos de la vida diaria, técnicos, morales, filosóficos, etc. Los mismos que le sirvan al individuo para desenvolverse dentro de un grupo social y sentirse parte de él.

El hombre posee la capacidad de enseñar y aprender y, según Delval, estos son elementos esenciales del proceso educativo, además esta característica hace al género humano adaptable dentro de un contexto social y cultural. La herramienta fundamental para que el hombre enseñe y aprenda es la capacidad de razonamiento y la inteligencia que posee. (Delval 87)

El proceso educativo formal en nuestro país inicia cuando el niño tiene los 5 años de edad, y a cargo de ello se encuentran las instituciones educativas primarias, secundarias y de nivel superior, respectivamente. El trabajo de estos centros es velar por el correcto desarrollo de las destrezas de cada estudiante; como se mencionó anteriormente cuidando que cada niño, púber, adolescente, adulto, etc. reciba una educación integral, asegurándose de que sean ellos quienes creen sus conocimientos en base a los recursos brindados por el centro educativo.

Ya que si la escuela es solamente un lugar en donde se “da el conocimiento” al estudiante, entonces se convierte en un territorio de adoctrinamiento, en donde el educando mecaniza los procesos para llegar a las respuestas esperadas por los profesores, pero de ninguna manera desarrolla su capacidad de resolver los problemas de manera creativa, es decir buscando nuevos caminos, nuevas formas de resolverlos, aunque esas formas ya existan, él deberá redescubrirlas. (Delval 86)

Es importante hacer notar al lector que la palabra escuela no debe ser entendida como la institución educativa de cierto nivel. En este contexto se considera a la escuela como algo más general, un término que abarca a las instituciones de todos los niveles de educación.

Tanto la Ley Orgánica de Educación Intercultural (LOEI) en su artículo 2, literal b, así como también la Ley Orgánica de Educación Superior (LOES) en los fines de la educación superior en su artículo 9, mencionan la importancia de la educación para el cambio de la sociedad ecuatoriana. Se menciona que es un instrumento capaz de ayudar a la construcción del Ecuador dentro de un marco del buen vivir y reconoce a las niñas, niños y adolescentes como sus principales actores.

Ahora bien, si uno de los aspectos importantes de la educación es lograr el desarrollo de la sociedad en la cual se desenvuelven los sujetos que aprenden, entonces los aprendizajes deben ser de calidad, procurando que cada nueva cosa asimilada por el estudiante llegue a formar parte de sus estructuras mentales y mediante el uso de éstas sea capaz de resolver los conflictos intelectuales o morales presentes en su vida diaria.

Para el cumplimiento de las disposiciones dadas por la Constitución de la República del Ecuador en el ámbito de la educación, así como también de la LOEI y la LOES es conveniente que la planificación del trabajo educativo por parte de las instituciones educativas se dé bajo el concepto de educación brindadas por las corrientes pedagógicas de la escuela nueva, porque éstas consideran al individuo como la parte esencial del proceso educativo y llevan a planificar los aprendizajes con base a los intereses de los estudiantes, buscando siempre su desarrollo tanto intelectual, moral y personal.

Dentro de las corrientes de la escuela nueva existen tres términos, los cuales siempre están en uso: educación, enseñanza y aprendizaje. Todas estas acciones son complementarias pues dependen la una de la otra, no puede haber educación sin enseñanza y más aún no se puede hablar de enseñanza sin que se dé el aprendizaje. (Gispert 62)

La educación busca el desarrollo del individuo dentro de una sociedad y al conseguir esto, la sociedad logra también desarrollarse. Todo lo aprendido en la escuela: saberes, valores, costumbres, etc. son herramientas valiosas para desenvolverse como persona. La responsabilidad del estado es brindar las oportunidades para que todos puedan formar parte del proceso educativo, así como también el comprometer a cada uno dentro de este proceso.

1.3 ¿Qué es el constructivismo?

Según Good y Brophy, en los Estados Unidos por la década de los sesenta y frente al conductismo, dominante en ese entonces, aparece la llamada revolución cognoscitiva, que es una expresión del constructivismo.

> "Las descripciones del aprendizaje como condicionamiento de asociaciones y respuestas por medio de reforzamiento dieron paso a los puntos de vista cognoscitivos que describían al aprendizaje como algo que implica la adquisición o reorganización de las estructuras cognoscitivas por medio de las cuales se procesa y se almacena la información" (Good y Brophy 156)

El constructivismo es una corriente pedagógica en la cual se pone como centro del proceso educativo al estudiante, por ello, se toman en cuenta los procesos que garanticen su aprendizaje. Bajo este concepto pedagógico el papel del profesor es la de ser un guía en el proceso educativo, él es quien proporciona los materiales y las orientaciones necesarias para que el estudiante interactúe, manipule y construya su conocimiento, así el papel del profesor es el de ser un motivador.

Según Good y Brophy los modelos de educación basados en el constructivismo desarrollan el conocimiento de los estudiantes de manera secuencial, es decir, se aprende algo nuevo con base en los conocimientos previos que tiene el estudiante. (156)

De la misma manera, Piaget afirmó “que nacemos como procesadores de información activos y exploratorios, y que construimos nuestro conocimiento en lugar de tomarlo ya hecho en respuesta a la experiencia o a la instrucción” (Good y Brophy 29)

Aprovechando estas particularidades por las cuales se caracteriza el género humano, se puede aplicar el constructivismo en todas sus expresiones dentro de un salón de clases. El trabajo de quienes están a cargo de brindar los materiales necesarios a los estudiantes, es buscarlos o crearlos de acuerdo a sus necesidades específicas del contexto social y cultural en donde se está dando el proceso educativo.

1.4 El constructivismo en el Ecuador.

Por la documentación existente en la actualidad con respecto a la educación en nuestro país, es evidente que el sistema educativo en sus últimas reformas busca trabajar bajo los modelos surgidos de la revolución cognoscitiva. De acuerdo con el libro Actualización y fortalecimiento Curricular de la Educación General Básica emitido en el año 2010 con respecto a las bases pedagógicas del diseño curricular se afirma:

"El nuevo documento curricular de la Educación General Básica se sustenta en diversas concepciones teóricas y metodológicas del quehacer educativo; en especial, se han considerado algunos principios de la pedagogía Crítica, que ubica al estudiantado como protagonista principal del aprendizaje, dentro de sus diferentes estructuras metodológicas, con predominio de las vías cognitivistas y constructivistas" (9)

Mediante la revisión de las diferentes constituciones que se han sucedido en nuestro país, los primeros indicios de colocar al sujeto como alguien de quien se busca su desarrollo se encuentran en la Constitución de 1967, la cual, en su artículo 36 al respecto de la educación dice:

"La educación tendrá por objeto el pleno desarrollo de la personalidad e inculcará respeto a los derechos y libertades fundamentales; favorecerá la comprensión y tolerancia entre los grupos sociales y religiosos, y el mantenimiento de la paz.

En todos los niveles de la educación se atenderá primordialmente a la formación moral y cívica"

Desde la constitución de 1967 se ha ido evolucionando, de manera muy pausada, en este concepto hasta llegar a lo que promulga la constitución ecuatoriana del año 2008 en donde se considera al sujeto que aprende como el centro y origen del quehacer educativo y para el cual se busca el desarrollo integral en el llamado Sumak Kawsay o Marco del Buen Vivir.

1.5 Las herramientas que se utilizan en el aula constructivista

¿Qué es una herramienta? Pues se puede afirmar que una herramienta es algo para llevar a cabo alguna actividad concreta. Cada ciencia o campo del saber cuenta con sus propias herramientas para poder desarrollarse. Una de las ciencias de las cuales se va a hablar es la didáctica.

Al hablar de la didáctica estamos haciendo referencia a una:

> "disciplina y campo del conocimiento que se construye, desde la teoría y la práctica, en ambientes organizados de relación y comunicación intencionadas, donde se desarrollan procesos de enseñanza y aprendizaje para la formación del alumnado" (Gispert 56)

Considerando esto y de forma muy general en términos de J.A. Comenius citado en Gispert, "la didáctica es el artificio universal para enseñar todo a todos los hombres" (56). Por ende, cada materia o asignatura dentro del sistema educativo formal o no formal debe contar con una didáctica específica para poder cumplir de manera satisfactoria los aprendizajes en los estudiantes.

En el campo de las matemáticas existe una didáctica específica, la didáctica de las matemáticas.

> "La finalidad de la didáctica de las matemáticas es el conocimiento de los fenómenos y procesos relativos a la enseñanza de las matemáticas para controlarlos y, a través de este control, optimizar el aprendizaje de los alumnos" (Parra y Saiz 45)

Al hacer uso de la didáctica de las matemáticas se pretende mejorar la forma de la enseñanza de las matemáticas, es decir, es un área del conocimiento encargada de brindar los recursos necesarios para que los estudiantes puedan alcanzar los aprendizajes deseados y de esta manera poder brindarles la educación integral y de calidad exigidas por las normas educativas vigentes.

1.5.1 La guía didáctica

La guía didáctica es una herramienta de la didáctica, pues permite la planificación secuencial de los contenidos que servirán de apoyo tanto a los estudiantes o a los profesores. “Las guías en el proceso enseñanza aprendizaje son una herramienta más para el uso del alumno que como su nombre lo indica apoyan, conducen, muestran un camino, orientan, encauzan, tutelan, entrenan, etc.” (Arauco 3)

Con respecto al aprendizaje, se pide al lector analice el siguiente caso: Un adolescente quiere ser un gran deportista en el área del fútbol. Este joven ha leído mucho sobre fútbol y sabe todas las estrategias y técnicas de este deporte, pero jamás aprenderá a jugarlo si no está en una cancha con un balón, formando un equipo y enfrentando a otro equipo.

De manera similar, para saber matemáticas, no basta con leer solamente, la lectura es la base para conceptualizar un tema y la terminología utilizada para un determinado capítulo de estudio, pero en donde se consolida el conocimiento es cuando el estudiante trabaja con material de apoyo, y más aún en la aplicación práctica que les pueda dar a los temas estudiados.

Una herramienta que puede brindar base teórica e incorpore en sí otros recursos didácticos para reforzar el aprendizaje es la guía didáctica, pues se presta para ser estructurada de acuerdo a las necesidades específicas presentadas por los estudiantes a los cuales va dirigida.

La guía didáctica será un instrumento en donde se sugerirá al profesor la manera de dirigir su clase. Le indicará qué tiene que propiciar, como lo debe hacer y cómo saber si los estudiantes han logrado el aprendizaje. Estará organizada secuencialmente y para su estructura tomará en cuenta otros medios disponibles tales como material impreso, tv, vídeos, software y otros recursos (Arteaga Estévez y Figueroa Sierra 1)

1.5.2 La tecnología como herramienta constructivista.

El avance tecnológico se puede evidenciar en situaciones reales, por ejemplo: al presionar un solo botón el ser humano se puede comunicar con el resto del planeta y saber lo que está ocurriendo a miles de kilómetros en tiempo real; pero, ¿Cuál es el aporte de las tecnologías en el campo de la educación? Pues bien, desde que aparecieron las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) y especialmente cuando apareció la educación virtual, se han venido dando una serie de supuestos;

> "en la década de 1920, se decía que los dibujos reemplazarían a los libros de texto. En la década de 1930, la radio se convirtió en el epicentro de un nuevo tipo de clase. En la década de 1950, la televisión se presentaba como el futuro de la educación. En la década de 1960. La << enseñanza asistida por ordenador >> iba a reemplazar a los profesores" (Universidad Camilo José Cela 811)

Sin embargo, a pesar de los supuestos existentes, se debe analizar el verdadero poder de las nuevas tecnologías y el potencial cambio que pueden traer a la educación dentro del Ecuador en la actualidad. Pero se debe tener conocimiento sobre las posibilidades de enseñanza y aprendizaje brindados por estos recursos para poder manejarlos correctamente.

> "El valor de la tecnología educativa, como el de cualquier otro instrumento en las manos del hombre, depende no tanto del valor intrínseco o del poder efectivo del instrumento, cuanto de la cabeza que lo dirige" (Universidad Camilo José Cela 812)

Es decir, que las tecnologías están ahí, pero es el docente y los estudiantes quienes deben darles el verdadero valor y aprovechar el potencial presentado por estas herramientas para lograr aprendizajes significativos para todos. Un profesor, puede estar al tanto de las innovaciones pedagógicas y psicológicas, un estudiante puede interactuar fácilmente con otros de todo el mundo y compartir conocimientos.

1.5.3 El vídeo educativo

El aprendizaje virtual es parte de las TIC, mediante el uso de esta herramienta se puede motivar al estudiante a que aprenda las cosas por sí mismo.

> "La enseñanza virtual puede poner al servicio del aprendizaje una serie de medios de gran calidad para disponer al estudiante a realizar un verdadero aprendizaje innovador que le ayude no solo a aprender conocimientos, sino, sobre todo, a aprender a aprender y aprender a lo largo de la vida" (Universidad Camilo José Cela 815)

Como una modalidad de enseñanza virtual se dispone del vídeo educativo el cual es una herramienta que, de manera bien estructurada, es capaz de captar la atención del estudiante, mediante el desarrollo explicativo lógico y secuencial de un determinado tema, ya sea para abordarlo por primera vez o para reforzarlo.

El vídeo educativo es uno de los medios para que los profesores ayuden a los estudiantes a asimilar de mejor manera los conocimientos deseados. Para considerar a un vídeo como educativo basta con que éste cumpla con un objetivo específico previamente formulado. De esta manera, casi cualquier vídeo puede estar en esta categoría. (Bravo 1)

Actualmente, se puede encontrar una gran cantidad de vídeos que pueden ser considerados educativos, basta con que se proponga un objetivo educativo alcanzable por el usuario luego de observarlo. Por lo tanto, utilizar el vídeo como un medio de enseñanza-aprendizaje es una ventaja sobre otras herramientas.

Pues bien, se afirma que la corriente constructivista ofrece varias herramientas para los educandos y profesores. Las guías didácticas pueden favorecer mucho en la construcción del conocimiento de los estudiantes actuando como instrumentos motivadores abiertos a la consulta e impulsadoras para fomentar en ellos la investigación. Además, las tecnologías y dentro de ellas el vídeo educativo, son recursos valiosos a los cuales, en la actualidad, casi todos pueden acceder.

1.6 El Laboratorio de Matemáticas.

Al usar material de apoyo para el aprendizaje de un tema en particular estamos haciendo uso de la didáctica. Al hacer uso de materiales para aprender matemáticas, entra en juego la didáctica de las matemáticas. En general, el aula es el lugar para usar este material didáctico, pero, de manera más precisa, el lugar adecuado para hacer su uso es el Laboratorio de Matemáticas.

Actualmente, el Laboratorio de Matemáticas de la Carrera de Matemáticas y Física de la facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación de la Universidad de Cuenca está trabajando en su implementación. Una vez logrado este objetivo, se podrá trabajar con los usuarios en sus instalaciones de manera satisfactoria. Sin embargo, lo anterior no quiere decir que actualmente no se utilice este espacio físico como parte del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

> El laboratorio de Matemáticas “es una estrategia pedagógica de utilización del material, en la que se encuentra un conjunto de actividades matemáticas para ser desarrolladas de manera autónoma por los participantes a través del uso de variados materiales, proceso que proporciona un ambiente de aprendizaje en el que se genera la relación entre actividad matemática y material manipulativo, relación que contribuye a la construcción y fundamentación de pensamiento matemático” (Arce 2)

Se puede decir que el Laboratorio de Matemáticas es un lugar en el cual se realizan las distintas actividades de refuerzo en el aprendizaje de la matemática. Éste es un espacio en donde los estudiantes y docentes pueden desarrollar distintas actividades encaminadas a mejorar el proceso de aprendizaje y enseñanza de la matemática.

1.6.1 Importancia del Laboratorio de Matemáticas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

Al ser un lugar que promueve el uso de material didáctico, el Laboratorio de Matemáticas cumple un papel fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la materia debido a que el estudiante puede reforzar la parte conceptual de la materia haciendo uso de los diferentes recursos presentes en éste lugar

Así, los estudiantes pueden hacer sus consultas sobre temas que no entendieron o, entendieron a medias en el aula. Además de lo anterior, en este espacio los estudiantes pueden plantearse la posibilidad de crear nuevo material para un tema específico con base a los materiales existentes e incluso ante la carencia de los mismos.

El Laboratorio de Matemáticas es un espacio ideal para que los estudiantes interactúen con total libertad y construyan sus conocimientos con respecto a un tema particular. Este espacio físico es importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la materia ya que el profesor como guía tiene los materiales necesarios para brindarles a sus estudiantes y los estudiantes, por su parte, tienen la oportunidad de interactuar y manipular esos materiales.

1.7 Los contenidos.

En sus 20 rupturas al statu-quo educativo promovidas por el nuevo marco legal educativo, en su numeral 15, se menciona que en nuestro país se ha implementado el Bachillerato General Unificado BGU con el objetivo de brindar las mismas oportunidades de acceso a una educación de calidad a todos los estudiantes.

> "Art. 42.- Nivel de educación general básica. - La educación general básica desarrolla las capacidades, habilidades, destrezas y competencias de las niñas, niños y adolescentes desde los cinco años de edad en adelante, para participar en forma crítica, responsable y solidaria en la vida ciudadana y continuar los estudios de bachillerato…" (LOEI 23)

> "Art. 43.- Nivel de educación bachillerato. - El bachillerato general unificado comprende tres años de educación obligatoria a continuación de la educación general básica. Tiene como propósito brindar a las personas una formación general y una preparación interdisciplinaria que las guíe para la elaboración de proyectos de vida y para integrarse a la sociedad como seres humanos responsables, críticos y solidarios..." (LOEI 23)

Al leer los artículos anteriores se puede apreciar el enlace que existe entre la EGB y el BGU, este enlace se da también entre el BGU y la educación de tercer nivel, por lo tanto, se necesitan de profesores capaces de establecer estas relaciones de la mejor manera posible.

De cara a estas exigencias se encuentra la Carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca, la cual tiene 37 años de haberse fundado y trabaja bajo la siguiente misión:

"La Carrera de Matemáticas y Física de la Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación de la Universidad de Cuenca forma docentes calificados, con valores y capaces de liderar procesos educativos en el área de matemáticas y física para satisfacer los requerimientos curriculares del octavo, noveno y décimo año de EGB y del bachillerato del sistema educativo ecuatoriano”

Pues bien, como un aporte al cumplimiento de esta misión, se desarrolla esta guía didáctica dirigida específicamente a una rama de las matemáticas, la cual pretende lograr que el futuro Licenciado en Matemáticas y Física sea un profesional con dominio en la materia de Cálculo Diferencial y en todos los conceptos que se relacionan con esta parte de las matemáticas.

Para el efecto se incluyen ilustraciones a todo color, juegos relacionados con las matemáticas, conjeturas matemáticas adaptadas a modo de narraciones que, pretenden despertar el interés del estudiante y conseguir que se convierta en un investigador activo en estos temas.

En el caso de la Carrera de Matemáticas y Física de la Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación de la Universidad de Cuenca, la derivada de una función está dentro de la materia llamada Cálculo Diferencial y es abordada en el tercer ciclo de estudios. La modalidad de estudios es presencial y hay un docente responsable de guiar al estudiante y dirigir el aprendizaje de la materia.

El temario de contenidos de la presente guía didáctica se detalla a continuación:

1. **Conceptos previos al estudio de la derivada**

    1.1. Introducción a funciones

1.2. Operaciones con funciones

1.3. Límites de funciones

1.4. Derivada a partir del límite

2. **Estudio de la derivada.**

2.1. Derivada y movimiento rectilíneo

2.1.1. Introducción

2.1.2. Posición, desplazamiento y velocidad

2.1.3. Velocidad promedio y velocidad instantánea

2.1.4. Gráficas del movimiento rectilíneo

2.2. La regla de la cadena

2.2.1. Introducción

2.2.2. ¿Qué es la regla de la cadena?

2.2.3. La notación Leibniz y la regla de la cadena

2.2.4. Aplicación de la regla de la cadena en las funciones compuestas

2.3. Derivada de funciones trigonométricas

2.3.1. Introducción

2.3.2. Aplicaciones de las derivadas de las funciones trigonométricas

2.3.3. Movimiento uniformemente variado

2.4. Diferenciación implícita

2.4.1. ¿Qué es una variable implícita?

2.4.2. ¿Qué es una función implícita?

2.4.3. La diferenciación implícita

2.4.4. Aplicaciones de la diferenciación implícita

2.4.5. Uso de las TIC en la diferenciación implícita.

Se han incluido estos contenidos de acuerdo con el sílabo correspondiente a la materia de Cálculo Diferencial de la Carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca. Además, se ha basado en los textos de cálculo incluidos en la bibliografía.

1.8 La guía didáctica y el vídeo. Cambios que se esperan

Ante las actuales normativas que rigen a la educación superior ecuatoriana se hace necesaria una completa colección de materiales con los cuales el profesor y de manera especial el estudiante pueda construir su conocimiento ya que, para la acreditación de la institución universitaria, además de la infraestructura y otras condiciones, un aspecto de gran valor es la evaluación de los conocimientos adquiridos por parte de los estudiantes.

En el libro Nuevos Métodos Educativos, de la Universidad de Cuenca, hay referentes sobre las misiones y funciones de la educación superior. En su artículo 1 habla sobre la misión de la universidad y menciona que la misión universitaria es educar, formar y realizar investigaciones. Además, la universidad tiene como misión:

> “formar diplomados altamente cualificados y ciudadanos responsables, capaces de atender a las necesidades de todos los aspectos de la actividad humana, ofreciéndoles cualificaciones que estén a la altura de los tiempos modernos” (Universidad de Cuenca 26)

Entonces, esta guía didáctica pretende mejorar y darle un sentido diferente al aprendizaje de la derivada de una función. Se quiere, con ello, lograr en los estudiantes una mejor aceptación a este campo de las matemáticas y prepararlo para los temas del Cálculo Integral.

Por lo antes mencionado, en este trabajo de titulación también se incluyen actividades tales como la resolución de ejercicios de forma grupal para estimular la cooperación y la solidaridad entre estudiantes, sabiendo que cuando se forman grupos de trabajo, se impulsan valores universales tales como el respeto, la cooperación, la solidaridad, la tolerancia, etc.

CAPÍTULO II

2 Metodología de la investigación de campo.

2.1 Enfoque de la investigación

El presente trabajo investigativo fue ideado para que sea de corte cuantitativo, por ello, el instrumento utilizado para el levantamiento de la información es la encuesta.

El ámbito de estudio es regional ya que las encuestas fueron aplicadas a los estudiantes de los tres últimos ciclos de la Carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca. Al trabajar con toda la población se obtuvo un nivel de confianza del 100%.

Los puntos de aplicación de las encuestas fueron las aulas en las que los estudiantes de la Carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca reciben sus clases y se las realizaron en la tercera semana del mes de diciembre del año 2015.

2.2 Estructuración del instrumento para recolectar la información.

Como ya se mencionó anteriormente, el instrumento que se utilizó para el desarrollo del presente trabajo investigativo es la encuesta, la misma que está estructurada así: un encabezado, un cuerpo y al final la información de quien respondió la encuesta.

En el encabezado están los datos tales como la fecha de realización de la encuesta, nombre del encuestador, y después se dan algunos instructivos a la persona encuestada: se indica para qué se utilizará la información conseguida, la confidencialidad de los datos obtenidos y la honestidad con que debe contestarse cada pregunta.

El cuerpo del cuestionario queda estructurado así: 13 pregunta de las cuales; la primera es informativa, desde la pregunta 2 hasta la pregunta 6 incluidas, hacen relación a las variables dependientes, desde la pregunta 7 hasta la pregunta 13 incluidas, hacen relación a las variables independientes.

De las 13 pregunta del cuestionario, 11 son cerradas y 2 son semi-cerradas. Así también para facilitar la tabulación de los datos se ha hecho la respectiva codificación asignándole un valor numérico a cada una de las opciones que presentan las preguntas.

Para presentar las opciones a las preguntas cerradas, contenidas en el cuestionario, se ha trabajado bajo el método del escalamiento de Likert, en donde se han considerado opciones pares, de estas el 50% muestran un criterio y el otro 50% muestran otro criterio. Para la pregunta número 8 se ha considerado opciones impares, sin embargo, también está desarrollada bajo el criterio del escalamiento de Likert.

Para las preguntas semi-cerradas se han presentado varias opciones. Sin embargo, al final se deja un apartado llamado “otros”, en donde el encuestado puede escribir alguna opción que a su criterio crea conveniente.

2.3 Identificación de variables

En tanto a las variables se han identificado las siguientes:

Variables dependientes: Materia Abstracta, Rendimiento académico

Variables independientes: Guía didáctica, vídeo.

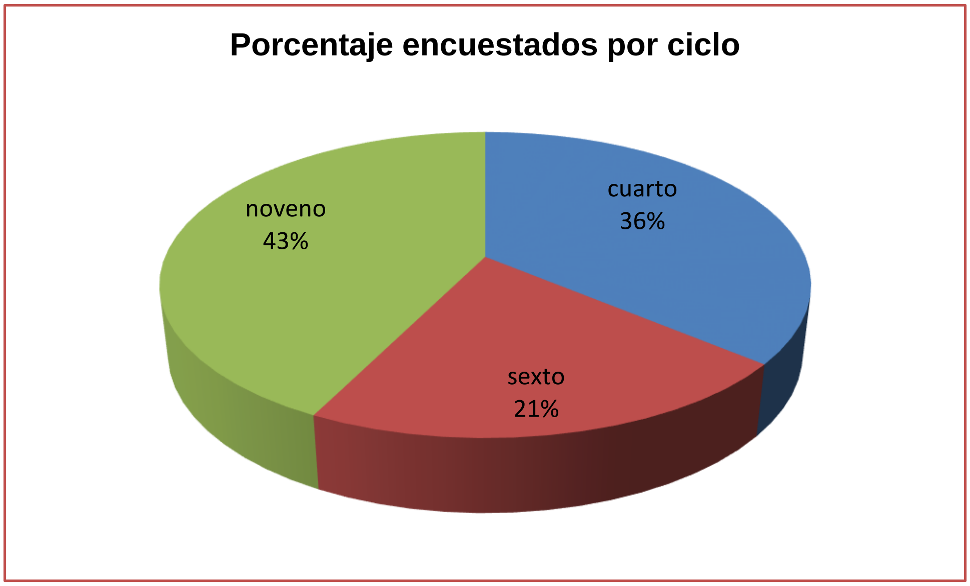
2.4 Análisis de datos

Una vez aplicadas las encuestas se procesan los datos obtenidos utilizando la hoja electrónica de cálculo Excel. Luego se presenta esta información de la siguiente manera: Primero se transcribe la pregunta, a continuación, se inserta un cuadro que muestra el número de encuestados que responden a cada opción y su respectivo porcentaje, luego se muestra gráficamente esta información. Finalmente se realiza un análisis de estos datos.

Pregunta 1.

¿En qué ciclo de la carrera está usted actualmente?

CATEGORÍAS	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Cuarto	22	36,07%
Sexto	13	21,31%
Noveno	26	42,62%
TOTAL	61	100,00%



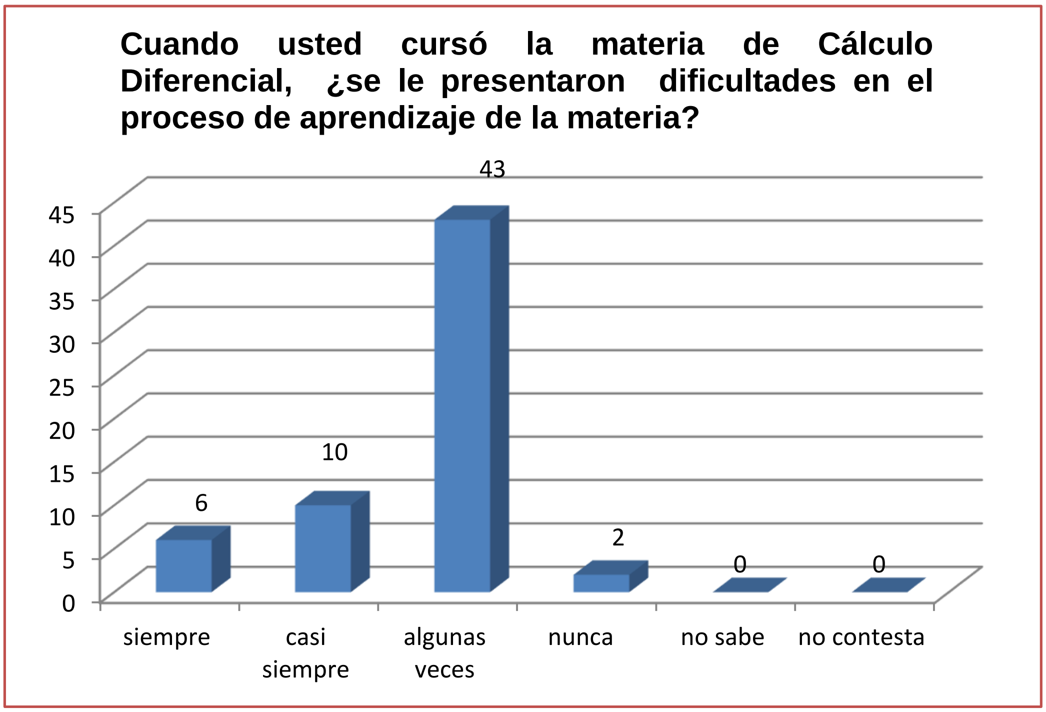
Análisis e interpretación.

De acuerdo a la información anterior se puede evidenciar que un alto porcentaje de estudiantes de la Carrera de Matemáticas y Física, en el periodo septiembre 2015 - febrero 2016, están cursando el noveno ciclo.

Pregunta 2.

Cuando usted cursó la materia de Cálculo Diferencial, ¿se le presentaron dificultades en el proceso de aprendizaje de la materia?

CATEGORÍAS	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Siempre	6	9,84%
Casi siempre	10	16,39%
Algunas veces	43	70,49%
Nunca	2	3,28%
No sabe	0	0,00%
No contesta	0	0,00%
TOTAL	61	100,00%



Análisis e interpretación.

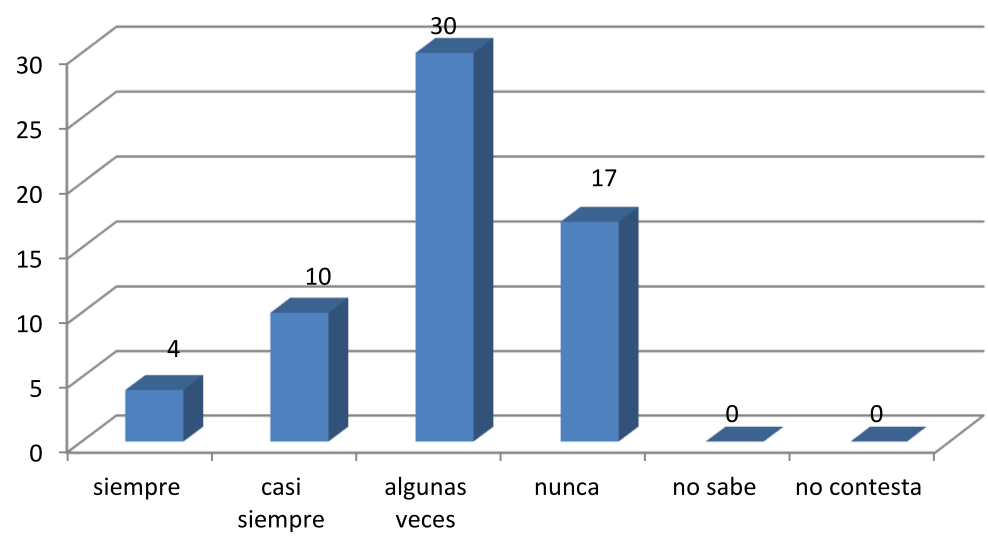
Al observar la tabla anterior, se puede constatar que un total de 59 encuestados correspondientes al 96,72% afirman que al menos una vez tuvieron dificultades en el proceso de aprendizaje de Cálculo Diferencial. Esto confirma que la materia se presta para proponer materiales que, de alguna manera, ayuden a cumplir de mejor manera los aprendizajes de los estudiantes.

Pregunta 3.

En el tema de la derivada, los ejercicios propuestos para que los realice, ¿fueron problemas contextualizados, fáciles de relacionar con el medio en que usted vive?

CATEGORÍA	FRECUENCIA	PORCENTAJES
Siempre	4	6,56%
Casi siempre	10	16,39%
Algunas veces	30	49,18%
Nunca	17	27,87%
No sabe	0	0,00%
No contesta	0	0,00%
TOTAL	61	100,00%

En el tema de la derivada, los ejercicios propuestos para que los realice, ¿fueron problemas contextualizados, fáciles de relacionar con el medio en que usted vive?



Análisis e interpretación.

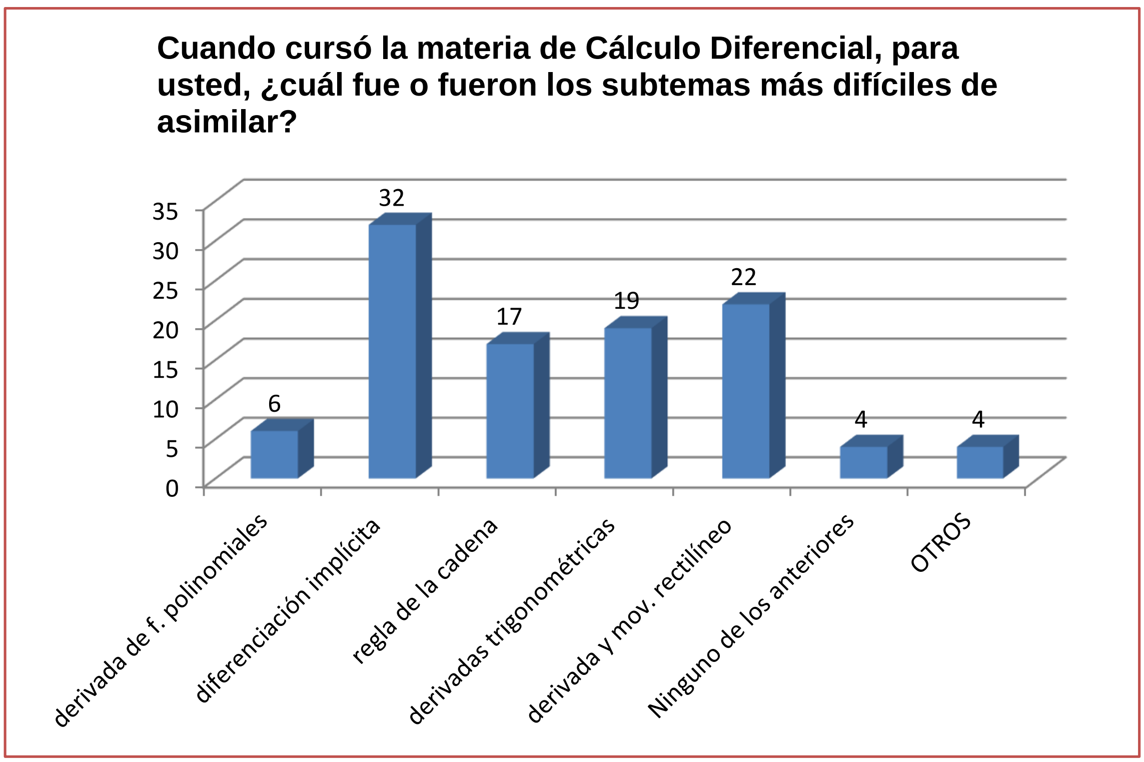
Al analizar los datos de la tabla anterior, se evidencia que un total de 44 encuestados correspondientes al 72,13% afirman que al menos una vez se les presentaron problemas contextualizados, en contraste con un total de 17 estudiantes correspondientes al 27,87% que afirman que nunca se les presentaron problemas contextualizados en el proceso de aprendizaje de Cálculo Diferencial.

Al parecer, la mayoría de problemas que los estudiantes resolvieron ya sea de libros guías o propuestos por el profesor, en la actualidad están contextualizados.

Pregunta 4.

Cuando cursó la materia de Cálculo Diferencial, para usted, ¿cuál fue o fueron los subtemas más difíciles de asimilar? ***Nota: un encuestado podía marcar más de una opción*****.**

CATEGORÍA	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Derivada de funciones polinomiales	6	5,77%
Diferenciación implícita	32	30,77%
Regla de la cadena	17	16,35%
Derivadas trigonométricas	19	18,27%
Derivada y movimiento rectilíneo	22	21,15%
Ninguno de los anteriores	4	3,85%
Otros	4	3,85%
TOTAL	104	100,00%



Análisis e interpretación.

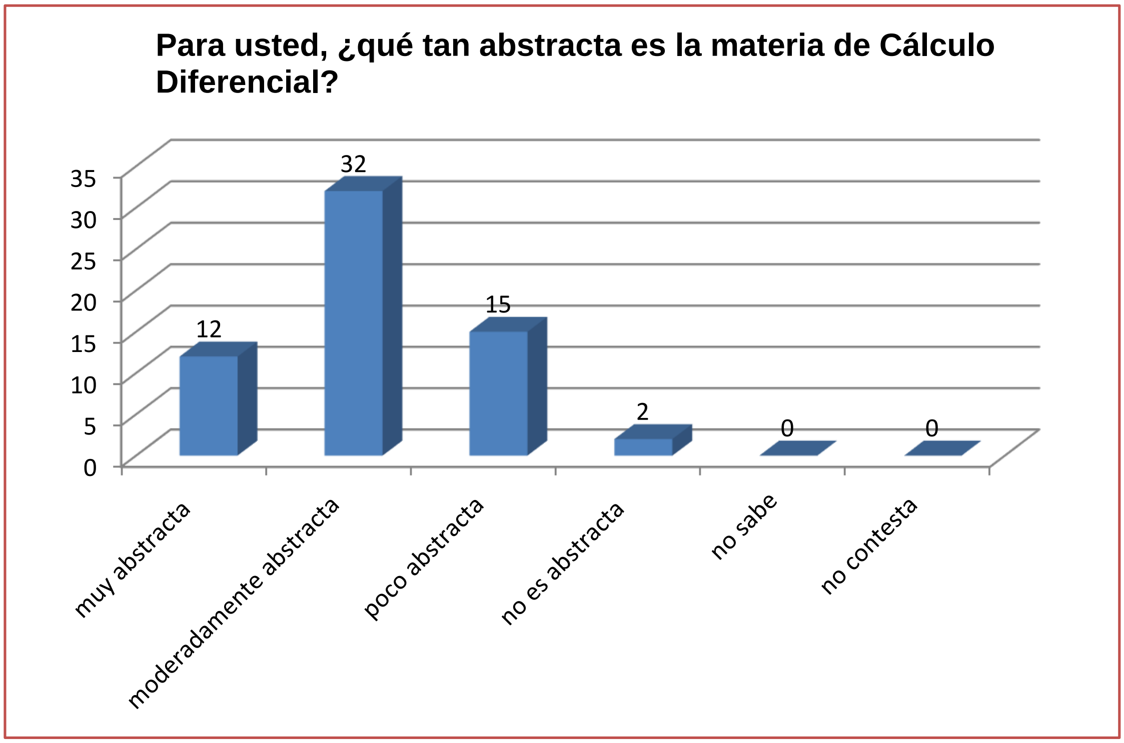
Al analizar la información de la tabla anterior, se puede evidenciar que existen 4 temas que presentan un mayor grado de dificultad en el aprendizaje de la derivada, ordenándolos desde la que presenta mayor dificultad tenemos:

a. Diferenciación implícita
b. Derivada y movimiento rectilíneo
c. Derivada de funciones trigonométricas
d. Regla de la cadena

Pregunta 5.

