UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA, LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

"GUÍA METODOLÓGICA PARA DOCENTES ENFOCADA EN EL BLOQUE DE MATEMÁTICAS DISCRETAS DEL SEGUNDO BGU"

TRABAJO DE GRADUACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE LICENCIADOS EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

AUTORES
PABLO ANDRÉS GUALLPA ERRÁEZ
CRISTINA ALEXANDRA SARMIENTO PLAZA

DIRECTOR
Mgs. CÉSAR AUGUSTO TRELLES ZAMBRANO

CUENCA-ECUADOR
2015

Mgs. César Augusto Trelles Zambrano

CERTIFICA:

Que el presente trabajo de graduación ha sido revisado de manera prolija, por tanto autorizo su presentación; el trabajo responde a los requisitos establecidos en el reglamento de graduación de la Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación.

Mgs. César Augusto Trelles Zambrano

C.I. 0103757340

Tutor de Trabajo de Graduación.

Resumen.

El presente trabajo de graduación titulado "Guía metodológica para docentes enfocada en el bloque de Matemáticas Discretas de Segundo BGU" se apega en la actualización de la reforma curricular, que divide la asignatura de Matemática en cuatro bloques en el Bachillerato General Unificado. El bloque tres de la asignatura de Matemáticas para Segundo BGU, correspondiente al tema "Teoría de Grafos" es un tema nuevo a tratar dentro de los planteles educativos, y no se tiene en el país una bibliografía adecuada para el estudio de dicho tema, por lo que se ha diseñado una guía para docentes para el bloque de Matemáticas Discretas, con enunciados y ejercicios, propuestos y resueltos, para ayudar en el trabajo del docente en las aulas de clase.

Para el planteamiento de ejercicios y resolución de los mismos se ha utilizado el software de geometría dinámica GeoGebra, Microsoft Excel e incluso Google Maps, de manera que la tecnología pueda ser empleada y hacer que el proceso de aprendizaje sea más dinámico y el trabajo realizado en las aulas sea significativo. Los ejercicios propuestos en GeoGebra serán compilados para que las y los docentes, y estudiantes de docencia que quieran acceder a los mismos, puedan hacerlo.

Para la presente propuesta se ha utilizado el currículum en espiral, idea propuesta por Jerome Bruner, la cual dice que el plan de estudios debe ser desde contenidos más básicos e ir aumentando su complejidad y abstracción, de modo que en cada momento del proceso los contenidos de enseñanza sean estudiados en un nivel más amplio y profundo.

Palabras Clave: Matemáticas Discretas, Teoría de Grafos, Segundo año BGU, Currículum en espiral, Jerome Bruner, GeoGebra,

Abstract.

This present graduation paper entitled "Methodological guide for teachers focused on Discrete Mathematics block of Second BGU" relates in the current curricular reform, which divides the subject of Mathematics in four parts in the Unified General Baccalaureate. The block three of Mathematics for Second year, corresponding to the "Theory of Graphs" is a new subject on high school, and there isn't an appropriate bibliography for the study of the subject, for this reason it has designed a guide book for teachers of Discrete Mathematics topic, with statements and exercises, proposed and resolved, to help teacher's work in the classroom.

For the write of exercises and solving them it has been used dynamic geometry software GeoGebra, Microsoft Excel and even Google Maps, so that technology can be used on classroom and make learning process will be more dynamic and the study work will be significant. Exercises proposed on GeoGebra will be compiled for teachers, and future teachers (students) who want to access to them, they can do it.

For this paper has been used the curriculum in spiral, a Jerome Bruner's idea, it says that studies plan should be since more basic contents and increase its difficulty and abstraction, so that in every moment of learning process, contents will be studied in a wider and deeper level.

Key words: Discrete Mathematics, Theory of Graphs, Second Year of BGU, curriculum in spiral, Jerome Bruner, GeoGebra

Índice

Universidad de Cuenca

Cláusula de Derechos de Autor

Yo, PABLO ANDRÉS GUALLPA ERRÁEZ, autor del trabajo de graduación **"GUÍA METODOLÓGICA PARA DOCENTES ENFOCADA EN EL BLOQUE DE MATEMÁTICAS DISCRETAS DEL SEGUNDO BGU"**, reconozco y acepto el derecho de la Universidad de Cuenca, en base al Art. 5 literal c) de su Reglamento de Propiedad Intelectual, de publicar este trabajo por cualquier medio conocido o por conocer, al ser este requisito para la obtención de mi título de Licenciado en Ciencias de la Educación en Matemáticas y Física. El uso que la Universidad de Cuenca hiciere de este trabajo, no implicará afección alguna de mis derechos morales o patrimoniales como autor.

Cuenca, 29 de Mayo de 2015

Pablo Andrés Guallpa Erráez

C.I: 0105786651

Universidad de Cuenca

Cláusula de Derechos de Autor

Yo, CRISTINA ALEXANDRA SARMIENTO PLAZA, autora del trabajo de graduación **"GUÍA METODOLÓGICA PARA DOCENTES ENFOCADA EN EL BLOQUE DE MATEMÁTICAS DISCRETAS DEL SEGUNDO BGU"**, reconozco y acepto el derecho de la Universidad de Cuenca, en base al Art. 5 literal c) de su Reglamento de Propiedad Intelectual, de publicar este trabajo por cualquier medio conocido o por conocer, al ser este requisito para la obtención de mi título de Licenciado en Ciencias de la Educación en Matemáticas y Física. El uso que la Universidad de Cuenca hiciere de este trabajo, no implicará afección alguna de mis derechos morales o patrimoniales como autora.

Cuenca, 29 de Mayo de 2015

Cristina Alexandra Sarmiento Plaza

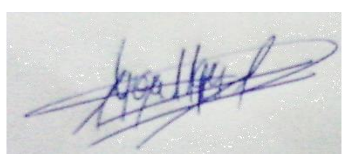
C.I: 0104440011

Universidad de Cuenca

Cláusula de Propiedad Intelectual

Yo, PABLO ANDRÉS GUALLPA ERRÁEZ, autor de la tesis "**GUÍA METODOLÓGICA PARA DOCENTES ENFOCADA EN EL BLOQUE DE MATEMÁTICAS DISCRETAS DEL SEGUNDO BGU**", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor/a.

Cuenca, 29 de Mayo de 2015



Pablo Andrés Guallpa Erráez

C.I: 0105786651

Universidad de Cuenca

Cláusula de Propiedad Intelectual

Yo, CRISTINA ALEXANDRA SARMIENTO PLAZA, autora de la tesis "**GUÍA METODOLÓGICA PARA DOCENTES ENFOCADA EN EL BLOQUE DE MATEMÁTICAS DISCRETAS DEL SEGUNDO BGU**", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor/a.

Cuenca, 29 de Mayo de 2015

Cristina Alexandra Sarmiento Plaza

C.I: 0104440011

Agradecimientos.

A quienes fueron parte directa e indirecta de la realización y culminación de este trabajo de graduación: Director de tesis, mi compañera del presente trabajo, docentes de varios colegios al momento de realizar las encuestas y entrevistas; su apoyo ha sido un pilar para el desarrollo de este trabajo de graduación.

Pablo Andrés Guallpa Erráez.

Agradezco a mi compañero de trabajo de graduación, y a mi director de tesis, Mgs. César Trelles, que siempre estuvo con nosotros trabajando para poder terminar con éxito el presente trabajo; también a los docentes quienes nos dieron un espacio para realizar los estudios estadísticos.

Cristina Alexandra Sarmiento Plaza.

Dedicatoria.

Dedico este trabajo de graduación a quienes me acompañaron en este caminar: mis padres, Rosario y Patricio, mi hermana Patricia, mi novia Andrea, compañeros y amigos; sus palabras de aliento y ánimos en cada momento han sido fundamentales para la culminación del presente trabajo de graduación.

Pablo Andrés Guallpa Erráez.

Quiero dedicar este presente trabajo de graduación a mi maravillosa familia, mi esposo John Ávila y mis hijas Ana Paula y Luciana Carolina que fueron la base y el pilar fundamental para no dejarme caer ante todas las situaciones de adversidad que fueron presentándose durante la elaboración de este trabajo de graduación, gracias a su infinito amor y comprensión es que he llegado hasta aquí.

Cristina Alexandra Sarmiento Plaza

INTRODUCCIÓN

La escuela, entendida como cualquier institución educativa de cualquier nivel, debe transformar sus metodologías; según la Actualización y Fortalecimiento a la Reforma Curricular, publicada por el Ministerio de Educación en 2010, las instituciones del país, fiscales y particulares, deben basar sus procesos de enseñanza en teorías constructivistas y de la Pedagogía Crítica, es por ello que se ha tomado como referencia la idea de curriculum en espiral, del psicólogo y pedagogo estadounidense Jerome Bruner, que sugiere avanzar progresivamente en el aprendizaje desde los contenidos más básicos hasta los más profundos y de mayor nivel de complejidad.

El actual sistema educativo del Ecuador promueve que cada asignatura sea dividida en bloques de estudio, en el área de Matemáticas, se tiene cinco bloques en Educación General Básica (EGB) y cuatro en Bachillerato General Unificado (BGU). Dentro del BGU se tiene: 1. Números y Funciones, 2. Álgebra y Geometría, 3. Matemáticas Discretas y 4. Estadística y Probabilidad. El presente trabajo de graduación está realizado en torno al bloque de Matemáticas Discretas para Segundo Año BGU, el cual se centra en la Teoría de Grafos.

El presente trabajo de graduación contiene una guía de ayuda para el docente, con ejercicios propuestos y resueltos para el tema de teoría de grafos, basándose en las destrezas con criterios de desempeño respectivas. Además, sabiendo que la utilización de las nuevas tecnologías y software educativos pueden promover una mejor comprensión de los contenidos, la guía vincula la enseñanza del tema con el Software GeoGebra, buscando que los contenidos sean más fáciles de comprender y aplicar por las y los estudiantes.

CAPÍTULO UNO

1.1 EVOLUCIÓN Y DESARROLLO DE LA EDUCACIÓN

1.1.1 ESCUELA TRADICIONAL Y ESCUELA NUEVA

La escuela, entendida como toda institución educativa, de orden básica, media o superior, ha tenido como principal característica el hecho de que “se le acusa de rutinaria y anticuada” (Valero 32); por ello, con el transcurso de los años se han modificado, a nivel mundial, varios aspectos de la educación, que dan como resultado, lo que hoy se conoce como dos grandes corrientes: La Escuela Tradicional y la Escuela Nueva, ésta última también es conocida como la escuela del pensamiento constructivista y crítico. Estos movimientos encierran diferentes conceptos y modos de actuar del docente frente a estudiantes en su clase, y es necesario que los docentes activos y en formación tengan un conocimiento claro sobre estos.

Dentro del modelo pedagógico tradicional, encontramos un proceso de transmisión de conocimientos en donde el docente es quien dirige la tarea educativa, y en torno al cual se desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje. Se puede citar cinco elementos principales de este modelo: el profesor, que como ya se ha dicho, es el centro del proceso educativo y en torno a quien gira la clase; el método, la conferencia, apuntes y memorización, considerando al alumno como un disco duro vacío en el cual hay que depositar conocimientos; el alumno, quien no presenta mayor importancia según el modelo tradicional, de papel receptivo y a quien no se le da oportunidad de convertirse en sujeto de su aprendizaje; la información, principios, valores, costumbres, y contenidos, que son prácticamente obligatorios de recibir por parte del alumno; y por último, el proceso de evaluación que se desarrolla al final del proceso (Morocho y Romero 8). Se puede decir que este modelo es algo represivo, ya que no permite al alumno desarrollarse a plenitud sino a vivir bajo reglas impuestas en el aula.

Uno de los componentes de la Escuela Nueva hace referencia a la denominada corriente constructivista; esta está dirigida al desarrollo de ciertas habilidades cognitivas; para ello se debe propiciar en los alumnos un pensamiento inductivo, es decir, la obtención de conclusiones generales a partir de datos particulares. Las habilidades necesitan de una base teórica para poder ser desarrolladas a plenitud. La teoría del pensamiento lateral y creativo de De Bono, 1970, es una técnica que plantea la resolución de problemas de manera creativa, mediante procesos ignorados por el pensamiento lógico de cada individuo. La pedagogía constructivista basa el éxito del proceso de enseñanza en el debate y la participación colectiva para dar solución a problemas de la comunidad.

La Pedagogía Crítica, el segundo componente de la Escuela Nueva, "abre un espacio en el que los alumnos deberían ser capaces de asumir su propio poder como agentes críticos; proporciona una esfera en que la libertad sin condiciones resulta básica para la Universidad, o incluso para la propia democracia" (Giroux 17) es decir, la Pedagogía Crítica hace una invitación a la mente de los educadores y educandos a ser críticos con el sistema; a través de ello entender que entender es pensar y pensar es construir, el más importante detalle en el proceso enseñanza-aprendizaje es el conocimiento que el alumno puede descubrir a medida que su desarrollo cognitivo se despliega.

"En el campo de la Pedagogía y la didáctica, no es un cuerpo dogmático que admita una sola y única interpretación" (Ayala y Pineda 26). Dadas ciertas conceptualizaciones y características de los principales modelos pedagógicos a tratar en este trabajo de graduación, podemos decir que ninguno es perfecto o imperfecto, ninguno es aplicable por completo. El profesor del siglo XXI debe ser adaptador y visionario, debe realizar una evaluación enfocada a la construcción de aprendizajes significativos. La sociedad actual exige que el docente considere aspectos positivos y negativos de cada modelo de los presentados, que son modelos contemporáneos, y aplicarlos, de manera creativa, en el aula. El profesor debe ser capaz de adaptarse a un proceso de enseñanza dinámica, mediante tecnologías y metodologías que propicien la convivencia en el aula. Consideramos, a su vez, que el proceso de enseñanza-aprendizaje en el Ecuador, debe cambiar y abandonar el modelo educativo bancario[1] y aceptar actitudes educativas que propicien la convivencia alumno-profesor. Así, la educación en el país podría cambiar.

1.1.2 CURRICULUM EN ESPIRAL DE JEROME BRUNER

Estudios realizados en Psicología del Desarrollo y Psicología Constructivista impulsaron a Jerome Bruner a promover cambios en el modelo de la enseñanza tradicionalista y conductista que mantenía en ese tiempo el sistema educativo que impedía el total desarrollo de las potencialidades de las y los estudiantes, a un modelo más funcional para con los educandos; de esta forma se da inicio a un cambio en los métodos de la enseñanza-aprendizaje, basándose en el movimiento cognitivista. Para Neisser, la cognición es el conjunto de procesos a través de los

[1] Según Paulo Friere, educación bancaria es lo que anteriormente se llamaba Modelo Tradicional de la educación; sistema unidireccional donde la comunicación docente-alumno era nula.

cuales el ingreso sensorial (el que entra a través de los sentidos) es transformado, reducido, elaborado, almacenado, recordado o utilizado (ctd en Tzic et al. 17).

Como se mencionó anteriormente, debito al contexto socio-económico de la época, Bruner propone un cambio en los métodos de enseñanza tradicional y, en conjunto con Goodnow y Austin en la obra "A study of thinking", hacen mención del papel *r*etro alimentador como función esencial en el proceso educativo, lo cual corresponde a la propuesta del Currículum en Espiral.[2] Bruner en la mencionada propuesta, establece que el proceso educativo no debe ser de manera lineal, sino en forma espiral, para que de este modo el educando parta de conocimientos previos, para luego adquirir nuevos saberes, pero siempre retomando la estructura base con niveles de dificultad más avanzados, logrando así que las y los estudiantes vayan desarrollando sus saberes de forma ordenada, ascendente y conectada entre los conocimientos anteriores y los nuevos. Dentro de su propuesta, Bruner establece que las estructuras básicas deben contener tres formas de representación:

[2] El currículum en espiral consiste en la profundización de temas, cada vez, en niveles más avanzados, construyendo los conocimientos sobre lo ya estudiado, de tal manera que los contenidos tengan conexión.