Para usted, ¿qué tan abstracta es la materia de Cálculo Diferencial?

CATEGORÍA	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Muy abstracta	12	19,67%
Moderadamente abstracta	32	52,46%
Poco abstracta	15	24,59%
No es abstracta	2	3,28%
No sabe	0	0,00%
No contesta	0	0,00%
TOTAL	61	100,00%



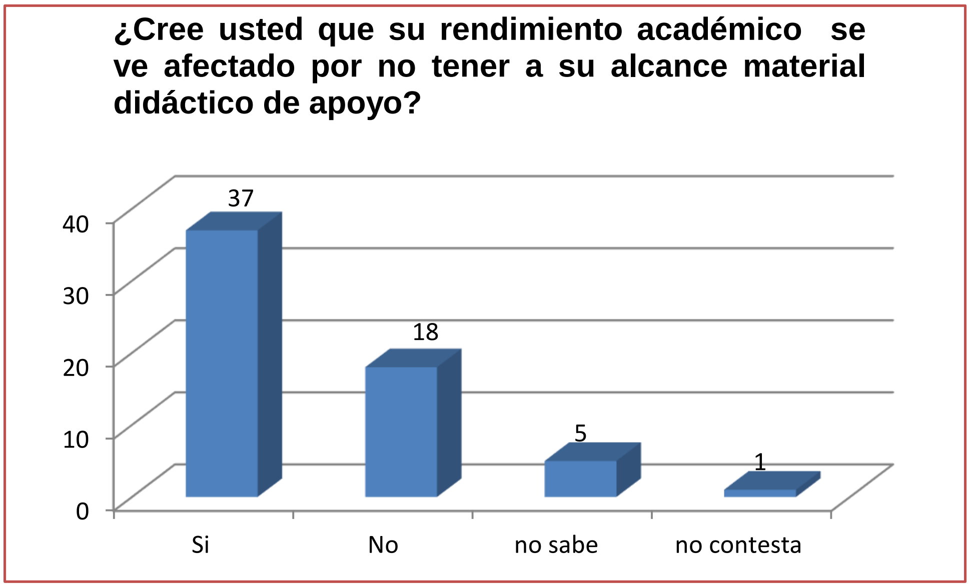
Análisis e interpretación.

De acuerdo a la información mostrada en la tabla anterior, se observa que un total de 59 encuestados correspondientes al 96,72% afirman que la materia de Cálculo Diferencial presenta un cierto grado de abstracción.

Pregunta 6.

¿Cree usted que su rendimiento académico se ve afectado por no tener a su alcance material didáctico de apoyo?

CATEGORÍA	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Si	37	60,66%
No	18	29,51%
No sabe	5	8,20%
No contesta	1	1,64%
TOTAL	61	100,00%



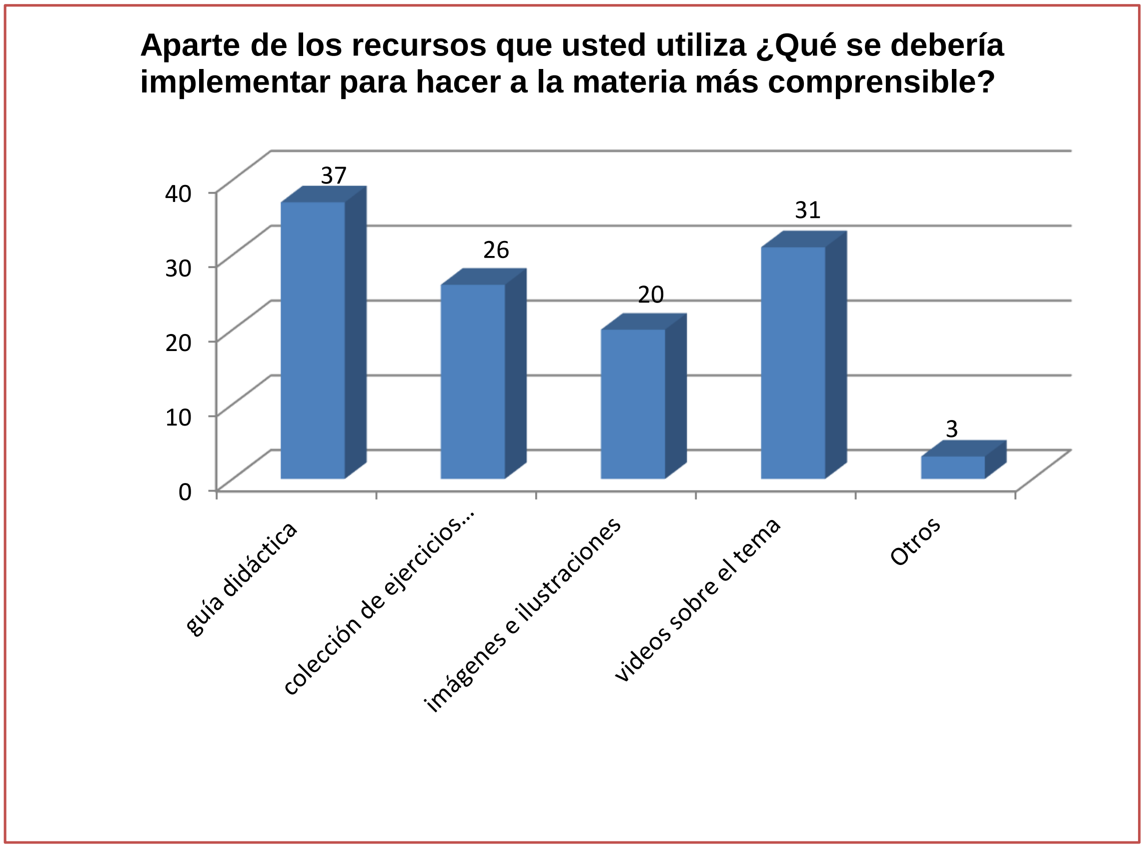
Análisis e interpretación.

De acuerdo a la información presentada en la tabla anterior, se evidencia que el 60,66% de estudiantes está de acuerdo en que el material didáctico es un factor que influye en el rendimiento académico. Por ello la necesidad de implementarlo para lograr mejorar el rendimiento académico.

Pregunta 7.

Aparte de los recursos que usted utiliza ¿qué se debería implementar para hacer a la materia más comprensible? ***Nota: el encuestado podía marcar más de una opción*****.**

CATEGORÍA	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Guía didáctica para el maestro	37	31,62%
Colección de ejercicios contextualizados	26	22,22%
Imágenes e ilustraciones	20	17,09%
Vídeos sobre el tema	31	26,50%
Otros	3	2,56%
TOTAL	117	100,00%



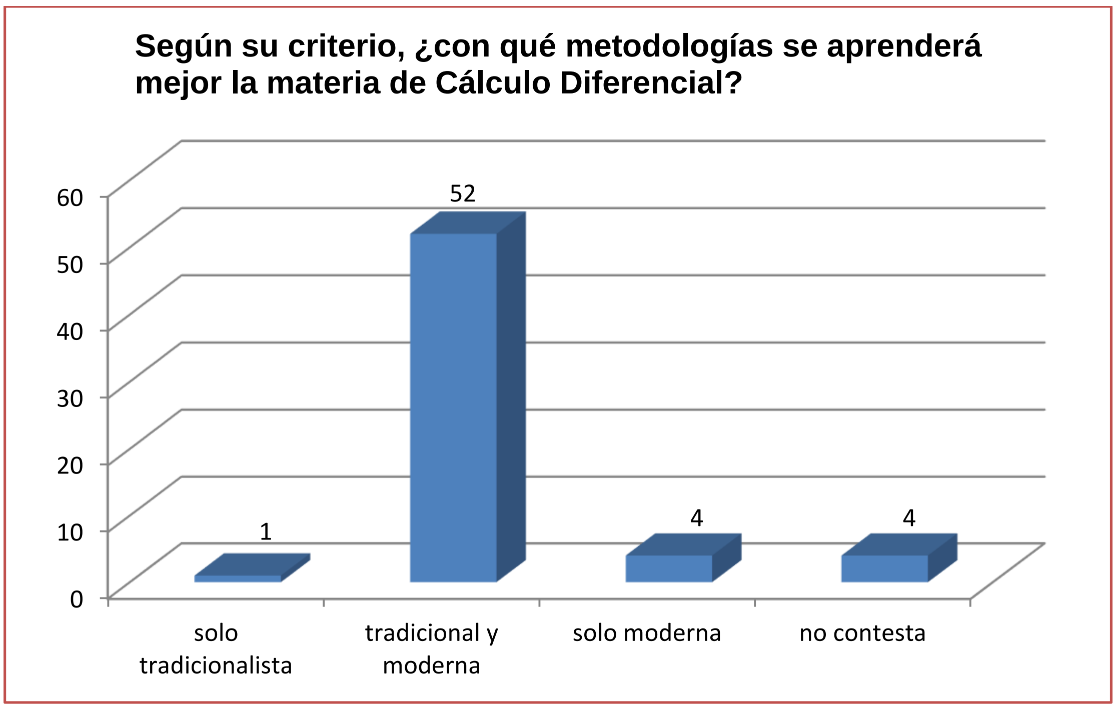
Análisis e interpretación.

De acuerdo a la información mostrada por la tabla anterior se puede evidenciar que un 97.44% de los encuestados afirman que se debería implementar una guía didáctica para el maestro, imágenes e ilustraciones, ejercicios contextualizados y vídeos. Además, se observa que el vídeo es uno de los recursos que más demanda tiene para mejorar el aprendizaje. Se pueden incluir todos los elementos en la guía didáctica.

Pregunta 8.

Según su criterio, ¿con qué metodologías se aprenderá mejor la materia de Cálculo Diferencial?

PREGUNTA 8	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Solo tradicionalista	1	1,64%
Mezcla: tradicional y moderna	52	85,25%
Solo moderna	4	6,56%
No contesta	4	6,56%
TOTAL	61	100,00%



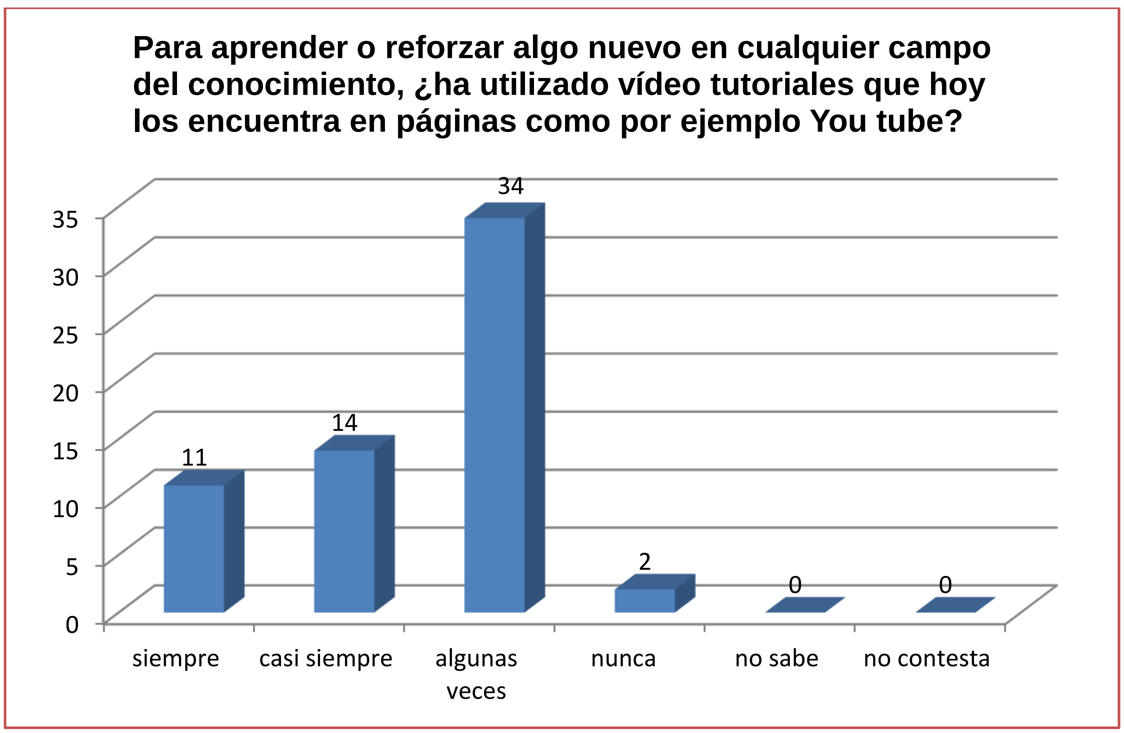
Análisis e interpretación.

Al analizar los datos de la tabla anterior, se puede evidenciar que las metodologías de la escuela tradicional no están descartadas por completo por parte de los estudiantes de la Carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca, ya que el 85,25% de los encuestados afirman que la mejor manera de aprendizaje y enseñanza de la materia de Cálculo Diferencial es utilizando una combinación de metodologías de la escuela tradicionalista y de la escuela moderna.

Pregunta 9.

Para aprender o reforzar algo nuevo en cualquier campo del conocimiento, ¿ha utilizado vídeo tutoriales que hoy los encuentra en páginas como el You Tube?

CATEGORÍA	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Siempre	11	18,03%
Casi siempre	14	22,95%
Algunas veces	34	55,74%
Nunca	2	3,28%
No sabe	0	0,00%
No contesta	0	0,00%
TOTAL	61	100,00%



Análisis e interpretación.

De acuerdo a la información mostrada en la tabla anterior se puede evidenciar que la mayoría de los estudiantes de la Carrera de Matemática y Física de la Universidad de Cuenca, con un porcentaje del 96,72%, ha utilizado el vídeo como herramienta de apoyo en el aprendizaje de algo nuevo o para reforzar algo ya aprendido. Por ello se puede utilizar este recurso para mejorar los niveles de aprendizaje de la materia de Cálculo Diferencial.

Pregunta 10.

¿Cree usted que sería útil contar con videos explicativos sobre el tema de la derivada en el Laboratorio de Matemáticas para que los estudiantes los puedan utilizar cuando lo requieran?

CATEGORÍA	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Si	57	93,44%
No	2	3,28%
No sabe	2	3,28%
No contesta	0	0,00%
TOTAL	61	100,00%

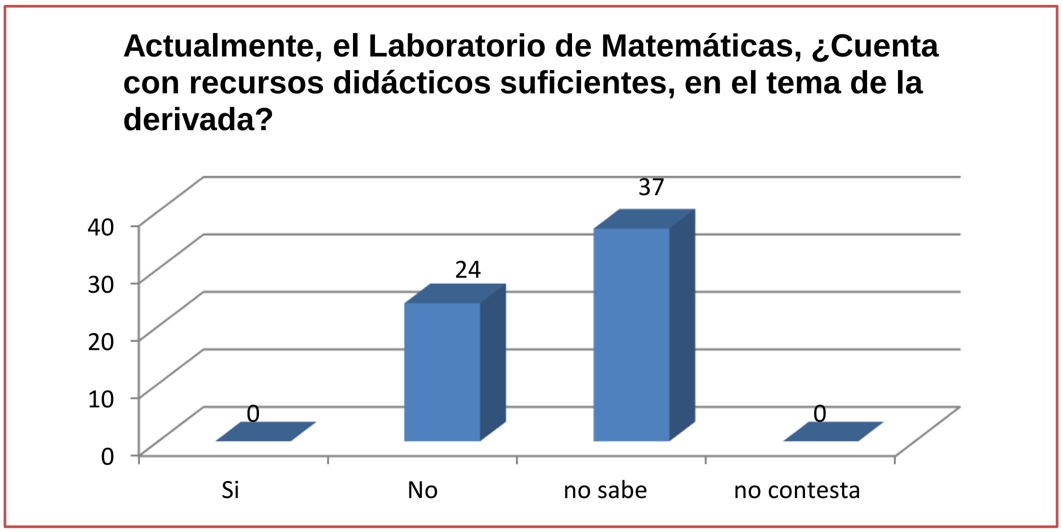
Análisis e interpretación.

Al observar los datos de la tabla anterior se evidencia que el 93,44% de los encuestados está a favor de que el vídeo sea una herramienta con la que debe contar el Laboratorio de Matemáticas como material de apoyo en el aprendizaje de Cálculo Diferencial.

Pregunta 11.

Actualmente, el Laboratorio de Matemáticas, ¿cuenta con recursos didácticos suficientes, en el tema de la derivada?

CATEGORÍA	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Si	0	0,00%
No	24	39,34%
No sabe	37	60,66%
No contesta	0	0,00%
TOTAL	61	100,00%



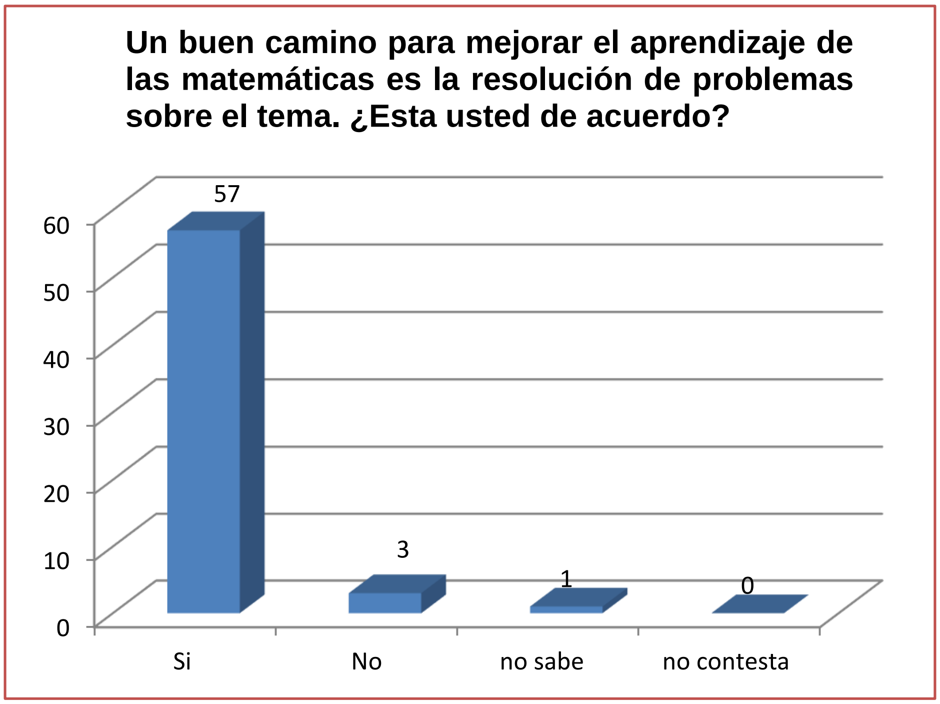
Análisis e interpretación.

De acuerdo a la información mostrada en la tabla anterior, se puede evidenciar que el 60,66% de los estudiantes no tiene conocimiento o no ha usado el Laboratorio de Matemáticas. El 39,34% restante afirma que no existen suficientes recursos para el tema de la derivada.

Pregunta 12.

Un buen camino para mejorar el aprendizaje de las matemáticas es la resolución de problemas sobre el tema. ¿Está usted de acuerdo?

CATEGORÍA	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Si	57	93,44%
No	3	4,92%
No sabe	1	1,64%
No contesta	0	0,00%
TOTAL	61	100,00%



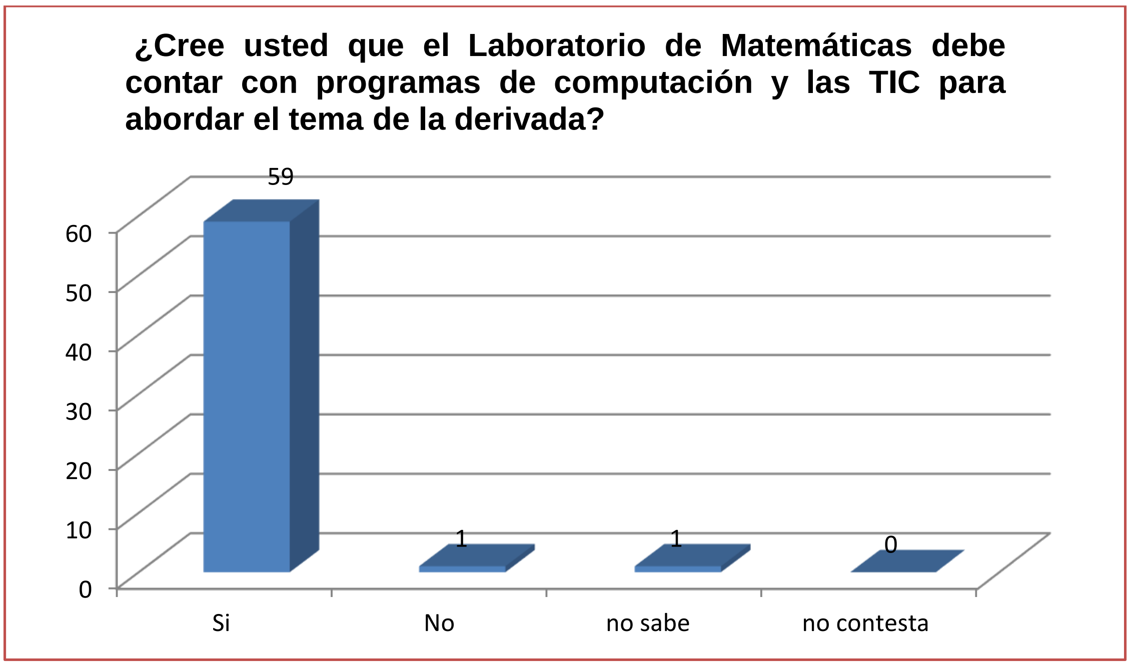
Análisis e interpretación.

De acuerdo a la información mostrada en la tabla anterior, se evidencia que el 93,44% de los encuestados está de acuerdo en que, al resolver problemas se mejoran los aprendizajes en el campo de las matemáticas.

Pregunta 13.

¿Cree usted que el Laboratorio de Matemáticas debe contar con programas de computación y las TIC para abordar el tema de la derivada?

CATEGORÍA	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Si	59	96,72%
No	1	1,64%
No sabe	1	1,64%
No contesta	0	0,00%
TOTAL	61	100,00%



Análisis e interpretación.

De acuerdo a la información de la tabla anterior, se evidencia que un 96,72% de los estudiantes de la Carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca están a favor de que las TIC sean herramientas con las que cuente el Laboratorio de Matemáticas.

2.5 Conclusiones:

Mediante la tabulación de los datos que ofrecieron las encuestas se ha logrado constatar lo siguiente:

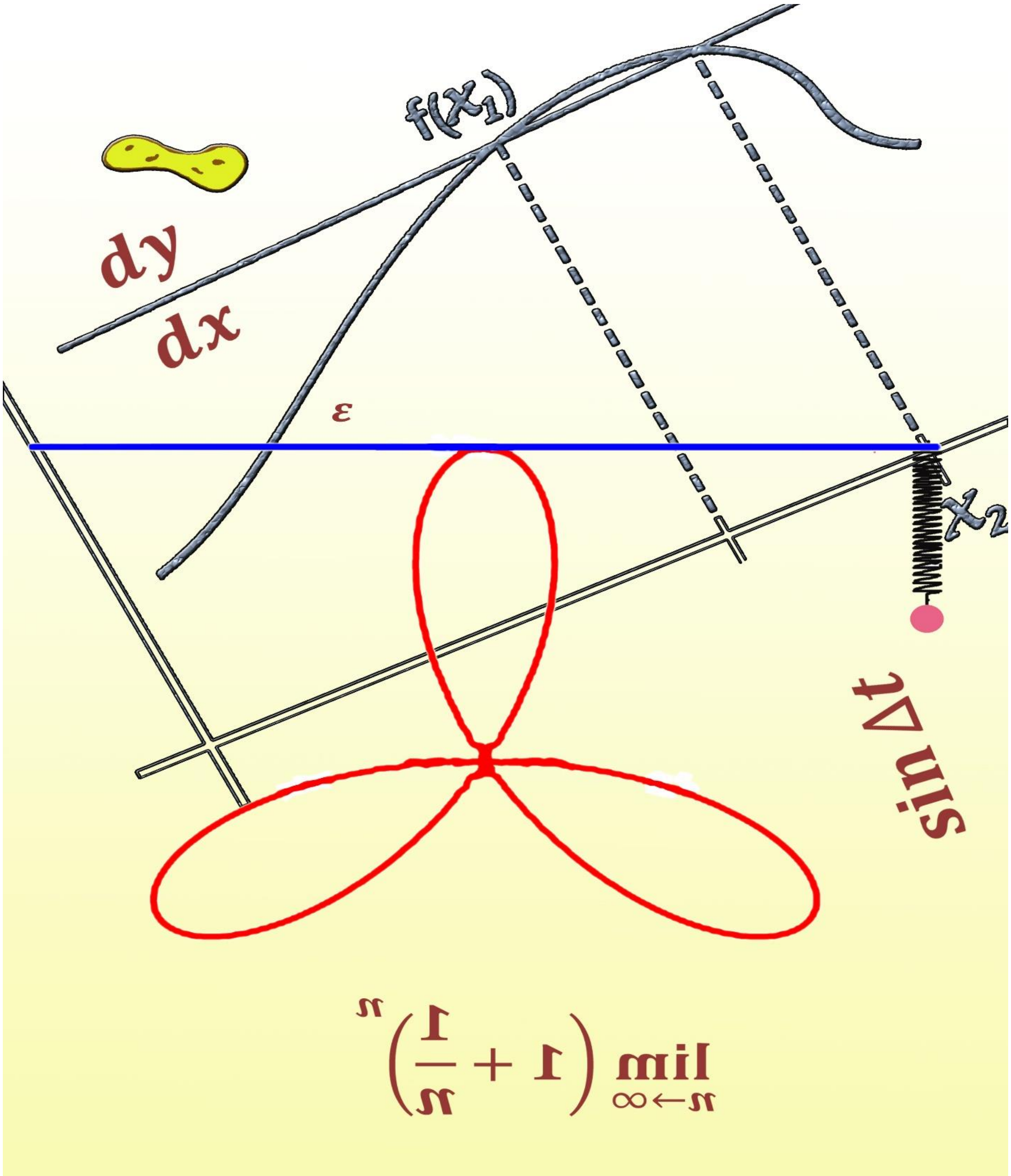
- La materia de Cálculo Diferencial es una asignatura en la cual los estudiantes presentan dificultades de aprendizaje y como una consecuencia de ello también el rendimiento académico se ve afectado. Uno de los factores es el grado de abstracción que presenta la materia en sí; otro, es la falta de recursos didácticos en el Laboratorio de Matemáticas en el tema de la derivada.
- Existen 4 temas que son de más difícil comprensión. Ordenados, desde el que presenta mayor dificultad son:
  a. Diferenciación implícita
  b. Derivada y movimiento rectilíneo
  c. Derivada de funciones trigonométricas
  d. Regla de la cadena
- Los estudiantes no han descartado por completo las metodologías de la escuela tradicional y tampoco las de la escuela nueva, ellos afirman que lo mejor que se puede dar para mejorar el aprendizaje de la derivada de una función, es una mezcla entre las metodologías de estas vertientes pedagógicas.
- La mayoría de los encuestados utiliza el vídeo como herramienta de ayuda para aprender nuevos temas o reforzar lo aprendido.

- Los estudiantes sugieren que para mejorar el aprendizaje en Cálculo Diferencial se deben utilizar recursos como una guía didáctica, imágenes, ejercicios para resolver y vídeos sobre el tema.

En vista de todas las conclusiones anteriores, se desarrolla la presente guía didáctica como un recurso para el Laboratorio de Matemáticas y para que el docente, los estudiantes y cuantos visiten este espacio físico cuenten con materiales con los cuales puedan cumplir sus aprendizajes de manera satisfactoria.

CAPÍTULO III

3 Desarrollo de la propuesta



Mapa General de Contenidos

La derivada

Conceptos previos al estudio de la derivada.

Estudio de la derivada

Mapa de Contenidos de la Primera Unidad

Conceptos previos al estudio de la derivada.

3.1. Introducción a funciones

3.2. Operaciones con funciones

3.3. Límite de funciones

3.4. Derivada a partir del límite

Mapa de Contenidos de la Segunda Unidad

Estudio de la derivada.

3.5. Derivada y movimiento rectilíneo

3.6. ***La regla de la Cadena***

3.7. Derivadas de funciones trigonométricas

3.8. Diferenciación Implícita

3.1 Planificación de la I sesión: Introducción al estudio de las funciones

TEMA: INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES

Objetivo:

- **Reconocer lo que es una función y los parámetros que la definen.**

Objetivos específicos de la sesión	Desempeños auténticos
• Definir lo que es una función. • Reconocer los distintos tipos de funciones. • Modelar problemas que implican funciones. • Utilizar las calculadoras graficadoras como parte de las TIC en la graficación de funciones.	• Define lo que es el domino y rango de una función a partir del concepto de variable dependiente e independiente, respectivamente. • Traza la gráfica la función. • Reconoce los distintos tipos de funciones. • Utiliza la calculadora para poder graficar una función cualquiera. • Modela problemas que tienen que ver con funciones.

¿Qué debe aprender el estudiante?	¿Cómo debe aprender?	¿Cómo se avaluarán los aprendizajes?
• El concepto y las características que definen a una función. • Distinguir los múltiples tipos de funciones a partir de sus gráficas. • Modelar problemas del mundo real que tienen que ver con las funciones. • Manejar correctamente la calculadora graficadora como un recurso auxiliar en sus actividades de estudio.	• Relacionando los conceptos previos acerca de conjuntos de números y algebra con el concepto de función. • Integrando los conocimientos de su vida cotidiana con los conceptos matemáticos aquí presentados. • Utilizando herramientas auxiliares, que ayudan a simplificar algunos cálculos. • Aplicando los conocimientos obtenidos en la resolución de problemas de la vida cotidiana.	• Identifica lo que es una función y sus parámetros. • Lleva lo teórico a lo práctico mediante el modelado de problemas que implican funciones. • Dibuja la gráfica de una función tanto de forma manual como también utilizando un software específico.

3.1.1 Recomendaciones para el docente

Para el desarrollo de esta sesión se tomarán en consideración los tres momentos de la Enseñanza –Aprendizaje. A continuación, se detallan las recomendaciones que se hacen para cumplir con esos momentos y lograr el aprendizaje eficiente de los estudiantes en el tema.

Al ingresar al aula de clase salude cordialmente, de esta manera logrará que sus estudiantes dirijan su mirada hacia usted. Trate de crear empatía con los estudiantes, de esta manera estará fomentando un ambiente agradable en el aula. Recuerde que el docente es un motivador y debe apuntar a ello. Al realizar estas actividades, se pretende que en unos 2-5 minutos el estudiante se despeje de las preocupaciones que pueda presentar y se enfoque en la materia.

1. **Activación de conocimientos previos**

- Se recomienda que el docente organice grupos de lectura para que a partir de la introducción ellos sean quienes hagan cuestionamientos acerca del tema que se va a tratar. A partir de la sopa de letras el docente puede hacer un recordatorio sobre los distintos conjuntos de los números. Así también, mediante la lectura del texto "entrando en materia," se puede hacer una introducción a lo que es una función. Se recomienda que en este momento se exponga el vídeo de la sesión número uno para darles una idea general de los contenidos de la sesión.

2. **Construcción del conocimiento**

- Para esta etapa se podría pedir que los estudiantes, a través de los grupos de lectura, realicen un cuadro sinóptico sobre los parámetros de una función, y los distintos tipos de funciones con sus respectivos ejemplos. El docente debe hacer énfasis en pedir ejemplos cotidianos, sin importar que parezcan triviales o con poco sentido, la cuestión es que el estudiante aprenda a sentirse seguro en esta área. Si aparece algún ejemplo erróneo se lo corregirá en la marcha de la clase.
- Se recomienda que el docente incentive a sus estudiantes a usar la calculadora graficadora o algún otro software de fácil acceso. En esta sesión hay un breve instructivo de como graficar una función utilizando la calculadora Casio Fx9860G

3. **Consolidación del conocimiento**

- Se recomienda que se revise el ejercicio del volumen de una caja costruida a partir de una hoja de papel, esta es una aplicación de modelado de problemas con funciones. Además, se recomienda revisar los ejercicios modelo presentados y que se realicen las actividades propuestas.
- Al final, se recomiendada que el docente haga un breve resumen de la sesión para concluirla.

TEMA 1: INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES

3.1.2 Actividades Previas

Pregunta en contexto: Hoy en día el recolectar botellas de plástico para venderlas es una actividad que además de evitar que existan envases arrojados como basura y preservar el medio ambiente, genera ingresos económicos. Si por cada botella de plástico me pagan 0.03 dólares. ¿Puede usted escribir un modelo matemático que prediga cuanto me van a pagar por recolectar n botellas de plástico? *Nota: n es un*

S	M	N	U	M	E	R	O	S
E	U	I	A	O	R	O	N	E
L	N	E	R	L	A	C	C	S
A	O	Q	A	E	L	A	O	E
N	O	R	C	N	A	R	N	L
O	M	K	I	N	E	S	J	A
I	A	T	O	T	S	C	U	R
C	E	M	N	E	C	I	N	U
A	M	E	A	R	U	E	T	T
R	A	U	L	N	U	R	O	A
R	E	S	E	L	A	E	R	N
I	A	O	S	A	M	T	S	O

Sopa de letras: Conjuntos de números

Conjunto
Números
Naturales
Enteros
Racionales
Irracionales
Reales

ϕ

Phi o fi es la vigésima primera letra del alfabeto griego y representa el conjunto vacío

Entrando en materia: Para calcular la energía potencial E_p se utilizan las siguientes variables $m = masa,\ g = aceleración\ debido\ a\ la\ gravedad, h = altura$; y la relación matemática es: $E_p = mgh$. Si se tiene una piedra de 0,1 Kg y se la lleva al bolsillo desde una planicie a la punta de una montaña de 100 metros de altura, la E_p va a incrementarse gradualmente. En este caso E_p ¿función de que variable es? ¿Por qué no puede ser función de la masa o de la gravedad?

3.1.3 Introducción.

Imagínese usted en el patio de su casa ubicada en pleno centro histórico de la ciudad de Cuenca. Sin necesidad de un termómetro siquiera, usted será capaz de darse cuenta de lo siguiente: en la mañana se sentirá con mucho frio, quizá a mediodía esté con una temperatura muy elevada y en la tarde otra vez con frio. ¡Ni hablar de la noche y la madrugada! Entonces podemos darnos cuenta que la temperatura depende del momento en que se la registra, en otras palabras, depende del tiempo.

Traduciendo lo anterior a lenguaje matemático decimos que: si tenemos una temperatura T que depende del tiempo t, entonces podemos escribir T (t) lo cual nos dice que la temperatura T depende del instante en que se la mida t, por lo tanto, decimos que T es una función de t.

T (10 a.m.) = 17°C

Figura 1.1

Curva dibujada por la temperatura en Cuenca para un día de noviembre.

Así también el número de bacterias en un cultivo dependen del tiempo que permanezcan en dicho cultivo. El consumo eléctrico de un bombillo depende del tiempo que esté encendido. El número de chocolates que una maquina produce depende del intervalo de tiempo que la máquina esté en funcionamiento. El decaimiento radiactivo de una sustancia radiactiva depende del número de años trascurrido, etc.

3.1.4 Funciones. Definición.

Sean X e Y conjuntos en los números reales. Una función es una relación en donde a cada elemento de X le corresponde un único elemento de Y. Refiérase a la figura 1.2 en donde se visualiza este hecho mediante un diagrama sagital; a, A, b, B, c, C representan números reales.

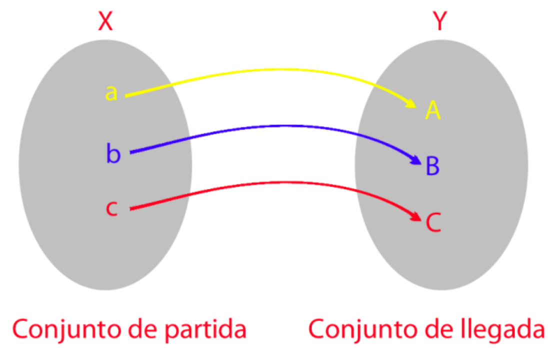


Figura 1.2

En el ejemplo de la temperatura, a cada hora del día le corresponde una única temperatura.

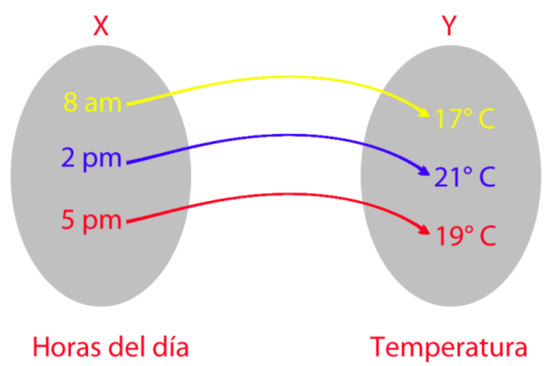


Figura 1.3

A horas diferentes pueden registrarse temperaturas iguales, pero no pueden registrarse dos temperaturas iguales a la misma hora.

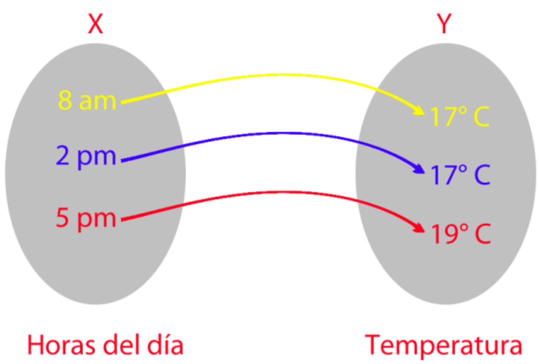


Figura 1.4

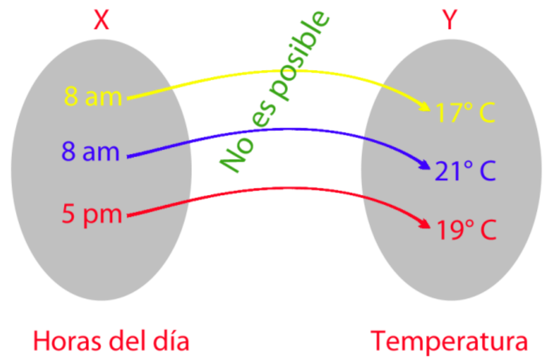


Figura 1.5

Nótese que los diagramas sagitales de las figuras 1.3. y 1.4 representan funciones, mientras que el de la figura1.5 no la representa.

Pregunta:

¿Cuál de las siguientes relaciones representa una función?

a. Libros de una biblioteca — codificación
b. Pablo Neruda — obras literarias de la biblioteca J.B.V

3.1.4.1 Notación Funcional

Hace referencia a las distintas formas de nombrar a una función, así:

$f(x) = ke^x \& y = ke^x$ representan una misma función; en donde k es una constante, $f(x) = y$ es la variable dependiente, finalmente x es la variable independiente.

3.1.4.2 Variable independiente

Es aquella que puede tomar los distintos valores numéricos, de acuerdo al dominio. Es una variable que no depende de otra variable. En cálculo a la variable independiente se la representa en el eje de las abscisas o eje x. Refiérase en la figura 1.6

3.1.4.3 Variable dependiente

Es aquella que depende de otra variable. En este caso depende de la variable independiente. En cálculo a la variable dependiente se representa sobre el eje de las ordenadas o eje y.Refiérase en la figura 1.6

3.1.4.4 Dominio de una función

Son todos los valores que puede tomar la variable independiente. Suponiendo que estemos registrando las temperaturas que tenemos en un día a diferentes horas, el dominio sería: las horas del día. Refiérase en la figura 1.6

3.1.4.5 Recorrido de una función

También es llamado rango o imagen. Son todos los valores que puede tomar la variable independiente. Por ejemplo: todas las posibles lecturas de la escala de un termómetro. Refiérase en la figura 1.6

Pregunta:

¿Cuál es el dominio y recorrido de $f(x) = \frac{\cos x}{x}$?

3.1.4.6 Evaluar una función

Evaluar una función es encontrar el par ordenado $(x\,,y)$, producto final tras ser procesado por la relación matemática dada. Se ingresa la variable independiente x y se obtiene la variable dependiente y.

3.1.5 Gráfico de una función

El grafico de una función representa a la función en un plano de ejes coordenados. Refiérase en la figura 1.6. Se la obtiene a través de la representación de los pares ordenados$(x\,,y)$. Se lo puede realizar manualmente mediante tablas de valores o utilizando herramientas como las graficadoras.

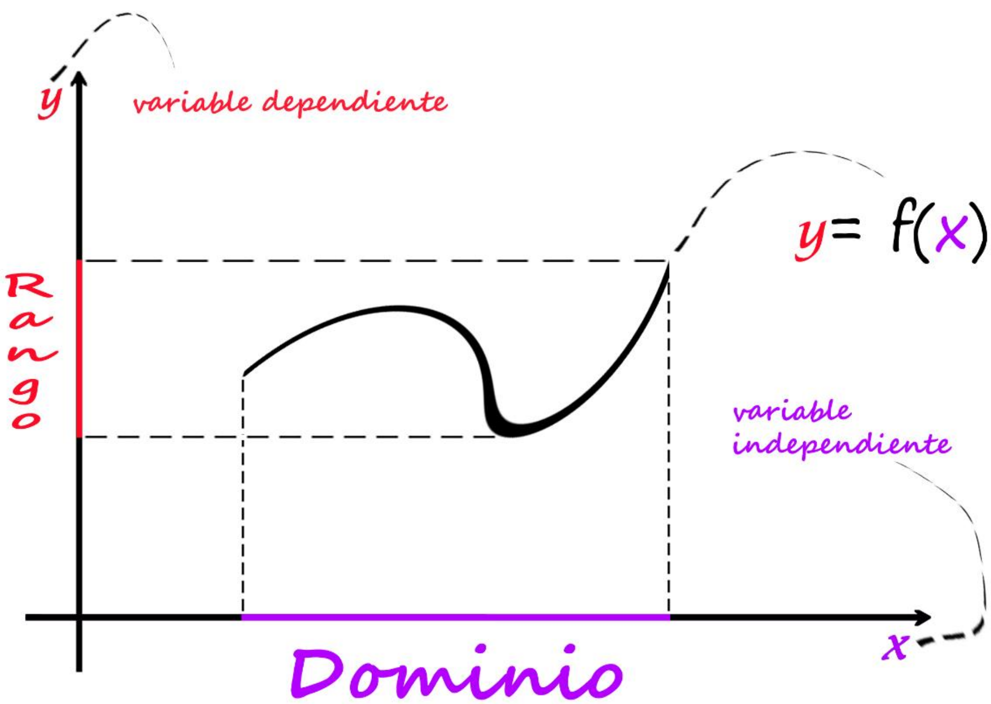


Figura 1.6

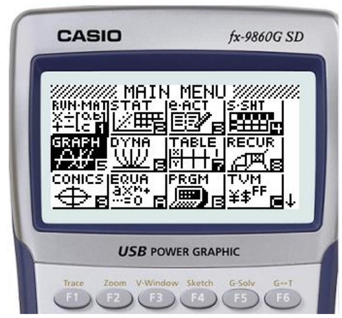
3.1.6 Como graficar una función con la calculadora Casio Fx9860 G

USO DE LAS TIC

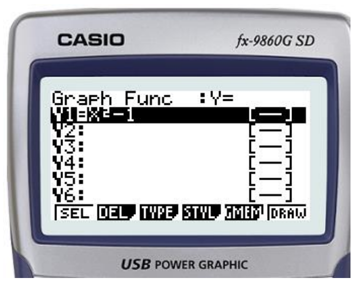
Como graficar una función con la calculadora Casio Fx9860 G

Se va a graficar la función $f(x) = x^2 - 1$

1. Encienda la calculadora
2. En el menú de opciones elija el modo ***Graph***

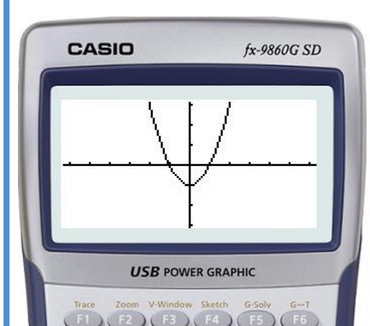


3. Ingrese la función que desee graficar. Para ello colóquese con el cursor sobre las Y_i que presenta la calculadora y use el teclado.



4. Una vez que termine de ingresar la función presione la tecla EXE

5. Ahora para graficar la función presione la tecla F6 o nuevamente EXE. La grafica aparecerá en pantalla tal como se ve en la figura adjunta.

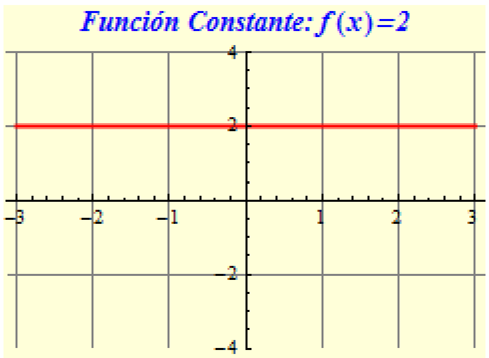


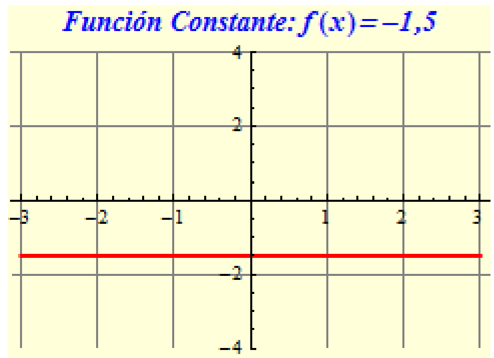
Nota: ***este procedimiento es válido para casi toda la familia de calculadoras graficadoras Casio.***

3.1.7 Tipos de funciones

3.1.7.1 Función constante

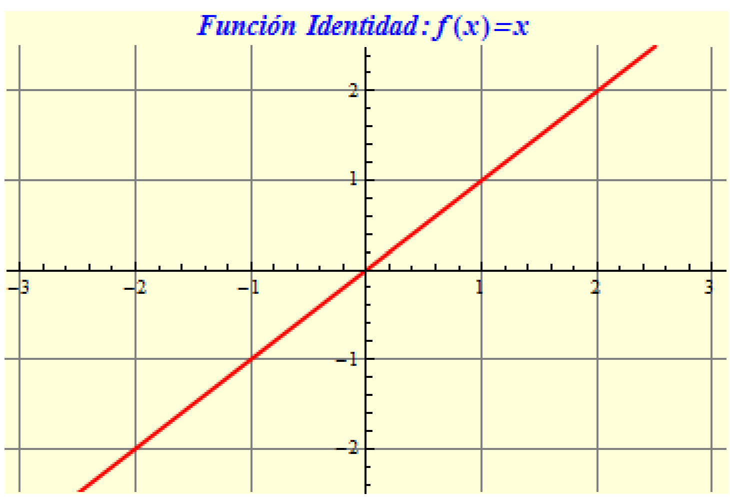
Es aquella función de la forma $f(x) = k$ en donde k es una constante. A continuación, se dan algunos ejemplos.





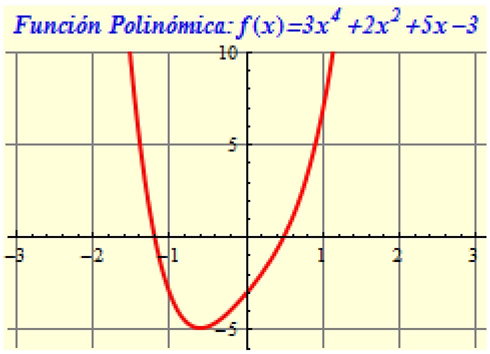
3.1.7.2 Función identidad

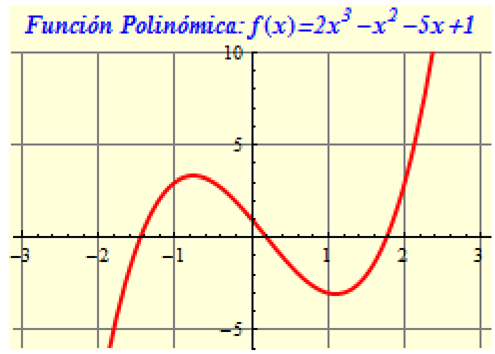
Es una función de la forma $f(x) = x$ en donde $x \in R$. La grafica de la función identidad es la que se muestra a continuación.



3.1.7.3 Función polinomial

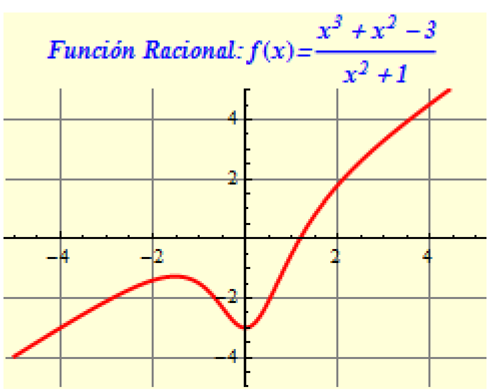
Es de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ en donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales y los exponentes son enteros no negativos.

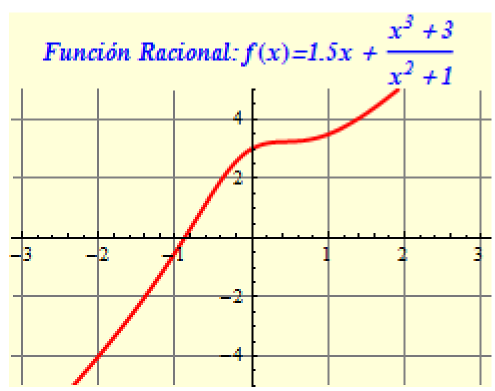




3.1.7.4 Función racional

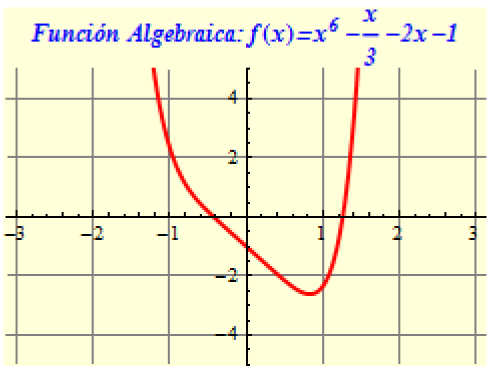
Si a una función $f(x)$ se la puede representar como el cociente de dos funciones polinomiales, entonces $f(x)$ es una función racional.

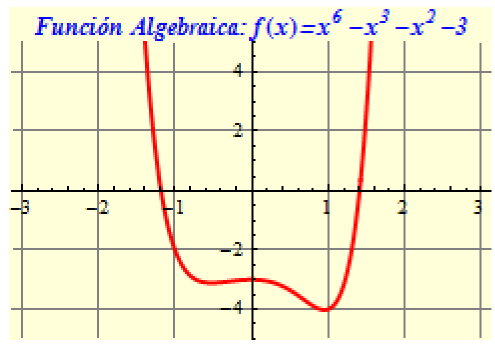




3.1.7.5 Función algebraica

Es una función que está representada por una serie de operaciones sobre la función identidad y la función constante: adición, sustracción, producto, cociente, potenciación, radicación. Las funciones polinomiales y racionales están incluidas dentro de las funciones algebraicas.

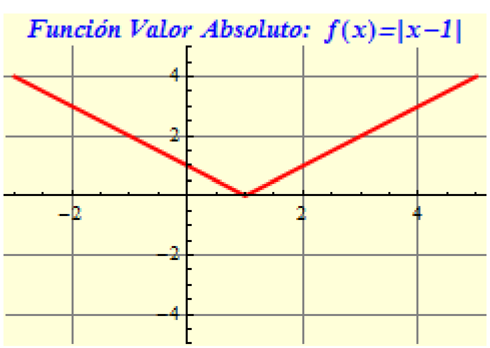


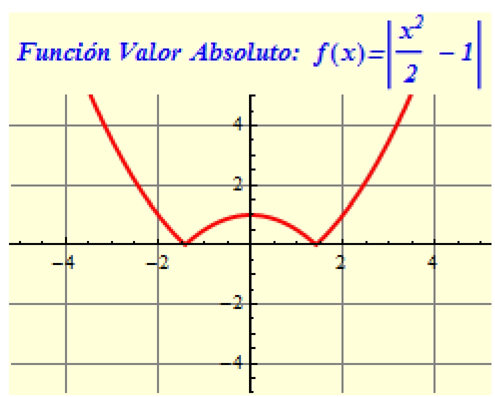


3.1.7.6 Función valor absoluto

Es una función de la forma $f(x) = |x|$ en donde $x \in R$ y está definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

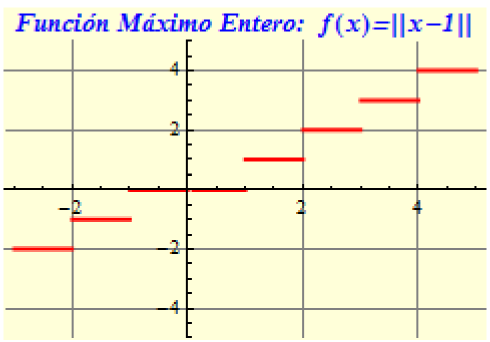


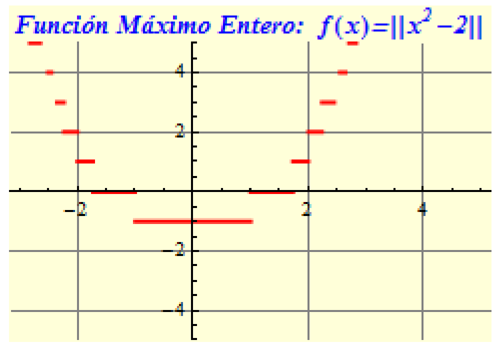


3.1.7.7 Función máximo entero

Es una función de la forma $f(x) = \|x\|$ en donde $x \in R$. Está definida por:

$\|x\| = n$ Si $n \leq x < n+1$ donde n es un entero. Esto es, $\|x\|$ es el máximo entero menor o igual que x



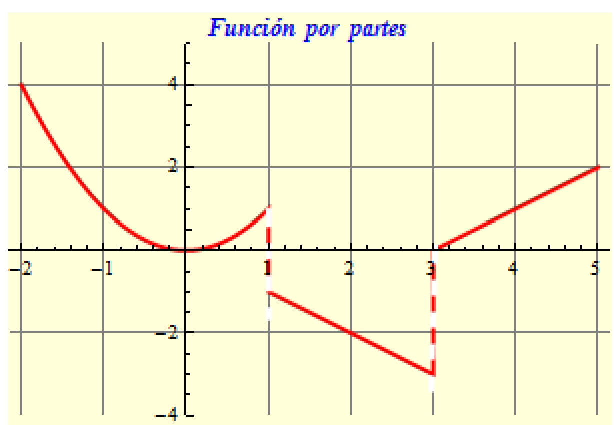


3.1.7.8 Función por partes

Es una función que está definida por intervalos. Cada intervalo puede representar una función distinta de acuerdo al modelo matemático que representa.

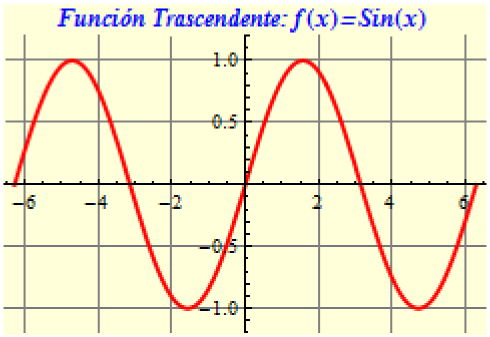
Grafica de la función definida por:

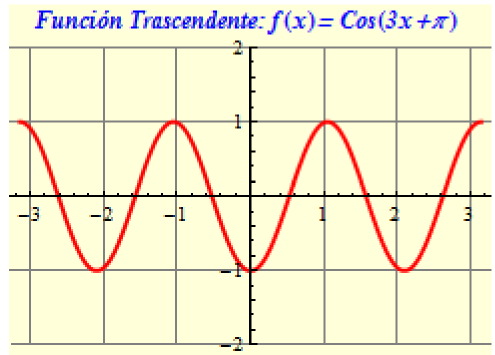
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 1 \\ -x & si \quad 1 \leq x \leq 3 \\ x-3 & si \quad x > 3 \end{cases}$$

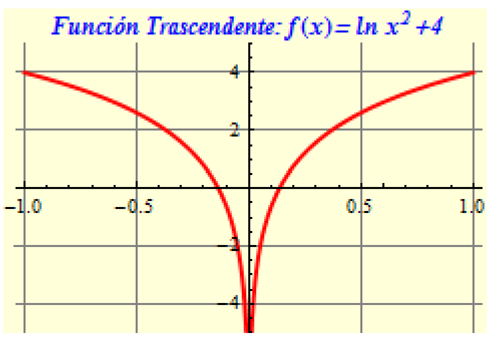


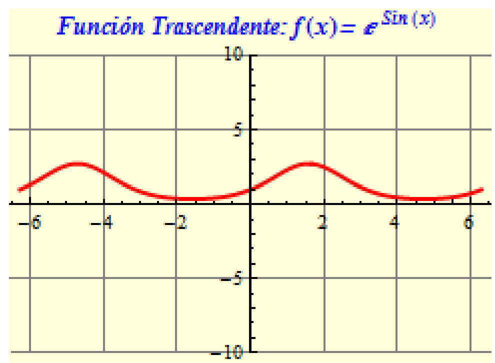
3.1.7.9 Funciones trascendentes

Son consideradas funciones trascendentes las funciones trigonométricas, las funciones logarítmicas y las funciones exponenciales.









3.1.8 Como evaluar una función utilizando la calculadora Casio Fx9860 G

Existen ocasiones en las cuales se debe evaluar una función, así: evaluar la función $f(x) = x^2$ cuando $x = 2$. En este caso evaluarla es fácil debido a que solamente reemplazamos x por 2 y el resultado será 4.Para evaluar funciones de una estructura un tanto más compleja por ejemplo $f(x) = \frac{x^7+x^5+5x^3+2}{x^2+1}$, lo que hacemos para simplificar el trabajo es utilizar la calculadora. En este ejemplo vamos a suponer que la evaluaremos para el caso de que $x = 5$.

USO DE LAS TIC

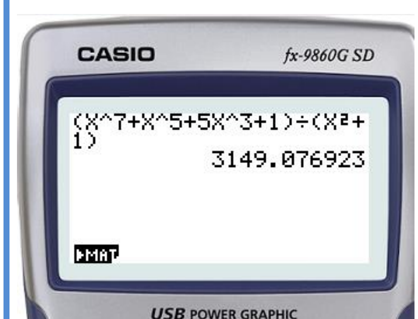
Como evaluar una función utilizando la calculadora

Casio Fx9860 G

Se va a evaluar la función $f(x) = \frac{x^7+x^5+5x^3+2}{x^2+1}$

1. Encienda la calculadora
2. En el menú de opciones elija el modo ***Run***
3. Ahora lo que haremos es designar un valor a la variable x.Para ello escribimos el valor numérico, (en este caso 5), luego presionamos la tecla → y la variable x, al final presionamos EXE. De esta forma la calculadora, en los cálculos toma a x con el valor de 5.

4. Ingrese la función que desee evaluar. Para ello use el teclado.
5. Una vez que termine de ingresar la función presione la tecla EXE



6. El resultado obtenido es el valor numérico de la función.

Nota: ***para evaluarla en otro valor simplemente cambiamos de valor a la variable x con el procedimiento del paso 3.***

3.1.9 Modelado de problemas que implican funciones.

Al acercarse a una librería usted podría comprar una cartulina de tamaño A4 por unos 15 centavos de dólar. Ahora su profesor de cálculo le pide que con ese pedazo de cartulina construya una caja de tal manera que pueda contener el mayor volumen posible dentro ella. ¿Cómo lo haría? Antes de continuar redacte una serie de posibles soluciones. ¡Inténtelo!

Para resolver problemas de este tipo se recurre al modelado de funciones. Se va a mostrar una serie de pasos que se deberían seguir para sacarse un $10/10$ en la tarea.

Primeramente, recordemos que una cartulina A4 mide 210mm de ancho x 297mm de largo.

Para construir esta caja, se van a cortar cuadrados en las esquinas de tal forma que luego se pueda doblar a la hoja y formar la caja. Observe la figura 1.7. Ahora bien, el volumen que la caja puede contener depende de la medida del lado x del cuadrado que se va a cortar. La fórmula para el volumen de una caja es: área de la base por la altura. Trabajando en metros tendríamos:

Área de la base $=(0{,}210-2x)(0{,}297-2x)$; así también altura $=x$.

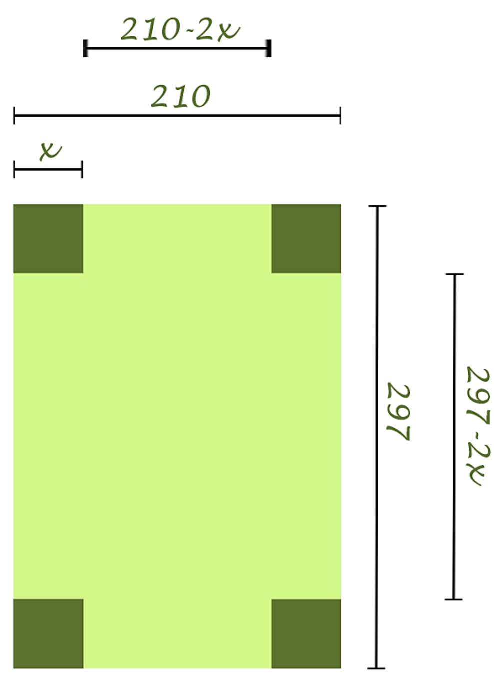


Figura 1.7

Entonces el volumen de la caja será: $V(x) = x\,(0{,}210 - 2x)(0{,}297 - 2x)$

Para determinar el volumen máximo de esta caja existen métodos de cálculo que el lector aprenderá después. Por el momento lo que vamos a hacer es ayudarnos de una graficadora y observar que valor de x proporciona el mayor volumen posible.

El gráfico de $V(x) = x\,(0{,}210 - 2x)(0{,}297 - 2x)$ se muestra en la figura 1.8:

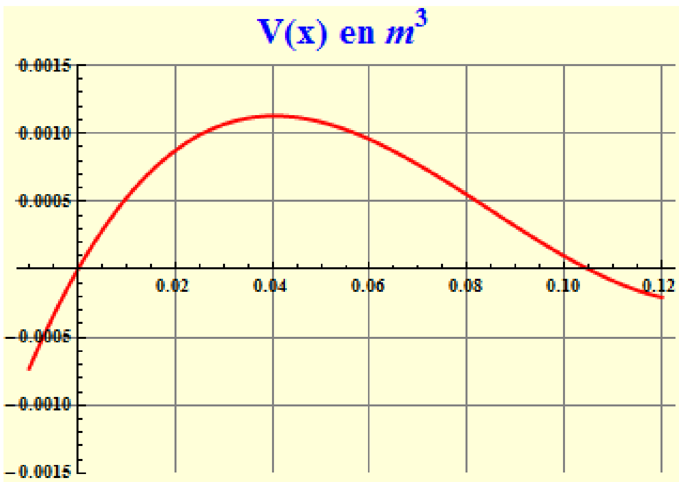


Figura 1.8

Conteste:

Qué pasa cuando $x < 0$

Y qué cuando $x > 0{,}105$

¿Qué significa esto?

Observando la gráfica de $V(x)$se puede deducir que el máximo volumen de la caja se da cuando$x \approx 0{,}04m \approx 4cm$ para el cual el volumen es:

$V(0{,}04) = 0{,}00113m^3 = 1130\ cm^3 \approx 1.1\ litros$

Pregunta:

a. ¿Cuál es el dominio de la función $V(x) = x\,(0{,}210 - 2x)(0{,}297 - 2x)$?

b. ¿Qué representa este dominio?

3.1.10 Ejercicios resueltos:

1. Dada la siguiente función $y(a)=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; con $b=1$ &$c=-2$, determine:

   a. $f(1)$

   b. $f(-h)$

   c. $f(a+h)$

   d. $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Solución:

Como $b=1$ &$c=-2$, entonces $y(a)$ puede escribirse como $y(a)=\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2a}$

Nótese que en este caso la función depende de a.

a. $f(1)=\frac{-1+\sqrt{1+8(1)}}{2(1)}=\frac{-1+3}{2}=1$

b. $f(-h)=\frac{-1+\sqrt{1+8(-\mathrm{h})}}{2(h)}=\frac{-1+\sqrt{1-8\mathrm{h}}}{2h}$

c. $f(a+h)=\frac{-1+\sqrt{1+8(a+h)}}{2(a+h)}$

d. $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{-1+\sqrt{1+8(a+h)}}{2(a+h)}-\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2a}}{h}=\frac{\frac{-1+\sqrt{1+8(a+h)}}{2(a+h)}+\frac{1-\sqrt{1+8a}}{2a}}{h}$

2. Dadas las siguientes relaciones; determine cuáles de ellas definen una función. Realice las gráficas.

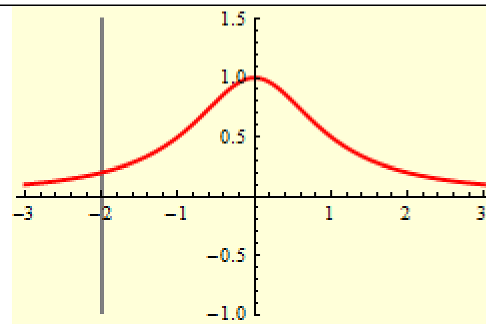
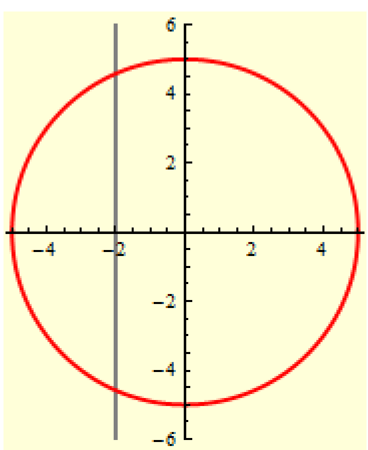
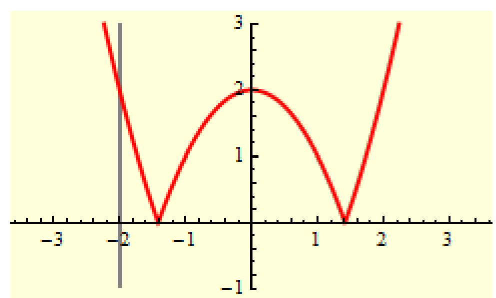
a. $y=\frac{1}{x^2+1}$

b. $x^2+y^2=25$

c. $|x^2-2|$

Solución: *De acuerdo a la definición 1.1.1 a y c son funciones. Por su parte b no representa una función ya que 2 elementos del recorrido están relacionados con uno solo del dominio.*

Además, podemos demostrar gráficamente que en verdad a y c son funciones y c no lo es. Para ello hacemos la prueba de la recta vertical: se traza una recta vertical en cualquier parte de la gráfica y si la corta en un solo punto, entonces la gráfica representa a una función, caso contrario no.

a. Grafica de la función $y = \frac{1}{x^2+1}$	
b. Grafica de la relación$x^2 + y^2 = 25$	c. Grafica de la función $\lvert x^2 - 2\rvert$
	

El siguiente ejercicio, modelo ha sido extraído del libro El Cálculo de Earl W. Swokowski y desarrollado con fines ilustrativos.

3. Los productos farmacéuticos deben especificar las dosis recomendadas para adultos y para niños. Dos de las fórmulas que se han sugerido para obtener las dosis para los niños a partir de las de adultos son las siguientes:

   Regla de Cowling: $y = \frac{t+1}{24}a$

   Regla de Friend: $y = \frac{2}{25}ta$

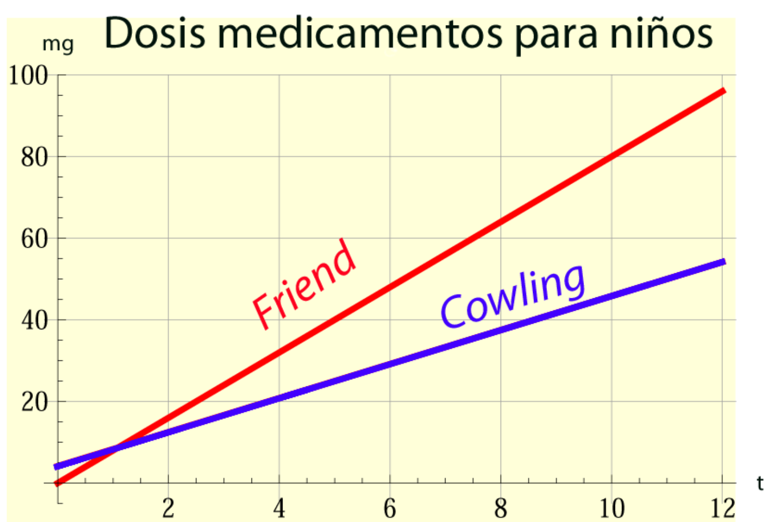
   En donde a es la dosis en mg para adultos y t la edad en años del niño.

   a. Tomando $a = 100\, mg$ grafique las dos ecuaciones lineales en el mismo sistema coordenado para $0 \leq t \leq 12$

   b. ¿Para qué edad las dos fórmulas especifican la misma dosis?

Solución:

a. Tomando $a = 100\, mg$ las gráficas de las funciones se muestran a continuación.



b. *Para este literal debemos tomar en consideración que cuando las dos rectas se intersecan la dosis es igual. Al observar la gráfica vemos que es aproximadamente un poco más de un año. Para saber la edad exacta resolvemos el problema analíticamente utilizando un sistema de 2 ecuaciones.*

Regla de Cowling: $\boldsymbol{y = \frac{t+1}{24}a}$**. Regla de Friend:** $\boldsymbol{y = \frac{2}{25}ta}$

$\frac{t+1}{24}a = \frac{2}{25}ta$ *Para que las dosis sean iguales*

$\frac{t+1}{24} = \frac{2}{25}t$ *Dividiendo por a ambos miembros*

$25(t+1) = 24(2t)$ *Operando*

$25t + 25 = 48t$

$25 = 48t - 25t$

$t = 1,087\ años \approx 13\ meses$

Conclusión: las dos reglas recomiendan igual dosis a los $1,087\ años \approx 13\ meses$ de edad.

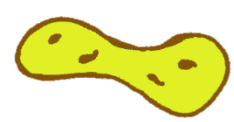
3.1.11 Actividades propuestas para trabajar en grupo.

1. Dada $f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$ determine $f(-2),\ f(0),\ \frac{f(-2a)}{f(2a)},\ f(x+h),\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
2. Escriba un ejemplo de cada uno de los tipos de funciones mencionadas en la sección 1.1.9

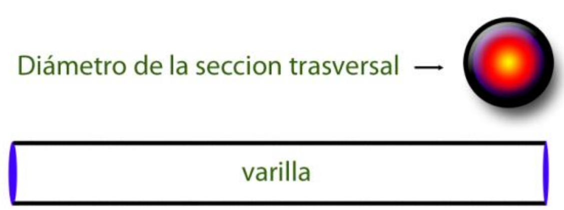
3. Investigue cuál es el modelo matemático o función que describe el interés compuesto (de acuerdo a lo permitido por la superintendencia de bancos a una institución financiera ecuatoriana) y escríbala de la forma $C(t)$ en donde C es el capital obtenido luego de t años. ¿Cuál es el dominio y el rango? Identifique las variables dependiente e independiente.

4. Si hoy deposito una cantidad de 2000 dólares, en una institución financiera ecuatoriana ¿cuánto tiempo tendré que esperar para retirar el doble de mi depósito actual si se usa interés compuesto?

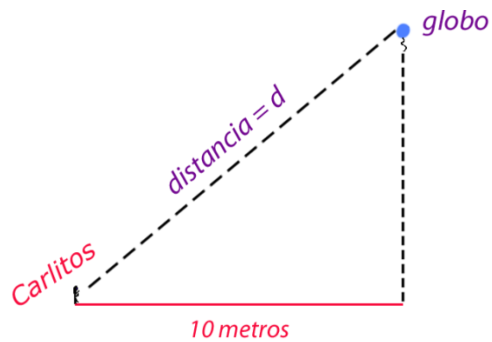
5. ¿Qué tipo de función es la que describe el crecimiento del número de bacterias en un cultivo con respecto al tiempo?



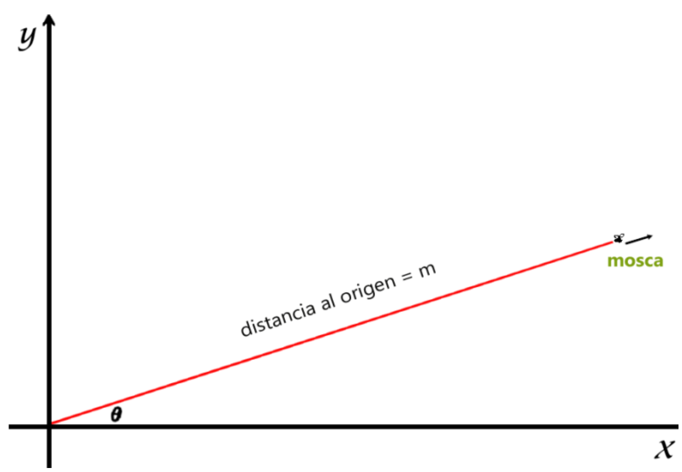
6. Suponga que una varilla cilíndrica de cierto metal sumergido en agua, cuyo diámetro se destruye a una razón de 5 mm por año. Exprese esto como una función matemática. ¿En cuánto tiempo la varilla se destruirá por completo? Ignore el desgaste en los extremos.



7. En las fiestas de independencia de Cuenca se suelta un globo inflado con helio que asciende verticalmente a una velocidad aproximada de $0{,}8\ ^{m}/_{s}$. Carlitos está a 10 metros desde donde se suelta el globo. Determine la distancia$d$ del globo con respecto a Carlitos como una función del tiempo t



8. Una mosca vuela en línea recta con una velocidad $v$en un sistema coordenado. Exprese la distancia m de la mosca con respecto al origen como una función del tiempo t. Si la mosca pasa por el punto $(3{,}4)$ ¿cuál es el ángulo θque la línea de la trayectoria de la mosca forma con el eje x?



3.2 Planificación de la II sesión: Operaciones con funciones.

TEMA: OPERACIONES CON FUNCIONES

Objetivo:

- **Conocer y aplicar correctamente el concepto de operaciones con funciones.**

Objetivos específicos de la sesión	Desempeños auténticos
• Determinar lo que es una operación con funciones. • Reconocer los distintos tipos de operaciones que se pueden realizar sobre las funciones. • Conceptualizar lo que es la función compuesta. • Utilizar el concepto de función compuesta en la resolución de problemas	• Define lo que es una operación con funciones. • Realiza las operaciones básicas con funciones. • Realiza la operación composición de funciones, así como también la descomposición. • Relaciona los conocimientos adquiridos en la resolución de problemas que tienen que ver con operaciones de funciones.

¿Qué debe aprender el estudiante?	¿Cómo debe aprender?	¿Cómo se avaluarán los aprendizajes?
• El concepto y las características de las distintas operaciones con funciones. • El concepto y las características de la operación función compuesta. • Dada una función, si es posible, expresarla como el resultado de la composición de dos funciones.	• Relacionando los conceptos previos acerca de los distintos tipos de funciones, así como también sus características. • Integrando los conocimientos de su vida cotidiana con los conceptos matemáticos presentados en esta sesión.	• Opera correctamente sobre una o varias funciones. • Realiza correctamente la composición de funciones. • Realiza la descomposición de funciones cuando se le presenta una función compuesta.

3.2.1 Recomendaciones para el docente

Para el desarrollo de esta sesión se tomarán en consideración los tres momentos de la Enseñanza –Aprendizaje. A continuación, se detallan las recomendaciones que se hacen para cumplir con esos momentos y lograr el aprendizaje eficiente de los estudiantes en el tema.

Al ingresar al aula de clase salude amablemente, de esta manera logrará que sus estudiantes dirijan su rostro hacia usted, entonces habrá más posibilidades de captar su atención. Usted debe llegar con mucho ánimo al aula, de esta manera transmitirá esto a sus estudiantes. La intención es que en unos 3-5 minutos el estudiante deje a un lado las preocupaciones que pudiera presentar y se enfoque en el tema que se va a tratar.

1. Activación de conocimientos previos

- Se recomienda que el docente organice grupos de trabajo de dos personas. Con motivo de resolver el crucinúmero, puede darles sugerencias a los estudianets en el uso de la caluladora. La lectura sobre la conjetura de Collatz es un recurso para captar la atención de los estudiantes en el tema de las operaciones con los números. Se recomienda que en este momento se exponga el vídeo de la sesión número dos para darles una idea general de los contenidos de la sesión.