> Enactiva (ejecutora o manipulativa, que corresponde al estadio sensorio motor de Piaget), icónica (corresponde a la etapa pre operativa) y simbólica (etapa lógico concreta y lógico abstracta) según que lo predominante en su modo de asimilar la realidad sea la acción, la intuición o la conceptualización (ctd en Tascón 2)

Para Bruner el proceso educacional debe estar basado de acuerdo al método inductivo, es decir, ir de lo básico a lo complejo, de lo específico a lo general, ya que discurría que de acuerdo con el desarrollo evolutivo de las personas, lo cual se da de forma ascendente y siempre tomando como base lo más simple para luego ir adquiriendo conocimientos y destrezas complejas, mismas que irán surgiendo en pie a las necesidades de los seres humanos para su estabilidad ante las nuevas circunstancias que se vayan presentando, por tanto se debe considerar esta propuesta educativa que pone de manifiesto el método inductivo, la cual está relacionada con la propuesta del currículo en espiral que establece Bruner en su plan de estudios para una mejora en el sistema educativo que se mantenía en aquel tiempo.

1.1.3 ACTUALIZACIÓN Y FORTALECIMIENTO CURRICULAR DE LA EDUCACIÓN GENERAL BÁSICA (AFCEGB)

El actual documento curricular del Ecuador toma consideraciones de la Escuela nueva, en especial de la Pedagogía Crítica, donde se ubica al estudiante como eje del aprendizaje (Ministerio de Educación, Actualización y Fortalecimiento curricular 9). Tomando en cuenta esta base pedagógica, la AFCEGB y los lineamientos del BGU surgen en respuesta a necesidades de carácter urgente que venían exigiendo cambios al antiguo Currículo Educativo de 1996. Esta reforma en pro de la educación se hace en base a criterios tomados de las experiencias en las aulas; ofrece metodologías que puedan implementarse en el Sistema Nacional de Educación para poder alcanzar los objetivos e intereses planteados en la actual reforma curricular. Entre sus principales objetivos está la mejora progresiva de la calidad en todo el sistema educativo ecuatoriano; para llegar a éste se debe trabajar, de manera integral y equitativa, todas las personas que forman parte de la educación, llevando a cabo de manera óptima los recursos brindados en la reforma vigente.

Es así que se puede mencionar algunas de las tareas, las cuales están direccionadas al incremento progresivo de la calidad educativa; una de ellas es saber potenciar las habilidades y destrezas de los estudiantes. Para ello, hace hincapié en las mencionadas destrezas con criterios de desempeño del actual currículo educativo, mismas que se dividen en tres partes, y que deberán ser desarrolladas por los alumnos para alcanzar una formación integral. Se deben considerar los tres puntos mencionados que son: el saber hacer, lo cual nos indica las acciones que el alumno debe desarrollar, acompañadas de un conocimiento teórico y dimensionado por niveles de complejidad.

Otro aspecto muy importante es la mencionada inclusión educativa; esto significa que la educación ya no va a ser un privilegio para una determinada población, ya que gracias a la incorporación de la inclusión, la oportunidad de formarse como ser humano de manera íntegra, será equitativa. Para llevar a cabo esta mencionada inclusión las y los docentes que forman parte de este nuevo sistema deberán estar preparados/as para enfrentarse a este nuevo desafío, pues debido al cambio surgido en la educación se cuenta con bases metodológicas que serán de vital importancia para el proceso de enseñanza y aprendizaje de los y las educandos.

Por lo expuesto, el Ministerio de Educación ha dividido cada asignatura estudiada, tanto en EGB como en BGU, en Bloques Curriculares, los mismos que mantienen una relación estrecha con las destrezas con criterios de desempeño, ya que un bloque curricular "organizan e integran un conjunto de destrezas con criterios de desempeño alrededor de un tema generador.” (Ministerio de Educación, Actualización y Fortalecimiento Curricular 19).

Finalmente se puede acotar que para efectuar todo este plan educativo las y los educandos deberán llegar a poseer un pensamiento crítico, lógico y creativo, para, de esta manera llegar a la formación humana a la cual se aspira, conjuntamente con las bases pedagógicas las cuales están cimentadas en el pensamiento crítico, el cual pone como protagonista a las y los educandos.

1.2 DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

1.2.1 LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Si se reflexiona acerca del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, no solo en nuestro país sino a nivel mundial, se podrá establecer una división en dos grandes corrientes que, como nos indica Godino (19), se llamarían: Concepción Idealista-Platónica, y Concepción Constructivista. Es necesario considerar, previo el análisis de estos conceptos, una revisión histórica de la Didáctica de la Matemática.

La matemática se constituye como una de las más grandes e importantes aportaciones del talento humano para la sociedad, y uno de los mejores tesoros que nuestras generaciones hayan podido heredar, por tanto, es inevitable que docentes y estudiantes lleven a cabo una práctica donde unos se esfuercen por enseñarla y otros por aprenderla; es evidente que en los tiempos modernos necesitamos una visión donde la educación matemática sea significativa, en búsqueda de mejores resultados académicos y conocimientos aplicados por los estudiantes en su cotidiano vivir.

En opinión de Régine Douaty, docente de la Universidad de París, durante los años sesenta y setenta se dio una crisis social muy fuerte alrededor de la enseñanza de la matemática (ctd en Gutierrez 7). Los currículos de la cátedra se hallaban mayoritariamente centrados en los contenidos, en gran medida abstractos, y no ponían a la vista su aplicación, dando herramientas matemáticas que en lo posterior el estudiante podría ponerlas en práctica en varias situaciones. La didáctica de la matemática se constituye como “una disciplina del conocimiento cuyo origen se remonta a la segunda mitad del siglo XX y que, en términos generales, podríamos decir se ocupa del estudio de los fenómenos didácticos ligados al saber matemático” (Cantoral y Farfán 4); debido a que cada materia tiene su especificidad propia, es necesaria una continua mejora en las herramientas y técnicas para la enseñanza de la Matemática.

Según Godino (20), la primera noción sobre la Matemática y su enseñanza es la concepción idealista platónica que, en síntesis, nos dice que el alumno debe adquirir primero las estructuras fundamentales de las matemáticas de forma axiomática. Es decir que el estudiante deberá saber y dominar las Matemáticas en su forma fundamental: teoremas y axiomas. Posterior a ello, contando con una fuerte base matemática, el estudiante puede aplicar dichos conocimientos en la resolución de ejercicios de matemática aplicada, por lo que resultaría fácil para el docente la construcción de un currículo según esta concepción.

Luego está la concepción constructivista, a la cual podríamos considerar actualizada, pues “debe haber una estrecha relación entre las matemáticas y sus aplicaciones a lo largo de todo el currículo” (Godino 20-1). Es decir, se muestra la importancia de la Matemática según el contexto social del estudiantado antes que poner las teorías y axiomas sujetos al rigor matemático, de modo que existe un desequilibrio mental que le invita al estudiante a pensar, construyendo así un aprendizaje significativo, “los alumnos deberían ser capaces de ver cómo cada parte de las matemáticas satisfacen una cierta necesidad” (Godino 21). Al saber que la matemática es un campo universal, aplicado a prácticamente todas las áreas del conocimiento, un currículo de este tipo exige un conocimiento no solamente de la materia, sino de otras áreas. Es tarea del docente actual enseñar matemática acorde al contexto socio-económico e incluso cultural y académico de los estudiantes, de modo que los aprendizajes se constituyan en significativos.

A pesar que el estudiantado no asuma un papel determinante es su aprendizaje, debido a que encuentra monótonas las clases, es responsabilidad del docente atraer la atención del estudiante de tal manera que él (estudiante) desarrolle una cultura matemática de estudio de los conceptos y aplicaciones de la cátedra. El docente debe ser capaz de intervenir en la mente y actitud del estudiante, de manera que el nivel académico mejore y, por ende, la sociedad se convierta en una sociedad del conocimiento.

1.2.2 EL TEXTO GUÍA COMO MATERIAL DIDÁCTICO

La sociedad ha sufrido transformaciones en los últimos tiempos, modificando algunas concepciones que tenía acerca del proceso educativo y su papel en el desarrollo de la misma. “Una guía didáctica es un instrumento impreso con orientación técnica para el estudiante, que incluye toda la información necesaria para el correcto uso y manejo provechoso del libro de texto, para integrarlo al complejo de actividades de aprendizaje para el estudio independiente de los contenidos del curso” (Contreras 2); un texto guía ofrece información respecto al contenido a tratar en la misma, orientando mediante metodologías y explicaciones claras al docente y al estudiantado sobre el cómo proceder en torno a la materia de estudio.

Una guía como recurso didáctico resulta ser un texto con información organizada, considerando las partes científicas y pedagógicas de la materia, pensando en los actores principales de la educación: docentes y estudiantes. En medida de lo posible, la guía desarrollada debe ofrecer, además de información, actividades complementarias de modo que éstas faciliten el proceso enseñanza-aprendizaje, propiciando así un aprendizaje significativo. La elaboración de material didáctico escrito es una de las actividades fundamentales en el quehacer educativo, puesto que facilitan el proceso de planificación y preparación de la clase para el docente, y la recepción del contenido por parte del estudiante; es por ello que “esta área ha representado un doble reto para los especialistas” (UNESCO 5) por la cientificidad y didáctica con la que los contenidos puedan ser presentados.

1.3 MATEMÁTICAS DISCRETAS EN SEGUNDO BGU

1.3.1 ORIGEN DE LA TEORÍA DE GRAFOS

“La matemática discreta surge como una disciplina que unifica diversas áreas tradicionales de las matemáticas” (Braicovich 2). La matemática discreta entonces surge como unificación de varias ramas de las matemáticas, como consecuencia de la incursión de la sociedad en la era informática. La matemática discreta estudia a los objetos discretos, y un objeto discreto “es lo finito o lo que, si no es finito, presenta el aspecto de los números naturales, objetos bien separados entre sí; lo continuo es lo no finito, lo infinitesimalmente próximo, como los números reales, y de ahí el concepto de límite y las ideas que de dicho concepto se derivan” (Braicovich 2). La Teoría de Grafos conforma una parte de este conjunto llamado Matemática Discreta, la cual va a ser desarrollada en el trabajo de graduación titulado “Guía metodológica para docentes enfocada en el bloque de Matemáticas Discretas del Segundo BGU”.

En la ciudad de Könisberg, actual Kaliningrado, en Rusia, surgió lo que hoy se conoce como Teoría de Grafos. La ciudad está atravesada por el río Pregel, en medio de la cual están dos islas conectadas a la ciudad por siete puentes; la incógnita ciudadana fue "si una persona empieza en cualquier punto y termina en cualquier punto, ¿es posible que recorra el pueblo de modo que cruce los siete puentes sin cruzar ninguno dos veces?" (Lipschutz y Lipson 160). El mencionado problema fue expuesto a uno de los más grandes matemáticos de la historia universal, el célebre Leonard Euler, quien en 1736 demostró que tal problema era irresoluble. A raíz del trabajo de Euler "hemos presenciado un vertiginoso crecimiento gracias a importantes aportes que han hecho matemáticos, ingenieros y otros científicos, quienes han encontrado en esta área las herramientas necesarias para modelar y resolver problemas de muy distinta índole" (Moreno y Ramírez 17), tales como las redes en las Ciencias de la Computación, el trazado de vuelos para aerolíneas, etc.

La abstracción dada por Euler al problema de los puentes de Könisberg dio paso a la teoría de grafos, a pesar de ello, el primer libro referente a la teoría de grafos se publicó en 1936; fue escrito por Dénes Koning. "En honor a Euler, un ciclo en una gráfica que incluye todas las aristas y todos los vértices de se llama ciclo de Euler" (Johnsonbaugh 332) y no podría ser de otra manera, pues fue este genio de las matemáticas quien dio inicio a una de las ramas del análisis de objetos discretos. Acorde a la Actualización y Fortalecimiento a la Reforma Curricular del Ecuador de 2010, la teoría de grafos debe ser estudiada en el tercer bloque del segundo año

BGU; dentro del contexto latinoamericano se puede apreciar que el Ministerio de Educación de Argentina dispone el estudio de la Teoría de Grafos en su currículum para Matemáticas, pues estos contenidos "resultan sumamente aplicables a la escuela secundaria e incluso a los últimos años de la escuela primaria, ya que no se requiere de conocimientos matemáticos previos y permite el desarrollo de estrategias que apuntan a favorecer un buen desempeño en la resolución de problemas" (Nouche 26).

1.3.2 GEOGEBRA EN EL BLOQUE DE MATEMÁTICAS DISCRETAS DEL SEGUDO AÑO BGU

"Las herramientas tecnológicas brindan una oportunidad muy útil para la visualización de algunos conceptos matemáticos, y se convierten en un recurso imprescindible para el docente en el proceso de enseñanza-aprendizaje" (Alarcón 1). La educación debe servirse de todos los utilitarios virtuales existentes para que el proceso de enseñanza-aprendizaje resulte lo mejor posible, y, por tanto, los estudiantes alcancen aprendizajes significativos. Uno de los programas informáticos que pueden contribuir a tal objetivo es *Geogebra.*

Geogebra es “un software libre, de matemática para educación en todos sus niveles, disponible en múltiples plataformas. Reúne dinámicamente, aritmética, geometría, álgebra y cálculo e incluso recursos de probabilidad y estadística, en un único conjunto tan sencillo a nivel operativo como potente” (Geogebra 1). El docente de hoy en día debe estar capacitado en software educativo, pues así lo determina inclusive el Ministerio de Educación al decir que “se recomienda que nos ayudemos de la tecnología para la enseñanza de Matemática, ya que resulta una herramienta útil, tanto para el que enseña como para el que aprende” (Ministerio de Educación, Actualización y Fortalecimiento curricular 24), de tal manera que, al apoyarse el docente en el software educativo, el proceso educativo se direccione hacia aprendizajes significativos, y al ser un software libre[3], cumple con el decreto 1 014, que en su Artículo Uno dice “establecer como política pública para las entidades de la administración pública central la utilización de software libre en sus sistemas y equipamientos informáticos” (Gobierno del Ecuador 1).

Un ambiente virtual de aprendizaje “es un espacio en el que se da un proceso pedagógico mediado por las tecnologías” (Zuluaga, Pérez y Gómez 6); acorde a la definición anterior, se puede aseverar que Geogebra es un software que propiciará

[3] Software libre significa que el programa es gratuito, de libre acceso, ejecución, copia, modificación y distribución para el usuario.

un ambiente virtual de aprendizaje para la Teoría de Grafos, ayudando así en el mejoramiento del proceso educativo del Segundo Año de BGU, siendo este un programa que ayuda a estudiantes y docentes a nivel mundial.

Es importante acotar la importancia de Geogebra en el aula, como lo menciona un estudio realizado en España dentro del ámbito educativo, “la mayoría de estudiantes utilizan herramientas algebraicas y de medida y consideran que Geogebra les ayuda a visualizar el problema y evitar obstáculos algebraicos” (Iranzo y Fortuny 442). En otro estudio se evidencia que “Geogebra es un poderoso instrumento para llevar a cabo no solo el desarrollo de un sin número de los contenidos de la currículo, sino también, realizar la evaluación de los aprendizajes de los alumnos” (Lombardo, et al. 127). Se considera que Geogebra es uno de los recursos de más fácil acceso y comprensión, tanto para el docente como para el estudiante.

CAPÍTULO DOS

ESTUDIO ESTADÍSTICO

El presente estudio estadístico fue realizado con el fin de conocer acerca del ejercicio docente respecto al bloque de Matemáticas Discretas del Segundo Año BGU, para lo cual se realizaron encuestas y entrevistas a docentes de Matemáticas de dicho año, y a estudiantes de docencia.

El análisis de las encuestas busca justificar la realización de una guía para docentes en Matemáticas Discretas; para ello se realizó un muestreo no probabilístico, tomando encuestas a docentes de colegios representativos de la ciudad de Cuenca. A su vez, se realizó una encuesta de tipo anónimo a algunos docentes y estudiantes de docencia acerca de su conocimiento sobre el bloque de Matemáticas Discretas del Segundo Año BGU.

2.1 ENCUESTA

EDAD:

Se encuestaron a 40 personas, cuya edad se agrupó en cuatro categorías.