2. Construcción del conocimiento

- Se recomienda que el docente permita el trabajo de los estudiantes en la lectura, el análisis y resolución de las actividades que presenta esta sección.
- El docente pedirá que los estudiantes den ejemplos en donde se puedan dar las operaciones con funciones. El docente mismo presentará algunos ejemplos para que los estudiantes conceptualicen de mejor manera el concepto de operaciones con funciones.
- La actividad de la página 32 es un ejemplo de la composción de dos funciones. Pedir a los estudiantes que modelen un problema similar.

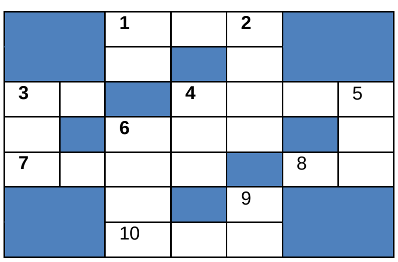
3. Consolidación del conocimiento

- El docente pedirá la intervención de aquellos estudiantes que aún tienen dudas sobre algo que se haya revisado en esta sesión y las aclarará; en el caso de no presentarse ninguna duda, el docente hará un breve resumen de la clase para concluirla.
- Se recomienda que se revisen los ejercicios modelo presentados en esta sesión y que se realicen las actividades propuestas.

TEMA 2: OPERACIONES CON FUNCIONES

3.2.2 Actividades previas

Pregunta en contexto: ¿Conoce los motores de los carros a control remoto? Pues bien, Mauro extrae uno de estos motores. Al suministrarle un voltaje de 2 voltios se observa que el eje del motor gira a 6 revoluciones por segundo. Luego, logra suministrarle un voltaje de 3 voltios y observa que el motor gira a 9 revoluciones por segundo. A partir de la información dada ¿Cuál es el modelo matemático que describe el total de revoluciones por minuto que presenta el motor de juguete al suministrarle 5 voltios? *Nota: Trate de resolver este problema utilizando funciones.*



*Tomado del libro Baúl de tesoros matemáticos

***Crucinúmero**

Horizontales	verticales
1. Días en un año normal	1. Días en octubre
3. Minutos en un cuarto de hora	2. Segundos en una hora y media
4. Segundos en una hora, 24 minutos y 3 segundos	3. Horas en una semana
6. Segundos en cinco minutos	4. Horas en 20 días y 20 horas
7. Horas en un año normal	5.Cuatro veces 79 segundos
8. Horas en 4 día	6. Segundos en una hora y 3 segundos
10. Días en un año bisiesto	9. Horas en un día y medio

La conjetura de Collatz: su enunciado es tan sencillo, sin embargo, esa sencillez no ha podido ser demostrada por los grandes matemáticos de todas las épocas desde que se enunció esta conjetura.

En la siguiente página se expone esta conjetura a manera de un pequeño cuento.

Ser millonario si se sabe sumar, multiplicar y dividir: (Conjetura de Collatz)

(Extraído y adaptado del cuento matemático "Mi media conjetura" de Javier Rodrigo Hitos)

Mauro llegando al cuarto de estudio de Paulina

- Hola Paulina ¿qué estás haciendo?
- Hola estoy practicando las operaciones básicas ya que mañana tengo una evaluación de esto.
- ¡Oh interesante!
- Sí, Pero esto está aburrido. ¿Me podrías ayudar para realizar algo distinto?
- Mmm a ver déjame pensar… Pues sí, sí que tengo algo que te podría interesar. A ver Paulina escribe en tu cuaderno un número que se te venga a la mente... ¿Ya lo tienes?
- Espérame un momento… a ver, este no… este… mmm… si este. Si ya lo tengo
- Ahora te daré unas dos reglas sencillas para que trabajes con el número que acabas de escribir.
- Está bien, dímelas
- Mira si el número que elegiste es par entonces divídelo por 2
- Si el número elegido es impar primero le multiplicas por 3 y luego le sumas 1.
- Ahora debes repetir este proceso con todas las respuestas que obtengas. Y sabes, sé que te vas a dar cuenta de algo…
- ¡Ok ya lo creo!…

Paulina Sola:

- A ver yo he pensado el número 15, como es impar, entonces le sumo 1, o sea que ahora tengo 16. Como 16 es par, entonces le divido entre 2 y tengo 8. Como 8 es par divido entre 2 y tengo 4, como 4 es par…

…10 minutos después

Mauro llegando otra vez:

- Veo que has llenado una hoja con operaciones
- Si. ¡Ya que no te imaginas que!
- Pues creo saberlo… pero dime ¿Qué es?
- Pues que no importa el número que elija al inicio, siempre llego al uno como respuesta y de ahí todo se repite otra vez.
- ¿Se repite?
- Si: 1+1=2 y luego 2/2=1 y….
- Pues bien, Paulina, si lograses demostrar que esto es cierto para todos los números, entonces te pagarán un millón de dólares.
- En serio… ¡entonces voy a ser millonaria! Ja ja ja…
- Chao Paulina y suerte con tu prueba de mañana.
- Chao Mauro y gracias

…2 minutos después

- Aló Mauro… ¿en dónde retiro el premio?

Para empezar:

La empresa ch produce 2 chocolates por segundo y la empresa CH produce 4 chocolates en ese mismo tiempo. ¿Cuál es el modelo matemático que describe la producción total de chocolates si las empresas deciden trabajar juntas?

C

3.2.3 Operaciones con funciones.

Al proceso de combinar números lo llamamos operaciones con números, análogo a esto, al hecho de combinar dos funciones se le denomina operación con funciones. Dos funciones pueden combinarse con las conocidas operaciones aritméticas: suma, resta, producto y cociente. Observe los ejemplos de la tabla 2. 1.a.

Tabla 2. 1.a			
OPERACIONES CON FUNCIONES			
Sean:$f(x) = x + 3 \& g(x) = x^3 + x^2 - 5$			
Se pueden realizar las siguientes operaciones sobre las funciones anteriores			
Operación	***Notación***	***Representación***	***Resultado***
Suma	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$(x + 3) + (x^3 + x^2 - 5)$	$x^3 + x^2 + x - 2$
Resta	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$(x + 3) - (x^3 + x^2 - 5)$	$-x^3 - x^2 + x + 8$
Producto	$(f\ .\ g)(x) = f(x)\ .\ g(x)$	$(x + 3).(x^3 + x^2 - 5)$	$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 5x - 15$
Cociente	$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$	$(x + 3)/(x^3 + x^2 - 5)$	$\dfrac{(x + 3)}{(x^3 + x^2 - 5)}$

3.2.4 La función compuesta.

Además de las operaciones mencionadas es la tabla 2. 1.a. existe una operación particular llamada composición o función compuesta. La función compuesta es una operación en donde una función depende de otra. Observe los ejemplos de la tabla 2.1. b.

Sean $f(x)$ & $g(x)$ dos funciones cualesquiera, la función compuesta se denota por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Tabla 2.1. b			
EJEMPLOS DE LA FUNCIÓN COMPOSICIÓN			
$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{g(x)}$	$\boldsymbol{(f \circ g)(x) = f(g(x))}$	***Resultado***
$x^2 - 5$	$\sqrt{x}$	$f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 5$	$x - 5$
$\sin x$	πx	$f(\pi x) = \sin \pi x$	*0*
$\sqrt{x^3}$	$x + 4$	$f(x+4) = \sqrt{(x+4)^3}$	$\sqrt{64 + 48x + 12x^2 + x^3}$

Actividad:

A un escultor se le paga $[\boldsymbol{0,2t+1}]$dólares por minuto de trabajo. Pero si él trabaja más de una hora se le paga $\boldsymbol{T}$ dólares de acuerdo al siguiente modelo matemático: $\boldsymbol{T = 0,1h^{1,1}}$ por cada hora que trabaja. Exprese $\boldsymbol{h}$ como función de $\boldsymbol{t}$ y encuentre el modelo matemático que describe el costo total $\boldsymbol{T}$ que el hombre gana por trabajar más de una hora.

¿Cree que se puede descomponer una función compuesta? Hay que tener presente que, así como se da la composición de funciones, también se puede realizar la descomposición de funciones. Es decir, dada una función compuesta, se pueden mostrar las funciones que la constituyen. Los siguientes ejemplos muestran lo mencionado.

3.2.5 Ejercicios resueltos:

1. Dadas las siguientes expresiones, exprésela como el resultado de una función compuesta.
    a. $(2x+5)^2$
    b. $\frac{\sqrt{5x+2}}{3}$
    c. $a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$

Solución:

a. *Sean* $f(x)=x^2\&g(x)=2x+5$, *entonces:*

$$(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=(2x+5)^2$$

b. *Sean* $f(x)=\frac{1}{3}\sqrt{x}\&g(x)=5x+2$, *entonces:*

$$(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=\frac{1}{3}\sqrt{5x+2}=\frac{\sqrt{5x+2}}{3}$$

c. *La expresión*$a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$ *puede ser escrita como:*$(a+x)^3$

Considerando esto y con $f(x)=x^3\&g(x)=a+x$, *entonces:*

$$(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=(a+x)^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$$

3.2.6 Actividades Propuestas

1. Siendo: $f(x) = x^2 - 3$ & $g(x) = x^4 + x^2$ determine:

    a. $f(x) + g(x+2)$

    b. $[f(x) + g(x)] - [g(2) + f(\sqrt{3}]$

    c. $-f(x) - g(x).\,g(0)$

    d. $g(x) - f(x).\,g(x)$

    e. $g(x)/f(x)$

    f. $(f \circ g)(x)$

    g. $(g \circ f)(x)$

    h. $(f \circ f)(x)$

2. Resuelva el siguiente funcinúmero.

FUNCINÚMERO						
	h			P		g
		b				
e						
			a			
	d					
f			c			

Si lo has hecho bien, la columna **P** muestra los cinco primeros números impares.

Sean las funciones y las variables:

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 + 5x}$$
$$\boldsymbol{g(x) = \sqrt{3x}}$$
$$\boldsymbol{h(x) = 900 \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{a = 20}$$
$$\boldsymbol{b = 5}$$
$$\boldsymbol{c = \sqrt{2}}$$

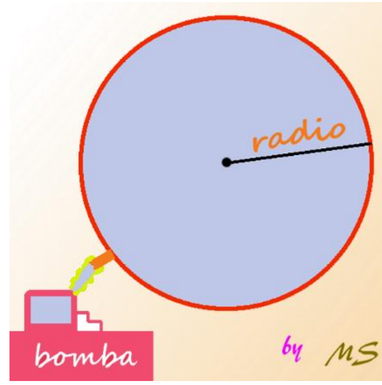
Horizontales

a. $f(a)$
b. $g(3^{13})$
c. $h(7{,}97E5)$
d. $a^2 + b^2 + c^2$
e. $10f(20) - h\left(\frac{7}{3}\right) - 7$
f. $f(1) + g(3) + \frac{h(1)}{100}$

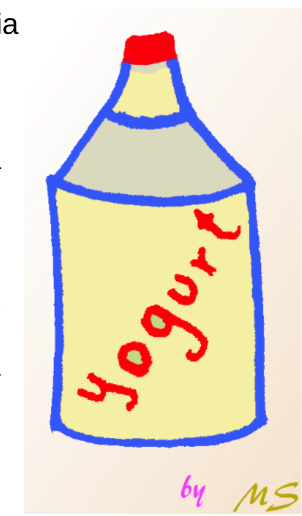
Verticales

g. $g(1633333333) + 2{,}2E - 6$
h. $f(23)$

3. Un recipiente esférico de goma se infla mediante una bomba. La esfera es llenada de helio de tal manera que el radio crece a una razón de$3cm/s$. Exprese el volumen de la esfera como una función de t.



4. La empresa de lácteos LACTOSA, ubicada en la provincia del Cañar, produce yogurt. El número de envases llenos producido por la máquina de envasado es descrito por la siguiente relación matemática: $N = \sqrt{x}$, en donde x es el número de litros de materia prima. Si la máquina empieza a funcionar a las 7 a.m. y se tienen 3 litros de materia prima en su interior y a partir de entonces se le agregan x litros de materia prima:



   a. Exprese el número total de envases llenos producidos a partir de las 7 a.m. como una función compuesta.
   b. Si en cada hora se procesan 500 litros de materia prima ¿Cuántos envases se han producido hasta las 10 a.m.?

3.3 Planificación de la III sesión: Límites de funciones.

TEMA: LÍMITES DE FUNCIONES

Objetivo:

- **Aplicar correctamente el concepto de límite en las operaciones que involucren este concepto matemático.**

Objetivos específicos de la sesión	Desempeños auténticos
• Definir lo que es el límite de una función. • Reconocer y utilizar el concepto de límite en las operaciones que involucren este concepto matemático. • Reconocer y utilizar los teoremas para el cálculo de límites. • Aprendizaje en equipo.	• Define lo que es el límite de una función. • Determina el límite de una función dada, para ello utiliza uno o varios teoremas sobre límites. • Intercambia ideas y opiniones sobre el tema con los compañeros del aula.

¿Qué debe aprender el estudiante?	¿Cómo debe aprender?	¿Cómo se avaluarán los aprendizajes?
• El concepto y las características del límite de una función. • Los distintos métodos y teoremas que existen para calcular límites. • A demostrar formalmente que un límite hallado es el correcto. • Exponer sus ideas de manera clara y precisa.	• Relacionando los conceptos previos acerca de los conceptos de funciones y las operaciones con funciones. • Integrando los conocimientos de su vida cotidiana con los conceptos matemáticos presentados. • Analizando y resolviendo las actividades que se presentan en el texto.	• Define lo que es el límite de una función. • Determina el límite de una función utilizando varios teoremas. • Demuestra que un límite encontrado es válido. • Expone de manera clara y precisa los conceptos tratados en esta sesión.

3.3.1 Recomendaciones para el docente

Para el desarrollo de esta sesión se tomarán en consideración los tres momentos de la Enseñanza –Aprendizaje. A continuación, se detallan las recomendaciones que se hacen para cumplir con esos momentos y lograr el aprendizaje eficiente de los estudiantes.

Al ingresar al aula de clase salude atentamente, de esta manera está tratando de crear empatía con sus estudiantes. Tómese unos 2-4 minutos para conversar con ellos, por ejemplo, sobre algún acontecimiento novedoso suscitado en los últimos días. Con esto, se pretende captar la atención de los estudiantes e iniciarlos en el estudio del tema.

1. Activación de conocimientos previos

- Se recomienda que el docente organice grupos de trabajo de tres personas. A partir de la "Pregunta en contexto" se puede dar un concepto aproximado a límite. A partir del siguiente cuadro de lectura “Anécdota” se pueden presentar las siguientes interrogantes: ¿Es limitado nuestro conocimiento? ¿La falta de lectura es un limitante para adquirir conocimientos? Y se pueden agregar otras interrogantes *(relacionándolas con límites, no importa si no se trata del límite de una función).*
- La lectura y la contestación a las preguntas de esta sección ayudará a que el estudiante entienda de manera intuitiva lo que es el límite de una función. Se recomienda que en este momento se exponga el vídeo de la sesión número tres para darles una idea general de los contenidos de la sesión.

2. Construcción del conocimiento

- Se recomienda que el docente permita el trabajo de los estudiantes en la lectura, el análisis y resolución de las actividades que presenta esta sección.
- El docente pedirá que los estudiantes den ejemplos en donde se puedan utilizar el concepto de límites de funciones.
- De ser posible el docente presentará ejemplos de límites de funciones adaptados a la realidad local o nacional.
- El docente puede solicitar que los estudiantes realicen organizadores gráficos sobre el tema de los límites de funciones con los elementos de conocimiento que han adquirido hasta el momento.

3. Consolidación del conocimiento

- El docente podrá pedir a los estudiantes que a partir del concepto de límite, se deduzcan algunos teoremas que aparecen en la tabla 3.1
- Se recomienda que se revisen los ejercicios modelo presentados y que se realicen las actividades propuestas.

TEMA 3: LÍMITES DE FUNCIONES

3.3.2 Actividades previas

Pregunta en contexto: El límite de velocidad para un vehículo de 6 ejes en la vía rápida Biblian-Azogues es de 40 km/h por estar en reconstrucción. Mi tío es un conductor de uno de estos vehículos y viaja de Azogues a Biblián. Le he pedido que me deje tomar las lecturas del velocímetro, mientras el conduce. Las lecturas tomadas a intervalos de 2 minutos son: 38, 42, 39, 44, 41. Una patrulla de camino estuvo justo detrás de nosotros durante todo este recorrido, sin embargo, nunca nos dijeron algo. ¿Tiene esto sentido?

Anécdota (Tomado del libro Ecuaciones Diferenciales de Isabel Carmona Jover)

Euler creía en Dios. Cierto día, Diderot fue a visitar la corte rusa, invitado por la emperatriz Catalina de Rusia (1773). La conversación con Diderot era liberal, amena y con tendencias ateas. Esta desenvoltura divertía mucho a la emperatriz, pero no tanto a sus ministros, que le pidieron cortara por lo sano la exposición de doctrinas sospechosas. La emperatriz utilizó un ardid: hizo saber a Diderot que un ilustre matemático había conseguido demostrar por álgebra la existencia de Dios y que deseaba presentarle su demostración ante la corte. Diderot aceptó de buen grado. El matemático (que era Euler) anunció solemnemente con gran convicción:

“caballero $\frac{a+b^n}{n} = x$, luego Dios existe; ¡Respondedme!”… Diderot quedo atónito.

3.3.3 Definición intuitiva del límite de una función.

Suponga que usted viaja en su bicicleta desde **A** hasta **B.** Y que la función que describe su posición con respecto al tiempo es $x(\mathrm{t}) = (1{,}5\mathrm{t})m$, en donde t está en segundos.

Figura 3.1

Cuando usted ha pedaleado durante 10 segundos su posición con respecto al punto de partida **A** es 15 m. Al minuto de haber pedaleado usted está a 90 metros de **A** y justo en ese instante usted pasa por delante de una estatua. Observe la figura 3.1.

Pregunta:

Razone y conteste lo siguiente: ¿Qué pasa con su posición cuando el tiempo se acerca a un minuto? ¿…57 segundos, 58 segundos, 59 segundos… 61 segundos 62 segundos, 63 segundos…?

Respuesta:

Cuando el tiempo más se acerca a los 60 segundos usted está más _ _ _ _ _ de la estatua.

Cuando el tiempo tiende a 60 segundos, usted también _ _ _ _ _ _ a estar frente a la estatua

C

Actividades: Dada la función complete la siguiente tabla de valores. $f(x) = -10x^2 + 2$

x	*f(x)*
1,00	
1,10	
1,50	
1,80	
1,90	
1,95	
1,99	
1,999	
1,9999	
1,99999	
2,00001	
2,0001	
2.001	
2,01	
2,05	
2,10	
2,20	
2,50	
2,90	
3,00	

¿A qué valor se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima a 2?

De manera más formal la pregunta sería:

¿A qué valor se aproxima $f(x)$ cuando x tiende a 2?

I. 38

II. -38

III. 42

IV. 16

Conclusión: Se afirma que la respuesta obtenida es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a *2*

Ejemplo conceptual: Encierre en un círculo la respuesta correcta

¿Cuál de las siguientes afirmaciones define de mejor manera lo que es el límite de una función?

a. Es un valor obtenido tras una serie de operaciones matemáticas
b. Es un valor al cual se acerca una función mientras la variable independiente permanece constante
c. Es un punto al cual se aproxima el recorrido de una función cuando el dominio de dicha función tiende a un valor concreto.

Pregunta:

¿Por qué a y b no definen el concepto de límite de una función? *Discuta sus respuestas con sus compañeros del grupo.*

El límite de una función es un punto al cual se aproxima el recorrido de dicha función, cuando su dominio también tiende a un valor concreto. Sin embargo, algo muy importante que hay que resaltar es que el dominio de la función jamás puede llegar a tomar el valor concreto del cual se ha hablado.

Para el ejemplo de la bicicleta, si debiese tomarse el límite de la posición cuando t tiende a 60s, entonces t nunca legaría a tomar el valor de 60, sino más bien valores cercanos o que tiendan a 60: 59s; 59,2s; 59,998s; 59,999s; 60,001s; 60,01s; 60,1s; etc.

3.3.4 Definición formal de límite de una función.

La siguiente definición ha sido extraída del libro El Cálculo de Earl W. Swokowski.

Sea $\boldsymbol{a}$un punto de un intervalo abierto, sea $\boldsymbol{f}$ una función definida en todo intervalo excepto posiblemente en $\boldsymbol{a}$y sea L un número real, entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$\boxed{\text{Si } 0 \leq |x-a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon}$ *Definición 3.1*

La expresión $\lim_{x\to a} f(x) = L$ quiere decir que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que siempre que x esté en el intervalo abierto $(a-\delta, a+\delta)$ y $x \neq a$, entonces $f(x)$ se encuentra localizada en el intervalo abierto $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Refiérase a la figura 3.2 la cual muestra gráficamente lo mencionado.

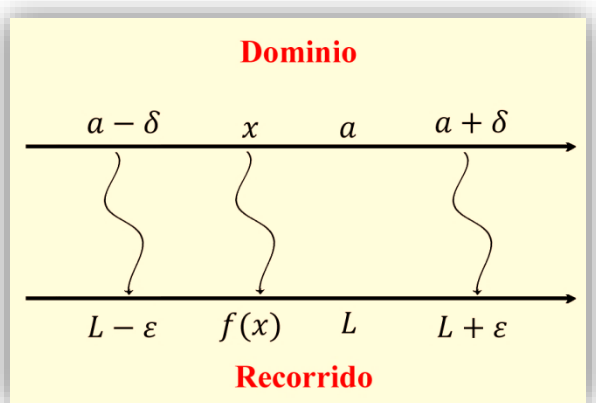
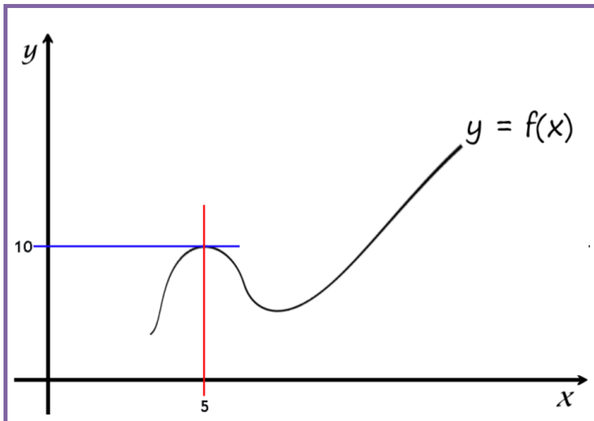


Figura 3.2

En este caso el lector debe tener en consideración que $\boldsymbol{a}$ es el punto al cual tiende la variable independiente $\boldsymbol{x}$ de la función**.** Por otro lado$\boldsymbol{\delta}$ es el incremento o decremento de la variable independiente. Finalmente $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el incremento o decremento de la variable dependiente y está relacionado con $\boldsymbol{\delta}$



Pregunta de exploración:

¿Cuánto vale $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$?

a. *5*

b. *10*

c. *L*

La expresión $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$ *se lee: "*límite de *f(x)* cuando ***x*** tiende a ***a****"*

Actividad:

Lea y escriba los siguientes límites.

$\lim\limits_{x \to 0} [5]$ ____

$\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{\sqrt[x]{3x+2}}{x}\right]$ ____

$\lim\limits_{n \to \infty} \left[\frac{u_{n+1}}{u_n}\right]$ ____

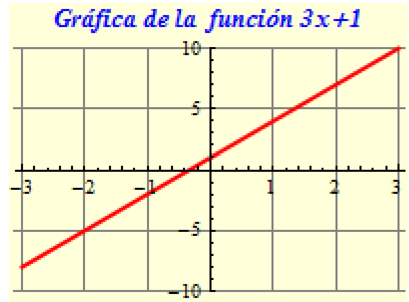
$\lim\limits_{n \to -\infty} \left[\frac{2n}{4n^3-3}\right]$ ____

3.3.5 Métodos para calcular límites.

A continuación, se muestra la tabla 3.1 que contiene los teoremas para determinar el límite de algunos tipos de funciones.

Tabla 3.1	
Teoremas para calcular límites.	
Sea k una constante. El límite de una constante es la misma constante	$\lim_{x \to a} k = k$
El límite de un valor x es igual al valor al cual tiende el límite:	$\lim_{x \to a} x = a$
Si m & b son dos números reales arbitrarios, entonces:	$\lim_{x \to a}(mx + b) = ma + b$
Sin es un entero o racional, positivo o negativo, entonces:	$\lim_{x \to a} x^n = a^n$
	$\lim_{x \to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$
Teoremas de los límites de algunas operaciones	
Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces:	
Límite para la suma de funciones	$\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = L \pm M$
Límite para el producto de funciones	$\lim_{x \to a}[f(x)\,.\ g(x)] = L.M$
Límite para el cociente de funciones	$\lim_{x \to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{L}{M}$
Límite para toda función multiplicada por un número real arbitrario *c*	$\lim_{x \to a}[cf(x)] = cL$

3.3.6 Ejercicios resueltos



1. Determine: $\lim_{x\to 2}[3x+1]$

Solución: De acuerdo a la tabla 3.1

$$\lim_{x\to 2}[3x+1] \ = 3(2)+1 = 6+1 = 7$$

2. Demuestre analíticamente que $\lim_{x\to 2}[3x+1] = 7$

Solución:

De acuerdo a la definición 3.1 para todo $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que:*

Si $0 \leq |x-a| < \delta,$ *entonces* $|f(x) - L| < \varepsilon$

En este caso $a \ = \ 2\,;\ f(x) \ = \ 3x+1\,;\ L \ = \ 7$

Si $0 \leq |x-a| < \delta,$ *entonces* $|f(x) - L| < \varepsilon$

Si $0 \leq |x-2| < \delta,$ *entonces* $|(3x+1) - 7| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow |3x-6| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad 3|x-2| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Lo que implica que $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ *y esto significa que para cualquier* ε *dado, se escoge* $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$ *y con eso se comprueba que* $\lim_{x\to 2}[3x+1] = 7$

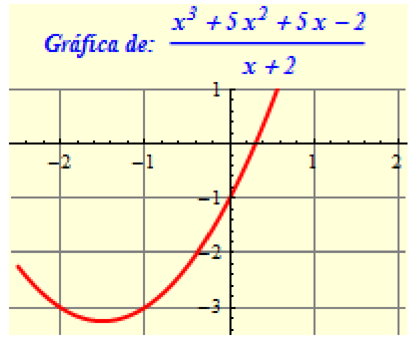
3. Dadas las siguientes funciones hallar el límite si es que es posible.

a. $\lim\limits_{x\to a}[3\mathrm{x}+2]$

b. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}[3\mathrm{x}+2\,]$

c. $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}}\left[\frac{3\mathrm{x}+2}{9x^2-4}\right]$

d. $\lim\limits_{x\to-2}\left[\frac{x^3+5x^2+5x-2}{x+2}\right]$



Solución: de acuerdo a los teoremas de la tabla 3.1 los límites pedidos son:

a. $\lim\limits_{x\to a}[3\mathrm{x}+2]=3a+2$

b. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}[3\mathrm{x}+2]\;=3\left(\frac{1}{3}\right)+2=1+2=3$

c. $\lim\limits_{x\to\frac{-2}{3}}\left[\frac{3\mathrm{x}+2}{9x^2-4}\right]\;=\frac{3\left(\frac{-2}{3}\right)+2}{9\left(\frac{-2}{3}\right)^2-4}=\frac{-4}{0}\;\to indefinido$

En casos como estos lo que hacemos es destruir o levantar la indeterminación utilizando métodos algebraicos. Comúnmente la factorización y simplificación.

$$\frac{3\mathrm{x}+2}{9x^2-4}=\frac{3\mathrm{x}+2}{(3\mathrm{x}+2)(3\mathrm{x}-2)}=\frac{1}{(3\mathrm{x}-2)}$$

$$\lim_{x\to-\frac{2}{3}}\left[\frac{1}{(3\mathrm{x}-2)}\right]=\frac{1}{\left(3\left(-\frac{2}{3}\right)-2\right)}=\;-\frac{1}{4}$$

d. $\lim\limits_{x\to-2}\left[\frac{x^3+5x^2+5x-2}{x+2}\right]=\frac{0}{0}\to indefinido$

$$\frac{x^3+5x^2+5x-2}{x+2}=\frac{(x+2)(x^2+3x-1)}{x+2}=x^2+3x-1$$

$$\lim_{x\to-2}[x^2+3x-1\,]=\;-3$$

3.3.7 Ejercicios propuestos.

1. Con sus propias palabras exprese lo que es el límite de una función.
2. ¿Para qué será útil el límite de una función? Trate de dar varias respuestas.
3. Realice las siguientes operaciones con funciones y determine el límite al resultado obtenido.

Siendo: $f(x) = x^2 - 4 \& g(x) = x^4 + x^2$ determine:

a. $f(x) + g(x+2)$ Para determinar el límite considere $x \to -1$
b. $[f(x) + g(x)] - [g(2) + f(\sqrt{3}]$ Para determinar el límite considere $x \to 0$
c. $-f(x) - g(x).g(0)$ Para determinar el límite considere $x \to 0$
d. $g(x) - f(x).g(x)$ Para determinar el límite considere $x \to a$
e. $g(g \circ g)(x)$ Para determinar el límite considere $x \to 0$
f. $(f \circ f)(x)$ Para determinar el límite considere $x \to 0$

4. Determine $\lim_{x \to 0}[3x + 1]$ y demuestre analíticamente que el resultado obtenido es verdadero
5. Realice un organizador gráfico sobre esta sesión. El título será **"Límites de funciones"**. Al final del organizador incluya el ejemplo de un balón que alcanza su máxima altura. Utilice $9{,}8\, m/s^2$ como el valor de la aceleración debido a la gravedad terrestre y suponga que el balón es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de $5 m/s$
6. Exponga el organizador gráfico a sus compañeros de grupo.

3.4 Planificación de la IV sesión: Derivada a partir del límite de una función.

TEMA: DERIVADA A PARTIR DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Objetivo:

- **Definir lo que es la derivada a partir del concepto de límite de una función.**

Objetivos específicos de la sesión	Desempeños auténticos
• Definir geométrica y analíticamente lo que es la derivada a partir del concepto de límite de una función. • Conocer varios métodos para calcular derivadas. • Aplicar los conocimientos adquiridos a la resolución de problemas. • Aprendizaje en equipo.	• Define geométrica y analíticamente lo que es la derivada de una función a partir de la noción de límite. • Determina la derivada de una función dada, para ello utiliza uno o varios teoremas. • Intercambia ideas y opiniones sobre el tema con los compañeros del grupo.

¿Qué debe aprender el estudiante?	¿Cómo debe aprender?	¿Cómo se avaluarán los aprendizajes?
• El concepto y las características de la derivada de una función. • Los distintos métodos que existen para determinar derivadas. • A utilizar correctamente los conocimientos adquiridos en la resolución de problemas que se le pudieran presentar en la vida diaria. • Exponer sus ideas de manera clara y precisa.	• Relacionando los conceptos previos acerca de límites de funciones con los conceptos que se presentan en esta sesión. • Integrando los conocimientos de su vida cotidiana con los conceptos matemáticos presentados aquí. • Analizando y resolviendo las actividades que se presentan en esta sesión.	• Define de manera clara y precisa lo que representa la derivada de una función. • Determina la derivada de una función utilizando uno o varios métodos. • Expone de manera clara y precisa los conceptos tratados en esta sesión.

3.4.1 Recomendaciones para el docente

Para el desarrollo de esta sesión se tomarán en consideración los tres momentos de la Enseñanza –Aprendizaje. A continuación, se detallan las recomendaciones que se hacen para cumplir con estos momentos y así lograr el aprendizaje eficiente de los estudiantes.

Al ingresar al aula de clase salude atentamente y con mucha amabilidad. Trate de crear empatía con sus estudiantes, especialmente con aquellos que parecen estar “fuera” del aula. Una pregunta sobre cualquier tema de interés para los estudiantes servirá de mucho para iniciar una pequeña y amena conversación. La intención es que en unos 2 - 5 minutos el estudiante se despeje de las preocupaciones que pueda presentar

1. Activación de conocimientos previos

- Se recomienda que el docente organice grupos de trabajo de tres personas. A partir de la "Pregunta en contexto" se está relacionando un lugar conocido para el estudiante con conceptos matemáticos. La resolución del F-Grama servirá para recordar algunos conceptos previos e igualmente servirán para iniciar el estudio de esta sesión. Se recomienda que en este momento se exponga el vídeo de la sesión número cuatro para darles una idea general de los contenidos de la sesión.

2. Construcción del conocimiento

- Se recomienda que el docente permita el trabajo de los estudiantes en la lectura, el análisis y resolución de las actividades que presenta esta sección.
- Para la mejor comprensión de los conceptos se presentan varias gráficas que apoyan visualmente lo expuesto.
- El docente podrá realizar preguntas de exploración a los grupos de trabajo. De esta manera podrá constatar si el aprendizaje se está dando de manera satisfactoria.

3. Consolidación del conocimiento

- Si es posible el docente pedirá a los estudiantes que utilicen una hoja para que ellos mismos interpreten las reglas de la suma y el producto para derivadas a partir de los ejemplos dados en esta sección. La hoja representará la pared y un marcador la brocha. Se recomienda que el docente motive a los estudiantes a hacer cuestionamientos sobre el tema tratado. Se pedirá la intervención de aquellos estudiantes que tengan dudas sobre lo visto en esta sesión y de aquellos que casi nunca participan en clase.
- Se recomienda que se revisen los ejercicios modelo presentados y que se realicen las actividades propuestas.

TEMA 4: LA DERIVADA A PARTIR DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

3.4.2 Actividades previas

Pregunta en contexto: En los años cuarenta Emmanuel Zacchini ejecutaba el acto de la bala humana. Su posición con respecto al suelo estaba descrita por la ecuación: $[-x^2 + 175x]\ pies.$ ¿Cuál es la máxima altura a la que Emmanuel llegaba? Para este caso utilice una calculadora graficadora y dibuje la gráfica de la función, luego observe para que valor aproximado de x se obtiene la altura máxima. En esta sesión aprenderá a utilizar la derivada para hallar máximos de forma exacta.

F-GRAMA

	d				g			
		a						
			f					
	b							
	e							
c								h

Conceptos relacionados al Cálculo Diferencial.

Conceptos generales de Cálculo Diferencial

Horizontales

a. *Letra que sirve para denotar variación.*
b. *Dentro de los límites, número infinitesimal relacionado con L cuyo valor absoluto es siempre* > 0
c. *Relación matemática en donde a cada valor del dominio le corresponde uno y solo un valor del recorrido.*

Verticales

d. $180°$ corresponden a ____ radianes.
e. *Letra con que normalmente se denota a una función.*
f. *En física, constante universal cuyo valor es* $6{,}626E-34\ J.s$ *y se la representa con* h
g. *Uno de los fundadores del Cálculo Diferencial.*
h. *Solido que se obtiene al girar la recta* $y = x$ *sobre el eje* x.

C

3.4.3 Derivada y recta tangente.

Por geometría plana se sabe que la **recta tangente** es aquella recta que interseca a una curva en un solo punto. Sin embargo, dentro del caculo tal definición no se ajusta completamente a una curva cualesquiera. Obsérvese la figura 4.1. La recta es tangente en **T**, pero también corta a la curva en **S**

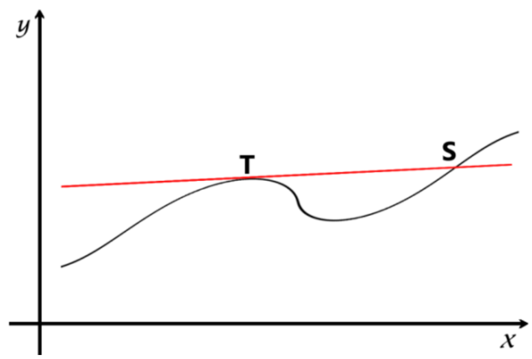


Figura 4.1

Observe la fig.4.2. PQ es una recta secante. ¿Cómo se puede convertir PQ en tangente en P?

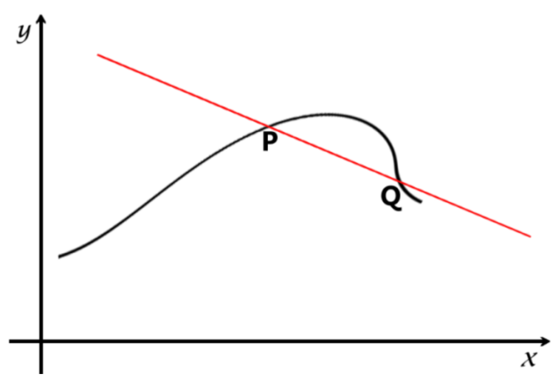


Figura 4.2

Como se puede observar en la figura 4.3 la recta secante **PQ** puede convertirse en una recta tangente en **P** al mantener este punto fijo y variar la posición de **Q** sobre la curva.

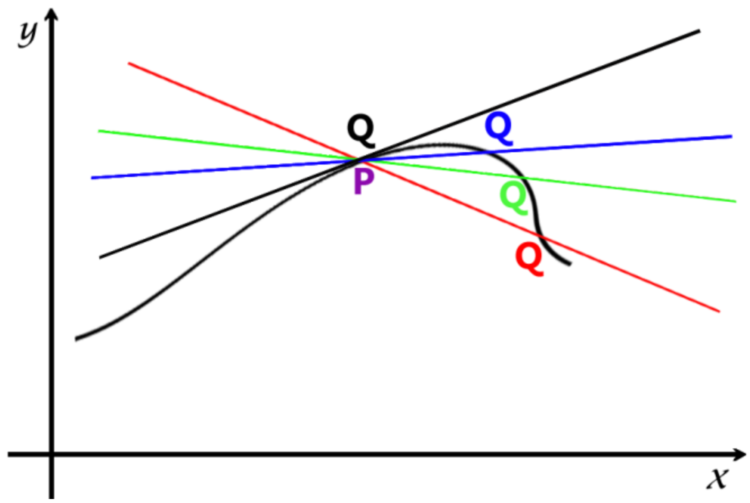


Figura 4.3

Conforme **Q** se aproxima al punto fijo **P** la recta secante **PQ** va tomando la forma de una recta tangente en **P**.

Ahora se va a determinar una expresión para la pendiente de la recta tangente en el punto **P.** Para ello refiérase a la figura 4.4, en donde **P** y **Q** son los puntos en donde la recta secante interseca a la curva.

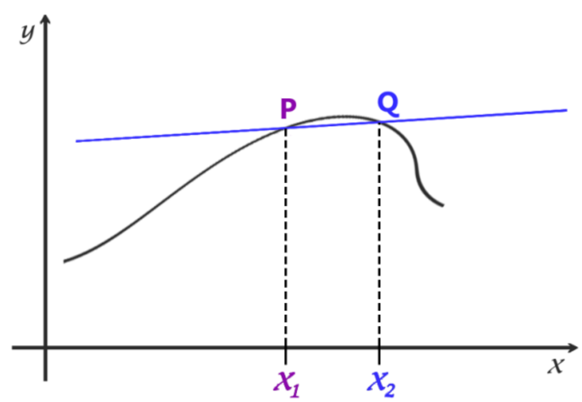


Figura 4.4

Ahora bien, recordando que $\mathbf{P} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1})$ **&** $\mathbf{Q} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})$ la figura 4 puede tomar la forma de la figura 4.5.