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
26 - 35	5	12,5	12,5	12,5
36 - 45	9	22,5	22,5	35,0
46 - 55	17	42,5	42,5	77,5
56 - 65	9	22,5	22,5	100,0
Total	40	100,0	100,0	

Tabla 2.1: Edad

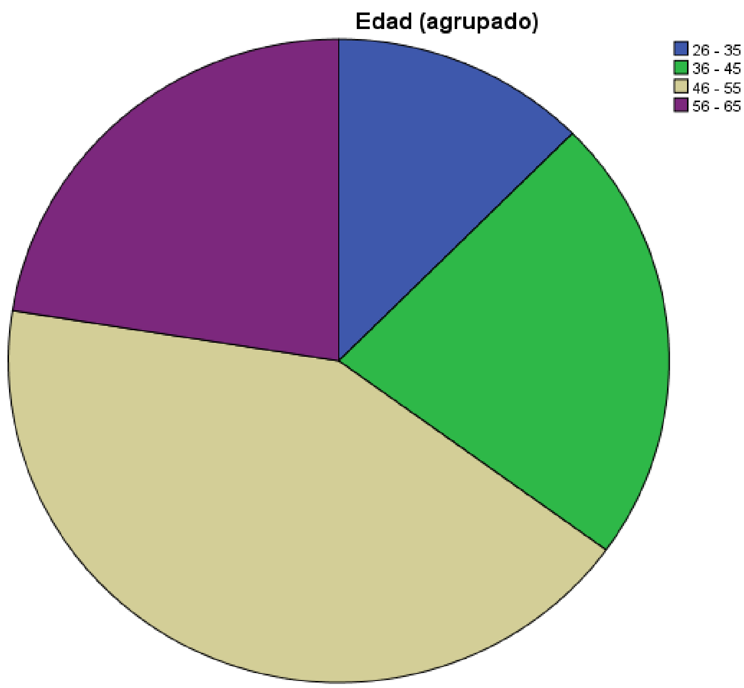


Gráfico 2.1

DISTRIBUCIÓN DE GÉNERO.

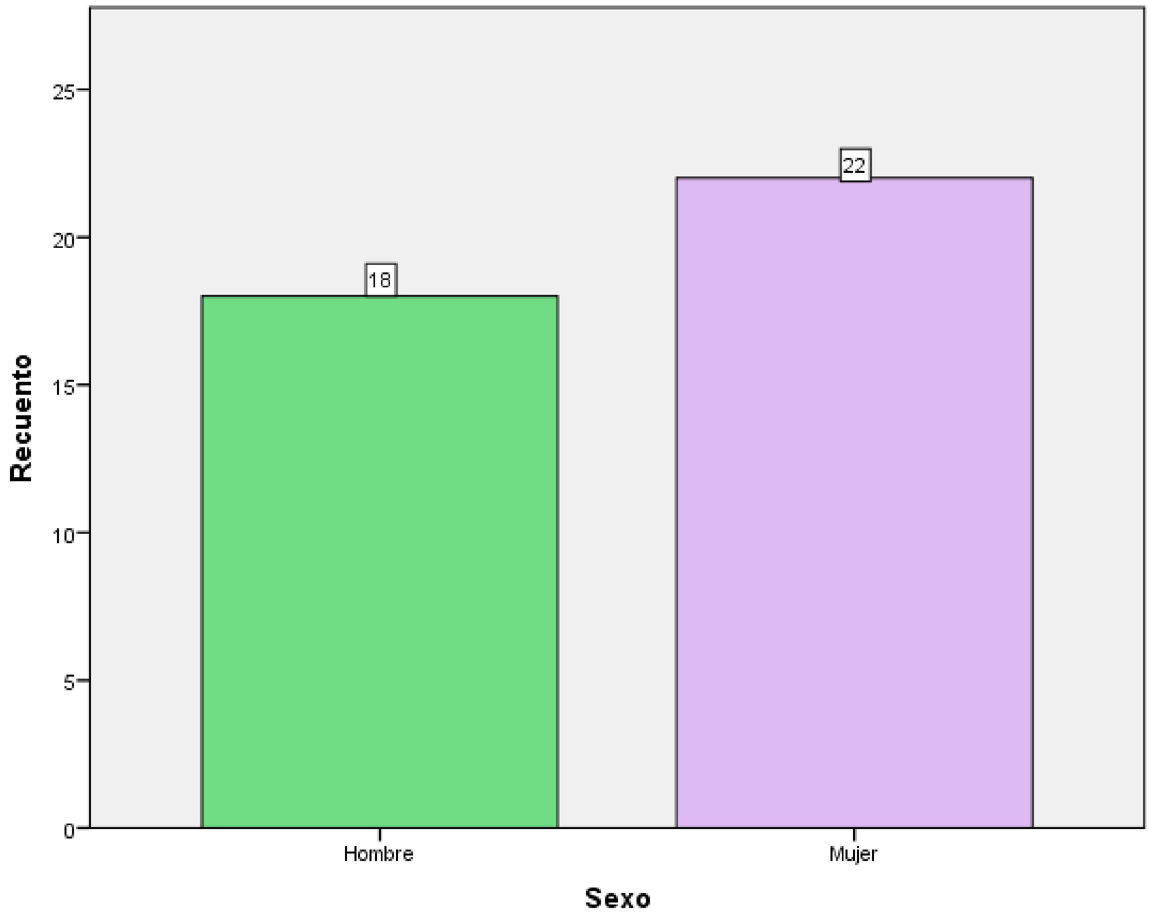


Gráfico 2.2

En la gráfica podemos observar que de los 40 encuestados, 18 son hombres y 22 mujeres.

PREGUNTA 1: Indique la titulación correspondiente a su tercer nivel educativo.

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Arquitecto/a	3	7,5	7,5	7,5
Ingeniero/a	10	25,0	25,0	32,5
Economista o similar	14	35,0	35,0	67,5
Lic. en Educación	12	30,0	30,0	97,5
Otra	1	2,5	2,5	100,0
Total	40	100,0	100,0	

Tabla 2.2: Titulaciones

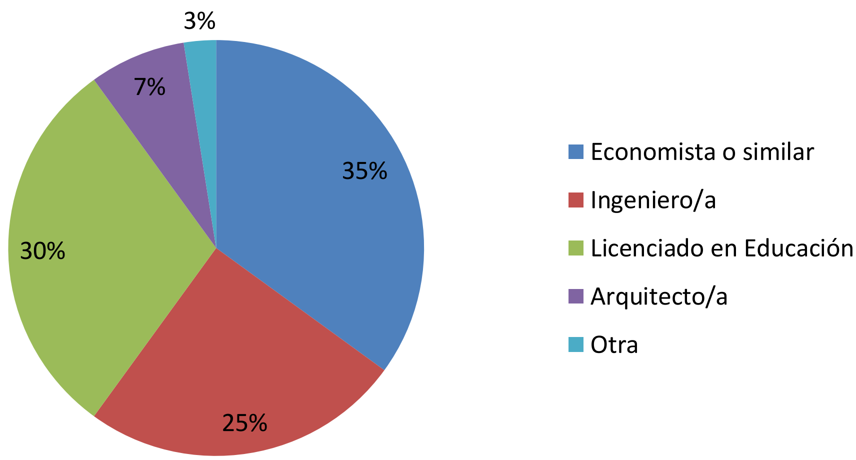


Gráfico 2.3

En el gráfico 2.3 se puede observar que existe una mayor proporción en el profesorado de Economistas (y similares) e Ingenieros (Sistemas, Electrónica, Civil). Según la muestra, se tiene que entre 40 docentes existe un 60% con titulación en Ingeniería y en Ciencias Económicas, un 30% en Licenciatura en Educación, un 7% con titulación en Arquitectura y solamente un 3% de la muestra tienen otra titulación, específicamente, Biología.

PREGUNTA 2: Por favor, indique el tiempo que ha laborado como docente en el área de matemáticas.

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
1-4 años	6	15,0	15,0	15,0
5-9 años	6	15,0	15,0	30,0
10-14 años	9	22,5	22,5	52,5
15-19 años	4	10,0	10,0	62,5
> 20 años	15	37,5	37,5	100,0
Total	40	100,0	100,0	

Tabla 2.2: Años de actividad docente

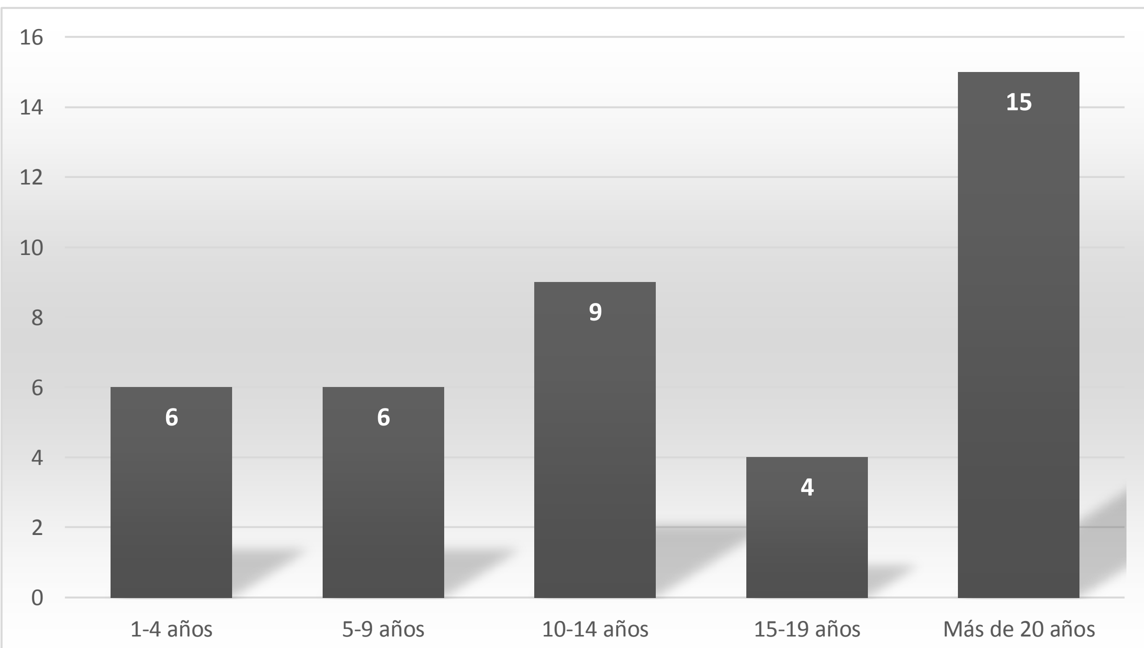


Gráfico 2.4

Se puede observar que de los 40 docentes encuestados, el 37,50% han laborado por más de 20 años en el sector educativo.

PREGUNTA 3: ¿Cuál es su metodología de enseñanza en el aula de clase?

	Respuestas	
	Nº	Porcentaje
Clase Magistral	17	21,5%
Método Heurístico	6	7,6%
Met. Constructivista	16	20,3%
ABP	10	12,7%
Trabajo Cooperativo	20	25,3%
Conductista/tradicional	10	12,7%
Total	79	100,0%

Tabla 2.3:Metodologías

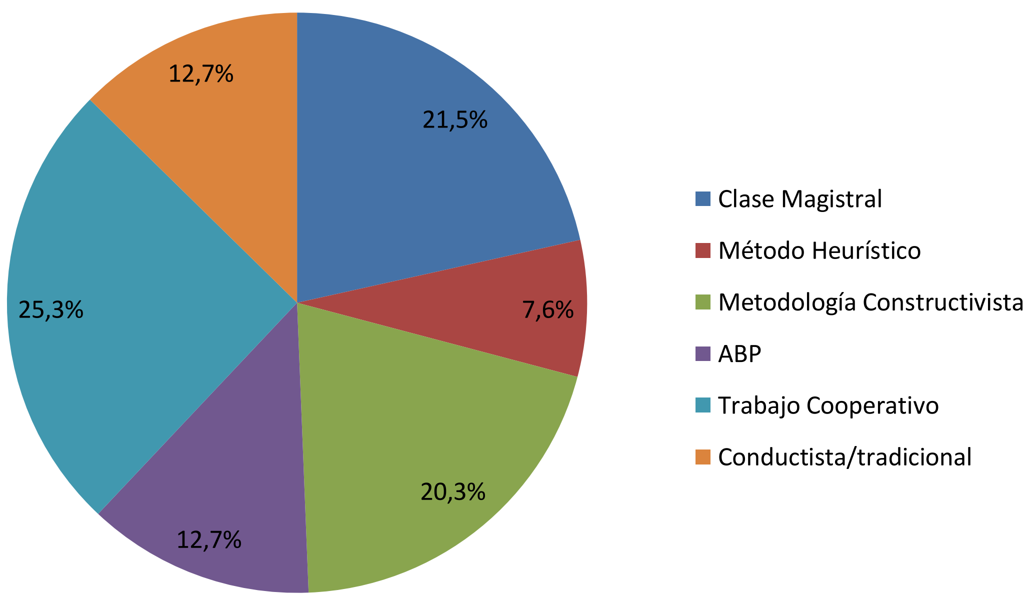


Gráfico 2.5

En esta pregunta podemos observar que el total es de 79 variantes en las respuestas, este número se obtuvo ya que los encuestados tenían la opción de escoger más de una opción en su respuesta.

PREGUNTA 4: Como docente, ¿indica a su clase la importancia de la Matemática en la vida como motivación para sus estudiantes?

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Siempre	11	27,5	27,5	27,5
Casi siempre	13	32,5	32,5	60,0
A veces	11	27,5	27,5	87,5
Casi nunca	4	10,0	10,0	97,5
Nunca	1	2,5	2,5	100,0
Total	40	100,0	100,0	

Tabla 2.4: Motivación

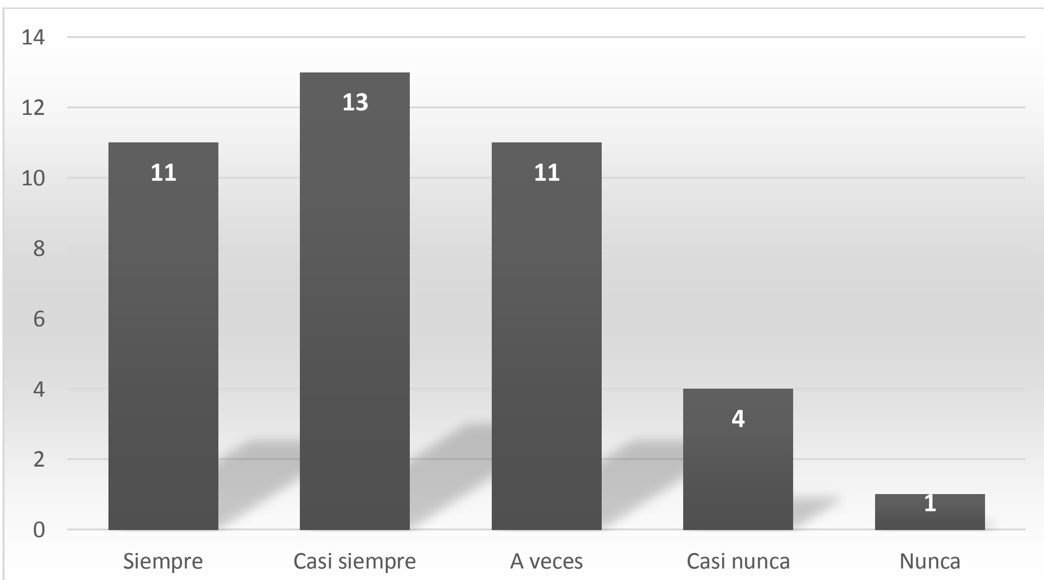


Gráfico 2.6

Según el gráfico, el porcentaje de motivación por parte del docente es alto con respecto a la materia.

PREGUNTA 5: ¿En su formación universitaria, tuvo formación en el área de Matemáticas Discretas?

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Excelente	2	5,0	5,0	5,0
Muy buena	1	2,5	2,5	7,5
Buena	2	5,0	5,0	12,5
Regular	6	15,0	15,0	27,5
Mala	10	25,0	25,0	52,5
Ninguna	19	47,5	47,5	100,0
Total	40	100,0	100,0	

Tabla 2.5: Formación en el área Matemáticas Discretas

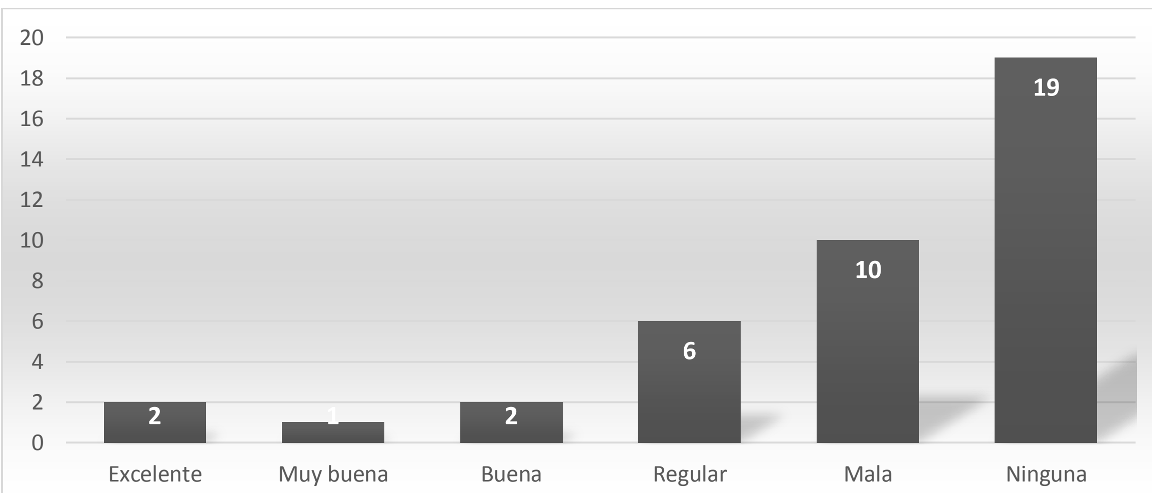


Gráfico 2.7

Se observa que de 40 docentes, el 72,5% responde no haber tenido formación en el área de Matemáticas Discretas, o haber tenido una mala formación en este tema.

PREGUNTA 6: ¿Considera usted que el bloque de Matemáticas Discretas es importante para la formación del estudiante?

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Si	35	87,5	87,5	87,5
No	5	12,5	12,5	100,0
Total	40	100,0	100,0	

Tabla 2.6: Importancia del bloque Matemáticas Discretas

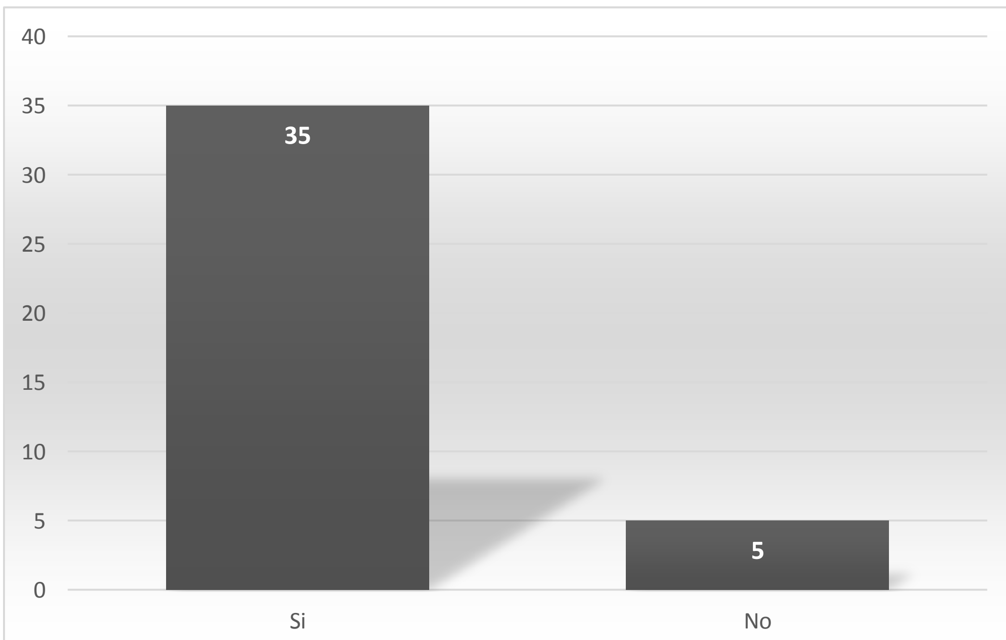


Gráfico 2.8

Un poco más del 80% de los docentes encuestados aseguran que es importante el estudio de las Matemáticas Discretas en la formación del estudiantado.

PREGUNTA 7: ¿Cuál es su posición respecto al planteamiento del Ministerio de Educación sobre la división por bloques curriculares?

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
De acuerdo	13	32,5	32,5	32,5
Más o menos de acuerdo	8	20,0	20,0	52,5
Más o menos en desacuerdo	10	25,0	25,0	77,5
En desacuerdo	9	22,5	22,5	100,0
Total	40	100,0	100,0	

Tabla 2.7: Posición frente a la división por bloques curriculares

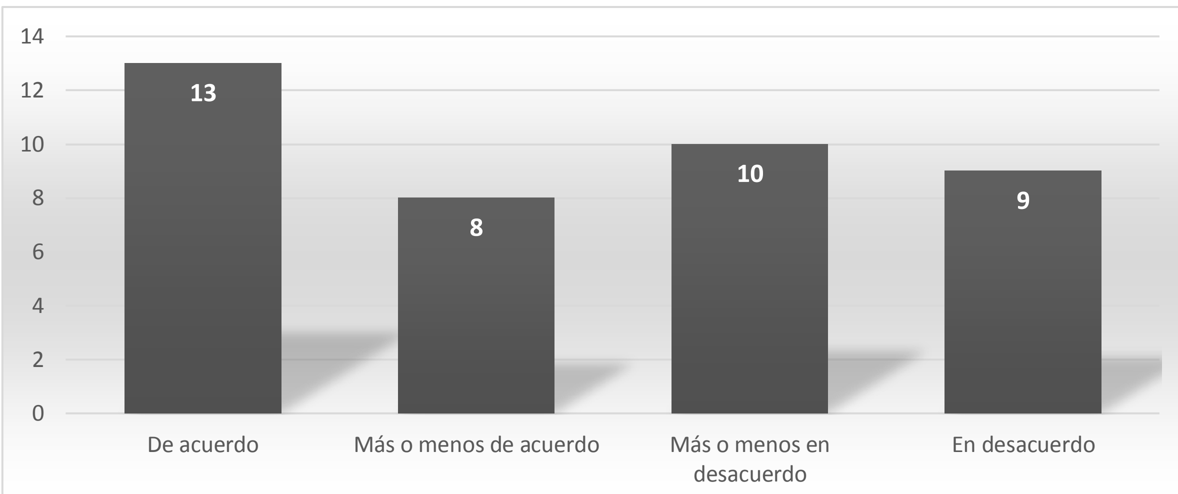


Gráfico 2.9

Respecto al planteamiento del Ministerio de Educación sobre la división de los contenidos en bloques curriculares, la encuesta indica que no existe una gran diferencia con respecto a los criterios de los docentes, dándose una leve mayoría hacia estar de acuerdo con dicho planteamiento.

PREGUNTA 8: ¿Piensa que se están alcanzando las destrezas con criterios de desempeño que están planificadas en el bloque de Matemáticas Discretas?

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Totalmente de acuerdo	1	2,5	2,5	2,5
De acuerdo	6	15,0	15,0	17,5
Más o menos de acuerdo	10	25,0	25,0	42,5
Más o menos en desacuerdo	6	15,0	15,0	57,5
En desacuerdo	15	37,5	37,5	95,0
Totalmente en desacuerdo	2	5,0	5,0	100,0
Total	40	100,0	100,0	

Tabla 2.8: Alcance de DCD del bloque Matemática Discreta

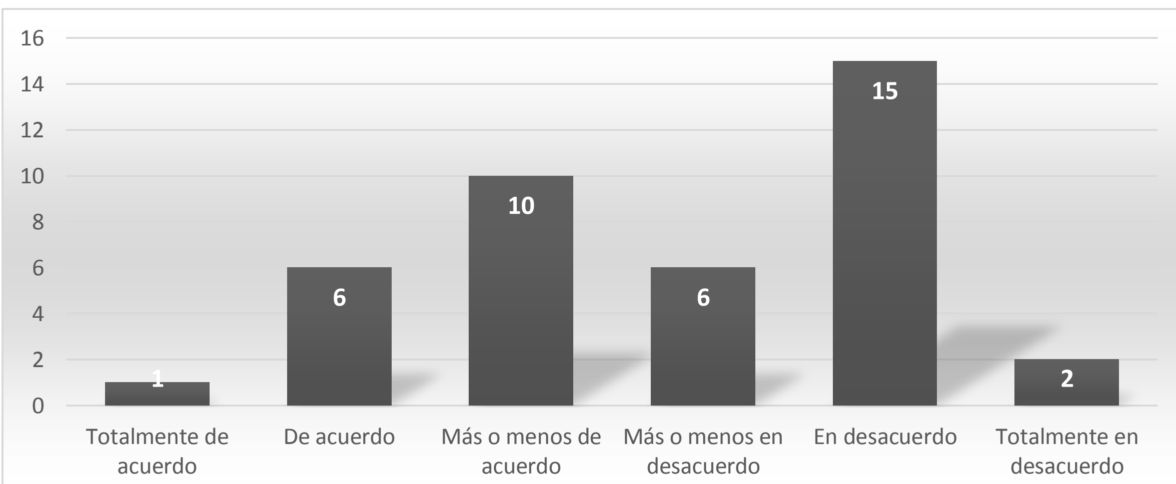


Gráfico 2.10

Un total de 23 de los encuestados considera que no se están alcanzando las Destrezas con Criterio de Desempeño planteadas por el Ministerio de Educación.

PREGUNTA 9: ¿Considera que las precisiones para la enseñanza y el aprendizaje planteadas por el Ministerio de Educación son suficientes para alcanzar las destrezas con criterios de desempeño?

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Totalmente de acuerdo	2	5,0	5,0	5,0
De acuerdo	6	15,0	15,0	20,0
Más o menos de acuerdo	12	30,0	30,0	50,0
Más o menos en desacuerdo	4	10,0	10,0	60,0
En desacuerdo	13	32,5	32,5	92,5
Totalmente en desacuerdo	3	7,5	7,5	100,0
Total	40	100,0	100,0	

Tabla 2.9: Precisiones para enseñanza y aprendizaje

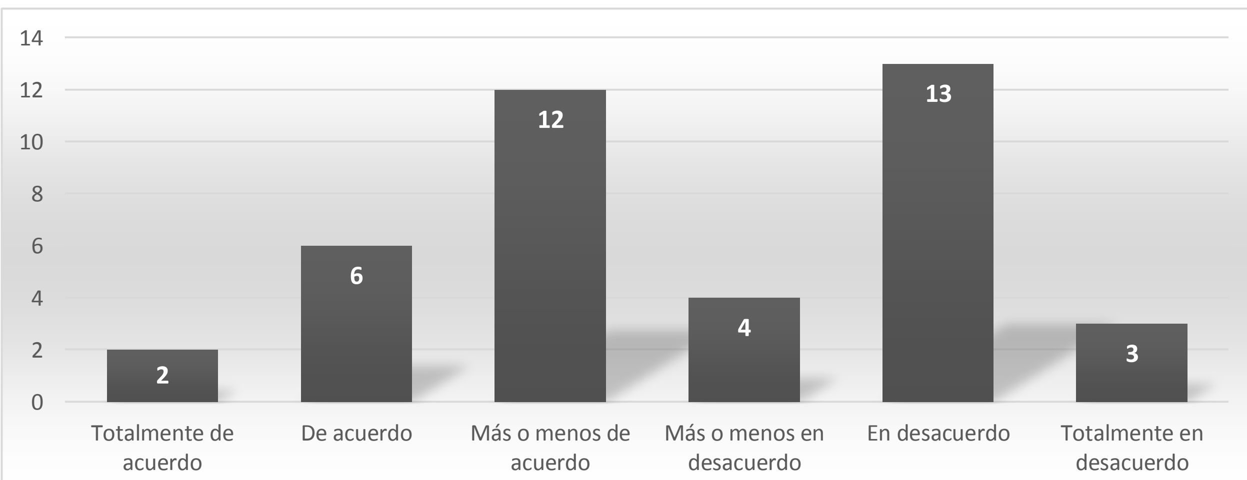


Gráfico 2.11

Se puede observar que el porcentaje es equivalente (50%) para dos grupos definidos de la siguiente manera: Opción 1, 2, 3 y Opción 4, 5, 6.

PREGUNTA 10: ¿Considera que los textos sobre Matemáticas Discretas existentes en nuestro país son acordes a la realidad del mismo?

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
De acuerdo	3	7,5	7,5	7,5
Más o menos de acuerdo	11	27,5	27,5	35,0
Más o menos en desacuerdo	5	12,5	12,5	47,5
En desacuerdo	17	42,5	42,5	90,0
Totalmente en desacuerdo	4	10,0	10,0	100,0
Total	40	100,0	100,0	

Tabla 2.10: Libros

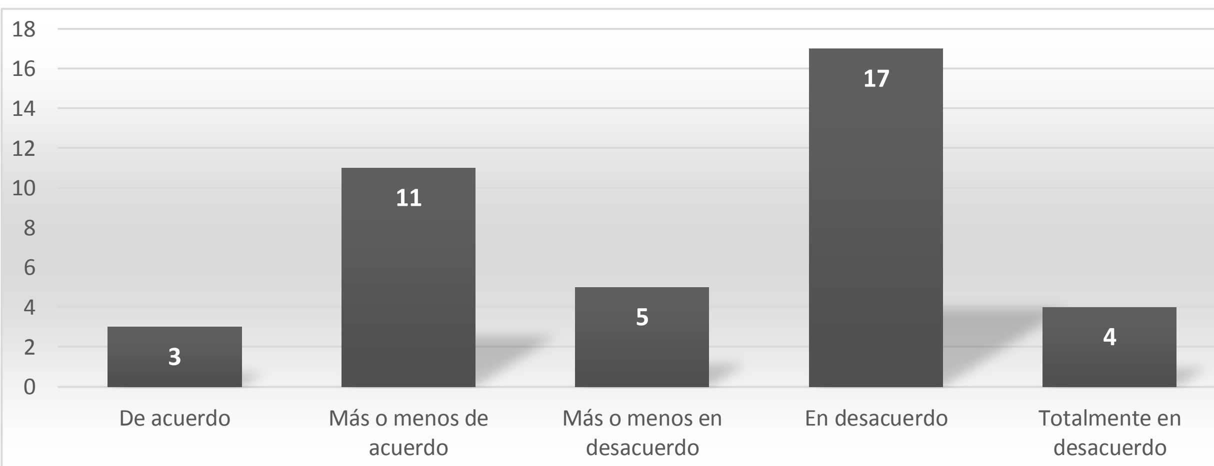


Gráfico 2.12

Se puede observar que la mayor parte de docentes encuestados opinan que los textos sobre Matemáticas Discretas existentes no son acordes a la realidad de nuestro país, lo cual justifica la realización del presente trabajo de graduación.

PREGUNTA 11*:* ¿Considera que la bibliografía existente acerca del tema de Matemáticas Discretas satisface las necesidades de la realidad de nuestro país?