Aplicando geometría analítica, se puede demostrar que la pendiente de la recta secante está dada por:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

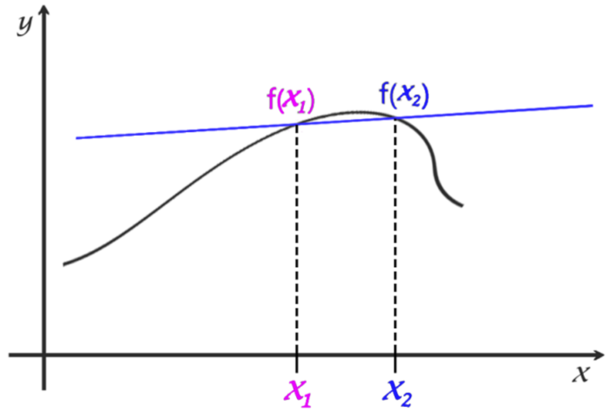


Figura 4.5

3.4.4 La derivada de una función.

Si queremos hallar la pendiente de la recta tangente al punto **P**, como ya se vio anteriormente, se debe tomar **Q** muy cercano a **P**, es decir: $f(x_2)$ muy cercano a $f(x_1)$ lo que implica x_2 muy cercano a x_1. Con ello $\Delta \mathrm{x} = \mathrm{x}_2 - x_1$, tiende a ser cero. Entonces utilizando el concepto del límite, la pendiente $\boldsymbol{m}$ de la recta tangente en un punto P está dado por:

$$\boldsymbol{m} = \lim_{(x_2 - x_1) \to 0} \left[\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right]$$

Es decir:

$$\boldsymbol{m} = \lim_{\Delta \mathrm{x} \to 0} \left[\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta \mathrm{x}} \right]$$

Siempre y cuando el límite exista.

La relación matemática anterior es conocida como la **derivada de una función.**

Ahora bien,$\Delta x = x_2 - x_1$ lo que implica que $x_2 = x_1 + \Delta x$

Entonces la relación anterior puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\boxed{\boldsymbol{m} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \right]}$$ *Definición 4.1*

Ejercicio resuelto:

Determine la derivada de la función:$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$

Solución:

Sea:$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$

Primero encontramos $f(x + \Delta x)$*:*

$f(x + \Delta x) = \frac{1}{2}(x + \Delta x)^2 - 3 = \frac{1}{2}[x^2 + 2x\Delta x - (\Delta x)^2] - 3$

Ahora por la definición tenemos 4.1 tenemos:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$ *Definición 4.1*

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\frac{1}{2}[x^2 + 2x\Delta x - (\Delta x)^2] - 3 - \frac{1}{2}x^2 + 3}{\Delta x} \right]$$ *Reemplazando* $f(x + \Delta x)$& $f(x)$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\frac{1}{2}[x^2 + 2x\Delta x - (\Delta x)^2 - x^2] - 3 + 3}{\Delta x} \right]$$ *Sacando factor común.*

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\frac{1}{2}[2x\Delta x - (\Delta x)^2]}{\Delta x} \right]$$ *Realizando operaciones indicadas.*

$m = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\frac{1}{2}\Delta x[2x-\Delta x]}{\Delta x} \right]$ *Sacando factor común Δx*

$m = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{2}[2x - \Delta x] \right]$ *Simplificando.*

$m = \frac{1}{2}[2x - 0] \ = x$ *Es la expresión buscada.*

La derivada indica variación de algo en espacios infinitesimales. Así, la **velocidad** es la derivada de la posición con respecto al tiempo cuando se toman intervalos de tiempo equivalentes a fracciones de segundo, es decir lo más cercanamente posible a cero.

3.4.5 Reglas para determinar derivadas.

3.4.5.1 La regla de la suma.

Al pintar una pared, la velocidad a la que ésta cambia de color representa la derivada, ya que expresa variación (de color).

.

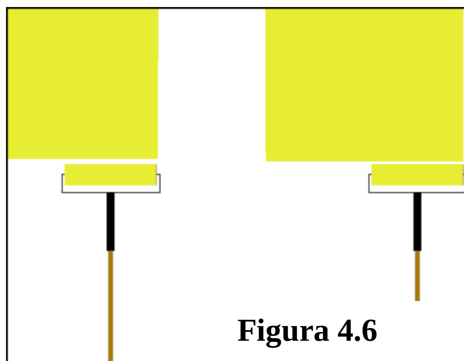


Figura 4.6

Pregunta:

Razone y complete lo siguiente: Si dos personas pintan una pared a velocidades distintas, entonces la variación total de pared pintada será la _ _ _ _ de las variaciones individuales

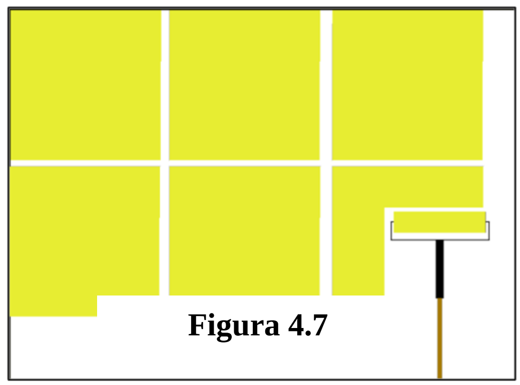
Por lo tanto, la **regla de la suma** de $n$expresiones es igual a la suma de todas las derivadas individuales. Ejemplo:

Dada $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$ encuentre su derivada.

La derivada de$\frac{1}{2}x^2$ *es* x.   *La derivada de* $-3x$*es*-3

Por lo tanto, la derivada buscada es:$\frac{d\left[\frac{1}{2}x^2-3x\right]}{dx} = x - 3$

3.4.5.2 La regla del producto.



Si un obrero puede pintar una pared a razón de $2\ m^2$ por minuto, entonces en 6 minutos el pintará un total de $12m^2$ que es la variación total y representa la derivada. Matemáticamente se escribiría así: La razón de cambio de color es $2\ m^2$porminuto, si se realiza en 6 minutos: $(2m^2)\ .\ 6 = 12m^2$

La **regla del producto** dice que la derivada de un producto es igual a la derivada del primer elemento a multiplicarse por el segundo elemento y a esto se le suma la derivada del segundo elemento por el primer elemento.

Como la pared cambia a una razón de $(\ 2t)m^2$ por minuto. En 6 minutos la razón de cambio será:$[(\ 2t)m^2\ .\ 6]$ aplicando la regla del producto tenemos

$(\ 2t)\ .\ 6 = 2\ .6 + 2t.0 = 12 + 0 = 12m^2$. Que es la misma respuesta del inicio e indica que la regla del producto es válida para todas las expresiones en las cuales se pueda aplicar.

Pregunta:

Razone y encierre en un círculo la letra de la respuesta correcta: Si a la derivada de f la representamos como f' y la derivada de g la representamos como g' entonces, la regla del producto puede ser escrita como:

a. $\frac{d(f.g)}{dx} = f'.g + g'.f$

b. $\frac{d(f.g)}{dx} = f'.g - g'.f$

3.4.5.3 La regla de la potencia.

Si una máquina puede pintar una pared a razón de $2^t cm^2$ en cada minuto, entonces a los 10 minutos habrá pintado $2^{10} = 1024\ cm^2$.

La **regla de la potencia** para derivadas afirma que la derivada de una potencia es igual a multiplicar el exponente por la base y restar una unidad al exponente.

Para nuestro caso, en 10 minutos la máquina habrá pintado $2^{10} cm^2$.

Aplicando la regla de la potencia tenemos: $10.2^{10-1} = 10.2^9 = 1024\ cm^2$

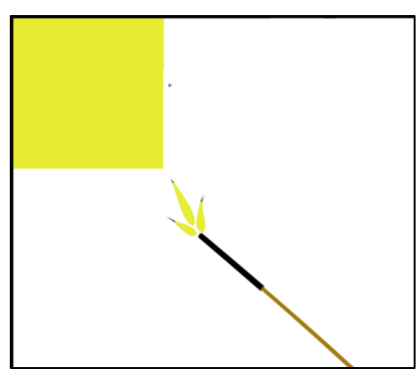


Figura 4.8

Que como se puede observar expresa el mismo resultado que el realizado al inicio, e indica la validez de la regla de la potencia para expresiones en las cuales se pueda aplicar.

Pregunta:

Razone y encierre en un círculo la letra de la respuesta correcta: La regla de la potencia puede ser escrita como:

c. $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^n$

d. $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$

Actividad:

Escriba 3 funciones en las cuales se puedan aplicar la regla de la suma, del producto y del cociente respectivamente.

Realice un cuadro sinóptico que muestre las tres reglas estudiadas.

3.4.6 Teoremas para determinar derivadas.

Existen varios teoremas que simplifican el trabajo de la derivación. A continuación, se muestra una tabla a modo de formulario que contiene varios teoremas que ayudarán al lector en la determinación de derivadas de manera más rápida.

Tabla 4.1
Teoremas de la derivación

k es una constante ***u* , v son** funciones de ***x***	$\frac{d}{dx}[x]=1$	$\frac{d}{dx}[\tan u]=\sec^2 u\,u'$	$\frac{d}{dx}[\csc^{-1} u]=\frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}}u'$	$\frac{d}{dx}[\sinh^{-1} u]=\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}u'$
$\frac{d}{dx}[k]=0$	$\frac{d}{dx}[\lvert u\rvert]=\frac{u}{\lvert u\rvert}u'\ ,\ (u \neq 0)$	$\frac{d}{dx}[\cot u]=-\csc^2 u\,u'$	$\frac{d}{dx}[\sec^{-1} u]=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{u^2}}\,u^2}u'$	$\frac{d}{dx}[\mathrm{csch}^{-1} u]=\frac{\mp 1}{\sqrt{u^2-1}}u'$
$\frac{d}{dx}[ku]=ku'$	$\frac{d}{dx}[\ln u]=\frac{u'}{u}$	$\frac{d}{dx}[\sec u]=\sec u\tan u\,u'$	$\frac{d}{dx}[\sinh u]=\cosh\ u\,u'$	$\frac{d}{dx}[\tanh^{-1} u]=\frac{1}{1-u^2}u'$
$\frac{d}{dx}[u+v]=u'+v'$	$\frac{d}{dx}[e^u]=\ e^u u'$	$\frac{d}{dx}[\csc u]=-\csc u\cot u\,u'$	$\frac{d}{dx}[\cosh u]=\sinh u\,u'$	***NOTACIÓN PARA DERIVADAS MAYORES***
$\frac{d}{dx}[uv]=uv'+vu'$	$\frac{d}{dx}[a^u]=a^u ln a\,u'$	$\frac{d}{dx}[\sin^{-1} u]=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$	$\frac{d}{dx}[\tanh u]=\mathrm{sech}^2 u\,u'$	
$\frac{d}{dx}[u]=1\Big/\frac{d}{du}[x]$	$\frac{d}{dx}[u^k]=\frac{d}{dx}[e^{k\,ln\,u}]$	$\frac{d}{dx}[\cos^{-1} u]=\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}u'$	$\frac{d}{dx}[\coth u]=-\mathrm{csch}^2 u\,u'$	$\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]=\frac{d^2y}{dx^2}=y''$
$\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right]=\frac{vu'-uv'}{v^2}$	$\frac{d}{dx}[\sin u]=\cos u\,u'$	$\frac{d}{dx}[\tan^{-1} u]=\frac{1}{1+u^2}u'$	$\frac{d}{dx}[\mathrm{sech}\,u]=-\mathrm{sech}\,u\tanh u\,u'$	$\frac{d}{dx}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]=\frac{d^3y}{dx^3}=y'''$
$\frac{d}{dx}[u^n]=nu^{n-1}u'$	$\frac{d}{dx}[\cos u]=-\sin u\,u'$	$\frac{d}{dx}[\cot^{-1} u]=\frac{-1}{1+u^2}u'$	$\frac{d}{dx}[\mathrm{csch}\,u]=-\mathrm{csch}\,u\coth u\,u'$	$\frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right]=\frac{d^ny}{dx^n}=y^n$

3.4.7 Ejemplos demostrativos:

1. Si $f(x) = x^n$; usando la definición de límite demuestre que $f'(x) = nx^{n-1}$

La definición de derivada a partir del límite es:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

La cual, para nuestro caso toma la forma:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \right]$$

Desarrollando $(x + \Delta x)^n$ *mediante el teorema del binomio tenemos:*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{x^n + C(n,1)x^{n-1}\Delta x + C(n,2)x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ C(n,3)x^{n-3}(\Delta x)^3 + \ldots - x^n}{\Delta x} \right]$$

De donde:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{nx^{n-1}\Delta x + n(n-1)x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ n(n-1)(n-2)x^{n-3}(\Delta x)^3 + \ldots}{\Delta x} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta x[nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2}\Delta x + \ n(n-1)(n-2)x^{n-3}(\Delta x)^2 + \ldots]}{\Delta x} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} [nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2}\Delta x + \ n(n-1)(n-2)x^{n-3}(\Delta x)^2 + \ldots]$$

$$f'(x) = nx^{n-1} + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

Finalmente llegamos a la demostración solicitada: $f'(x) = nx^{n-1}$

2. Para el ejercicio de la "Pregunta en contexto" determine la altura máxima a la que llegaba Emmanuel utilizando el concepto de la derivada.

Solución:

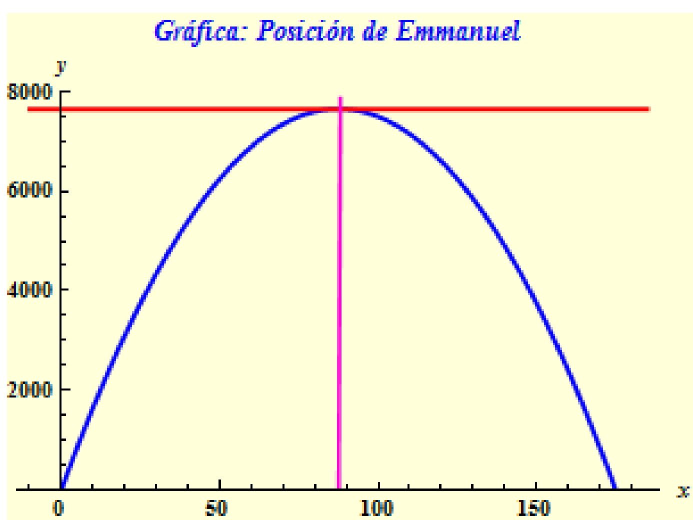
Se sabe que la derivada de una función representa a la expresión de la recta tangente a un punto cualquiera de la función. Si la pendiente de la recta tangente es cero, eso quiere decir que la curva de la función derivada presenta un máximo o un mínimo. Dicho lo anterior, la altura y de Emmanuel es:

$y = -x^2 + 175x$	*Altura alcanzada por la "Bala humana"*
$y' = -2\mathrm{x} + 175$	*Derivada de la función altura*
$0 = -2\mathrm{x} + 175$	*Se iguala a cero a la expresión de la derivada para obtener el punto x para el cual la altura es máxima*
$x = 87{,}5$	*Resolviendo hallamos el valor de x*

Ahora para saber la altura máxima reemplazamos el valor de x obtenido en la ecuación que describe la posición de Emmanuel.

$$y = -87{,}5^2 + 175(87{,}5) = 7656{,}25\ pies$$

Observe la gráfica adjunta, con azul se ha trazado la posición, mientras que con rojo se ha trazado la recta tangente en el punto más alto para el cual su pendiente es cero. La línea violeta representa el valor hallado para x, en este caso 87,5



3.4.8 Ejercicios propuestos:

Conteste:

1. Geométricamente hablando ¿Qué representa le derivada de una función?
2. ¿Cuál es la relación matemática que define la derivada de una función?
3. Encuentre la derivada de las siguientes funciones:
    a. Utilizando la definición 4.1
    b. Utilizando los teoremas de la tabla 4.1
        i. $f(x) = 3x + 5x^3$
        ii. $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{2}x^3$
        iii. $f(x) = (3x).(5x^3)$
        iv. $f(x) = (3x + 5x^3)/(2x + 1)$
4. Subraye la respuesta correcta:
    a. Al derivar $f(x) = x^2 + 2\mathrm{x} + 3$ con respecto a x se obtiene:
        i. $f'(x) = x^2 + 2\mathrm{x}$
        ii. $f'(x) = 2x^2 + 2\mathrm{x}$
        iii. $f'(x) = 2x + 2 + 1$
        iv. $f'(x) = 2x + 2$
    b. Al derivar $f(t) = 3x^3\mathrm{t} + 2\mathrm{x} + 3\mathrm{t}$ con respecto a t se obtiene:
        i. $f'(t) = 9x^2 + 3$
        ii. $f'(t) = 9x^2\mathrm{t} + 2$
        iii. $f'(t) = 3x^3 + 3$
        iv. $f'(t) = 2$

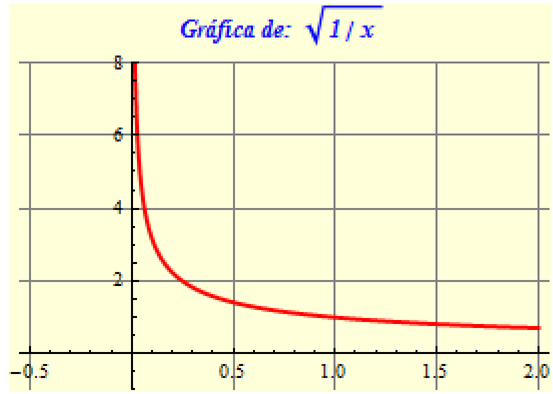
c. Al derivar: $\sqrt{1/x}$ dos veces la expresión resultante es:

i. $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^{3/2}$

ii. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^{3/2}$

iii. $-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{5/2}$

iv. $\frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{5/2}$



d. Al derivar $f(x) = sin\, x\, .\, cos\, x$tres veces la expresión resultante es:

i. $f'''(x) = -3sin^2\, x\, .\, 3cos^2\, x$

ii. $f'''(x) = -sin^3\, x\, .\, cos^3\, x$

iii. $f'''(x) = -4\, sin^2\, x + 4\, cos^2\, x$

iv. $f'''(x) = 4\, sin^2\, x - 4\, cos^2\, x$

e. La relación $s(t) = Asin(\omega t + \varepsilon)$ muestra la posición de un objeto que se mueve con movimiento armónico simple, con respecto al tiempo t. La expresión que describe la velocidad es $s'(t) = A\omega\, cos(\omega t + \varepsilon)$.

i. Si

ii. No

5. Realice un organizador gráfico sobre el tema úselo como material de apoyo en el avance de la materia.

6. A partir de los conocimientos adquiridos en esta sesión, diseñe un material didáctico concreto que ayude a explicar de mejor manera la sesión. Suponga que usted es el docente de la materia de Cálculo Diferencial. Luego comparta el material e intercambien ideas con los compañeros del curso y el docente.

3.5 Planificación de la V sesión: Derivada y movimiento rectilíneo

TEMA: DERIVADA Y MOVIMIENTO RECTILÍNEO

Objetivo:

- **Analizar el movimiento rectilíneo y su relación con la derivada.**

Objetivos específicos de la sesión	Desempeños auténticos
• Definir lo que es el movimiento rectilíneo y los parámetros involucrados en este concepto. • Determinar la relación que tienen los parámetros del movimiento rectilíneo con la derivada. • Reconocer y utilizar los procesos y algoritmos que se utilizan en la solución de problemas que implican movimiento rectilíneo. • Trabajo en equipo.	• Define lo que es el movimiento rectilíneo y la relación que presenta con la derivada de una función. • Determina e interpreta los distintos conceptos involucrados en el movimiento rectilíneo. • Intercambia ideas y opiniones sobre el tema con los compañeros del grupo, de la clase y con el docente que imparte la materia.

¿Qué debe aprender el estudiante?	¿Cómo debe aprender?	¿Cómo se avaluarán los aprendizajes?
• El concepto y las características del movimiento rectilíneo. • Los distintos parámetros involucrados en el movimiento rectilíneo. • A construir y analizar las gráficas del movimiento rectilíneo. • A utilizar correctamente los conocimientos adquiridos en la resolución de problemas que se le pudieran presentar en la vida diaria. • Exponer sus ideas de manera clara y precisa.	• Relacionando los conocimientos previos acerca de la derivada de una función con los conceptos presentados en esta sesión. • Integrando los conocimientos de su vida cotidiana con los conceptos matemáticos presentados en esta sesión. • Analizando y resolviendo las preguntas y actividades que se presentan en esta sesión.	• Define de manera clara y precisa lo que es el movimiento rectilíneo. • Determinala velocidad y aceleración de una partícula, dada su posición. • Analiza e interpreta las gráficas del movimiento rectilíneo. • Integra la teoría con la práctica modelando problemas que tengan que ver con movimiento rectilíneo. • Expone de manera clara y precisa los conceptos tratados en esta sesión.

3.5.1 Recomendaciones para el docente

Para el desarrollo de esta sesión se tomarán en consideración los tres momentos de la Enseñanza –Aprendizaje. A continuación, se detallan las recomendaciones que se hacen para cumplir con esos momentos y lograr el aprendizaje eficiente de los estudiantes en el tema.

Al ingresar al aula de clase salude atentamente y con mucha amabilidad, esta es una buena manera de intentar que los estudiantes dirijan su atención hacia usted. Trate de crear conexión con los estudiantes que parecen estar “fuera” del aula. Una pregunta relacionada con la Fórmula 1 podría ser muy oportuna para este caso. La intención es que en unos 3-6 minutos el estudiante se despeje de las preocupaciones que pueda presentar.

1. Activación de conocimientos previos

- Se recomienda que el docente organice grupos de trabajo de dos personas. La resolución del problema que aparece en la primera página de esta sesión servirá para recordar algunos conceptos previos relacionados con velocidades y servirán de motivación para iniciar el estudio de esta sesión. Se recomienda que en este momento se exponga el vídeo de la sesión número cinco para darles una idea general de los contenidos de la sesión.

2. Construcción del conocimiento

- Se recomienda que el docente permita el trabajo de los estudiantes en la lectura, el análisis y resolución de las actividades que presenta esta sección.
- Se recomienda que el docente ayude a aclarar algunas ideas que puedan parecer confusas para algunos estudiantes, especialmente con relación a las gráficas de ls parámetros cinemáticos.
- El docente podría llevar al aula de clase una pelotita, o un carrito de juguete, con los cuales explicará los conceptos relacionados con el movimiento rectilíneo.
- El docente podrá realizar preguntas de exploración a los grupos de trabajo. De esta manera podrá constatar si el aprendizaje se está dando de manera satisfactoria.

3. Consolidación del conocimiento

- El docente motivará a los estudiantes a hacer cuestionamientos sobre el tema tratado. Se pedirá especialmente la intervención de aquellos estudiantes que tengan dudas sobre lo visto en esta sesión y a aquellos que parecían estar todo el tiempo atentos en clase.
- Se recomienda que se revisen los ejercicios modelo presentados y que se realicen las actividades propuestas.

TEMA 5: DERIVADA Y MOVIMIENTO RECTILÍNEO

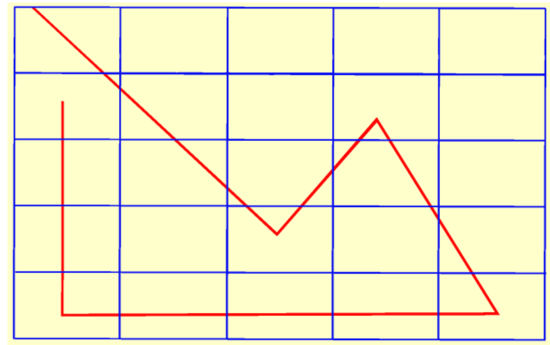
3.5.2 Actividades previas

Pregunta en contexto: Usain Bolt & Yohan Blake son los dos atletas más rápidos del mundo contemporáneo y cuyas velocidades son $10{,}438\, m/s$ & $10{,}320\, m/s$, respectivamente. Con fines experimentales se colocan a ambos atletas frente a frente en los extremos de una pista cuya longitud es de $100m$. Al sonar el pito los atletas corren a sus máximas velocidades y en ese mismo instante un rayo de luz es enviado desde el primer atleta hacia un espejo que tiene el segundo. El rayo rebota y regresa hasta topar con un espejo que tiene el primer atleta y nuevamente rebota hacia el espejo del segundo atleta y así sucesivamente. ¿Cuál es el espacio total que recorre el haz de luz hasta que los atletas se crucen? ¿Cuánto recorrió cada atleta?

¿Qué tan buena memoria tiene usted? ¿Alguna vez ha intentado acordarse de algo y no ha podido hacerlo? Pues según George Miller, la información se almacena en el cerebro en unidades llamada chunks que son como celdas en donde se escriben los datos que memorizamos. Si no podemos recordar algo es porque no almacenamos correctamente esa información.

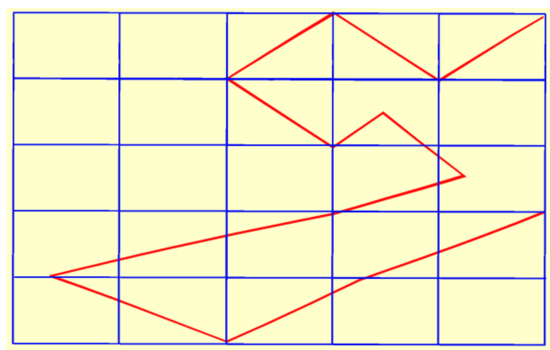
A continuación, le propongo algunos ejercicios de tipo “retención visual y simbólica con tareas distractoras” que consisten en la reproducción de símbolos o figuras presentadas en un plano, a partir de ello responda: ¿Qué tan buena memoria tiene usted?

Instrucción: Fíjese bien en los detalles de la figura de la derecha por dos minutos, tape el dibujo y resuelva el ejercicio que está debajo de la figura antes de reproducirla.



Ejercicio: En 45 segundos escriba 10 nombres de animales que vivan en un medio acuático. Una vez realizada esta tarea trace una tabla de 5 columnas y de 5 filas y proceda a la reproducción del dibujo que memorizó anteriormente, para ello dispone de 1 minuto.

Instrucción: Fíjese bien en los detalles de la figura de la derecha por dos minutos, tape el dibujo y resuelva el ejercicio que está debajo de la figura antes de reproducirla.



Ejercicio: En 45 segundos escriba las letras del abecedario empezando por la Z y llegando de manera inversa hasta la A. Una vez realizada esta tarea trace una tabla de 5 columnas y de 5 filas y proceda a la reproducción del dibujo que memorizó anteriormente, para ello dispone de 1 minuto.

Los ejercicios de esta página han sido extraídos del libro Tests Psicotécnicos.

3.5.3 Cinemática rectilínea.

Es la que permite determinar en cada instante la posición, velocidad y aceleración de un cuerpo en movimiento sobre una recta. Para el análisis del movimiento rectilíneo se considera un eje coordenado, en donde un punto fijo O será su origen.

3.5.3.1 La posición

De un cuerpo P con respecto al punto **O** es la ubicación del cuerpo dentro del eje coordenado en cualquier instante. La denotaremos con la letra **s.** Observe la figura 5.1

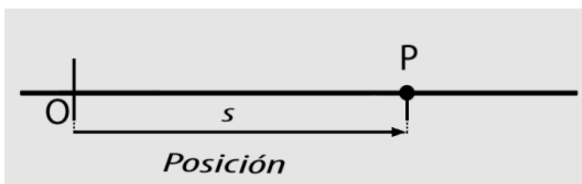


Figura 5.1

La **posición s** es un vector, por lo tanto, debe poseer un signo algebraico, la elección de los signos para la posición del cuerpo es arbitrario, a conveniencia del lector. Sin embargo, en esta sesión se utilizará el siguiente convenio: si el cuerpo está a la derecha de **O** entonces **s** será positivo, si el cuerpo está a la izquierda de **O** entonces **s** tendrá signo negativo. Observe la figura 5.2

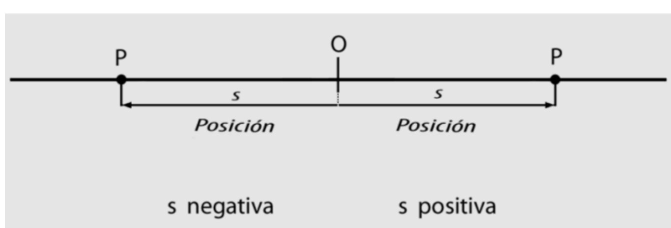


Figura 5.2

3.5.3.2 El desplazamiento

De una partícula no es otra cosa que el cambio de su posición. Para denotar variación o cambio se utiliza la letra griega Δ "delta". Por lo que la variación de la posición se denotará como: $\Delta s = s_2 - s_1$

Ejemplo: si una partícula está inicialmente en $\boldsymbol{s_1 = 3m}$ luego se mueve a $\boldsymbol{s_2 = 7m}$; entonces su **desplazamiento** es

$$\boldsymbol{\Delta s = s_2 - s_1 \rightarrow \quad \Delta s = 7 - 3 = 4m}$$

3.5.3.3 Velocidad promedio.

Si una partícula recorre una cantidad $\boldsymbol{\Delta s}$ con respecto un intervalo de tiempo $\boldsymbol{\Delta t}$, la velocidad promedio de la partícula está dada por:

$$v_{prom} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Ejemplo: si una partícula está inicialmente en $\boldsymbol{s_1 = 3m}$ luego se mueve a $\boldsymbol{s_2 = 7m}$ en un tiempo de 2 segundos, entonces su **velocidad promedio** es:

$$v_{prom} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow \quad v_{prom} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathbf{s_2 - s_1}}{\mathbf{t_2 - t_1}} \rightarrow \quad v_{prom} = \frac{\mathbf{7-3}}{\mathbf{2-0}} = \frac{4}{2} = 2\, {}^{m}/_{s}$$

Ahora bien, suponga que usted viaja desde la ciudad de azogues **A** hasta la ciudad de Cuenca **C** cuya distancia es $37\ Km$ y un bus de transporte público hace el recorrido en 45 minutos aproximadamente. Entonces la velocidad promedio con la que viajó el bus es de:

$$45\,\mathrm{min} = 45\,\mathrm{min}\,.\frac{1\,hora}{60\,min} = 0.75\,hora$$

$$v = \frac{s}{t}$$

$$v = \frac{37\,Km}{0.75\,h} = 49.333\,{}^{Km}/_{h}$$

Sin embargo, lo anterior no quiere decir que durante todo el trayecto el bus haya estado viajando con esa velocidad. Hay que tomar en consideración las veces que se detiene en el trayecto ya sea para recoger o dejar pasajeros, las veces que tiene que acelerar para rebasar a otro vehículo, las paradas en los semáforos, etc. Es decir, la velocidad promedio nada dice acerca de la velocidad instantánea.

3.5.3.4 Velocidad instantánea.

La velocidad instantánea es medida por el velocímetro. Si Ud. viaja por la autopista Azogues-Cuenca, y quiere averiguar la velocidad instantánea del vehículo al atravesar el puente del Descanso **D** entonces mientras menores sean los intervalos de tiempo tomados sobre el puente, más precisa será la lectura de la velocidad instantánea.

Como el desplazamiento **s** depende del tiempo **t** supongamos que uno de estos buses de transporte público se desplaza **s** metros de acuerdo a $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$

Como $\boldsymbol{v_{prom}} = \frac{\boldsymbol{\Delta s}}{\boldsymbol{\Delta t}} = \frac{\boldsymbol{f(t_2) - f(t_1)}}{\boldsymbol{t_2 - t_1}}$

Si tomamos los valores de Δt cada vez más pequeños, entonces logramos obtener la **velocidad instantánea** $\boldsymbol{v}$ que es el límite de la velocidad promedio cuando el intervalo de tiempo tiende a cero y es la que indica el velocímetro de un automóvil, es decir:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

O, dicho de otra manera;

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Al observar la ecuación anterior se puede decir que la velocidad es la derivada de la posición de una partícula con respecto al tiempo.

3.5.3.5 La aceleración.

Así también la razón de cambio o tasa de variación de la velocidad con respecto al tiempo nos da la aceleración $\boldsymbol{a}$ de la partícula.

Es decir: $a = \frac{dv}{dt}$

Pero como $v = \frac{ds}{dt}$

Reemplazando v tenemos: $a = \frac{dv}{dt} \rightarrow a = \frac{d(\frac{ds}{dt})}{dt} \rightarrow \frac{d^2 s}{dt^2}$

En conclusión, la aceleración de una partícula es igual a la derivada de la velocidad con respecto al tiempo o lo que es lo mismo la segunda derivada de la posición con respecto al tiempo.

La figura 5.3 muestra la velocidad promedio cuando Δt es muy grande. Fíjese que mientras se toma Δt más pequeño, la lectura de la velocidad promedio se hace más pequeña y a eso se le conoce como velocidad instantánea.

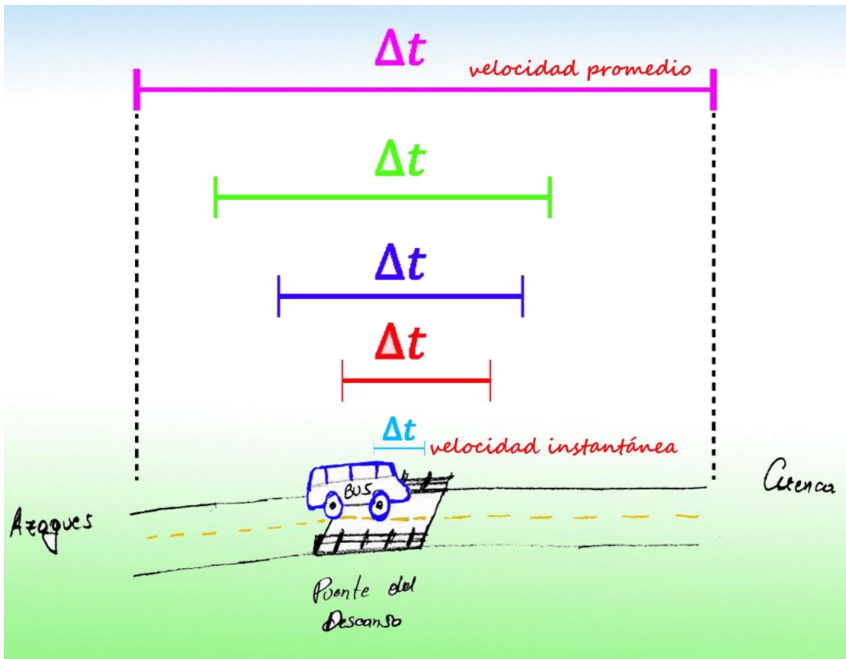


Figura 5.3

Actividad:

Suponga que, a uno de los vehículos de transporte público por razones de seguridad, la policía lo detiene justo al inicio del puente. Después de revisarle los papeles al chofer, le dejan seguir su marcha. A partir de ese momento el vehículo atraviesa el puente de acuerdo al siguiente modelo matemático: $s(t) = -t^2 + 12t$

a. Dibuje la gráfica $s - t$

b. ¿Cuál es la velocidad instantánea del vehículo 2 segundos después de que emprendió nuevamente el recorrido?

c. Los pasajeros empiezan a protestar. Escriba algunas posibles razones por las cuales podría haber ocurrido esto.

Puente a la altura de El Descanso

by MS

3.5.4 Gráficas del movimiento.

Para el estudio completo de la cinemática rectilínea es necesario hacer el análisis de las distintas gráficas que nos ofrecen la posición, la velocidad y la aceleración de una partícula.

En el análisis de las gráficas vamos a considerar tanto el MRU como el MRUV. Para el efecto se elegirán dos funciones arbitrarias. La función que describirá la posición de una partícula en el MRU será: $s(t) = 5t + 1$, así también la función que describirá el desplazamiento en el MRUV será: $s(t) = 3t^2 + 2$

Luego, a partir de estas funciones, encontramos la velocidad y la aceleración de la partícula. A continuación, se muestra la tabla 5.1 con las respectivas magnitudes encontradas.

Tabla 5.1 Magnitudes de la cinemática rectilínea

MAGNITUD		**MRU**	**MRUV**
Posición	s	$5t + 1$	$3t^2 + 2$
Velocidad	$\frac{ds}{dt}$	5	$6t$
aceleración	$\frac{dv}{dt}$	0	6

3.5.4.1 Grafica posición vs tiempo $(s - t)$

La gráfica de la posición de una partícula es una curva descrita por alguna función matemática. La pendiente de la curva indica la velocidad lineal a la que se mueve el objeto.

3.5.4.2 Grafica velocidad vs tiempo $(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{t})$

La grafica de la velocidad es la curva que representa el modelo de la recta tangente a la gráfica de la posición. El área entre el eje horizontal y la curva es el desplazamiento lineal que sufre la partícula.

3.5.4.3 Grafica aceleración vs tiempo $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{t})$

La grafica de la aceleración es la curva que representa el modelo de la recta tangente a la gráfica de la velocidad e indica la aceleración que experimenta el móvil.

Actividad:

A partir de la tabla 6.1 en los cuadros de la siguiente página, dibuje las gráficas $(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{t})$**,** $(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{t})$ **y** $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{t})$**,** luego escriba $(s-t)$, $(v-t)$ o $(a-t)$, en los espacios es blanco, las cuales describen las características de las gráficas de las funciones posición, velocidad y aceleración lineales.

En qué casos se obtienen gráficas de funciones constantes. ¿Tienen sentido?

Nota: considere como origen del plano coordenado el borde inferior izquierdo de las cuadrículas presentadas.

MRU	MRUV
Gráfica posición vs tiempo $(s - t)$	**Gráfica posición vs tiempo** $(s - t)$
Gráfica velocidad vs tiempo $(v - t)$	**Gráfica velocidad vs tiempo** $(v - t)$
Gráfica aceleración vs tiempo $(a - t)$	**Gráfica aceleración vs tiempo** $(a - t)$

Características de la grafica ________	
MRU	**MRUV**
La grafica es una recta paralela al eje horizontal. El área comprendida entre el eje horizontal y la recta representa el desplazamiento lineal que sufre la partícula.	La grafica es una recta que nos es paralela a ninguno de los ejes y cuyo corte con el eje vertical indica la velocidad inicial de la partícula. El área comprendida entre el eje horizontal y la recta representa el desplazamiento lineal que sufre la partícula.

Características de la grafica ________	
MRU	**MRUV**
La grafica es una recta que coincide con el eje horizontal. Es decir, la aceleración es cero.	La grafica es una recta paralela al eje horizontal. Indica la magnitud de la aceleración que sufre la partícula. Si está sobre el eje horizontal la partícula está acelerando, si está por debajo existe desaceleración.

Características de la grafica ________	
MRU	**MRUV**
La grafica es una recta que nos es paralela a ninguno de los ejes y cuyo corte con el eje vertical indica la posición inicial de la partícula	La grafica es una parábola y cuyo corte con el eje vertical indica la posición inicial de la partícula.

Actividad:

Al menos una vez usted debió haber visto o intentado derribar a los cerdos en el juego llamado Angry-Birds. Pues bien, la trayectoria de una de las aves, luego de su lanzamiento es la mostrada en la figura 5.4 *(línea roja)*; a partir de ello:

a. Determine la ecuación que describe la posición horizontal del ave en cada instante.
b. ¿Cuál es el modelo matemático que describe la posición vertical del ave?
c. ¿Cuál es la velocidad vertical del ave a los 10,402 segundos?
d. ¿Cuál es la distancia entre el lugar de lanzamiento del ave y el punto en donde cae?

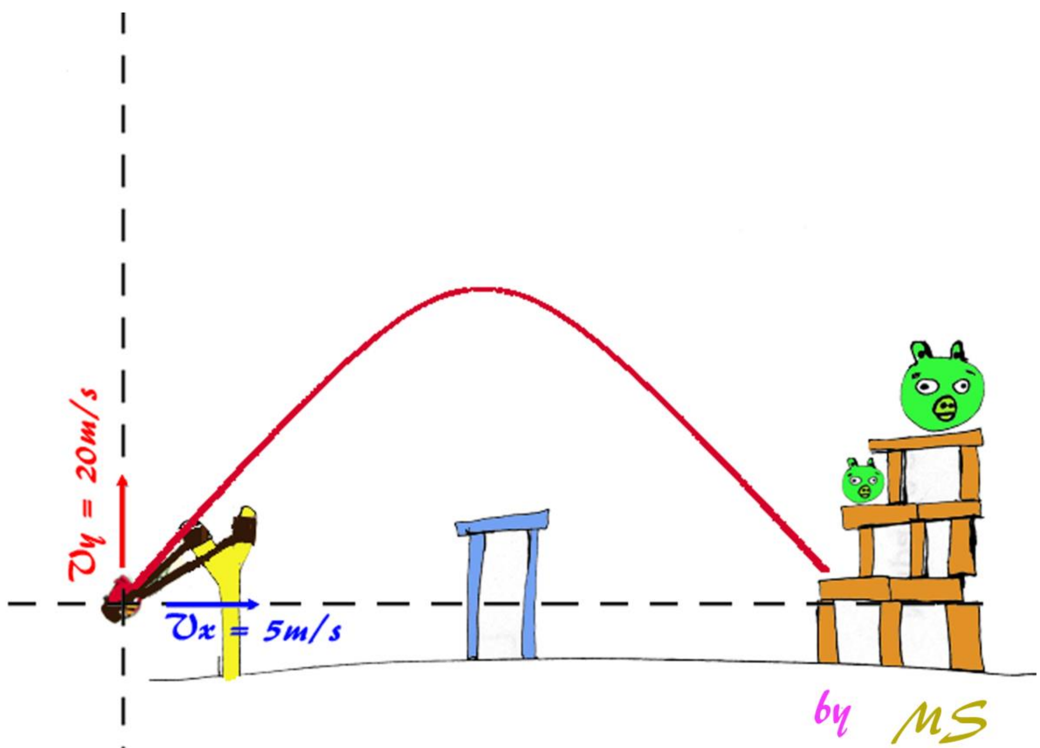


Figura 5.4

3.5.5 Ejercicios resueltos:

1. La posición s de una partícula con respecto al tiempo está dada por la siguiente relación: $s(t) = 120t^2 + 12t$. a) ¿Cuál es el modelo matemático que describe la velocidad de la partícula? b) ¿Cuál es la velocidad de la partícula a los 5 segundos?

Solución.

a) *Ya que la velocidad es la derivada de la posición con respecto al tiempo, para nuestro caso tenemos:*

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(120t^2 + 12t)}{dt} = 240t + 12$$

De modo que $240t + 12$ *es el modelo matemático que describe la velocidad de la partícula en cualquier instante* t

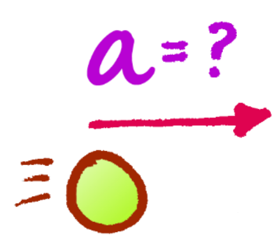
b) *La velocidad de la partícula a los 5 segundos es:*

$$v(t) = 240t + 12$$

$$v(5) = 240(5) = 1212\,{}^{m}/_{s}$$

2. Un móvil se desplaza 5 m cada 2 segundos. ¿Cuál es la aceleración del móvil?

Solución:



La velocidad del móvil es: $v_{prom} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{5}{2}m/s$

La aceleración del móvil es: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\frac{5}{2})}{dt} = 0\;m/s^2$

Concluimos, por lo tanto, que el móvil se mueve con MRU.

3. La velocidad con que se desplaza un objeto es igual al doble del tiempo transcurrido para el intervalo $0 \leq t$. Determine su velocidad y la aceleración cuando $t = 10s$

Solución

La velocidad del objeto es: $v = 2t$

La aceleración del objeto es: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(2t)}{dt} = 2$

La velocidad y la aceleración del objeto a los 10 segundos es:

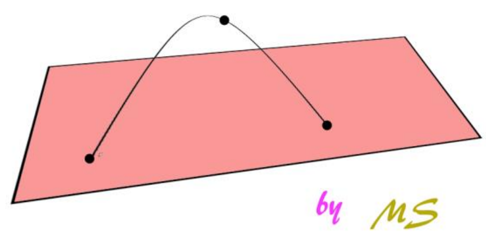
$$v(10) = 2(10) = 20\, m/s$$

$$a(10) = 2\, m/s^2$$

3.5.6 Ejercicios propuestos

Conteste de forma individual:

a. La aceleración terrestre debido a la gravedad es $9{,}8\, m/s^2$. ¿Cuál de los siguientes modelos matemáticos describen la posición de una pelota lanzada desde el piso?



I. $[9{,}8\, t^2]m$

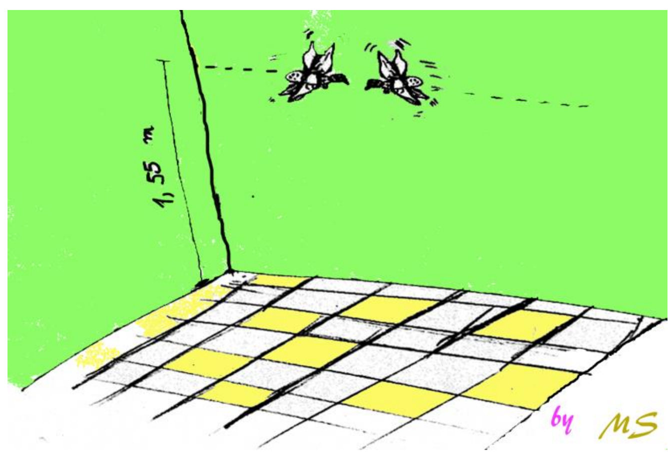
II. $[4{,}9t^2 + 3{,}2t]m$

III. $[-4{,}9\, t^2 + 19{,}6t]m$

IV. Ninguna de las anteriores, más bien una solución posible es ________________

Resuelva de forma individual y luego compare con su compañero de grupo.

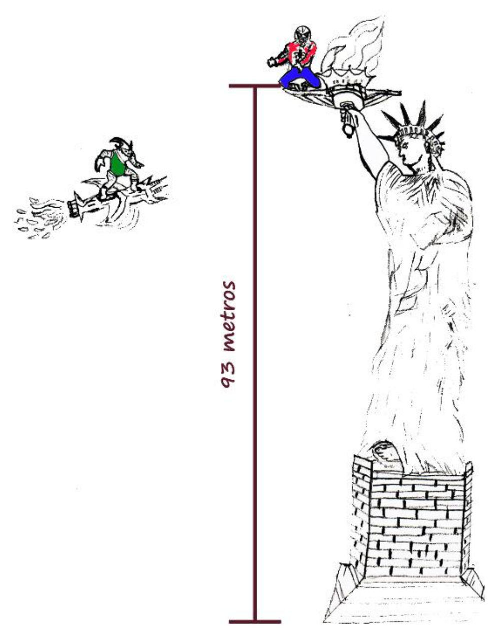
1. La relación $s(t) = t\,(t - 3)\,(t - 5)$ describe el desplazamiento lineal de una partícula en el espacio.
    a. ¿Cuál es la posición de la partícula en $t = 0$ segundos?
    b. ¿Cuál es el modelo matemático que describe la velocidad de la partícula?
    c. ¿Cuál es el modelo matemático que describe la aceleración de la partícula?
    d. ¿Cuál es el módulo de la velocidad y la aceleración cuando $t = 5s$?
2. Se lanza verticalmente una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de $4\,m/s$.
    a. Escriba una relación que muestre la posición de la pelota en cada instante.
    b. ¿Cuál es el modelo matemático que describe la velocidad de la pelota?
    c. ¿Cuánto debe valer la aceleración de la pelota si trabajamos en $pies/s$?
3. Dos moscas vuelan a $2\,m/s$ en línea recta a una altura constante de $1{,}55\,m$ con respecto al piso. En un instante dado, las moscas colisionan y caen en picada.



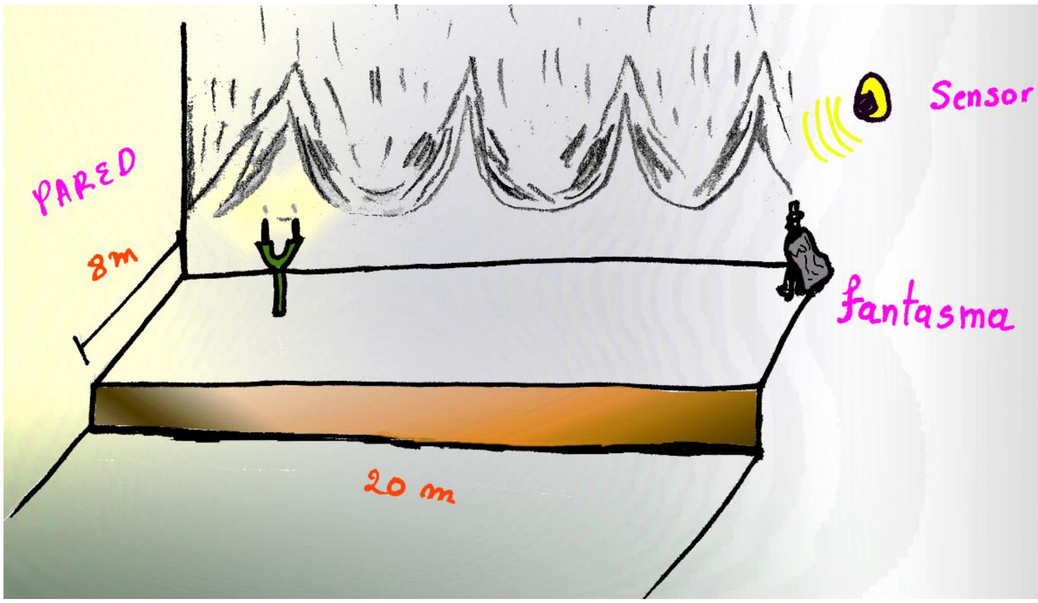
    a. Encuentre un modelo matemático que describa la posición vertical de las moscas en cualquier instante.
    b. ¿Cuánto han descendido las moscas $0{,}2s$ después de colisionar?
    c. ¿Cuál es la velocidad con las que las moscas llegan al suelo?
    d. Realice la gráfica $v - t$ e interpretela.

4. Eliana es una estudiante de bachillerato. Ella puede escribir aproximadamente cuatro letras por segundo (los espacios se cuentan como letras). Si cada una de ellas ocupa un espacio horizontal de $0.4\ cm$. Conteste:
    a. ¿Cuál es el modelo matemático que describe el desplazamiento horizontal del dedo índice de Eliana?
    b. ¿Cuánto se ha desplazado el dedo índice de Eliana después de 15 minutos de escritura continúa suponiendo que el espacio horizontal para escribir es de 15 cm?
    c. ¿Cuál es la velocidad a la que se mueve el dedo medio?
    d. ¿Existe aceleración? SI NO ¿Por qué?

5. El Duende Verde en un intento por derribar a Spider-Man que se encuentra en la antorcha de la estatua de la libertad le dispara un rayo de fuego. Spider-Man salta y el rayo derriba la antorcha.
    a. ¿Cuál es el modelo matemático que describe la velocidad de la antorcha al caer al suelo?
    b. ¿En cuánto tiempo la antorcha está a la mitad del camino?
    c. ¿Cuánto tarda la antorcha en llegar al suelo y cuál es su velocidad final?



6. Cuando $t = 0$, el fantasma de la opera se encuentra en la posición mostrada y luego se desplaza linealmente. Un sensor de movimiento infrarrojo detecta que el desplazamiento del fantasma está dado por: $s(t) = 10t^2 + 2t$.



a. ¿Cuál es el tiempo requerido para que el fantasma vaya desde el extremo derecho del escenario hasta la pared?
b. ¿Cuál es la velocidad con la que el fantasma de la ópera llega a la pared?
c. ¿Cuál es la expresión para la aceleración que experimenta la capa del fantasma durante su trayectoria? ¿Cuál es su aceleración cuando t =1,903 segundos?
d. ¿Cuál es el tiempo requerido para que el fantasma vaya hasta la pared y regrese a su posición inicial? Considere que el fantasma llega y regresa de la pared escenario sin detenerse.

3.6 Planificación de la VI sesión: La regla de la cadena.

TEMA: LA REGLA DE LA CADENA

Objetivo:

- **Conceptualizar la regla de la cadena y aplicarla correctamente en la derivación de una función compuesta.**

Objetivos específicos de la sesión	Desempeños auténticos
• Definir y aplicar correctamente el concepto de la regla de la cadena en la determinación de derivadas de funciones compuestas. • Conocer y aplicar la notación de Leibniz. • Utilizar las TIC como herramienta auxiliar en la resolución de ejercicios que tengan que ver con la derivada.	• Define lo que es la regla de la cadena. • Deriva una función compuesta utilizando la regla de la cadena. • Utiliza la notación de Leibniz para aplicarla en la determinación de derivadas conjuntamente con la regla de la cadena.

¿Qué debe aprender el estudiante?	¿Cómo debe aprender?	¿Cómo se avaluarán los aprendizajes?
• El concepto y las características de la regla de la cadena. • Los distintos procedimientos para derivar utilizando la regla de la cadena. • Usar el cambio de variable en funciones compuestas. • Utilizar correctamente los conocimientos adquiridos en la resolución de problemas que se le pudieran presentar en la vida diaria. • Exponer sus ideas de manera clara y precisa.	• Relacionando los conceptos previos acerca de la derivada de una función y funciones compuestas con los conceptos que se presentan en esta sesión. • Integrando los conocimientos de su vida cotidiana con los conceptos matemáticos presentados en esta sesión. • Utilizando las TIC como herramienta de apoyo en la resolución de problemas.	• Define de manera clara y precisa lo que es la regla de la cadena. • Dada una función compuesta, la deriva correctamente. • Utiliza correctamente el cambio de variable en las funciones compuestas. • Sustenta de manera clara y precisa los conceptos tratados en esta sesión.

3.6.1 Recomendaciones para el docente

Para el desarrollo de esta sesión se tomarán en consideración los tres momentos de la Enseñanza –Aprendizaje. A continuación, se detallan las recomendaciones que se hacen para cumplir con esos momentos y lograr el aprendizaje eficiente de los estudiantes.

Al ingresar al aula de clase salude atentamente, de esta manera logrará que sus estudiantes dirijan su rostro hacia usted y es más probable que logre captar su atención. Trate de crear conexión especialmente con los estudiantes que parecen estar "fuera" del aula. Hablar de los eslabones de una cadena sería una buena idea. La intención es que en unos 3-6 minutos el estudiante se despeje de las preocupaciones que pueda presentar.

1. **Activación de conocimientos previos**

- Se recomienda que el docente organice grupos de trabajo de dos personas. mediante la "Pregunta en contexto" se trata de mostrar la obtención del chocolate análogo a la obtención de la derivada en una función compuesta. Si es posible, tener a mano una caja con algo en su interior para que este ejemplo sea más visual.
- Las actividades que se presentan en esta sección están enfocadas a iniciar al estudiante en el estudio de la regla de la cadena. Se recomienda que en este momento se exponga el vídeo de la sesión número seis para darles una idea general de los contenidos de la sesión.

2. **Construcción del conocimiento**

- Se recomienda que el docente permita el trabajo de los estudiantes en la lectura, el análisis y resolución de las actividades que presenta esta sección.
- De ser posible, el docente llevará al aula materiales similares a los presentados en esta sección para que los estudiantes conceptualicen de mejor manera la regla de la cadena.
- Se hará notar la importancia de utilizar las funciones compuestas y los reeplazos o cambios de variable.

3. **Consolidación del conocimiento**

- El docente motivará a los estudiantes a participar en un concurso en la pizarra para que determinen derivadas. Se procederá así: Se pide un representante por grupo. Se entregará a los participantes en un papel una misma expresión y en un momento dado la abren y resuelven la derivada. Para la siguiente expresión a resolver, se cambian de participantes. Al final se puede otorgar un punto extra al grupo ganador.
- Se recominenda que se revisen los ejercicios modelo presentados y que se realicen las actividades propuestas.

TEMA 6: LA REGLA DE LA CADENA

3.6.2 Actividades previas

Pregunta en contexto: Recuerdo que una vez me regalaron algo rectangular. Estaba envuelto con un papel rojo, y adornado con detalles blancos y dorados, al quitar el papel pude notar que era una caja de chocolates. Al abrir la caja, los chocolates en el interior, estuvieron formando un detalle. Cada chocolate era de forma esférica y tenía su respectiva envoltura. Suponiendo que justo en este instante me entregan ese regalo de forma rectangular ¿Cuántas veces he de desenvolver una envoltura hasta llegar a tomar el chocolate para llevarlo a mi boca?

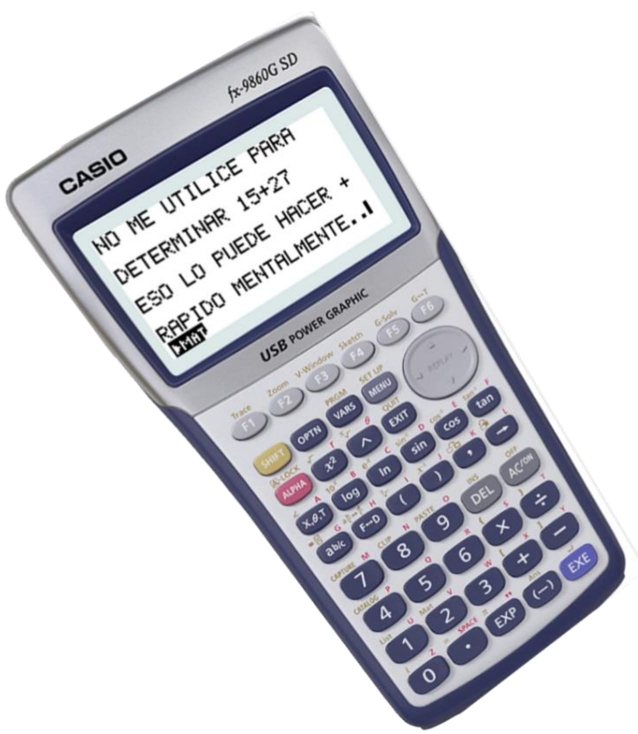
¿Con cuanta frecuencia maneja usted la calculadora? Esta es una pregunta muy importante. Muchas veces nos acostumbramos a su uso frecuente que nos volvemos incapaces de realizar mentalmente operaciones sencillas. Recuerde que usted será un docente de matemáticas y debe saber manejar muy bien una calculadora y también realizar operaciones rápidamente mediante cálculos mentales. ¡No lo olvide!

A continuación, le presento una pequeña actividad para poner a trabajar la capacidad de cálculo mental que usted posee. Se da una matriz en donde después de la raya se muestran los resultados de sumar las filas y las columnas. Haga los cálculos mentalmente. Señale **B** en el caso de que la suma de todas las filas y de todas las columnas sea correcta. Caso contrario señale **M**.

Tiene un tiempo de 72 segundos para resolver las tres matrices. (Referencia tomada de libro Tests Psicotécnicos)

10	20	30	60		13	28	17	58		48	10	3	61	
14	15	16	45	**M**	71	56	68	195	**M**	84	16	15	105	**M**
30	20	10	60	**B**	17	18	13	48	**B**	20	45	28	93	**B**
54	55	56	165		101	102	98	301		152	71	46	269	

Se hace hincapié en ejercitar la capacidad del cálculo mental ya que de esta manera se podrá utilizar el concepto de la regla de la cadena de manera más rápida y fácil.



3.6.3 Introducción.

La regla de la cadena es una de las herramientas más valiosas con las que se cuenta para determinar derivadas de funciones que no son simples, sino compuestas.

Tabla 6.1		
Funciones simples		**Funciones compuestas**
$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{g(x)}$	$\boldsymbol{(f \circ g)(x) = f(g(x))}$
x^2	$5x+3$	$(5x+3)^2$
$\cos x$	$x-1$	$\cos(x-1)$
$\frac{1}{x^2}$	$x+1$	$\frac{1}{(x+1)^2}$

Actividad:

Complete la tabla 6.2 con la derivada de la función: $\boldsymbol{h(x) = (5x+3)^2}$

Tabla 6.2. Derivando la función $\boldsymbol{h(x) = (5x+3)^2}$		
Desarrollando el binomio	**Expresando como producto**	**Directamente**
		$h(x) = (5x+3)^2$ Según la regla de la potencia: $\frac{d}{dx}[h(x)] = 2(5x+3)^{2-1}$ $\frac{d}{dx}[h(x)] = 10x+6$

Pregunta:

De acuerdo a lo anterior responda.

a. ¿Qué observa en la tabla anterior con relación a la derivada de $h(x)$?
b. ¿Es posible que una función pueda tener dos expresiones no equivalentes como su derivada?
c. ¿Por qué no es posible aplicar directamente las reglas de la derivación a una función compuesta?

En la tabla 6.2. Si Ud. realizó el proceso correctamente, las respuestas de la primera y segunda columna son correctas e iguales, mientras que la de la tercera no lo es.

Para derivar funciones compuestas es necesario desarrollar un método que nos ayude en ello. Claro que podemos realizar el procedimiento de las 2 primeras columnas de la tabla anterior, pero esto no siempre va a ser posible, por ejemplo, si el lector considerara la expresión $f(x) = (3x + 1)^{99}$, sería una inversión de grandes esfuerzos derivarla expresándola como producto o aún más si se quisiera desarrollar el binomio.

Pregunta:

Razone y conteste lo siguiente:

Siendo $y = f(x)$. ¿Son correctas las notaciones: $\frac{d[f(x)]}{dx} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$?

3.6.4 La regla de la cadena: explicación gráfica.

El método que se explicará para derivar funciones compuestas es conocido como la regla de la cadena. A continuación, se desarrolla una explicación gráfica de esta regla.

Suponga que un cubo representa la función $f(x)$ y que otro cubo de menor tamaño representa la función $g(x)$. Ahora, si queremos representar la función compuesta $f(g(x))$ entonces lo que se hará es introducir el cubo pequeño en el cubo de mayor tamaño.

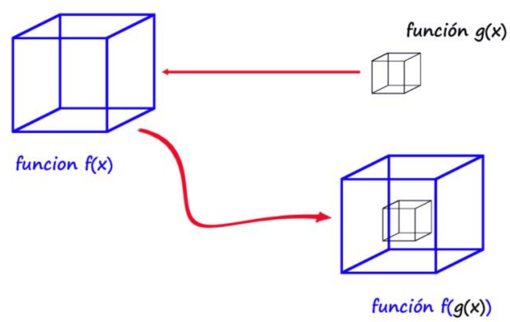


Figura 6.1

Ahora se van a derivar las funciones$f(x)$ y $g(x)$ por separado. Suponga que sus derivadas son:

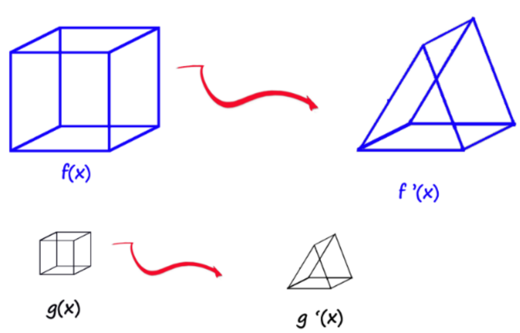


Figura 6.2

Observe la figura 6.3. Gráficamente la regla de la cadena afirma que la derivada total de la función compuesta es:

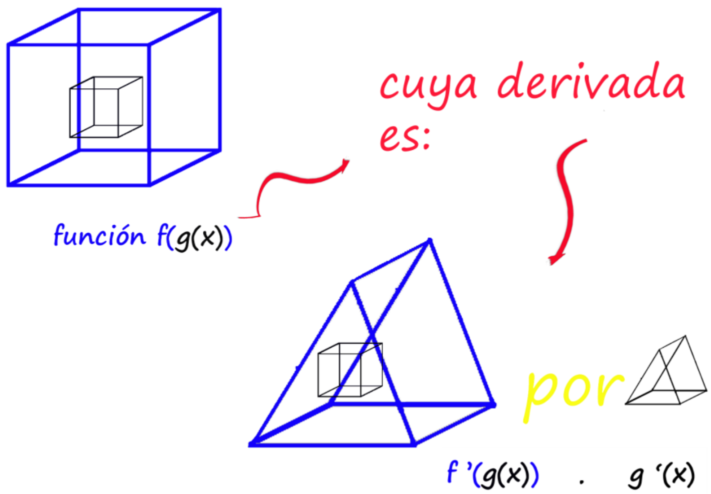


Figura 6.3

O sea, se halla la derivada de ambas funciones que forman la función composición y luego se hace: $f'\big(g(x)\big).\,g'(x)$

Es decir: si $h(x) = f(g(x))$, entonces:

$$\boxed{h'(x) = f'\big(g(x)\big).\,g'(x)} \qquad \textit{Definición 7.1}$$

Expresión a la cual se la conoce como la **regla de la cadena**. Ahora se va a determinar la derivada de la función con la cual trabajamos anteriormente, mediante el uso de la citada regla:

Determinar $h'(x)$ si $h(x) = (5x+3)^2$

$h(x) = (5x+3)^2$	*Expresión con la que se trabajará*
$f(x) = x^2$	*Definiendo* $f(x)$
$g(x) = 5x+3$	*Definiendo* $g(x)$
$\frac{d}{dx}[f(x)] = 2x$	*Determinando la derivada de* $f(x)$
$\frac{d}{dx}[g(x)] = 5$	*Determinando la derivada de* $g(x)$
$\frac{d}{dx}[h(x)] = f'\big(g(x)\big).g'(x)$	*Aplicando la definición*
$\frac{d}{dx}[h(x)] = 2(5x+3).5$	*Sustituyendo valores y operando*
$\frac{d}{dx}[h(x)] = 10(5x+3)$	
$\frac{d}{dx}[h(x)] = 50x+30$	
$h'(x) = 50x+30$	*Finalmente llegamos a la respuesta buscada.*

Actividad:

Trate de aplicar mentalmente la regla de la cadena a la expresión:

$h(x) = (3x+1)^{99}$ ¿Cuál es la expresión que determina $h'(x)$?

$a.3(3x+1)^{98}$ $\quad$ $b.297(3x+1)^{98}$

$c.3x(3+1)^{99}$ $\quad$ $d.99(3x+1)^{98}$

3.6.5 Determinación de funciones compuestas mediante reemplazos.

Para hacer más aplicable el concepto de la regla de la cadena lo que se va a hacer es representar a la función composición mediante reemplazos o cambios de variable. Por ejemplo: sea la función $h(x) = (3x + 1)^{99}$ podemos hacer los siguientes *cambios de variable:*

$h = u^{99}$ h es función de u

$u = (3x + 1)$ u es función de x

De tal manera que la función $h(x)$ puede ser escrita como $h(x) = u^{99}$, en la cual si se hacen los respectivos reemplazos se puede llegar a la función original.

$h(x) = u^{99}$ Función simple con cambio de variable

$h(x) = (3x + 1)^{99}$ Reemplazando u por su equivalente

3.6.6 La regla de la cadena y la notación de Leibniz.

El símbolo $\frac{dy}{dx}$ fue utilizado como notación para la derivada por primera vez por Gottfried Wilhelm Leibniz en el siglo XVII. Se hace notar al lector que $\frac{dy}{dx}$ no representa una razón o división. En la notación de Leibniz la variable y se reemplaza por la expresión a derivarse, mientras que la variable que está en la parte inferior, indica que se derivará con respecto a ella. Por ejemplo: Derivar la siguiente expresión$t^2 + 5t + \sqrt{t}$con respecto a t.

Solución:

Con la notación de Leibniz tendríamos: $\frac{d[t^2+5t+\sqrt{t}]}{dt} = \frac{d[t^2+5t+\sqrt{t}]}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2t + 5$

Si $y = f(g(x))$*, entonces haciendo que* $g(x) = u$*, la expresion anterior puede ser escrita como* $y = f(u)$*, recordando siempre que* u *es una función de* x*. Ahora utilizando la notación de Leibniz para la derivada de una función, la regla de la cadena es:*

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}}$$

Definición 7.2

Un buen truco nemotécnico para recordar esta notación es que si se pudieran simplificar los du, del miembro de la derecha entonces los dos miembros son exactamente iguales

Si en una expresión se tuvieran más de dos funciones involucradas en la función compuesta, entonces hacemos tantos cambios de variable como sean necesarios:

Dada $f(x) = e^{(3x+2)^2}$ determine $f'(x)$

Solución:

$y = e^{(3x+2)^2}$ Expresión inicial

Ahora hacemos los cambios de variable y encontrando sus derivadas:

$y = e^u$ $y' = e^u$

$u = v^2$ $u' = 2v$

$v = 3x + 2$ $v' = 3$

De modo que, utilizando la notación de Leibniz, la derivada será:

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$*; es decir:* $\frac{dy}{dx} = e^u.2v.3$

Operando: $\frac{dy}{dx} = 6v.e^u$

Reemplazando ***u*** *por su equivalente:* $\frac{dy}{dx} = 6v.e^{(v^2)}$

Reemplazando ***v*** *por su equivalente, se*

obtiene la derivada buscada $\frac{dy}{dx} = 6(3x+2).e^{(3x+2)^2}$

Recuerde:

En este caso la derivación es con respecto a x, de tal manera que la expresión final de la derivada debe contener todos sus términos en función de x, no se puede dejar expresada en función de u o v.

3.6.7 Uso de las TIC: Comprobar una derivada utilizando la calculadora.

Para saber si la expresión que representa la derivada es la correcta vamos a utilizar la calculadora Casio Fx9860 G. Primeramente se hace notar que esta calculadora no es capaz de trabaja de forma simbólica, solo lo hace de forma numérica. Por ejemplo: Al ingresar $\frac{d}{dx}(x^2)$, la calculadora no devuelve $2x$, más bien lanza un valor concreto, supongamos que un 4 o cualquier otro valor, esto depende del valor numérico asignado ax en ese momento.

3.6.7.1 ¿Cómo saber cuál es el valor numérico con que actualmente está trabajando la variable x?

En el modo ***Run*** escriba x y presione EXE, la calculadora devolverá un valor y ese es el valor asignado a x. En el caso de que la calculadora devuelva cero, usted debe dar un valor concreto a x.

3.6.7.2 ¿Cómo asignar un valor numérico concreto a x?

En el modo ***Run*** escriba lo siguiente:$VALOR\ NUMÉRICO \rightarrow \boldsymbol{x}$**,** al final presione EXE. Reemplace VALOR NUMÉRICO por el valor que quiere asignarle a la variable x. Para mayor información consulte la página 18.

Ahora bien, si derivásemos la función $f(x) = x^4 + x^3$ de modo manual obtendríamos:

$$\frac{d}{dx}(x^4 + x^3) = 4x^3 + 3x^2$$

Luego, para comprobar si esta expresión es la correcta, lo que hacemos es introducir $\frac{d}{dx}(x^4 + x^3)$en la calculadora y al final presionamos EXE. La calculadora devuelve un valor concreto. Almacene este valor. Luego, introduzca la expresión obtenida como la derivada $(4x^3 + 3x^2)$ y presione EXE. Ambas respuestas deben coincidir, si es así la expresión que usted encontró es la correcta. Para más información lea la siguiente página.

Recuerde:

x nunca debe cambiar de valor mientras se esté trabajando con la misma expresión. Solamente debe cambiarle de valor cuando al derivar una función la calculadora lance un error, ya que puede que el valor asignado a x no esté en el dominio de la función que se está evaluando.

USO DE LAS TIC

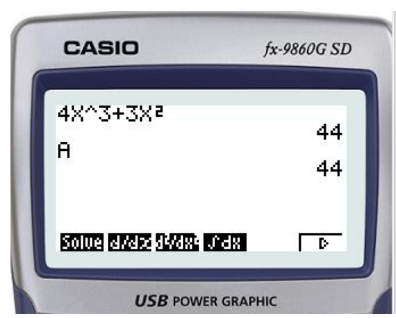
Como saber si la expresión de la derivada de una función es la correcta utilizando la calculadora Casio Fx9860 G

Supongamos que queremos derivar $f(x) = x^4 + x^3$

1. Encienda la calculadora
2. En el menú de opciones elija el modo ***Run***
3. *Asigne un valor concreto a x*
4. Ingrese la función que va a derivar. Para ello use el teclado: OPTN >> F4 >> F2 >> introduzca la función. Presione EXE.
5. Almacene el valor obtenido.
6. Introduzca la expresión de la derivada que usted encontró. Presione EXE.
7. Si usted derivó bien, ambos valores numéricos lanzados por la calculadora deben coincidir.

Nota: ***El resultado obtenido es la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto. Para evaluarla en otro valor simplemente cambie de valor a la variable x con el procedimiento del paso 3.***

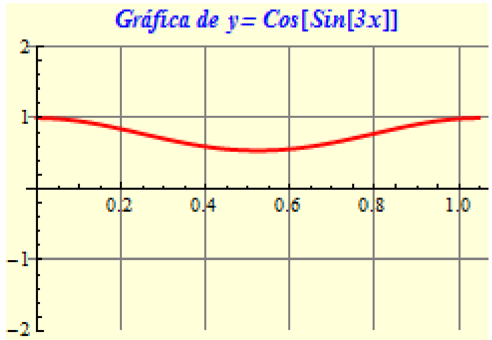
Este procedimiento es de mucha ayuda al evaluar derivadas de funciones compuestas.



3.6.8 Ejercicios modelo

1. Dada la función $y = \cos[\sin 3x]$ encuentre y'

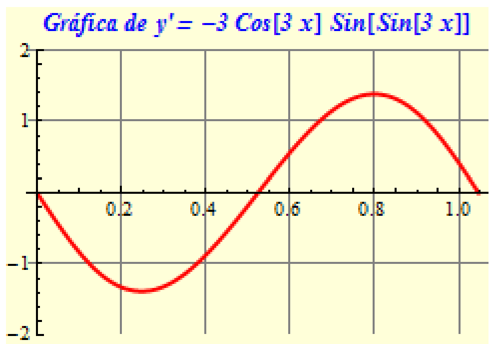
Solución:



Expresión inicial.

$y = \cos[\sin 3x]$

Los cambios de variables y sus derivadas son:



$y = \cos u$ $\qquad$ $y' = -\sin u$

$u = \sin v$ $\qquad$ $u' = \cos v$

$v = 3x$ $\qquad$ $v' = 3$

De modo que la derivada sería:

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$ $\qquad$ *Derivada en notación Leibniz*

$\frac{dy}{dx} = -\sin u \,.\cos v\,.3$ $\qquad$ *Reemplazando y operando*

$\frac{dy}{dx} = -3\sin[\sin v]\,.\cos v$

$\frac{dy}{dx} = -3\sin[\sin 3x]\,.\cos 3x$ $\qquad$ *Que es respuesta buscada*

2. Dada la función $y = e^{\sin(2x+5)^3}$ encuentre y'

Los cambios de variables y sus derivadas son:

$y = e^u$ $\quad$ $y' = e^u$

$u = \sin v$ $\quad$ $u' = \cos v$

$v = w^3$ $\quad$ $v' = 3w^2$

$w = 2x + 5$ $\quad$ $w' = 2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dw}\frac{dw}{dx}$ *Escribiendo en notación Leibniz*

$\frac{dy}{dx} = e^u . \cos v . 3w^2 . 2$ *Sustituyendo y operando.*

$\frac{dy}{dx} = 6e^u . \cos v . w^2$

$\frac{dy}{dx} = 6. e^{\sin v} \cos v . w^2$

$\frac{dy}{dx} = 6. e^{\sin w^3} \cos w^3 . w^2$

$\frac{dy}{dx} = 6. e^{\sin(2x+5)^3} \cos(2x+5)^3 . (2x+5)^2$ *Que es la derivada buscada.*

3. Dada la función $y = \frac{1}{\sqrt{3x^3+5}}$ encuentre y'

Los cambios de variables y sus derivadas son:

$y = \frac{1}{u}$ $\quad$ $y' = \ln u$

$u = \sqrt{v}$ $\quad$ $u' = \frac{1}{2\sqrt{v}}$

$v = 3x^3 + 5$ $\quad$ $v' = 9x^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$ *Escribiendo en notación Leibniz*

$\frac{dy}{dx} = \ln u . \frac{1}{2\sqrt{v}} . 9x^2$ *Sustituyendo y operando.*

$$\frac{dy}{dx} = \ln\sqrt{v}\,.\frac{1}{2\sqrt{v}}.\,9x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \ln\sqrt{3x^3+5}\,.\frac{1}{2\sqrt{3x^3+5}}.\,9x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9}{2}\frac{x^2\ln\sqrt{3x^3+5}}{\sqrt{3x^3+5}}$$

Que es la derivada buscada.

3.6.9 Ejercicios propuestos

1. Conteste:
    a. ¿Qué es una función compuesta?
    b. ¿Para qué sirve la regla de la cadena?
    c. ¿Absolutamente todas las funciones se derivan utilizando la regla de la cadena? Conteste si o no ¿Por qué?
    d. ¿Qué es la notación de Leibniz?
    e. Escriba la fórmula de la regla de la cadena utilizando la notación de Leibniz
2. De las siguientes expresiones, subraye la/s expresión/es a la/s cual/es no es necesario aplicar la regla de la cadena para determinar su derivada.
    a. $\sin[3\pi x+2]$
    b. $\sin[3\pi x]$
    c. $\cos[x]$
    d. $\sqrt{x+2}$
    e. $\ln x^2$

3. Derive las siguientes funciones si es posible:

    a. $\mathrm{y} = 25\cos 3x$

    b. $y = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{3}{2}x^2\right)$

    c. $y = \frac{1}{2}\cos(\sin x^2)$

    d. $y = \sin 2x\ \cos 2x$

    e. $y = e^{\sin(3x+2)^3}$

    f. $\sin(\cos(\sin(\cos x)))$

    g. $y = \frac{1}{\sqrt{(3x+2)^3}}$

    h. $\sqrt{\sin^2 3x}$

    i. $e^{\left(e^{2x^2}\right)^x}$

    j. $(e^{3x+1})(5x + x^3)\sin 2x$

4. Realice un mentefacto sobre la regla de la cadena y en un minuto explíquelo a sus compañeros. Al hacerlo enriquezca sus conceptos con los aportes de los compañeros del grupo de trabajo y si es posible perfeccione su mentefacto. Consérvelo como material de apoyo en el avance de la materia.