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
De acuerdo	2	5,0	5,0	5,0
Más o menos de acuerdo	7	17,5	17,5	22,5
Más o menos en desacuerdo	7	17,5	17,5	40,0
En desacuerdo	20	50,0	50,0	90,0
Totalmente en desacuerdo	4	10,0	10,0	100,0
Total	40	100,0	100,0	

Tabla 2.11*:* Bibliografía sobre Matemáticas Discretas

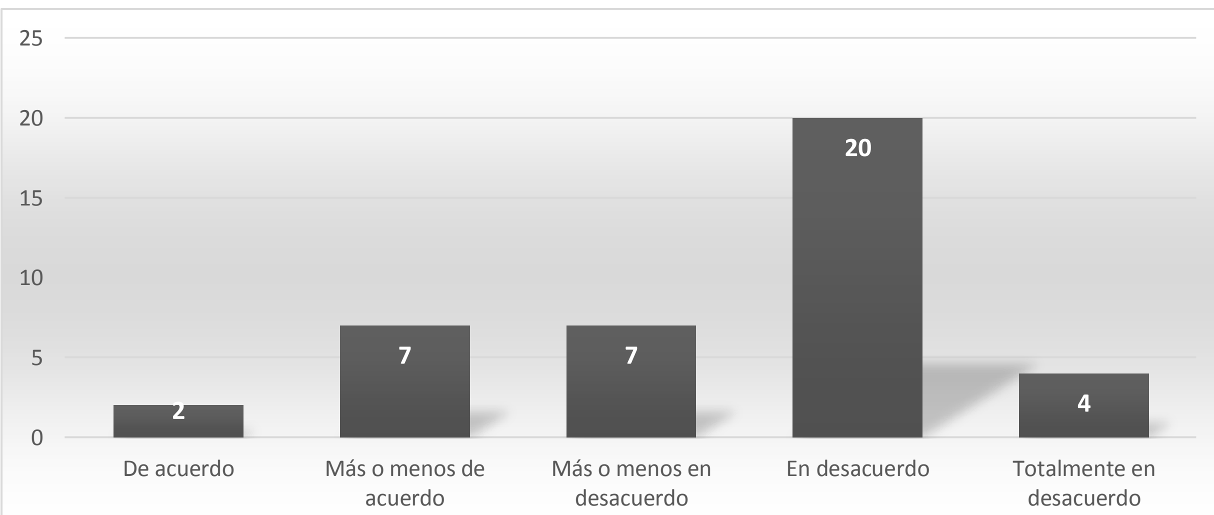


Gráfico 2.13

En cuanto a esta pregunta, el 60% de los docentes encuestados están en desacuerdo en referencia a que la bibliografía sobre Matemáticas Discretas satisfaga las necesidades de nuestro país.

PREGUNTA 12: ¿Considera que la tecnología puede ayudar a alcanzar las Destrezas con Criterios de Desempeño para el BGU, planteadas por el Ministerio de Educación?

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Totalmente de acuerdo	16	40,0	40,0	40,0
De acuerdo	14	35,0	35,0	75,0
Más o menos de acuerdo	8	20,0	20,0	95,0
Más o menos en desacuerdo	1	2,5	2,5	97,5
En desacuerdo	1	2,5	2,5	100,0
Total	40	100,0	100,0	

Tabla 2.12: Tecnología en educación

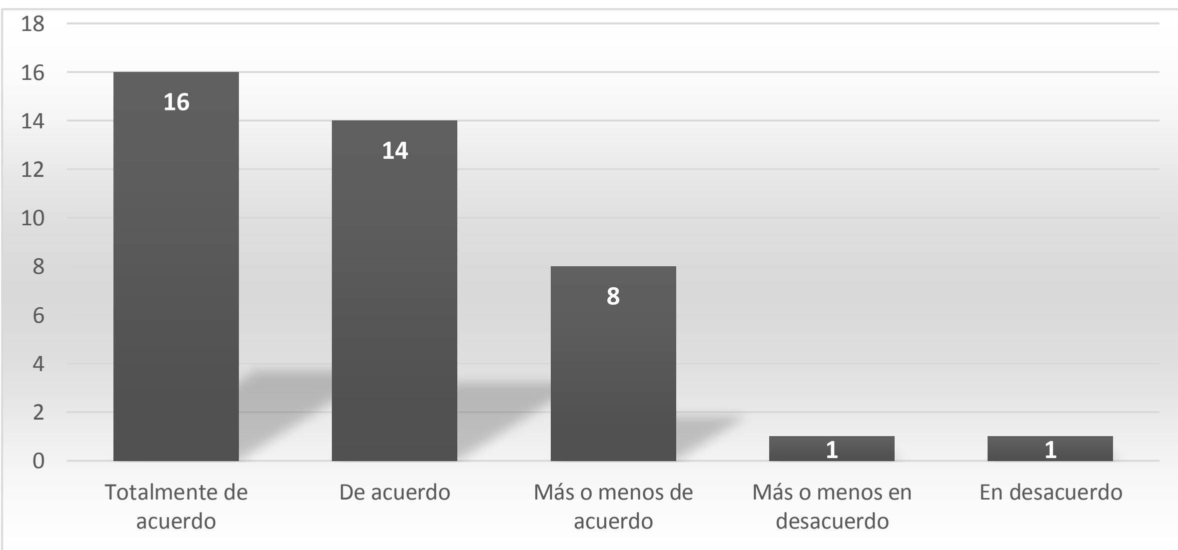


Gráfico 2.14

Existe porcentaje del 75% de docentes que consideran que el uso de la tecnología puede ayudar a alcanzar las Destrezas con Criterios de Desempeño.

PREGUNTA 13: ¿Ha utilizado la tecnología para la explicación de contenidos en su clase de Matemática?

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Si	24	60,0	60,0	60,0
No	16	40,0	40,0	100,0
Total	40	100,0	100,0	

Tabla 2.13: Uso de tecnología

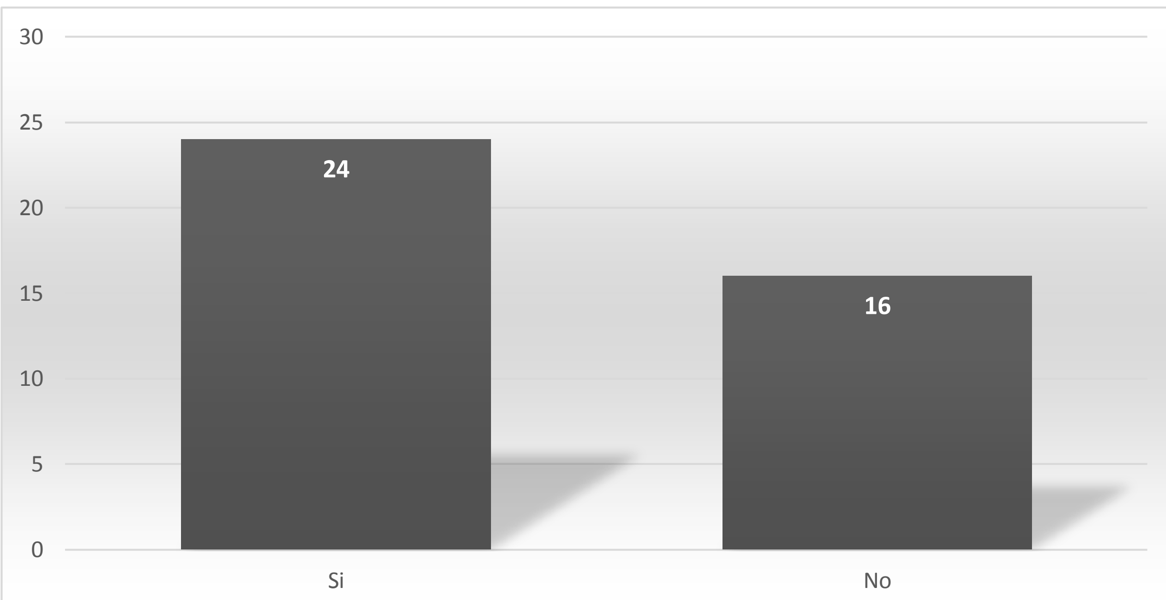


Gráfico 2.15

Un poco más del 50% de los encuestados revela que ha utilizado la tecnología dentro de sus clases. Entre los recursos utilizados, detallan: videos, proyectores, software educativo (entre ellos Geogebra) y diapositivas en Power Point.

PREGUNTA 14: ¿El plantel tiene los recursos para utilizar la tecnología que usted indicó en la pregunta anterior?

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Si	19	47,5	79,2	79,2
No	5	12,5	20,8	100,0
Total	24	60,0	100,0	
Abstención	16	40,0		
Total	40	100,0		

Tabla 2.14: Recursos tecnológicos en las Instituciones Educativas

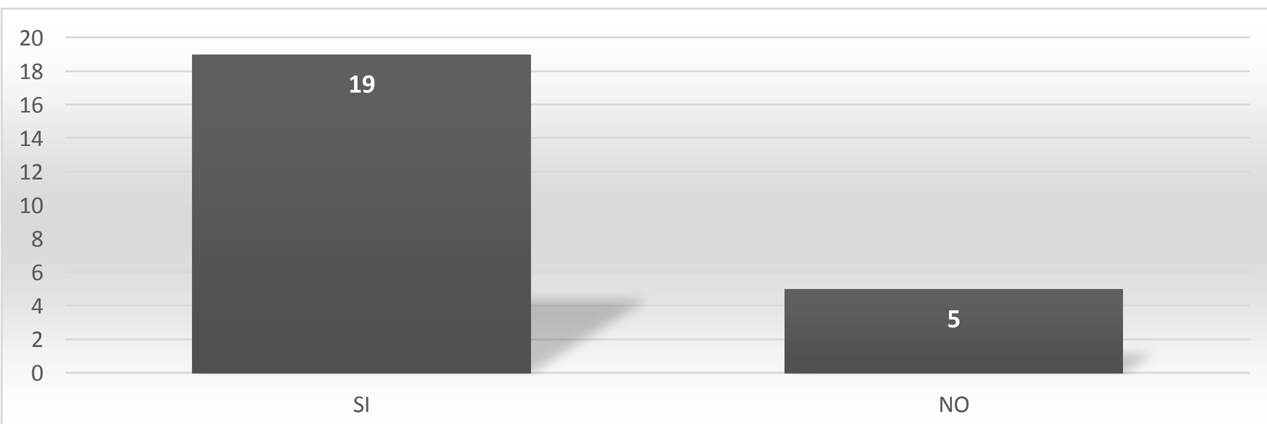


Gráfico 2.16

De los 24 docentes que contestaron "SI" a la pregunta anterior, 18 contestan que el establecimiento si dispone de los recursos necesarios para la aplicación de tecnologías en el aula, 5 docentes responden que la institución no dispone de recursos para la aplicación de tecnologías. Solo un docente dice que el establecimiento dispone de algunos recursos para la aplicación de tecnologías.

PREGUNTA 15: ¿Utiliza el software Geogebra para sus clases de Matemáticas?

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Casi siempre	4	10,0	16,7	16,7
A veces	9	22,5	37,5	54,2
Casi nunca	7	17,5	29,2	83,3
Nunca	4	10,0	16,7	100,0
Total	24	60,0	100,0	
Abstención	16	40,0		
Total	40	100,0		

Tabla 2.15: Uso del software Geogebra

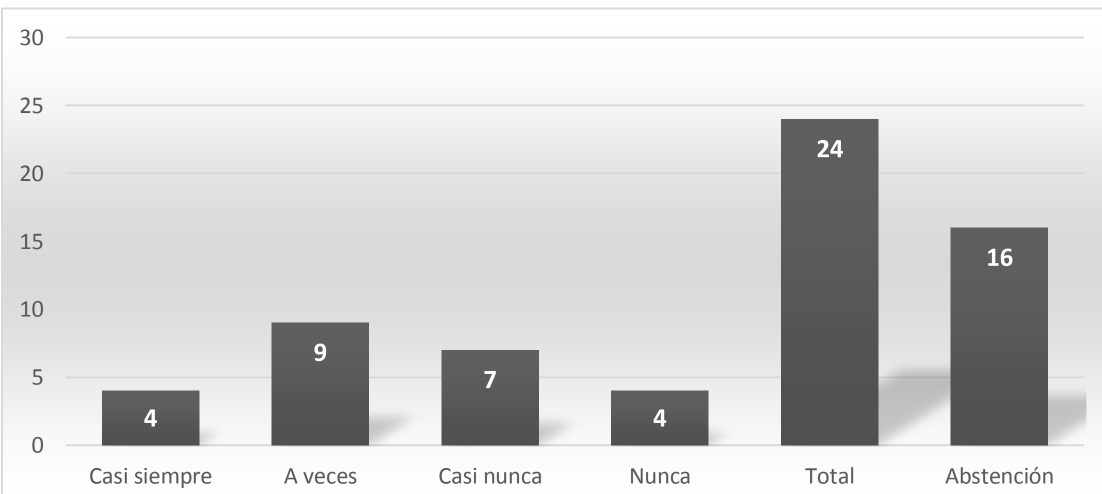


Gráfico 2.17

En su mayoría, los docentes utilizan el software Geogebra en pocas ocasiones o casi nunca, lo que muestra que, a pesar que Geogebra es un software libre, varios docentes no lo utilizan.

Se realizaron 40 encuestas. Se observa que del total de encuestados, 17 personas (42,5% del total de la muestra) están en un rango de edad de 46-55 años. Además la encuesta realizada permite observar que un 60% de los docentes encuestados son Ingenieros o Economistas/similares, mientras que apenas un 30% de la muestra tienen una Licenciatura en Educación. Se tiene también que 15 docentes, que representa el 37,5% del total llevan más de 20 años en la labor docente. El gráfico 2.5 muestra las distintas opciones pedagógicas que siguen los docentes para con sus clases. De la muestra se puede ver que el 87,5% dice resaltar la importancia de la matemática para la vida, pero un porcentaje similar indica haber tenido una formación regular, mala o ninguna en Matemáticas Discretas. De los encuestados, el 87,5% piensa que el estudio del bloque mencionado sí es importante para la formación del estudiante, y un 52,5% dice estar de acuerdo, parcial y totalmente, con la división por bloques. Pero, el 42,5% menciona que no se están alcanzando las destrezas planteadas por el ministerio. El 77,5% expresa estar parcial y totalmente en desacuerdo en que la bibliografía existente acerca del tema satisface las necesidades educativas del país, por lo que se realizó la guía para docentes como trabajo de graduación, a conocer desde el capítulo tres. Por último, de 24 docentes que dijeron haber utilizado la tecnología como recurso didáctico, apenas un 10% utiliza con frecuencia moderada el software GeoGebra.

2.2 ENTREVISTA

La presente entrevista se realizó a docentes de los segundos años de Bachillerato de cinco colegios de la ciudad de Cuenca y algunos estudiantes de docencia, la misma que fue de manera individual y anónima, constando de seis ítems los mismos que nos sirvieron como base para llevar a cabo el análisis sobre la temática del presente trabajo de graduación.

A continuación se presentará, en forma compilada, las respuestas dadas en la entrevista por parte de quienes colaboraron en la misma. El anexo 2 muestra el formato utilizado durante las entrevistas, y el anexo 4 muestra la recolección de la información durante la entrevista por parte de los realizadores de este trabajo de graduación

Análisis de las entrevistas realizadas.

Luego del análisis ejecutado en las entrevistas realizadas a docentes de segundo año de Bachillerato General Unificado hemos llegado a concluir que en nuestro existe una escases de textos relacionados con el tema Matemáticas Discretas, los mismos que tratan sobre la realidad de otras sociedades mas no sobre la realidad de nuestro país, lo cual desemboca en que no se estén alcanzando aprendizajes significativos en las y los estudiantes de tal manera que no se consiguen las destrezas con criterio de desempeño planteadas por el Ministerio de Educación de nuestro país. Es por ello que es muy importante incluir Tics en el proceso de enseñanza-aprendizaje, como nos han planteado los docentes entrevistados que es vital acompañar el proceso educativo con el uso de tecnologías educativas, ya que en la época que nos encontramos hay que aprovechar y explotar al máximo los recursos que estén a nuestro alcance para conseguir aprendizajes reveladores para que con ello se alcance las DCD.

Otro aspecto muy relevante es que las Matemáticas Discretas son consideradas por las y los alumnos uno de los bloque más complejos conjuntamente con el bloque de Números y Funciones de acuerdo a las entrevistas efectuadas y es por ello que la actividad educativa debe estar enfocada en un proceso activo donde se deje de lado el tradicionalismo y se haga uso de nuevas estrategias de enseñanza-aprendizaje, fortaleciendo este actividad con las nuevas tecnologías que están a nuestra disposición.

CAPÍTULO TRES.