3.7 Planificación de la VII sesión: Derivadas de funciones trigonométricas

TEMA: DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Objetivo:

- **Analizar las derivadas de las funciones trigonométricas seno y coseno y sus aplicaciones en la vida cotidiana.**

Objetivos específicos de la sesión	Desempeños auténticos
• Definir lo que es una función trigonométrica. • Determinar las derivadas de las funciones trigonométricas. • Plantear ejercicios de la vida cotidiana como modelos matemáticos para su resolución. • Utilizar las TIC como herramienta auxiliar en la resolución de ejercicios que tengan que ver con la derivada de funciones trigonométricas.	• Define lo que es una función trigonométrica. • Determina la derivada de las funciones trigonométricas. • Modela problemas que tienen que ver con derivadas de funciones trigonométricas. • Utiliza la calculadora como herramienta auxiliar en la determinación de derivadas. • Intercambia ideas y opiniones sobre el tema con los compañeros del aula y el docente que imparte la materia.

¿Qué debe aprender el estudiante?	¿Cómo debe aprender?	¿Cómo se avaluarán los aprendizajes?
• El concepto y las características de una función trigonométrica. • Determinar las derivadas de las funciones trigonométricas. • Utilizar la calculadora para determinar algunas derivadas. • Utilizar correctamente los conocimientos adquiridos en la resolución de problemas que se le pudieran presentar en la vida diaria.	• Relacionando los conceptos previos acerca delas funciones trigonométricas y el concepto de derivada a partir del límite de una función. • Integrando los conocimientos de su vida cotidiana con los conceptos matemáticos presentados en esta sesión. • Analizando y resolviendo las actividades de esta sesión	• Define de manera clara y precisa lo que es una función trigonométrica. • Dada una función trigonométrica determina su derivada para ello se ayuda de herramientas tales como la calculadora. • Modela problemas de la vida real que tienen que ver con derivadas de funciones trigonométricas.

3.7.1 Recomendaciones para el docente

Para el desarrollo de esta sesión se tomarán en consideración los tres momentos de la Enseñanza –Aprendizaje. A continuación, se detallan las recomendaciones que se hacen para cumplir con esos momentos y lograr el aprendizaje eficiente de los estudiantes en el tema.

Al ingresar al aula de clase salude atentamente y con amabilidad, de esta manera está tratando de crear conexión con los estudiantes. Antes de iniciar la clase, una pregunta relacionada con los motores de corriente alterna sería de gran ayuda. La intención es que en unos 4-6 minutos el estudiante se despeje de las preocupaciones que pueda presentar

1. **Activación de conocimientos previos**

- Se recomienda que el docente organice grupos de trabajo de dos personas. La "Pregunta en contexto" es un problema con el cual se pretende captar la atencion de los estudiantes en el tema que se va a tratar. Las actividades propuestas en esta sección permitirán recordar conceptos que los estudiantes posiblemente ya los estudiaron. Permita que los estudiantes lean y conceptualicen esta sección. Al final ellos sacarán sus propias conclusiones. Se recomienda que en este momento se exponga el vídeo de la sesión número siete para darles una idea general de los contenidos de la sesión.

2. **Construcción del conocimiento**

- Se recomienda que el docente permita el trabajo de los estudiantes en la lectura, el análisis y resolución de las actividades que presenta esta sección.
- Se recomienda que el docente fomente el uso de la calculadora como una herramienta auxiliar en la determinación de las derivadas de las funciones trigonométricas y cualquier tipo de funciones.
- Si es posible, el docente utilizará otro software que permita conceptualizar de mejor manera el tema de la derivada de funciones trigonométricas.

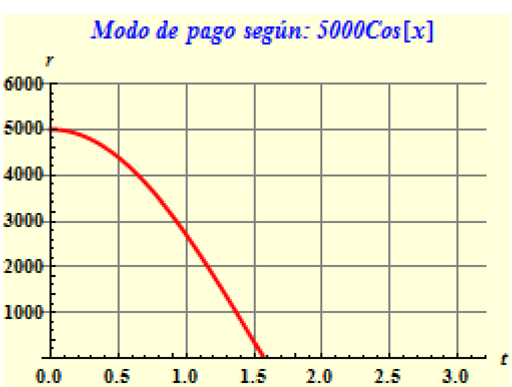
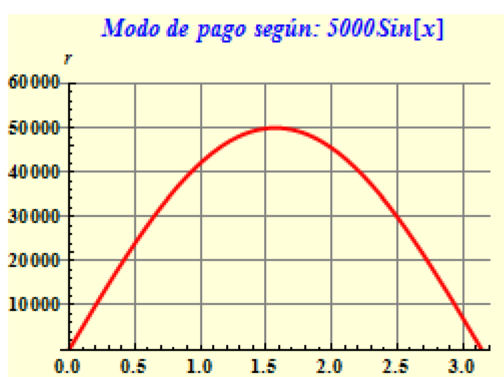
3. **Consolidación del conocimiento**

- El docente pedirá la intervención de aquellos estudiantes que aún tienen dudas sobre algo que se haya revisado en esta sesión y las aclarará; en el caso de no presentarse ninguna duda, el docente hara un breve resumen de la clase
- Se recominenda que se revisen los ejercicios modelo presentados y que se realicen las actividades propuestas.

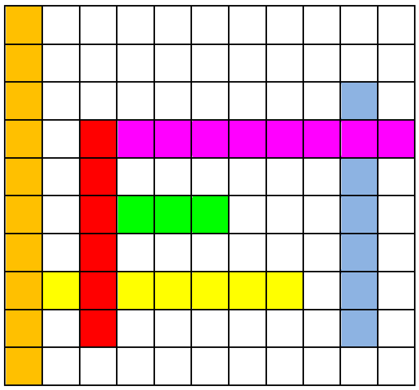
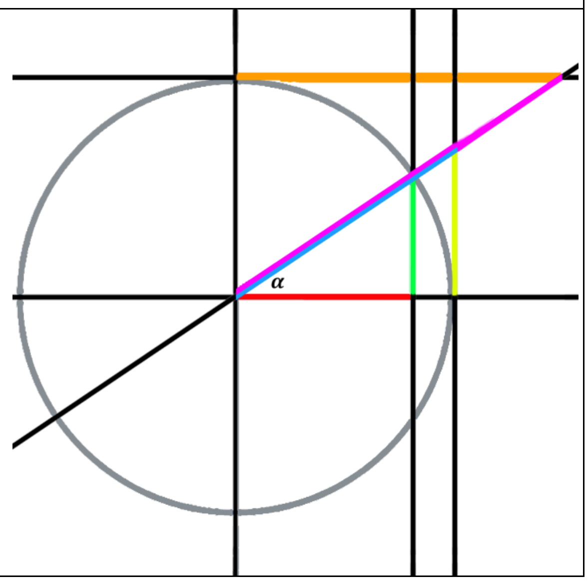
TEMA 7: DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

3.7.2 Actividades previas

Pregunta en contexto: Un proyecto de investigación sobre las Preferencias de Estudio de los Adolescentes en el Ecuador en los últimos años es financiado por la república China. Usted ingresa a trabajar en este proyecto. Se le hace elegir la forma en que se le remunerará y se le presentan dos opciones. La primera es que la empresa encargada del proyecto le bonifique con $2\,000$ dólares al inicio y luego se le pague de cuerdo al siguiente modelo matemático:$[5\,000\cos t]$ dólares. En cambio, la segunda opción es que usted recibe 0 dólares para iniciar y se le pagará de acuerdo al siguiente modelo matemático $[5\,000\sin t]$ dólares. ¿Cuál de los contratos firmaría usted si debe trabajar un total de π meses en el proyecto? Nota: t es el número de meses.

Gráficas del modo de pago que a usted le hacen elegir	
	

Rellene el siguiente color-grama de las funciones trigonométricas para un círculo unitario.

RELLENE DE ACUERDO AL COLOR DE LA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA RESPECTIVA	FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL CÍRCULO UNITARIO
	

3.7.3 Introducción.

Son las ocho de la noche y usted, después de una larga jornada de estudios en la Carrera de Matemáticas, ingresa a su cuarto ubicado en las afueras de la ciudad y lo primero que hará, es presionar un interruptor y a la velocidad de sus pensamientos, una luz se encenderá.

Pregunta: **Figura 7.1**

¿Sabía que estos bombillos eléctricos trabajan con corriente alterna?

3.7.4 Modelos en los cuales se utilizan las funciones trigonométricas.

La intensidad y el voltaje de la corriente alterna C.A. matemáticamente están representados por funciones trigonométricas, las funciones involucradas son: $\sin t$ y $\cos t$. Se la llama C.A. debido a que varía en con el tiempo y esto es una consecuencia de los generadores que la producen. En nuestro país estos generadores están en la central Hidropaute y en el Proyecto Hidroeléctrico Mazar. La figura 7.2 muestra la función de voltaje para nuestro país.

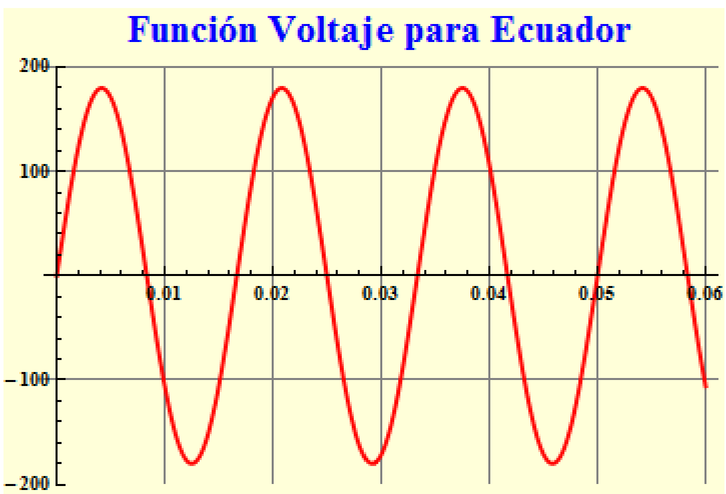


Figura 7.2

La función voltaje está representada por la ecuación:

$$v = V_0 \sin \omega t = 180 \sin 120\pi t$$

El valor eficaz del voltaje para nuestro país es de:

$$\frac{V_o}{\sqrt{2}} = \frac{180}{\sqrt{2}} \approx 127\, V$$

3.7.5 El Movimiento armónico simple MAS

Además de representar los valores de voltaje e intensidad de la C.A. las funciones trigonométricas se utilizan para describir ciertos sucesos como por ejemplo el movimiento de una partícula suspendida en un resorte lo que se conoce como movimiento armónico simple MAS.

Figura 7.3

C

Actividad.

1. Tome un resorte de los que se utilizan para anillar las fotocopias.
2. En uno de sus extremos ate algún objeto de tal manera que el resorte presente algo de estiramiento.
3. Tome el otro extremo con una mano. Trate de mantenerla lo más firme posible.
4. Con la otra mano pegue un pequeño tirón al objeto y suéltelo.

¿Qué observa?

Figura 7.4

Complete:

Como podrá ver de acuerdo a la actividad que acaba de realizar, el objeto suspendido en el resorte cambia de posición, por lo tanto, afirmamos que posee _ _ _ _ _ _ _ _ _ _. Así también se puede observar que la velocidad no es constante, sino que varía de acuerdo a la posición del objeto, por ello afirmamos que el objeto también posee _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _.

Cuando usted sostiene el resorte y el sistema está estático, entonces la posición en la que se encuentra la partícula se llama posición de equilibrio y es a partir de ese punto que se toman las medidas de posición, velocidad y aceleración. Pues bien, si usted tira del objeto y lo suelta, entonces la velocidad del objeto es $v = \frac{ds}{dt}$, así como también la aceleración que experimenta es $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$.

Observe la figura 7.5 que muestra gráficamente la posición de equilibrio, así como s que es la posición mínima y máxima que experimenta del objeto que cuelga del resorte. Nótese también la amplitud A del MAS.

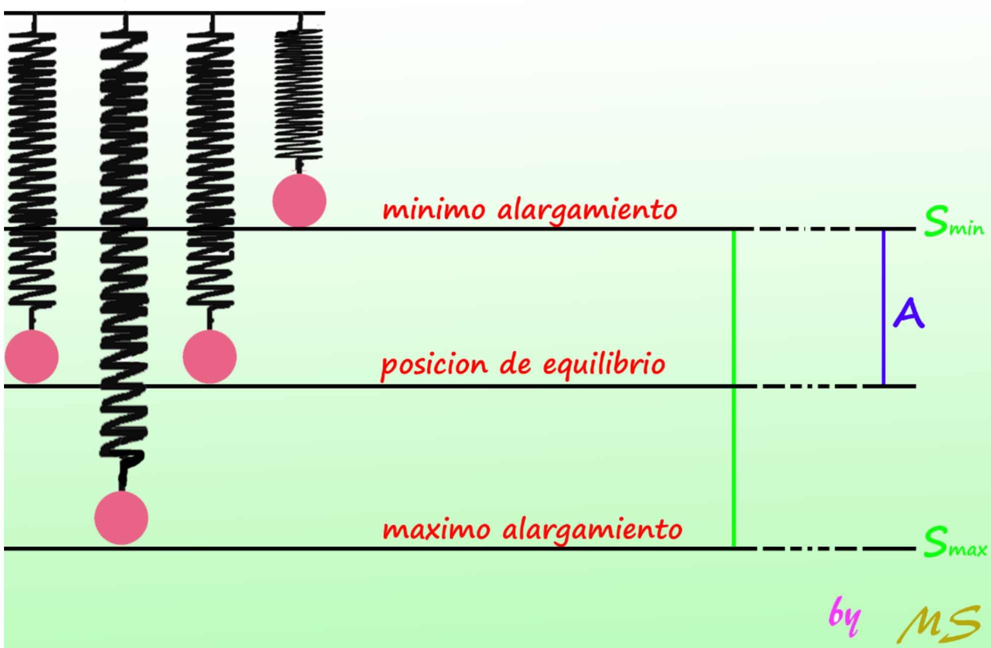


Figura 7.5

Recuerde:

Para determinar la amplitud A, lo que hacemos es:

$$A = \frac{S_{max} - S_{min}}{2}$$

3.7.6 Parámetros que definen una ecuación del MAS.

Para el análisis del MAS se supone que no existen fuerzas de amortiguamiento, por ejemplo, el aire, que hace que poco a poco la amplitud A del objeto vaya decayendo. Y la relación matemática que se utiliza es:

$$\boldsymbol{s(t) = A \sin(\omega t + \varepsilon)} \qquad \textit{Ecuación 8.1}$$

O también se utiliza: $\boldsymbol{s(t) = A \cos(\omega t + \varepsilon)}$, en donde:

Variable	**Representa**
s	Desplazamiento del objeto. Se lo mide a partir de la posición de equilibrio.
A	Amplitud máxima o desplazamiento máximo de la partícula.
$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{P}$	Es la frecuencia cíclica temporal y está relacionada con el periodo temporal y la frecuencia temporal.
t	Es el tiempo transcurrido. Se lo mide en segundos
ε	Es el desfase vertical que tiene la gráfica que describe el movimiento de la partícula.
P	Es el periodo temporal, es decir en cuanto tiempo el objeto describe un ciclo completo.
f	Es la frecuencia temporal. Y es igual al minero de ciclos que el objeto realiza en 1 segundo.

Como el lector podrá apreciar, a partir de los parámetros indicados, el mismo puede armar una ecuación del MAS que represente la posición de un objeto para un caso particular y a partir de esa ecuación podrá determinar tanto la velocidad, así como la aceleración mediante el uso de la derivada.

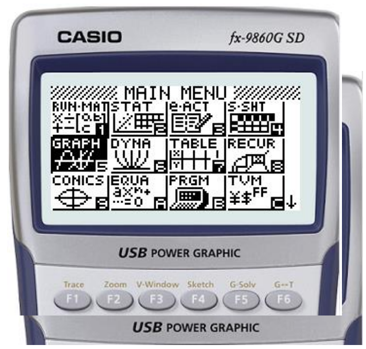
3.7.7 Uso de las TIC: como determinar la gráfica de la derivada de una función.

USO DE LAS TIC

Como encontrar la gráfica de la derivada de la función trigonométrica $\sin x$ utilizando la calculadora Casio Fx9860 G

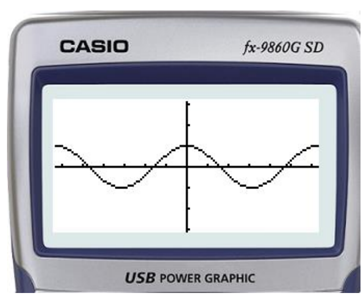
Si $f(x) = \sin x$. Se va a graficar la función $f'(x)$

1. Encienda la calculadora
2. En el menú de opciones elija el modo ***Graph***



3. Colóquese con el cursor sobre una de las Y_i que presenta la calculadora. Presione la tecla de navegación derecha y luego la tecla OPTN, luego presione F2 y después F1 e ingrese $\sin x$

4. Una vez que termine de ingresar la función presione la tecla EXE, luego presione nuevamente EXE o la tecla F6 para dibujar la gráfica de $f'(x)$



5. Observe la gráfica. ¿se puede afirmar que la derivada de $\sin x$ es $\cos x$?

Nota:

- El procedimiento anterior es válido para toda la familia de calculadoras graficadoras Casio que tienen estas funciones.
- La tecla de navegación está en la parte superior derecha. La figura adjunta muestra la forma ovalada que posee.

Figura 7.6

Tecla de navegación

Actividad:

Para trabajar con la calculadora.

Sean: $f(x) = \cos x$

$$g(x) = \tan x$$

Utilice la calculadora y grafique las funciones $f'(x)$ y $g'(x)$ y trate de definir que función representan las gráficas obtenidas.

3.7.8 Ejercicios resueltos.

1. Si $f(x) = \sin x$; Demuestre que $f'(x) = \cos x$

La definición de derivada a partir del límite es:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

La cual, para nuestro caso toma la forma:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} \right]$$

Desarrollando $\sin(x + \Delta x)$ mediante el teorema de la suma de dos ángulos tenemos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} \right]$$

Sacando factor común y operando:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin x [\cos \Delta x - 1] + \cos x \sin \Delta x}{\Delta x} \right]$$

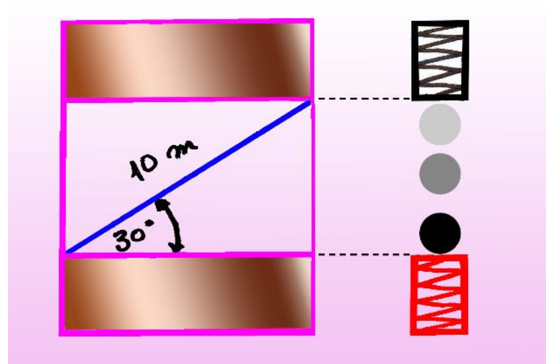
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin x [\cos \Delta x - 1]}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\cos x \sin \Delta x}{\Delta x} \right]$$

$$f'(x) = \sin x \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} \right] + \cos x \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right]$$

$$f'(x) = \sin x [0] + \cos x [1]$$

$$f'(x) = 0 + \cos x = \cos x$$

2. Una canica de vidrio es impulsada horizontalmente por un mecanismo de lado y lado, de tal manera que la canica se mueve con MAS. Si la canica parte desde el mecanismo rojo en $t = o$, y regresa otra vez en 2 segundos, con respecto a este mecanismo, determine:



   a. La ecuación que describe la posición de la canica.
   b. Halle la expresión que describe la velocidad de la canica en cualquier instante.
   c. Si la bola se mueve desde $t = 0$ hasta $t = 2\pi$ segundos, ¿en qué instantes la aceleración de la partícula es cero?

Solución:

a. *Como la bola está en* $s = 0$ *cuando* $t = 0$, *entonces* $\epsilon = 0$, *además de acuerdo a la ecuación 8.1 tenemos:* $s(t) = A\,sin(\omega t + \varepsilon)$.

   Para determinar la amplitud lo que hacemos es determinar el espacio total que recorre la bola y lo dividimos entre dos. Así, la amplitud es: $A = \frac{10\ sin\,30}{2} = 2{,}5$. *Si la bola regresa en dos segundos, este es el periodo P, así que* $\omega = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{2} = \pi$. *De tal manera que la relación buscada es:* $s(t) = 2{,}5\,sin(\pi t)$

b. *Para determinar la expresión de la velocidad de la canica en cualquier instante, simplemente derivamos a* $s(t) = 2{,}5\,sin(\pi t)$, *así:*

$$s(t) = 2{,}5\sin(\pi t)$$

$$s'(t) = 2{,}5\cos(\pi t).\pi$$

$$s'(t) = 2{,}5\pi\cos(\pi t)$$

c. *Para este literal primero determinamos la expresión para la aceleración:*

$$s''(t) = -2{,}5\pi^2\sin(\pi t)$$

Ahora determinamos los instantes en los que $s''(t) = 0$, *para ello resolvemos la ecuación trigonométrica* $-2{,}5\pi^2\, sin(\pi t) = 0$ *para el intervalo* $[0, 2\pi]$

$$-2{,}5\pi^2\sin(\pi t) = 0$$

$$\sin(\pi t) = \frac{0}{-2{,}5\pi^2}$$

$$\sin(\pi t) = 0$$

De donde $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

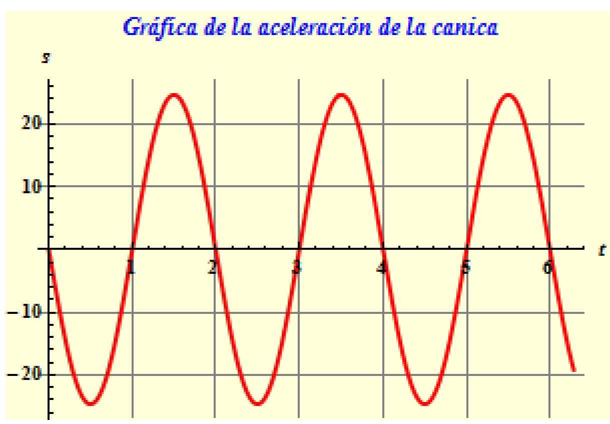


Figura 7.7

La figura 7.7 muestra la gráfica que dibuja la expresión obtenida para la aceleración de la canica.

3.7.9 Ejercicios propuestos.

1. Demuestre que las siguientes derivadas son verdaderas.

   a. $f(x) = \csc x$ $\quad f'(x) = -\csc x \cot x$

   b. $g(x) = \sec x$ $\quad g'(x) = \sec x \tan x$

   c. $h(x) = \tan x$ $\quad h'(x) = -\csc^2 x$

2. Encuentre la derivada de las siguientes funciones trigonométricas

   a. $\sin\left(x^{\sin x} + 2\right)$

   b. $x^2 \cos(\sin 4x)$

   c. $e^{3(\sin x + \cos x)}$

   d. $\sin(\cos(\tan 5x))$

   e. $\frac{1}{e^{-3\sin(x^2)}}$

   f. $\sin(\cos x \tan 3x)$

   g. $\csc\left(\frac{1}{e^{-\sin(3x+4)}}\right)$

Modele los siguientes problemas que implican funciones trigonométricas y sus derivadas.

3. La ecuación $s(t) = 3\sin 3t$ describe la posición de la lenteja de un péndulo elástico.

   a. Determine el modelo matemático que describe la velocidad y la aceleración de la lenteja.

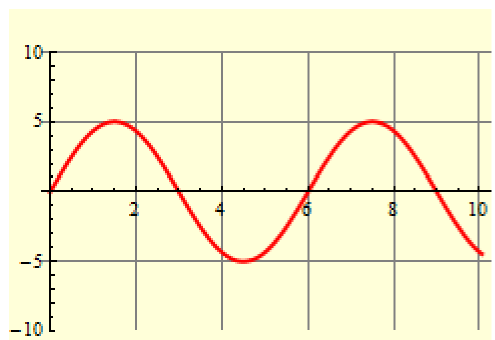
   b. Determine $s\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $s'\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $s''\left(\frac{\pi}{4}\right)$

   c. ¿En qué periodos de tiempo la aceleración de la lenteja es cero?

4. Un escarabajo se posa sobre el extremo de un resorte suspendido en el tumbado de una habitación. Una vez posado, el escarabajo se mueve de acuerdo a la ecuación: $s(t) = 2\cos[2\pi t]$.

   a. Halle la expresión que determina la velocidad del escarabajo en el extremo del resorte.
   b. Si el escarabajo estuvo posado sobre el extremo del resorte durante π segundos, ¿En qué instantes la aceleración fue cero?
   c. ¿Cuál es la máxima aceleración que experimenta el escarabajo?

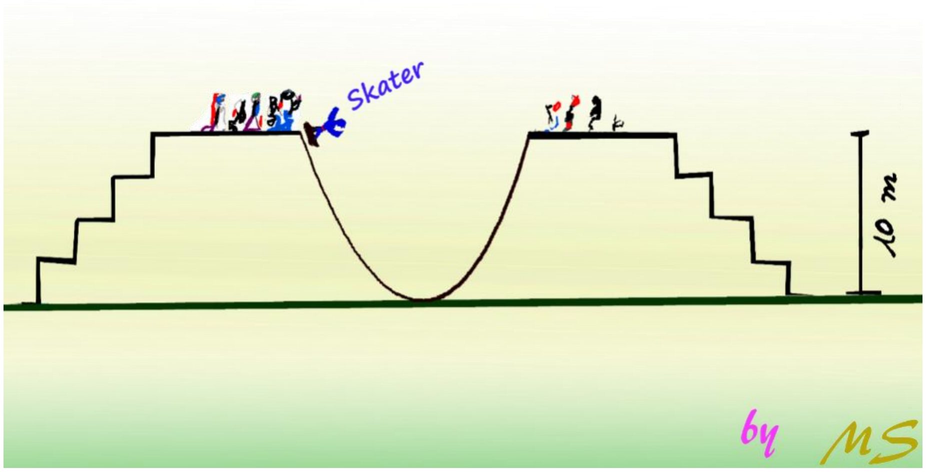
5. La siguiente gráfica muestra la posición de un objeto que pende verticalmente de una cuerda elástica.



   a. Determine la ecuación que describe el movimiento del objeto.
   b. Determine $s'\left(\frac{1}{2}\right)$; $s'(1)$; $s'\left(\frac{3}{2}\right)$; $s'(2)$
   c. Halle la expresión que expresa la aceleración que sufre el objeto que pende de la cuerda elástica.

6. EL skater se mueve de un extremo de la pista al otro en $\frac{3}{2}\pi$ segundos. De tal manera que presenta un MAS.

   Suponiendo que el skater parte desde el extremo izquierdo, determine:



   a. ¿Cuál es la ecuación que describe la posición del skater con respecto al suelo?
   b. ¿Cuál es la velocidad del skater cuando está justo sobre el piso?
   c. ¿Cuál es la aceleración del skater cuando se encuentra en el extremo derecho?

3.8 Planificación de la VIII Sesión: Diferenciación Implícita

TEMA: DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA

Objetivo:

- **Definir lo que es la diferenciación implícita y aplicarla correctamente a la resolución de problemas que implican este concepto matemático.**

Objetivos específicos de la sesión	Desempeños auténticos
• Definir lo que es una variable implícita. • Definir lo que es la diferenciación implícita a partir de la regla de la cadena. • Aplicar el concepto de diferenciación implícita en la resolución de problemas en los cuales se puedan aplicar este concepto. • Utilizar las TIC como herramientas auxiliares en la conceptualización del tema.	• Define lo que es una variable implícita. • Deriva correctamente una función implícita. • Determina la ecuación de la recta tangente a un punto de una función implícita a partir del concepto de derivación implícita. • Intercambia ideas y opiniones sobre el tema con los compañeros y el docente que imparte la materia.

¿Qué debe aprender el estudiante?	¿Cómo debe aprender?	¿Cómo se avaluarán los aprendizajes?
• El concepto y las características de una función implícita. • Aplicar el concepto de la regla de la cadena en la diferenciación de funciones implícitas. • Exponer sus ideas de manera clara y precisa. • A utilizar las TIC como herramientas auxiliares que le ayuden a resolver los problemas relacionados con el tema.	• Relacionando los conceptos previos acerca de la derivada de una función con los conceptos que se presentan en esta sesión. • Integrando los conocimientos de su vida cotidiana con los conceptos matemáticos presentados en esta sesión.	• Expone de manera clara y precisa los conceptos tratados en esta sesión. • Determina correctamente la derivada de una función implícita y realiza sus aplicaciones. • Utiliza las TIC como herramientas auxiliares en la derivación implícita.

3.8.1 Recomendaciones para el docente

Para el desarrollo de esta sesión se tomarán en consideración los tres momentos de la Enseñanza –Aprendizaje. A continuación, se detallan las recomendaciones que se hacen para cumplir con esos momentos y lograr el aprendizaje eficiente de los estudiantes en el tema.

Al ingresar al aula de clase salude cordialmente a sus estudiantes, de esta manera estará intentando crear conexión con ellos. Recuerde que usted es un motivador para ellos, de tal manera que usted mismo debe estar de buen ánimo y dispuesto a llevar a cabo la sesión de la manera más motivadora posible.

1. Activación de conocimientos previos

- Se recomienda que el docente organice grupos de trabajo de dos personas. La lectura de la "Pregunta en contexto", es un ejemplo de algo implícito: en este caso los estudiantes podrán deducir el afecto que expresa el autor hacia la persona a la que describe. Permita que los estudiantes lean y conceptualicen esta sección. Al final permítales que creen sus propias conclusiones con respecto al tema. Se recomienda que en este momento se exponga el vídeo de la sesión número ocho para darles una idea general de los contenidos de la sesión.

2. Construcción del conocimiento

- A partir de la anticipación ya se puede definir lo que es una función implícita. Se recomienda que el docente permita el trabajo de los estudiantes en la lectura y el análisis del texto que presenta esta sección.
- El docente hará notar la importancia que tiene la diferenciación implícita y su conexión con la regla de la cadena.
- Si es posible, el docente hará preguntas de exploración sobre lo que se ha visto hasta el momento, para saber si el aprendizaje se está cumpliendo satisfactoriamente, de no ser así él mismo reforzará los conceptos erróneos que pudieran presentar los estudiantes.

3. Consolidación del conocimiento

- Se recomienda hacer énfasis en el uso de las TIC como herramienta que permite dibujar funciones implícitas para que los estudiantes puedan conceptualizar el tema de mejor manera. Se ofrece un breve manual del software Mathematica, sin embargo, el docente puede utilizar otro software que el considere pertinente.
- Se recomienda que se revisen los ejercicios modelo presentados y que se realicen las actividades propuestas.

TEMA 8: DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA

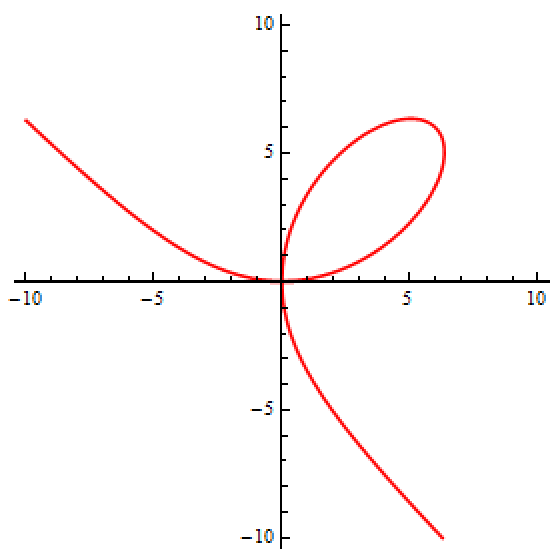
3.8.2 Actividades previas

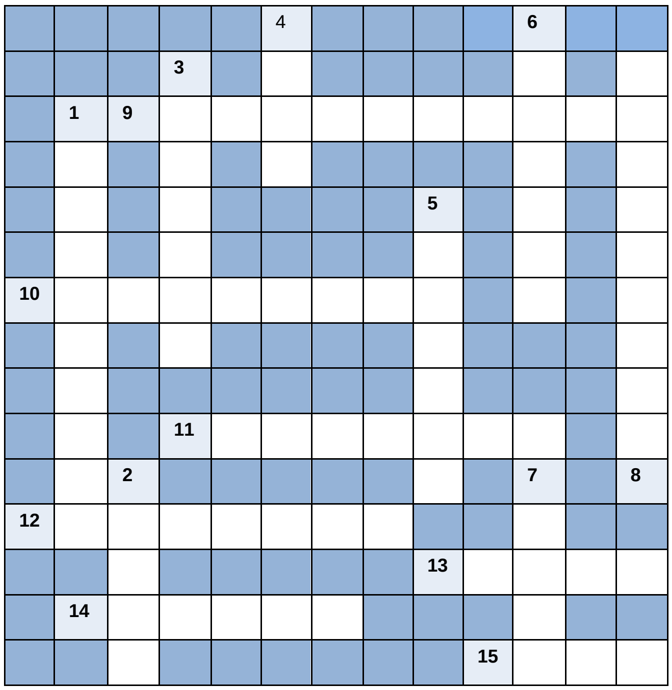
Pregunta en contexto: Lea el siguiente fragmento: Es hermosa, tiene unos ojos tan simpáticos que, si uno los buscara fuera de aquí, no los encontrarían ni con toda la suerte del mundo; son del color de la miel que al exponerse al sol combinan perfectamente con las hierbas del campo. De su fresca boca salen las más dulces palabras con las cuales me encanta, con las cuales espanta todos mis miedos y mis angustias. En sus brazos muchas veces he descansado fatigado de tantas tareas.

De acuerdo al fragmento anterior. ¿El autor siente afecto por la persona a la que describe? ¿Cómo lo sabe si el autor nunca lo ha mencionado?

Folio de Descartes.

Es una curva dibujada por una función implícita. La ecuación genérica de esta curva es: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, para la gráfica adjunta se ha tomado $a = 4$





CRUCIGRAMA:

CONCEPTOS RELACIONADOS CON LA DERIVADA

Siendo $f(x) = x^2$; $g(x) = x + 3\&\&h(x) = f(g(x))$

Verticales

1. Función de la forma $h(x) = f(g(x))$
2. $g''(x)$ es igual a …
3. $f'(2)$ es igual a …
4. Función tal que $f(-x) = f(x)$
5. Para determinar $h'(x)$ se utiliza la regla de la…
6. Variable respecto a la cual se mide la variación de la posición de un objeto en el espacio.
7. En un número complejo, parte que está representada en el eje de las abscisas.
8. Primera derivada de la posición con respecto al tiempo.

Horizontales

9. Al derivar una función de grado tres, la expresión resultante es una función …
10. La grafica de una función de grado dos se llama…
11. La notación $\frac{dy}{dx}$ la utilizó por primera vez.…
12. En el lenguaje cotidiano no decimos varía la velocidad con respecto al tiempo, sino.…
13. Derivada de $-coseno$
14. La derivada de una función cuadrática está representada por una…
15. Dentro del campo de las matemáticas. Acontecimiento que siempre sucede sin importar ni espacio ni tiempo.

3.8.3 Funciones implícitas

Para empezar:

Con la ayuda de un diccionario de matemáticas defina lo que es implícito y explícito

¿Puede definir a breves rasgos de que se trata una función implícita?

Una función, se dice que es implícita cuando la variable dependiente no está despejada.

Actividad:

Del siguiente listado encierre en un círculo el literal de las funciones que son implícitas:

a. $3xy + 2y^2 = 3$

b. $3y + 2y^2 = 0$

c. $y = 3x - 2$

d. $5x + 3 = y$

Por ejemplo, para la función: $3x^2 + 2y = 5$ la variable dependiente y no está despejada, por lo tanto, se afirma que y es una función implícita de x

Sin embargo, al tomar la misma función y despejar la variable y en términos de x se dice que y es una función explícita en x, así tenemos: $y = \frac{5-3x^2}{2}$

Pregunta:

¿Siempre es posible espejar la variable y de todas las funciones?

3.8.4 Derivación implícita.

Si no es posible despejar la variable y en términos de x, cuando si se necesite determinar la derivada de esa función, se utiliza la técnica de la derivación implícita.

Para derivar implícitamente se toma en consideración que la variable y siempre es una función de x no importa que y no esté despejada.

Entonces, se puede escribir $y = f(x)$

Cuando nos encontremos con una expresión tal que y no se pueda despejar, en realidad, nunca sabremos cual es la expresión que define a y; sin embargo, sabemos que, si existe, aunque no la conozcamos.

Obsérvese la figura 9.1. No se conoce cuál es la función que define a y, sin embargo, existe.

La técnica de la derivación implícita facilita el trabajo de derivación ya que no se necesita despejar a la variable y.

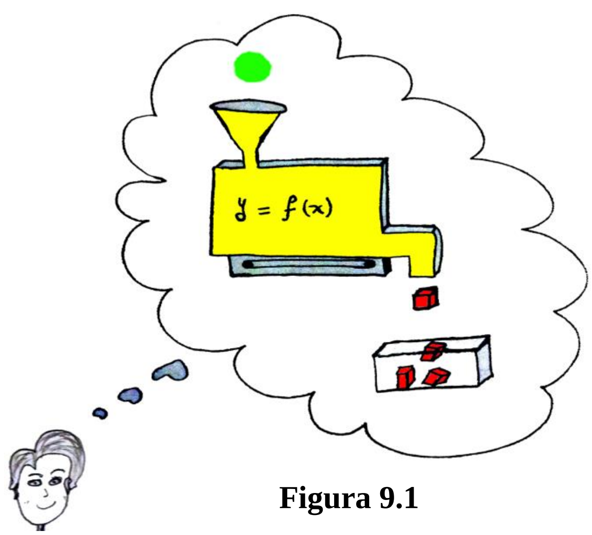


Figura 9.1

Para derivar este tipo de funciones, se procede a derivar tanto a x como a y con las reglas ya conocidas. Sin embargo, al derivar las expresiones que contengan a y, se aplica la regla de la cadena recordando que y es una función de x. Observe la figura 9.2. Finalmente se despeja y' y esa es la derivada buscada.

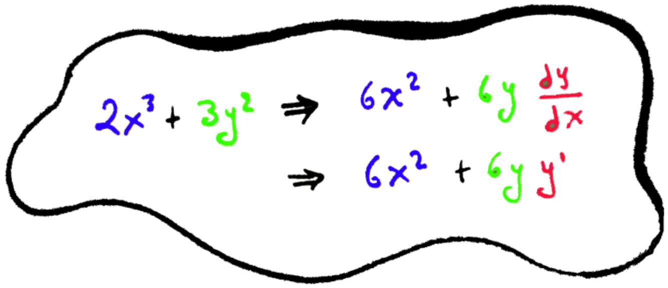


Figura 9.2

NOTA:

Siempre se aplicará la regla de la cadena a la variable y se conozca o no su expresión. Observe la figura 9.3

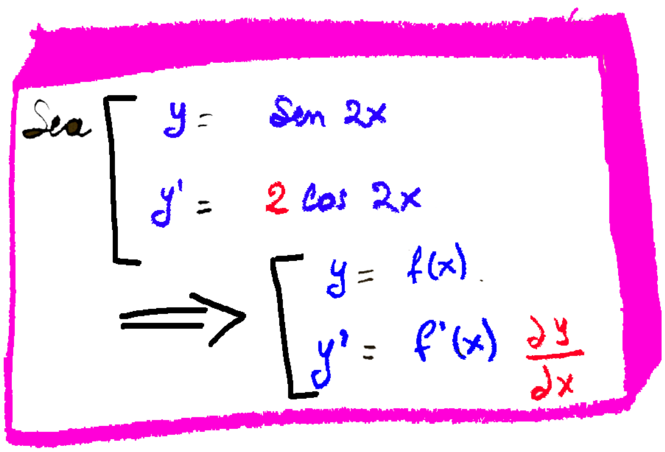


Figura 9.3

Ejemplo:

Sea la función definida por: $x^2 + y^3 = 25y$ Encuentre su derivada.

Solución:

Como podrá apreciar el lector, esta es una función en la cual no podemos despejar a la variable y. Entonces, lo que haremos es utilizar la diferenciación implícita.

$x^2 + y^3 = 25y$ *Expresión inicial*

$\frac{d[x^2+y^3]}{dx} = \frac{d[25y]}{dx}$ *Se derivan ambos lados de la expresión con respecto a x*

$2x + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 25.1 \frac{dy}{dx}$ *Aplicando la regla de la cadena a las expresiones que contienen a y*

$2x + 3y^2 y' = 25y'$ *Reemplazando $\frac{dy}{dx}$ por su equivalente.*

$3y^2 y' - 25 y' = -2x$ *Despejando y'*

$y' = \frac{-2x}{3y^2 - 25}$ *Finalmente llegamos a la expresión que representa la derivada de la función dada.*

3.8.5 Aplicación de la diferenciación implícita.

Una aplicación de la derivada implícita, al igual que la derivada común, es el determinar la ecuación de la recta tangente a un punto dado sobre la curva que dibuja la función implícita.

3.8.6 Ejercicio resuelto:

La grafica de la función $x^2 + y^3 = 25y$ es la mostrada por la Figura 9.2. Ahora, determine la ecuación de la recta tangente en el punto $(-6{,}7340\,;\,3{,}4348)$

Como ya determinamos la expresión que define a y' reemplazamos los valores de x e y en esta expresión y con ello obtendremos el valor de la pendiente.

$$y' = m = \frac{-2x}{3y^2 - 25}$$

$$y' = m = \frac{-2(-6{,}7340)}{3(3{,}4348)^2 - 25}$$

$$y' = m = 1{,}2958$$

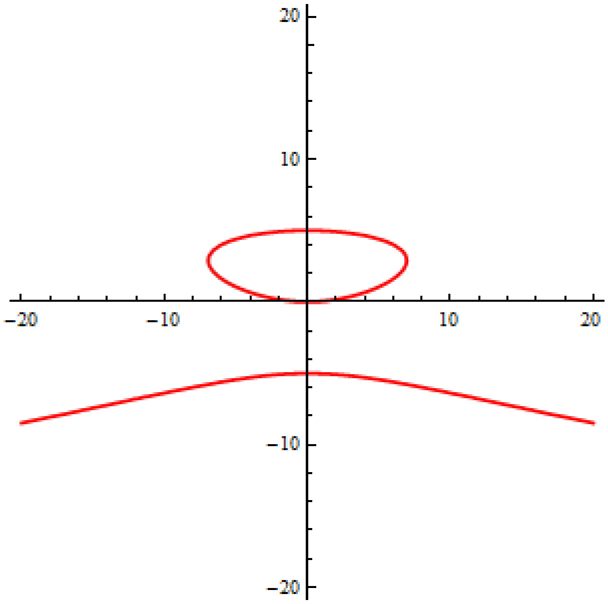


Figura 9.2

Luego utilizando la ecuación del punto y pendiente podremos hallar la expresión de la recta tangente a la curva en el punto $(-6{,}7340\,;3{,}4348)$

$$m(x - x_1) = y - y_1$$

$$m[x - (-6{,}734\,)] = y - 3{,}4348$$

$$1{,}2958[x - (-6{,}734\,)] = y - 3{,}4348$$

Operando llegamos a:

$$y = 12.1607 + 1.2958x$$

La cual define la ecuación de la recta buscada. Observe su grafica en la Figura 9.3

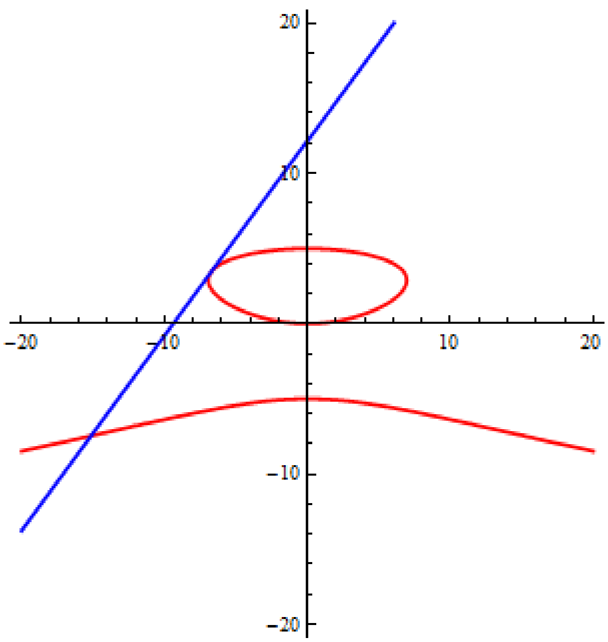


Figura 9.3

Recuerde:

Los puntos en los cuales se desea determinar la recta tangente deben satisfacer a la relación dada.

Para el ejemplo que desarrollamos anteriormente, si reemplazamos a x por $-6{,}7340$ e igualmente a y por $3{,}4348$ veremos que la relación $x^2 + y^3 = 25y$ es verdadera, es decir se satisface.

Actividad:

Trate de encontrar otro par ordenado que satisfaga la relación $x^2 + y^3 = 25y$

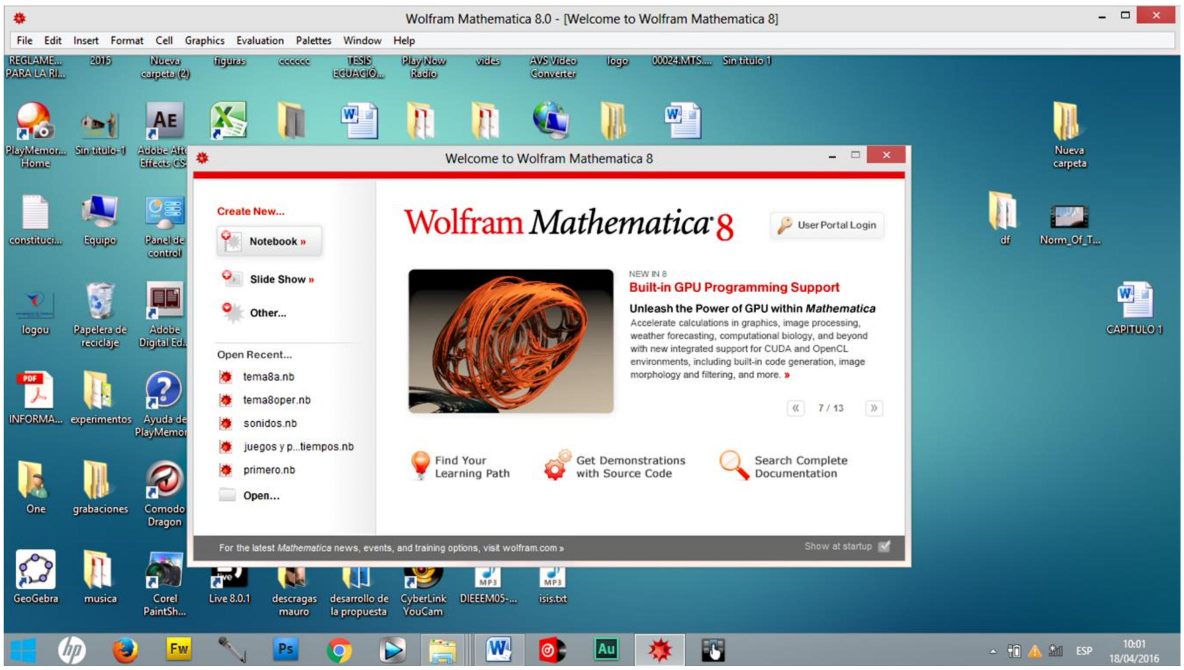
Luego, encuentre la ecuación de la recta tangente a ese punto

3.8.7 Uso de las TIC: Wolfram Mathematica y las funciones implícitas.

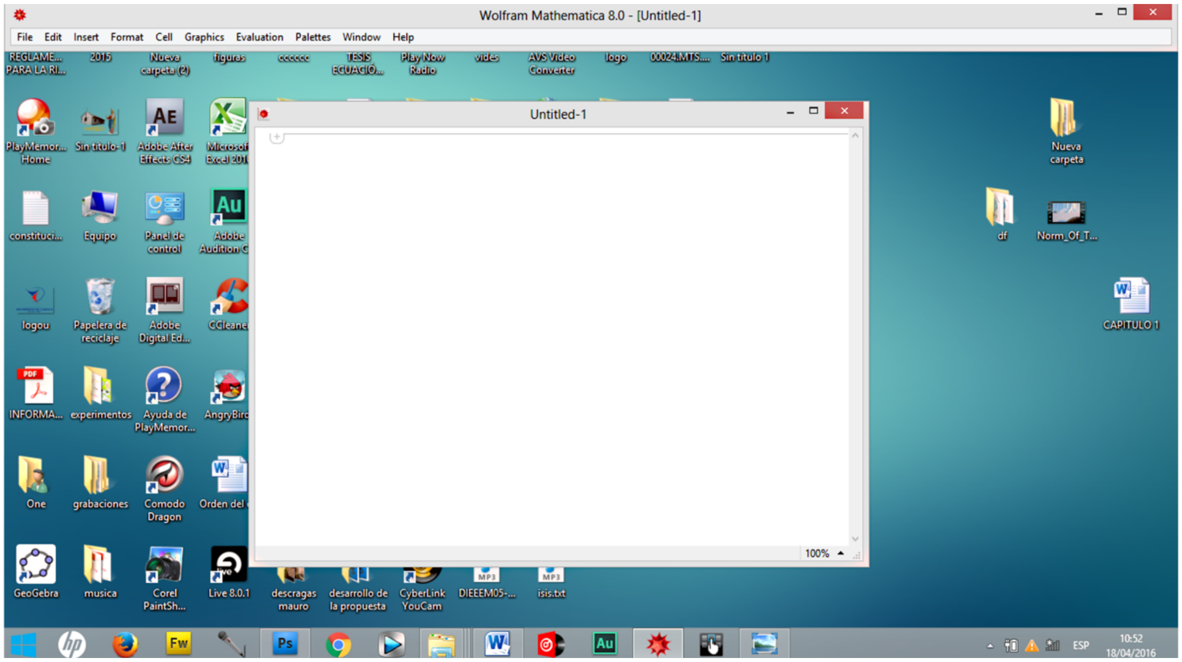
Wolfram Mathematica es una herramienta que de gran utilidad al momento de simplificar procesos muchas veces tediosos y complejos. Se pueden realizar desde operaciones simples hasta operaciones de Cálculo Diferencial e Integral, además del análisis estadístico entre muchas otras aplicaciones. Se recomienda visitar la página www.wolfram.com para obtener más información sobre este programa. En este caso vamos a utilizar esta herramienta para la graficación de funciones implícitas.

Una limitante para utilizar este programa es que se debe conseguir licencia, pero si el lector tan solo quiere probarlo, la página oficial de Wolfram permite descargar una versión de prueba o inclusive se pueden utilizar una versión del programa de manera online en la siguiente dirección: https://www.wolframalpha.com/

1. Una vez instalado el programa, cuando lo abramos se nos presentará una ventana así:



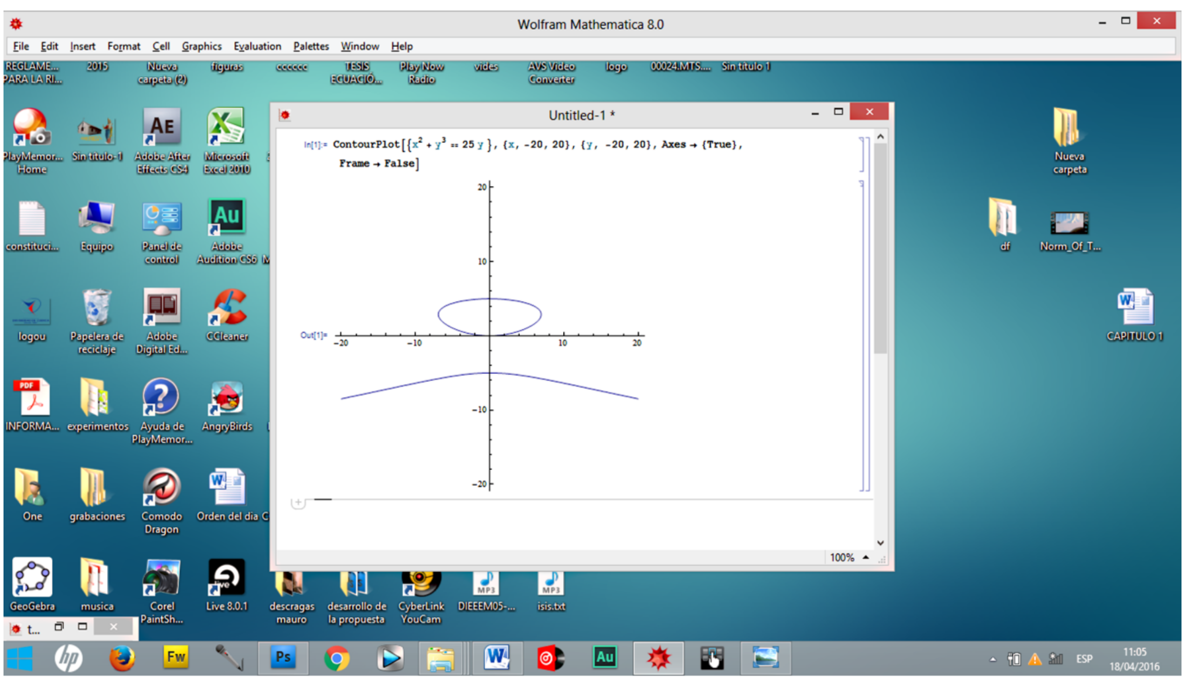
2. Damos clic izquierdo sobre la pestaña Notebook ubicada en la parte superior izquierda de la ventana “Welcome to Wolfram Mathematica” y se nos presentará una ventana como a que se muestra a continuación.



3. Luego, escribimos el siguiente código que nos permite graficar una función implícita.

   $\mathrm{ContourPlot}[\{x^2 + y^3 == 25y\}, \{x, -20{,}20\}, \{y, -20{,}20\}, \mathrm{Axes} \rightarrow \{\mathrm{True}\}, \mathrm{Frame} \rightarrow \mathrm{False}]$

   Al final presione INTRO y la gráfica de la función aparecerá tal como se muestra en la siguiente figura.

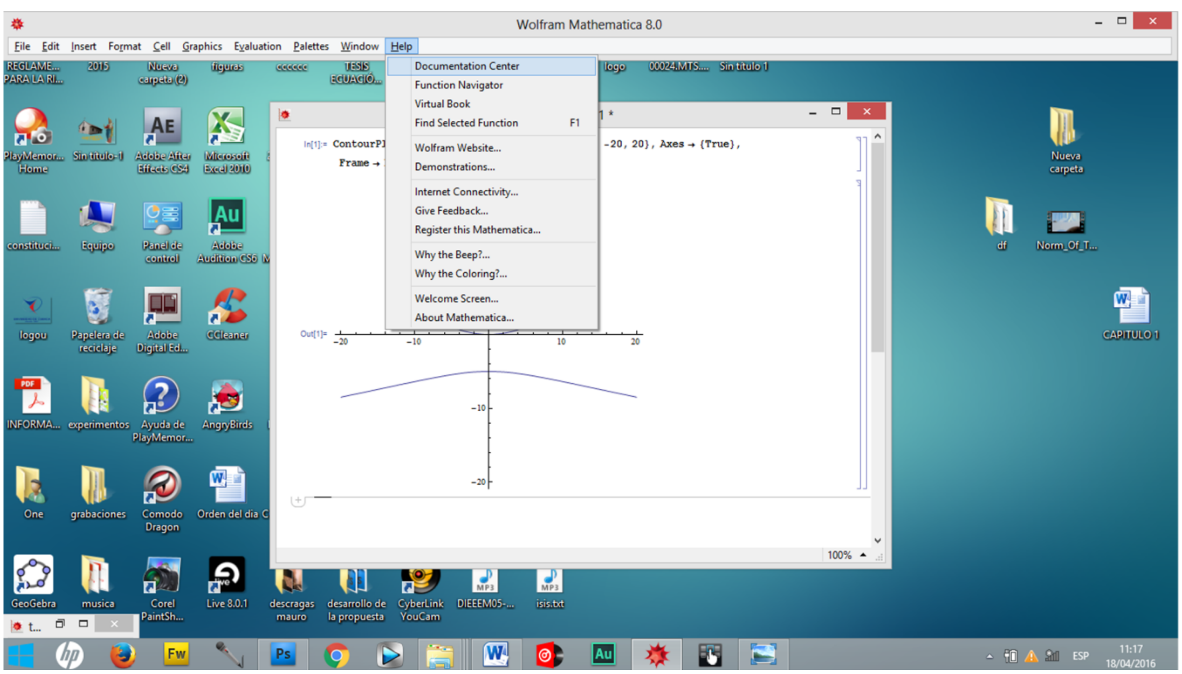


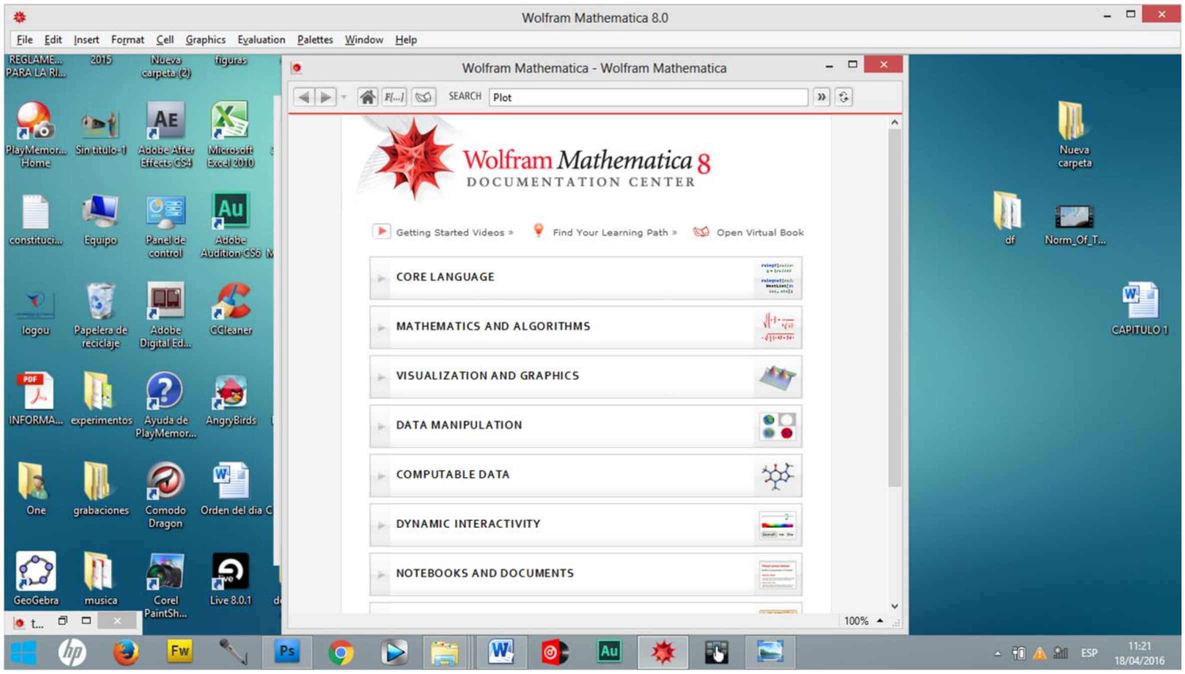
Recuerde:

El código que se introduce debe ser tal y como se presenta, respetando los signos de agrupación, las puntuaciones, las mayúsculas y las minúsculas, ya que el programa toma en consideración esto al momento de hacer los cálculos.

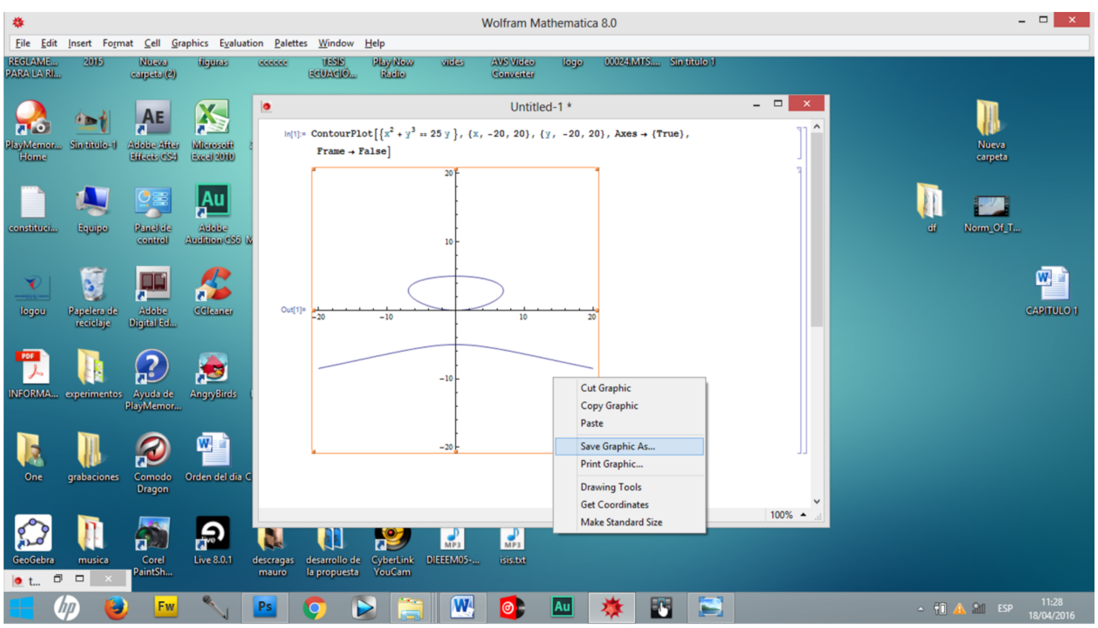
No es lo mismo escribir ContourPlot que Contourplot. Con el primer comando dibujamos la curva de una función implícita, con la segunda a pesar de que literalmente es igual a la primera el programa nos lanzará un error y no graficará.

Para obtener más información sobre los comandos que utiliza el programa vaya a la pestaña Help ubicada en la barra de menús del programa. Luego elija Documentation Center y en la barra de búsqueda introduzca la función sobre la cual usted desea saber más.

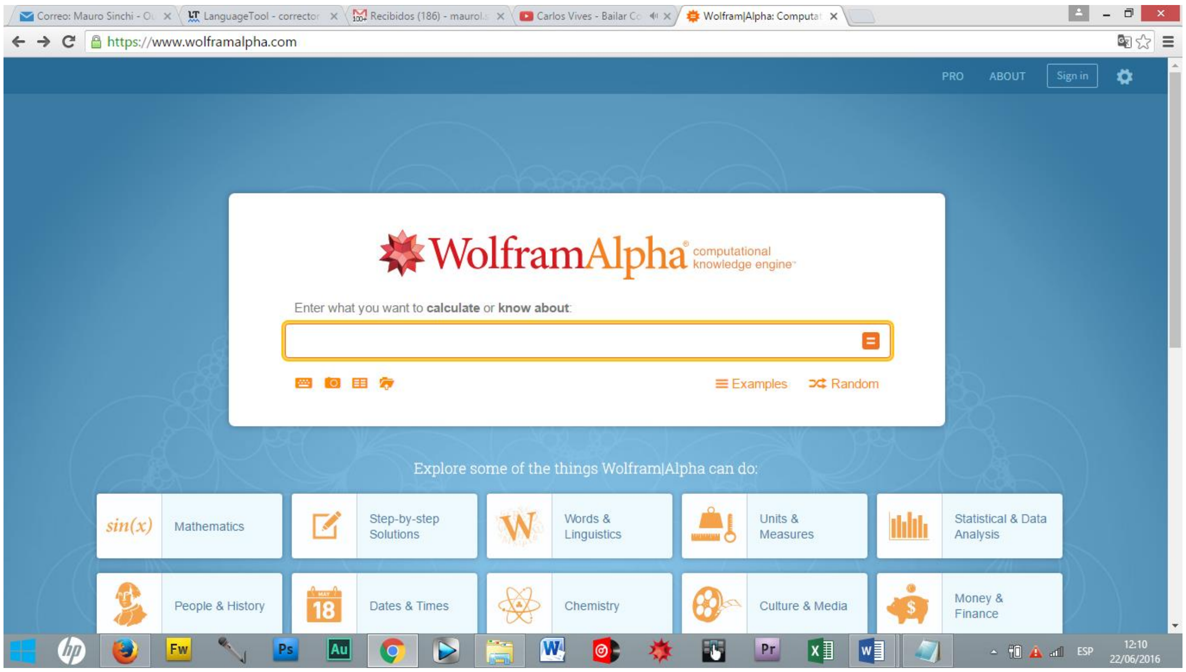




Para guardar una gráfica de clic derecho sobre la gráfica de la función y elija Save Graphic as… luego en el cuadro de dialogo escribiremos un nombre y debajo elegiremos el tipo de formato con el cual deseemos exportar a la imagen. Wolfram Mathematica presenta una gran variedad de formatos incluyendo PDF y JPEG.



Se muestra la página de WolframAlpha en la cual se pueden hacer cálculos, analizar y dibujar gráficos e inclusive se pueden hacer ciertos tipos de búsquedas. Esta página online puede ser utilizada como una herramienta para potenciar el aprendizaje del cálculo y las matemáticas en general.



Captura de la página de inicio de WolframAlpha: www.wolframalpha.com

3.8.8 Ejercicios propuestos:

1. Conteste
   a. ¿Qué es una variable implícita?
   b. ¿Para qué es útil la diferenciación implícita?
   c. ¿Por qué hay que aplicar la regla de la cadena al diferenciar implícitamente?
   d. Consulte en internet y conteste: ¿Es lo mismo la derivada implícita y la derivada parcial? ¿Cuál es la diferencia?

2. Encierre en un círculo la letra de la respuesta correcta.

Para diferenciar implícitamente:

a. Se necesita despejar la variable dependiente.

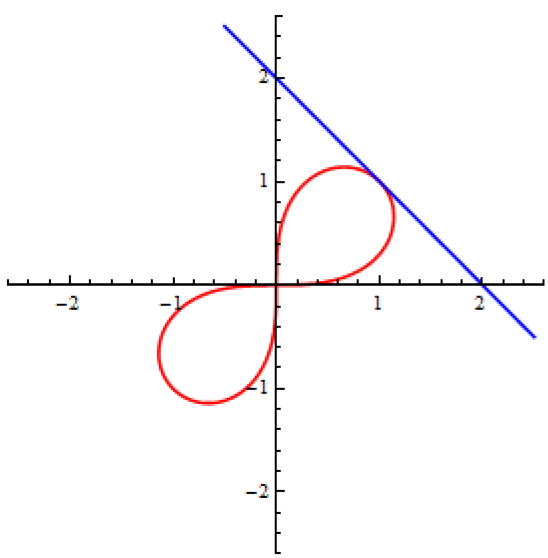
b. No se necesita de la variable independiente.

c. Se deriva normalmente, pero hay que aplicar la regla de la cadena a la variable independiente, recordando que ésta es función de la variable dependiente.

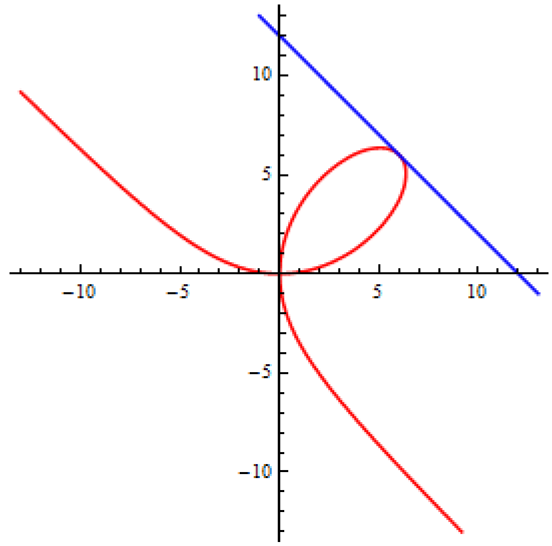
d. Se deriva normalmente, pero hay que aplicar la regla de la cadena a la variable dependiente, recordando que ésta es función de la variable independiente.

3. Determine la derivada de las siguientes expresiones y la ecuación de la recta tangente al punto dado. Se adjunta una gráfica de la función y de la recta tangente al punto dado.

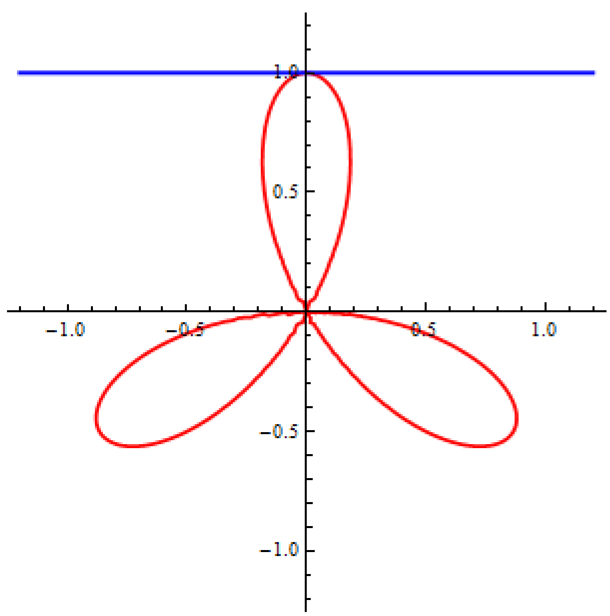
a. $(x^2+y^2)^2=4xy$ en el punto $(1\,;\,1)$



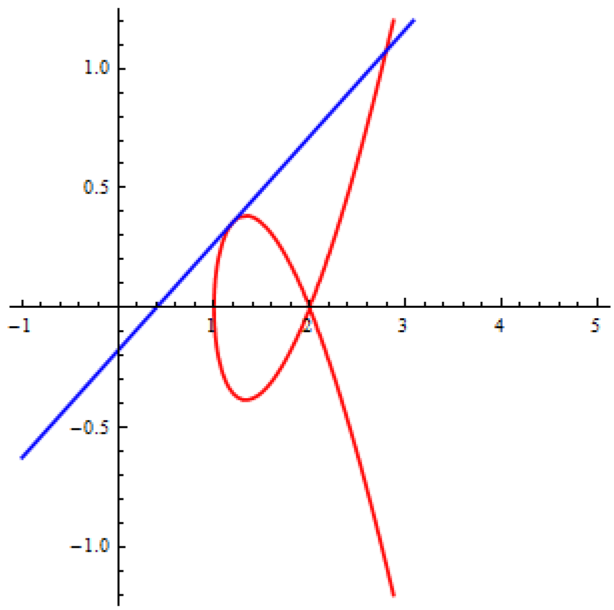
b. $x^3 + y^3 - 12xy = 0$ en el punto $(6\,;\ 6)$



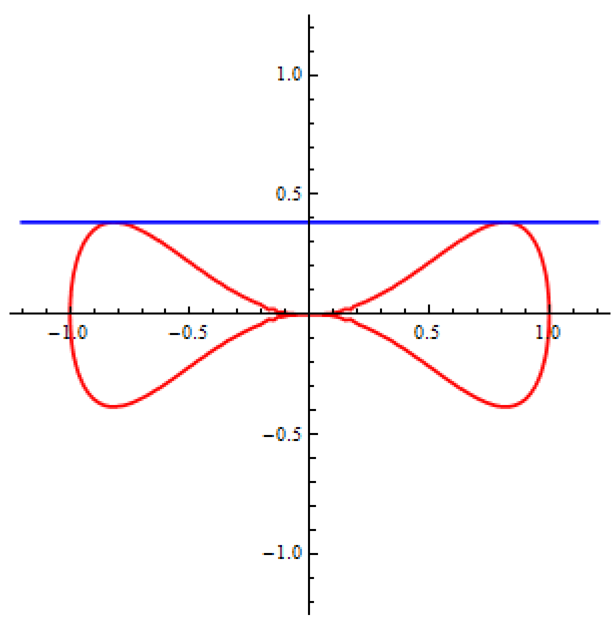
c. $3x^2y - y^3 + (x^2 + y^2)^2 = 0$ en el punto $(0\,;\ 1)$



d. $y^2-(x-2)^2(x-1)=0$ en el punto $(1{,}2\,;\ 0{,}358)$



e. $y^2-x^4+x^6=0$en el punto $(0{,}816\,;\ 0{,}3849)$



CONCLUSIONES

Luego de haber desarrollado el presente trabajo de titulación, y basándose en la fase estadística se han logrado obtener las siguientes conclusiones:

Se ha determinado que el aprendizaje de la materia de Cálculo Diferencial, presenta ciertas complicaciones para los estudiantes de la Carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca. Los subtemas que tratan de la derivada y en los cuales los estudiantes apuntan tener falencias, en orden de dificultad iniciando por el que presenta mayor dificultas son:

a. Diferenciación implícita
b. Derivada y movimiento rectilíneo
c. Derivada de funciones trigonométricas
d. Regla de la cadena

Así también, los estudiantes de la Carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca no descartan por completo las metodologías de la enseñanza tradicionalista ni a los de la escuela nueva. Para ellos la mejor forma de enseñanza-aprendizaje se dará cuando el docente haga una clase en donde integre algunos aspectos de la escuela tradicionalista y otros de la nueva escuela.

La elaboración del vídeo educativo para el presente trabajo de titulación, ha sido un elemento trascendental ya que al autor le ha permitido ver a la materia desde otra perspectiva, en cambio para los usuarios será una herramienta motivadora que despierte el interés en el tema que se esté tratando.

RECOMENDACIONES

Luego de realizar el presente trabajo de titulación y realizando una reflexión sobre todos los aspectos involucrados, se ha llegado a las siguientes recomendaciones:

Que, mediante algún trabajo de titulación se implementen materiales didácticos para el Laboratorio de Matemáticas de la Carrera de Matemáticas y Física, ya que actualmente no se encuentra equipado para brindar sus mejores servicios a los usuarios.

Que, mediante un trabajo de titulación se desarrollen vídeos motivadores para el tema del Cálculo Diferencial. Ya que la motivación es una parte muy importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Que, la presente guía didáctica es un recurso creado para que el profesor tenga a su alcance tanto material impreso como audiovisual, para que lo presente a los estudiantes en el laboratorio o en el aula de clase. Sin embargo, está diseñada de tal forma que, si un estudiante necesita reforzar algunos conceptos ya tratados o por tratar, puede hacerlo por su cuenta utilizando esta guía didáctica. Sin embargo, la presente guía de ninguna manera reemplaza al profesor.

BIBLIOGRAFÍA

Arauco, Fundación Educacional. «Arauco: Fundación Institucional.» 8 de Abril de 2015. *http://www.fundacionarauco.cl/.* <http://www.fundacionarauco.cl/_file/file_3881_gu%C3%ADas%20did%C3%A1cticas.pdf>.

Arce, Jorge. s.f. 07 de 02 de 2015. <http://186.113.12.12/discoext/collections/0034/0003/02710003.pdf>.

Arteaga Estévez, Reinaldo y Marcia Nancy Figueroa Sierra. «Portal de la Educación Cubana.» 24 de Julio de 2009. *Portal de la Educación Cubana.* Documento. 10 de Septiembre de 2015.

Asamblea Nacional. *Constitución de la República del Ecuador*. Montecristi, 2008.

Bravo, Ramos Luis. «Ice: Universidad Politecnica de Madrid.» s.f. *www.ice.upm.es.* 8 de Abril de 2015. <http://www.ice.upm.es/wps/jlbr/Documentacion/QueEsVid.pdf>.

Calero Pérez, Mavilo. *Aprendizajes sin límites. Constructivismo*. México: Alfaomega, 2009.

Carmona Jover, Isabel. *Ecuaciones Diferenciales*. México: Pearson Educación, 2011.

Continente Editores S.A. *Dificultades en el Aprendizaje de la A a la Z*. Colombia: Divinni, 2011.

Delgado Suárez, Jennifer. *Rincón de la Psicología*. 3 de Abril de 2010. 6 de Febrero de 2016.

Delval, Juan. *La escuela posible*. España: Editorial Ariel, S.A., 2002.

Gispert, Carlos. *Manual de la educación*. Barcelona: Oceano, 2011.

Good, Thomas y Jere Brophy. *Psicología educativa contemporánea*. México, 1997.

Hitos, Javier Rodrigo. «Mi media conjetura.» *Pensamiento Matemático* (2012): 4. 5 de Diciembre de 2015.

Ivi. *Classora*. 23 de Abril de 2013. 7 de Marzo de 2016. <http://es.classora.com/reports/g52283/los-hombres-mas-rapidos-del-mundo-en-los-100-metros-lisos>.

Leithold, Louis. *El Cálculo*. México: Litográfica Ingramex, 2002.

Ministerio de Educación del Ecuador. *Actualización y Fortalecimiento Curricular de la Educación General Básica*. Quito, 2010.

Parra, Cecilia y Irma Saiz. *Didáctica de las matemáticas*. Argentina: Gráfica MPS, 2005.

Ponce, Lidia, y otros. *Tests Psicotécnicos*. México: Alfaomega, 2008.

Swokowski, Earl. *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamerica, 1989.

Universidad Camilo José Cela. *El contexto educativo Universidad Camilo José Cela*. España: Espasa-Calpe, 2002.

Universidad de Cuenca. *Taller Nuevos Métodos Educativos*. Cuenca, 2008.

Vázquez Valerio, Francisco Javier. *Modernas Estrategias Para la Enseñanza*. México: Ediciones Euroméxico, S.A. de C.V., 2006.