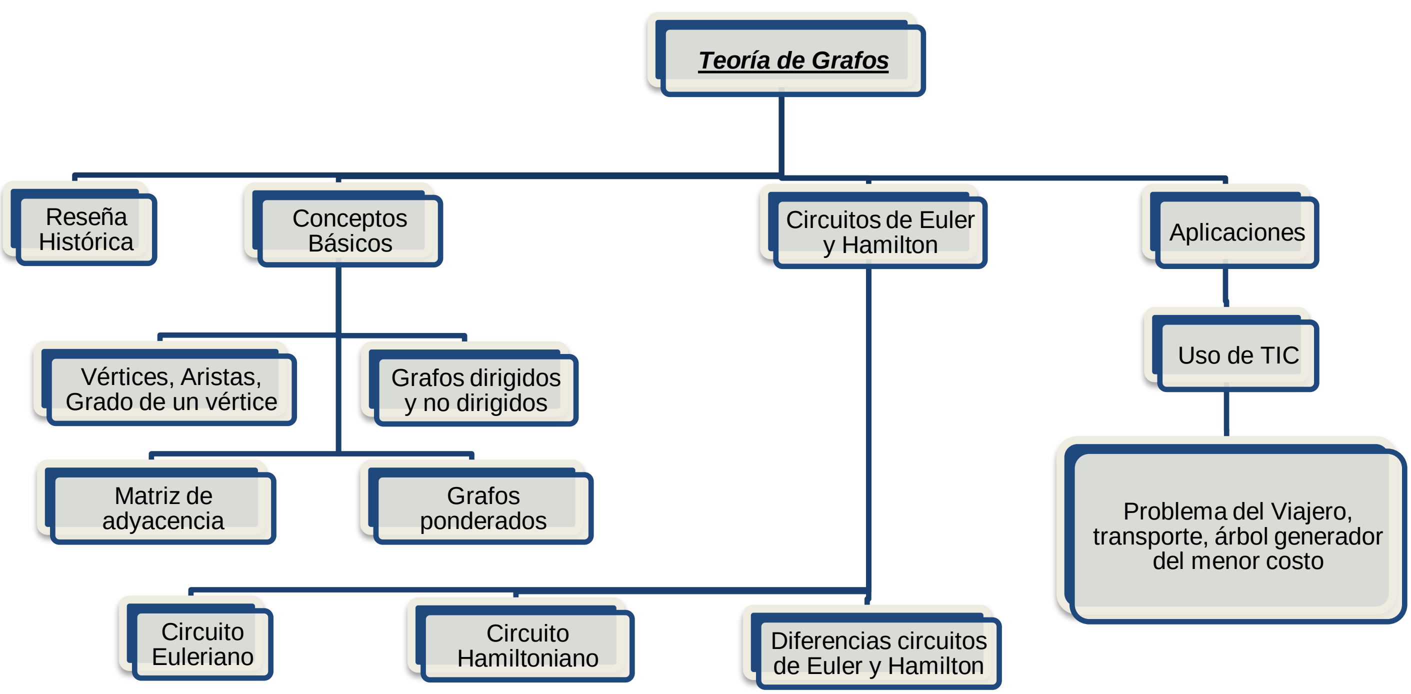
PROPUESTA: Guía metodológica para docentes enfocada en el bloque de matemáticas discretas del Segundo BGU

Justificación

El presente trabajo de graduación tiene la intención de brindar ayuda a las y los docentes del Segundo Año del Bachillerato General Unificado (BGU) de colegios de la ciudad de Cuenca, y, en forma indirecta, a estudiantes del mencionado año, y a los estudiantes de la Carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca.

Durante la recopilación de información en la fase inicial del proyecto se pudo observar que las Precisiones para la enseñanza y aprendizaje para el bloque de Matemáticas Discretas del Segundo Año BGU son mínimas a comparación de los otros bloques. Por ello, se realizó una encuesta a las y los docentes que están dando (y que han impartido y se sumaron a la propuesta) clases en este año del bachillerato, donde se pudo evidenciar que ellos, como docentes activos, no están de acuerdo en que las precisiones brindadas por el Ministerio de Educación sean suficientes para cumplir con todas las destrezas con criterios de desempeño planteadas para el bloque.

La propuesta para el bloque de matemáticas Discretas, que en Segundo Año BGU se centra en la Teoría de Grafos, utilizará en algunos ejercicios sugeridos el programa *GeoGebra*; al presentar algunos temas se plantearán actividades para el docente y para los estudiantes. El proyecto está dividido en cuatro partes, los cuales están representados en el siguiente árbol temático:



Cuadro 3.1

3.1 RESEÑA HISTÓRICA

La ciudad de Könisberg, actual ciudad de Kaliningrado, en Rusia, estaba atravesada por el río Pregel que divide a la ciudad, dejando dos islas en medio. Alrededor de 1 736, las islas se encontraban conectadas a la ciudad mediante siete puentes. Los habitantes de ese tiempo se preguntaban si existía alguna ruta posible por la cual caminar y recorrer todos los puentes, recorriendo una sola vez por cada uno de ellos. Los habitantes dieron con la solución, pero no tenían una manera formal de explicar a la misma. El problema llegó a oídos del célebre matemático suizo Leonard Euler, quien abstrajo los datos matemáticamente necesarios y dio con la solución, que coincidió con la hallada por los habitantes, la cual era que no existía ruta posible que pase por todos los puentes atravesándolos una sola vez. Así nació la teoría de grafos. En la actualidad, la teoría de grafos es muy utilizada en varios ámbitos de la vida cotidiana. En las ciencias de la computación, mediante un grafo se pueden representar las conexiones entre los distintos computadores, es decir, representar la construcción de una red.

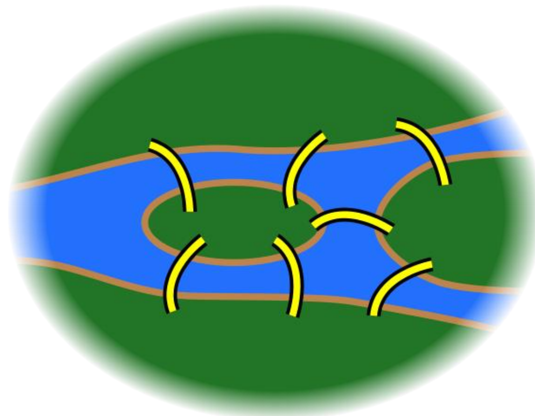


Gráfico 3.1

Ejercicios 3.1

3.1.1 La teoría de grafos nació en:

a) 1 789

b) 1 746

c) 1 736

d) 1796

3.1.2 El matemático que dio origen a la teoría de grafos se llamaba:

a) Gottfried Leibniz

b) Isaac Newton

c) Leonard Gauss

d) Leonard Euler

3.1.3 La ciudad en donde nació la teoría de grafos a través del famoso problema de los puentes se llama:

a) Siracusa-Grecia

b) Könisberg (Kaliningrado)-Rusia

c) Paris-Francia

d) Londres-Reino Unido

3.2 TEORÍA DE GRAFOS: CONCEPTOS BÁSICOS.

Destrezas con criterio de desempeño:

- *Identificar vértices y aristas de un grafo.*
- *Construir un grafo dada una red.*

Como clase inicial del bloque de Matemáticas Discretas, supóngase (usted y sus estudiantes) que en un campamento vacacional, el guía desea hacer equipos de 7 personas. Uno de esos equipos está conformado por las siguientes personas: *Valeria, Diana, Carlos, Paúl, Natalia, Santiago* y *Andrea.* Algunos de ellos ya se conocían antes de entrar al campamento. Entonces, las relaciones de amistad son:

- Valeria es amiga de: Diana, Carlos y Paúl,
- Diana es amiga de Valeria, Paúl y Andrea,
- Andrea es amiga de Diana y Santiago,
- Paúl es amigo de Diana, Valeria y Natalia,
- Natalia es amiga de Paúl, Carlos y Santiago,
- Carlos es amigo de Valeria y Natalia,
- Santiago es amigo de Andrea y Natalia.

Una forma rudimentaria de representar la situación planteada es mediante la siguiente tabla:

	VALERIA	DIANA	PAÚL	NATALIA	CARLOS	SANTIAGO	ANDREA
VALERIA		X	X		X		
DIANA	X		X				X
PAÚL	X	X		X			
NATALIA			X		X	X	
CARLOS	X			X			
SANTIAGO				X			X
ANDREA		X				X	

Tabla 3.1

Para un estudiante, la tabla anterior podría prestar confusiones, por lo que una forma más sencilla, e incluso llamativa, de representar a la situación es la siguiente:

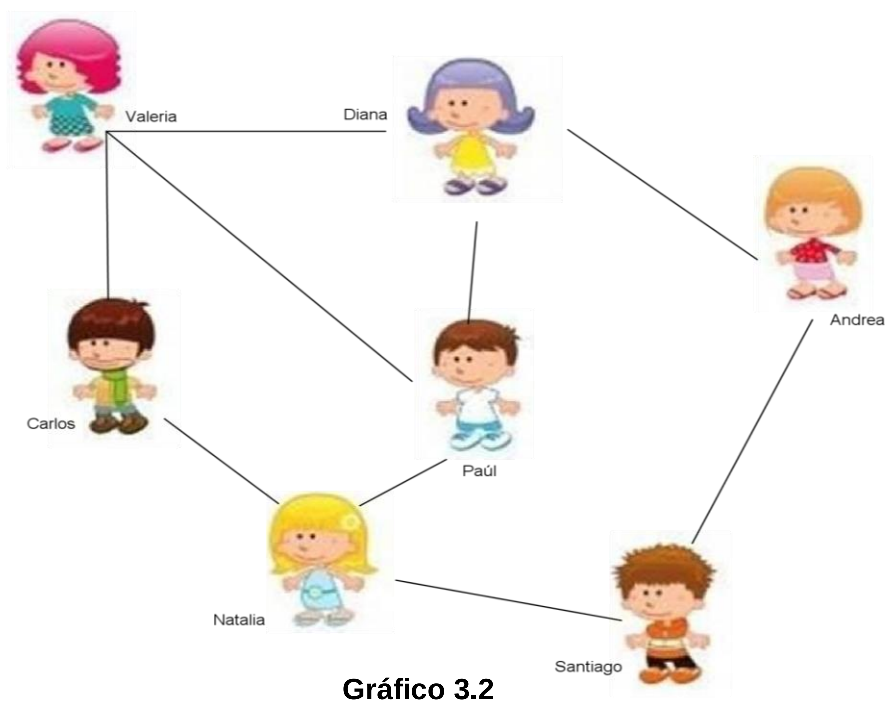


Gráfico 3.2

A partir del ejemplo anterior puede introducir el concepto de grafo. Un *grafo* es un conjunto de vértices, *V*, y aristas o arcos, *E*, lazos. Entonces:

Vértices (V): Si se observa el ejemplo anterior, un vértice son los chicos que conforman el grupo dentro del campamento vacacional. Entonces, un vértice es un punto que forma parte de un grafo.

Aristas (E): Si se observa el ejemplo anterior, una arista es aquella línea que indica la amistad entre dos o más personas que conforman el grupo. Entonces, una arista es aquella línea que une dos o más vértices.

Para definir a un grafo se utilizará la notación *G=({V},{E})*, donde V es el número de vértices y E el número de aristas. Entonces, un grafo es un conjunto no vacío compuesto por vértices y aristas. Por tanto, en el gráfico anterior se tiene *G=({7},{9}).* El gráfico 3.3 muestra un grafo de 5 vértices.

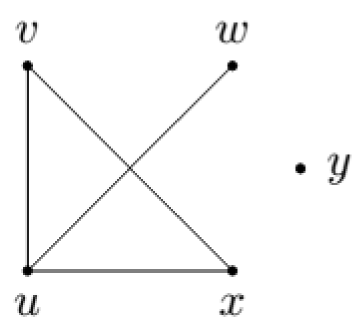


Gráfico 3.3

Resulta ahora conveniente dar algunos otros conceptos que serán de ayuda en lo posterior.

Aristas paralelas: Son aquellas aristas que unen al mismo conjunto de vértices, es decir, cuando las aristas en mención empiezan en un vértice *v* y terminan en un vértice *w*.

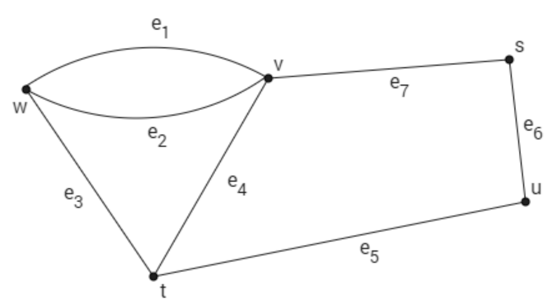


Gráfico 3.4

En el gráfico 3.4 podemos observar que las aristas e_1 y e_2 son paralelas, pues ambas inician en el vértice *v* e inciden en el vértice *w*.

Lazos: Son aquellas aristas que inician y terminan en el mismo vértice.

En el gráfico siguiente se puede observar que la arista e_2 es en realidad un lazo, pues su punto inicial y final es *w*.

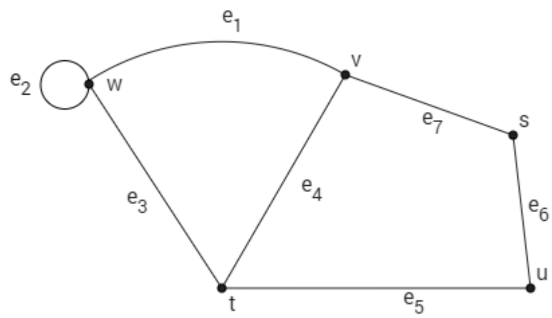


Gráfico 3.5

Como apoyo a la presente propuesta, se plantearán actividades para el docente: una para trabajo en el aula de clase con las y los estudiantes y otra para trabajo en el laboratorio de Informática. En lo posterior, cuando se agrupen más destrezas, se dará cumplimiento a la espiral de aprendizaje de Bruner; es decir, que los contenidos aprendidos a niveles iniciales sean utilizados para la comprensión de contenidos más avanzados. Las actividades propuestas para el software GeoGebra se encuentran resuelto paso a paso, además de que cada actividad en el mismo tendrá su propio objetivo.

Ejercicios 3.2

3.2.1 Indique el concepto de vértice.

3.2.2 Indique el concepto de arista.

3.2.3 Indique el concepto de lazo.

3.2.4 Exprese cuál es la diferencia entre aristas y aristas paralelas.

3.2.5 De una definición de grafo.

3.2.6 De un ejemplo de la vida real que se pueda modelar como un grafo.

3.2.7 Dibuje un grafo de4 vértices y 5 aristas.

3.2.8 Dado el siguiente grafo, escriba el conjunto V de vértices que lo conforman.

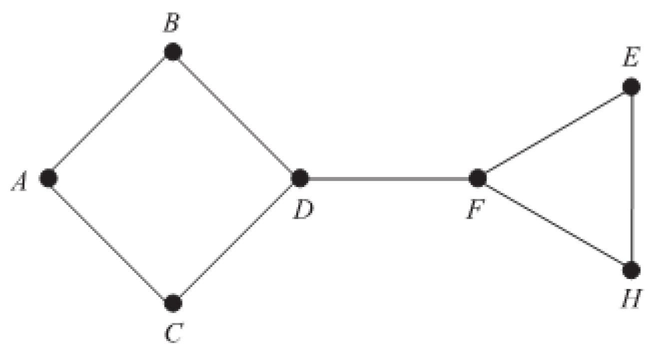


Gráfico 3.6

3.2.9 En el siguiente gráfico identifique el conjunto de vértices y aristas.

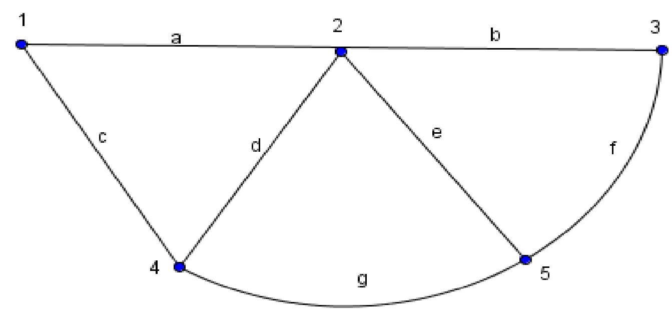


Gráfico 3.7

3.2.10 GeoGebra. En el laboratorio de Informática, plantear a los estudiantes que en el software GeoGebra se dibuje un grafo de 7 vértices.

Objetivo: *Iniciar el uso con el software Geogebra, adquirir destreza en la manipulación de las diferentes aplicaciones del software.*

- Abrir el software Geogebra. Para el trabajo, es mejor que se proceda a suprimir los ejes coordenados. Para ello, buscar el texto "Vista Gráfica" y hacer clic en la flecha izquierda hasta que se desplieguen cuatro opciones, como la gráfica siguiente. Para que se supriman los ejes, dar clic en el primer botón (Mirar en gráfico, "EJES").

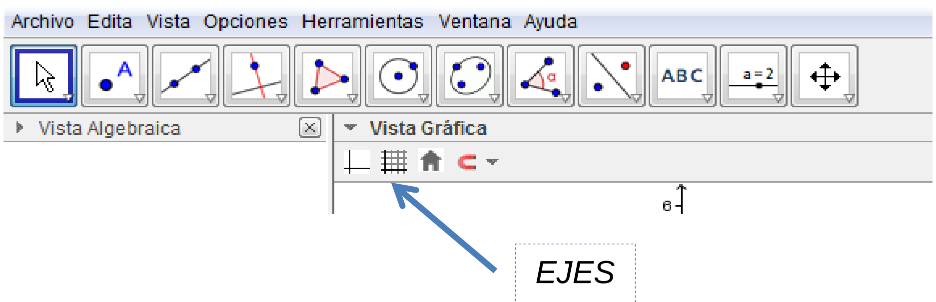


Gráfico 3.8

- En la opción  dar clic en la pequeña pestaña inferior derecha y seleccionar PUNTO. Se colocan 7 puntos al azar dentro de la vista gráfica –pantalla- del GeoGebra. Se pueden unir los puntos como el estudiante desee. Para ello se pueden tener dos opciones: Unir con líneas y unir con arcos entre tres puntos o vértices.

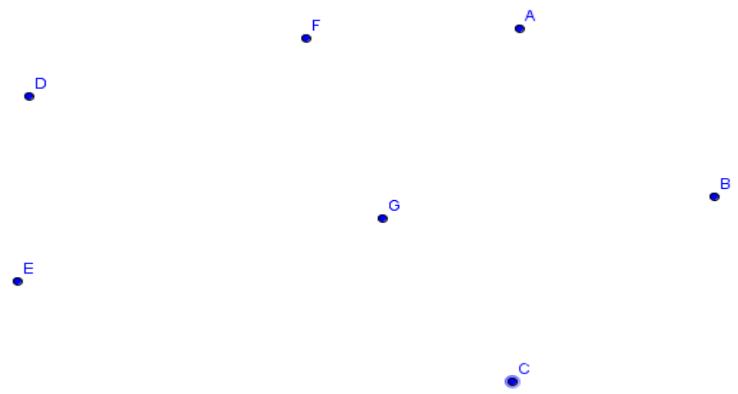


Gráfico 3.9

- Para unir con líneas, en el menú de herramientas dar clic en  Seleccionar “Segmento” y unir dos puntos que se desee. Al hacer esto, el vértice ya tomará automáticamente un nombre, en minúscula.

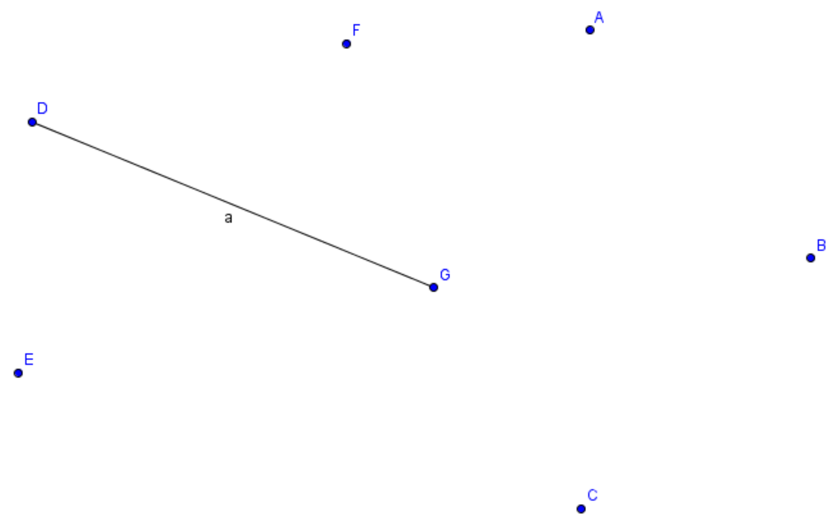
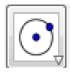


Gráfico 3.10

- Para unir vértices mediante arcos de circunferencia, daremos clic en la herramienta  y seleccionar la opción “Arco tres puntos” y seleccionar los vértices que se deseen unir.

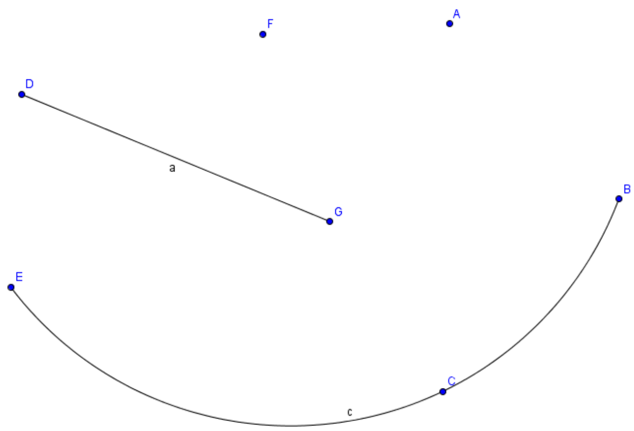
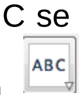


Gráfico 3.11

- Nótese que para la arista que une B y C se deberá agregar el nombre, por ejemplo, b. Para ello, en la herramienta 

 elegir la opción “Texto”. Se da clic en la vista gráfica en la posición donde se quiere escribir el nombre de la arista. Aparecerá un cuadro de diálogo. Se escribirá el nombre deseado.

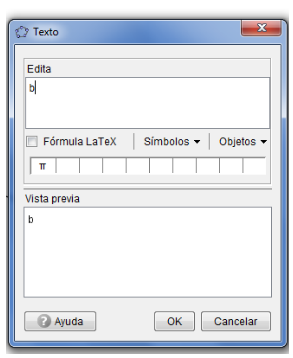


Gráfico 3.12

El resultado será un grafo; para la elaboración de esta guía se obtuvo el grafo siguiente:

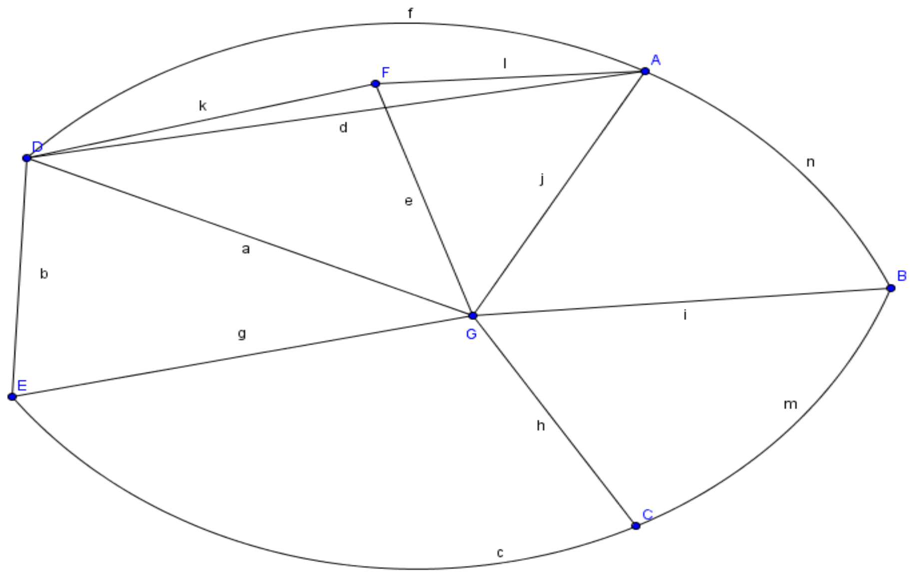


Gráfico 3.13

Del grafo anterior, señalar el conjunto *V* y *E*.

$$\boldsymbol{V = \{A, B, C, D, E, G, F\}}$$

$$\boldsymbol{E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n\}}$$

por tanto, el grafo está definido por: $\boldsymbol{G} = (\{\boldsymbol{7}\}, \{\boldsymbol{14}\})$

Nota: El ejercicio planteado puede variar, según el número de vértices que el docente desee.

3.2.1 Grafos dirigidos y no dirigidos

Definidos los componentes principales de un grafo, se pueden clasificar a los grafos en dos grupos:

Cuadro 3.2

El gráfico siguiente muestra a un *grafo no dirigido*; ya que el orden no importa, resulta lo mismo decir $\langle 1,3 \rangle$ que $\langle 3,1 \rangle$ Ambos representan el mismo movimiento. Por tanto, para este grafo se tiene el siguiente conjunto:

$$E = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 5,3\rangle, \langle 5,6\rangle, \langle 5,7\rangle, \langle 6,5\rangle, \langle 7,5\rangle\}$$

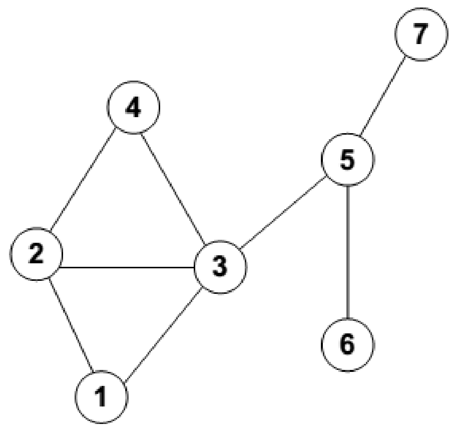


Gráfico 3.14

El gráfico siguiente muestra a un *grafo dirigido*; ya que el orden sí importa, no resulta lo mismo decir $\langle 1,3\rangle$ que $\langle 3,1\rangle$. Por ello la presencia de las saetas. Por tanto, para este grafo se tiene lo siguiente:

$$E = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 5,6\rangle, \langle 5,7\rangle\}$$

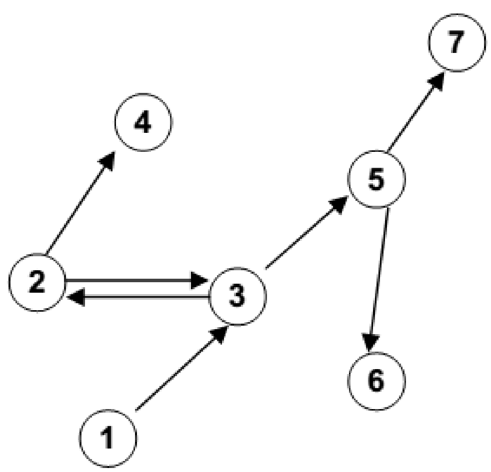


Gráfico 3.15

3.2.2 Matriz de adyacencia para grafos no dirigidos

Al analizar una gráfica mediante la ayuda de una computadora, se necesita una representación más formal, llamada *matriz de* adyacencia.. En una matriz *mxn*, donde *m=n*, se colocan los números 1 o 0, con el siguiente convenio:

- Los valores en negrita representan los vértices del grafo dado (No es necesario escribirlos).
- El número 1 representa una arista que conecta a dos vértices.
- El número 0 representa que no existe unión entre dos vértices.

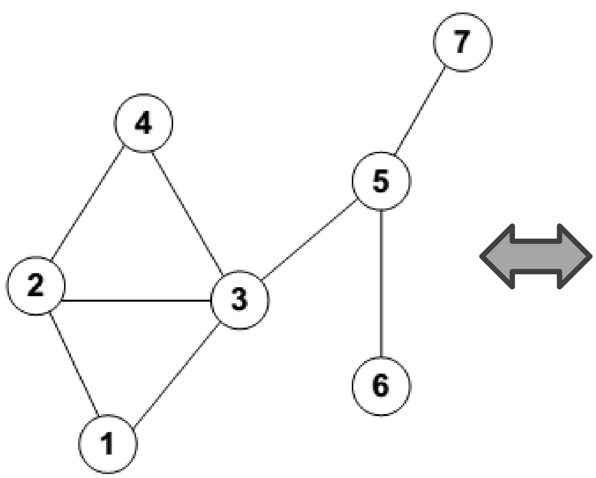


Gráfico 3.16

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	0	1	1	0	0	0	0
2	1	0	1	1	0	0	0
3	1	1	0	1	1	0	0
4	0	1	1	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	1	1
6	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	1	0	0

Tabla 3.2

El gráfico 3.16 y la tabla 3.2 anteriores muestran un ejemplo de la representación de un grafo como matriz de adyacencia, los números 1-7 en negrita en la tabla representan los vértices del grafo.

Ejercicios 3.3

3.3.1 Establezca, con sus propias palabras, la diferencia que existe entre un grafo dirigido y un grafo no dirigido.

3.3.2 Realice un grafo no dirigido que contenga 6 vértices y 7 aristas.

3.3.3 Realice un grafo dirigido que contenga 4 vértices y 5 aristas.

3.3.4 Defina matriz de adyacencia de un grafo no dirigido.

3.3.5 ¿Qué representa el número 1 en una matriz de adyacencia? ¿Y el número 0?

3.3.6 Realice la matriz de adyacencia del siguiente grafo.

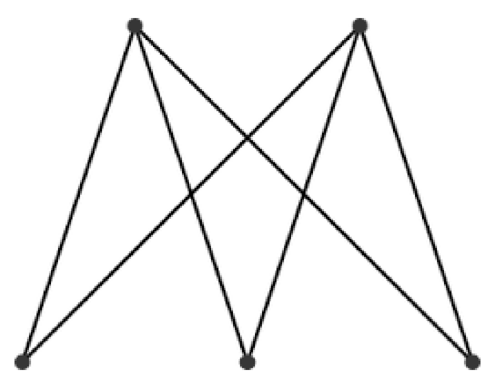


Gráfico 3.17

3.3.7 A partir de la siguiente matriz de adyacencia, construya el grafo que la representa.

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

3.3.8 Relacionar el siguiente grafo con la matriz de adyacencia correspondiente.

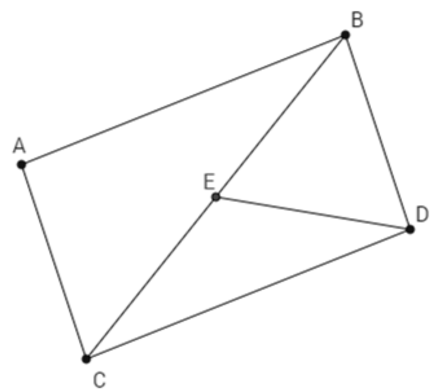


Gráfico 3.18

a) $$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

b) $$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

c) $$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

d) $$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

3.2.9 Realice un grafo que simbolice la siguiente matriz de adyacencia.

0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0

3.2.10 Represente mediante una matriz de adyacencia el grafo planteado al en la página 10 de esta guía (gráfico 3.2).

3.3 CICLOS O CIRCUITOS DE EULER Y HAMILTON

3.3.1 CICLOS O CIRCUITOS DE EULER

Destrezas con criterio de desempeño:

- *Definir un circuito de Euler.*
- *Identificar condiciones suficientes en un grafo para que contenga un circuito de Euler.*
- *Determinar los vértices y el orden de un circuito de Euler en un grafo.*
- *Determinar el número de aristas que se deben aumentar para que un grafo contenga un circuito de Euler.*

Para poder comprender el concepto de circuito de Euler, es necesario tener conocimiento de algunos otros conceptos que ayuden a la mejor comprensión por parte del estudiantado. Es necesario recalcar la importancia de estos conceptos, debido al legado histórico que Leonard Euler compartió con la humanidad.

El grado de un vértice, simbolizado como *grad(v)*, también simbolizado como $\delta(v)$ estará definido por el número de aristas salientes de dicho vértices. En el grafo mostrado al inicio de esta guía (grafo de los amigos en el campamento), se tendría lo siguiente:

- δ(Marta)=3 -Marta es amiga de 3 personas
- δ (Irene)=2 -Irene es amiga de 2 personas
- δ (Sergio)=4 -Sergio es amigo de 4 personas

$\vdots$

y así hasta completar el grado que tendría cada vértice, o en el ejemplo propuesto, la contabilización de los amigos que tiene cada joven que asistió al campamento.

Para que exista un ciclo o circuito de Euler (llamado también *ciclo euleriano*) en un grafo *G* cerrado, debe existir un camino o trayectoria que pase por cada arista del grafo una sola vez. Dada la definición se puede concluir que los vértices pueden repetirse.

Euler se basó en el número de aristas salientes de cada uno de los vértices para poder realizar su demostración. Recordemos que esto se definió previamente como grado de un vértice. Según lo hallado por Euler, para poder obtener tal camino todos los vértices de un grafo deben tener un grado par; basta un vértice de grado impar para que el grafo no tenga un circuito euleriano.

En el problema de los puentes de Könisberg se puede observar que el grado de los vértices es impar, por lo cual es fácil demostrar que en realidad no existe un ciclo euleriano y, por tanto, no se podía atravesar los siete puentes pasando una sola vez por cada uno de ellos. Esta demostración se puede hacer en clases con las y los estudiantes. Se muestra la demostración mediante la reducción al absurdo[4].

[4] *Reductio ad absurdum* en matemática es un método lógico de demostración, utilizado para verificar la validez de proposiciones; también es conocido como demostración por contradicción.

A la izquierda se observa un gráfico sencillo de la distribución de los famosos siete puentes en la ciudad rusa de Könisberg (actual ciudad de Kaliningrado) y el río Preguel, en la derecha se encuentra un grafo similar al utilizado por Euler cuando resolvió el problema. Euler no tomó en consideración la longitud de los puentes, la superficie de la tierra, u otro, sino consideró que las porciones de tierra sean puntos y los puentes las uniones entre esos puntos, es decir, los vértices y las aristas. A las porciones de tierra se les ha llamado A, B, C, D.

Gráfico 3.19

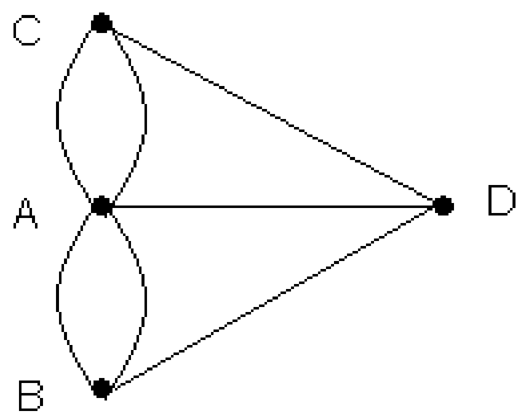


Gráfico 3.20

Para la demostración, supongamos que empezamos en el vértice D. Podemos desde D atravesar un puente y llegar a C, pasar a la isla representada por A, regresar a D, pasar a B, pasar a A, atravesar el otro puente y llegar a C; aquí el ciclo termina, pues los puentes que unen A y C, y la unión entre C y D ya han sido utilizadas, y, por tanto, no hay camino posible que recorra cada puente pasando por cada uno solamente una vez.

En efecto, si llegamos a un vértice desde alguna arista, el único modo de salir de dicho vértice es a través de una arista diferente. Esto significa que para poder llegar y salir de un vértice por caminos diferentes es necesario que cada vértice tenga un grado par. Se concluye que una condición necesaria y suficiente para que un grafo cerrado tenga un ciclo de Euler es que sus vértices sean de grado par.

En el caso de los puentes de Könisberg, Euler determinó que se trata de un problema irresoluble, pues no existe una solución que permita hacer el recorrido que pase por cada puente una sola vez.

Ejercicios 3.4

3.4.1 Defina grado de un vértice

3.4.2 Establezca una condición suficiente para la existencia de un circuito de Euler.

3.4.3 Cuando Leonard Euler resolvió el problema de los puentes de Könisberg, ¿tomó en cuenta la longitud de los puentes o la extensión superficial de la ciudad, o el caudal de los ríos? Enuncie la forma en que Euler resolvió el problema.

3.4.4 Realizar un grafo de 6 vértices en el cual se tenga 4 vértices de grado par y 2 vértices de grado impar.

3.4.5 Determinar en el siguiente grafo el grado de cada uno de los vértices, y completar la tabla.

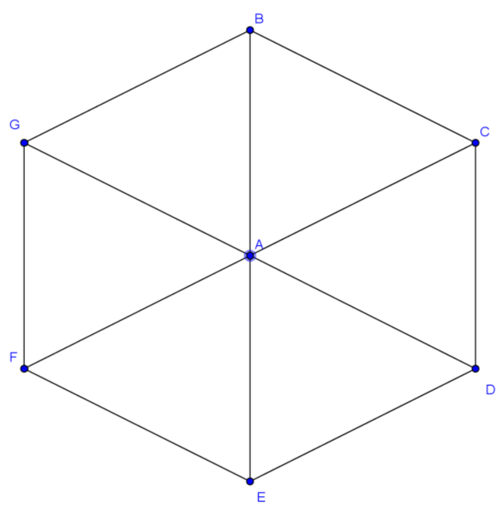


Gráfico 3.21

δ(v)	***Valor***
δ(A)	
δ(B)	
δ(C)	
δ(D)	
δ(E)	
δ(F)	
δ(G)	

Tabla 3.3

3.4.6 Defina con sus propias palabras que es un ciclo o circuito de Euler.

3.4.7 Enunciar si el siguiente grafo tiene un ciclo de Euler, y argumente su respuesta.

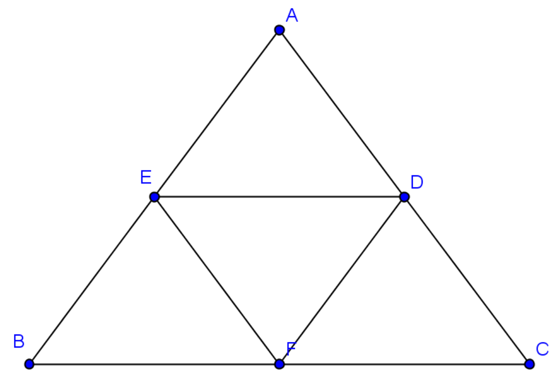


Gráfico 3.22

3.4.8 En el grafo de la pregunta anterior, encuentre, al menos, 2 circuitos de Euler.

3.4.9 De un ejemplo de grafo que *no* tenga un ciclo de Euler. Pruebe que el grafo no tiene un circuito de Euler.

3.4.10 Realizar un grafo que de 8 vértices en el cual haya un circuito de Euler.

3.4.11 GeoGebra. Crear un grafo en que se pueda mostrar un camino de Euler.

Objetivo: *Crear un grafo en el cual se pueda demostrar la existencia de un ciclo de Euler.*

- Abrir el software GeoGebra. Quitar los ejes cartesianos (Observar flecha).

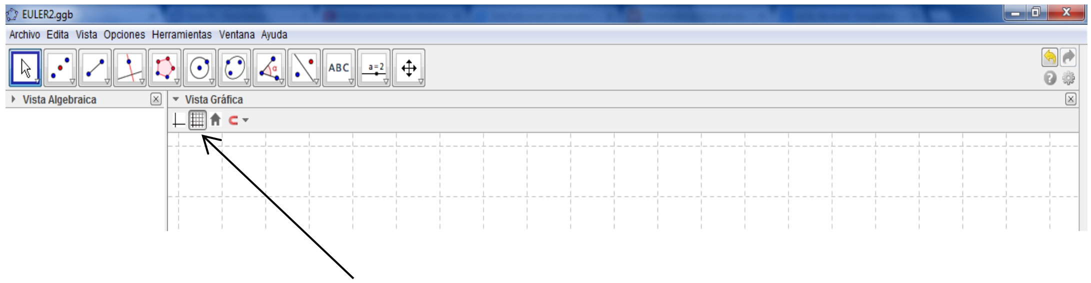


Gráfico 3.23

- Tomamos la opción “Nuevo Punto” y colocamos una cantidad deseada de vértices. Para este ejemplo, 12 vértices. Mediante explicaciones dadas en actividades anteriores, seleccionar la opción correspondiente y unir los vértices.

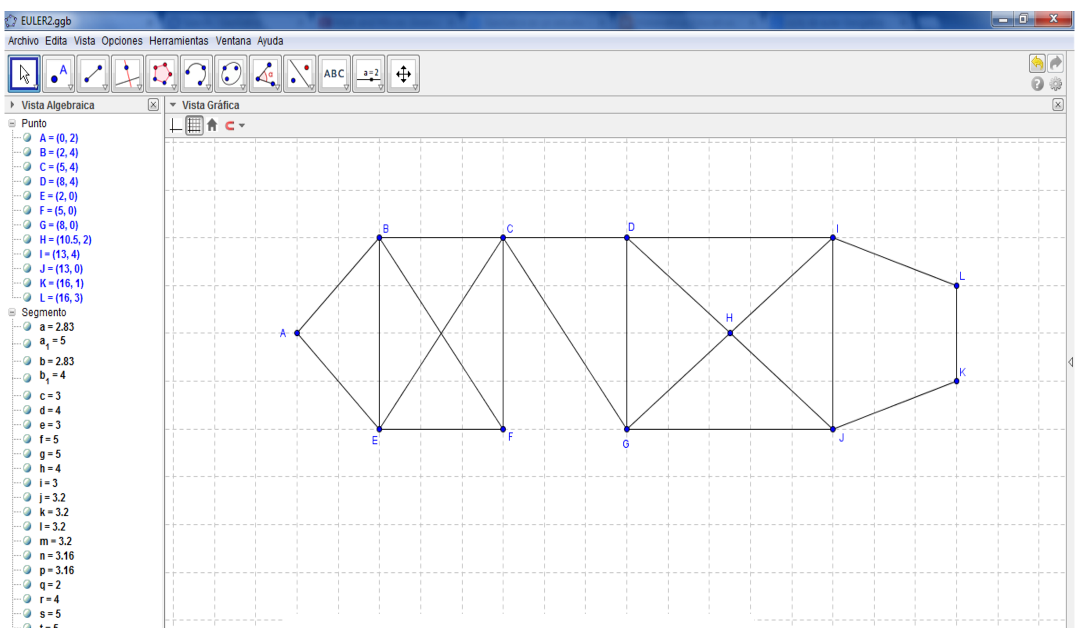


Gráfico 3.24

- Se deben crear tantas casillas de control como aristas se tengan. Para ello, en la barra de entrada escribimos el nombre de la arista igualado a un valor de verdad *true*, es decir, para la arista AB, escribir “AB=true”

Gráfico 3.25

- Se debe verificar que en la vista algebraica (parte izquierda) aparezca “Valor lógico” y esté “AB=true”. Éste se activa, mediante el círculo blanco de junto. Se encontrará activado cuando este círculo esté en color celeste.

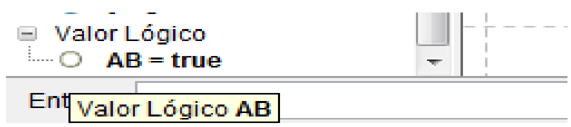


Gráfico 3.26

- Crear tantas casillas de control como aristas se tenga en el grafo; ordenar para darle una vista estética.

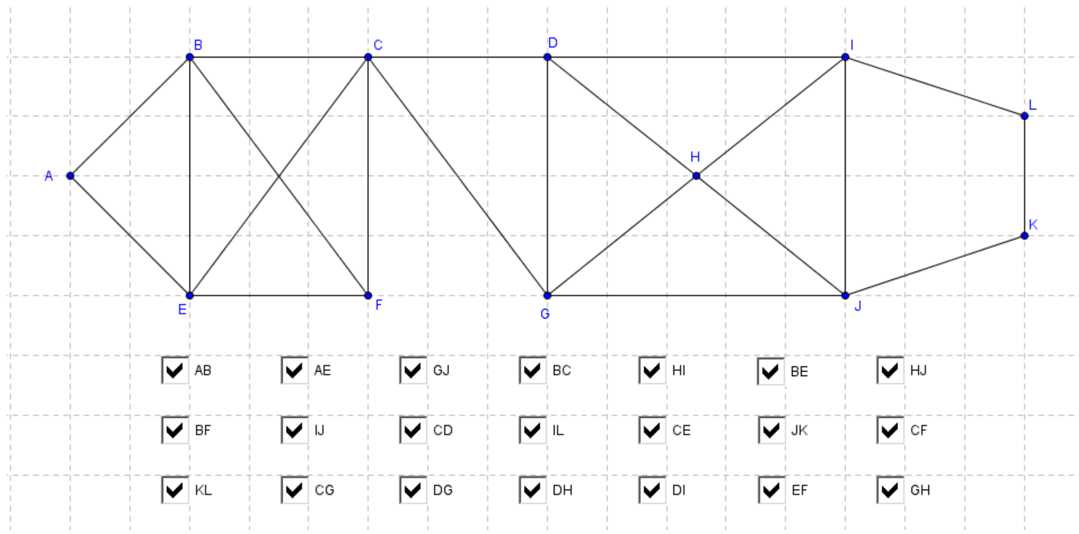


Gráfico 3.27

- Se harán nuevas aristas, que se colocarán sobre las aristas ya existentes. Para poder diferenciar, se elegirán color y forma diferentes. Para ello, se señala el segmento de recta, y luego, debajo del texto "Vista gráfica" se tendrán las opciones para cambiar. Para poder observar el ciclo, es preferible que cada arista tenga su propio color y líneas entrecortadas. Se amplía el grosor de las líneas.

Gráfico 3.28

- Se eliminan las etiquetas de todas las aristas para obtener un esquema similar a este:

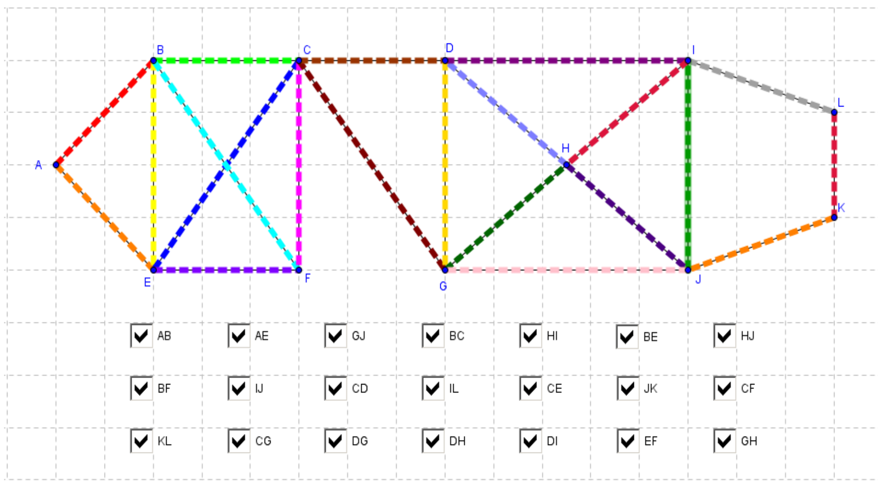


Gráfico 3.29

- Ahora se deben fijar las casillas de control a las aristas de color. Para ello, en la vista algebraica, hacer clic derecho sobre cada arista de color. Ir a "Propiedades". La primera opción indica el nombre que el sistema asignó a dicha arista. Es de importancia recordar este detalle.

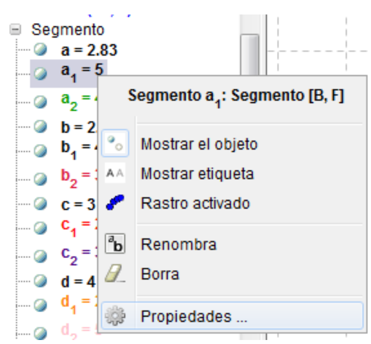


Gráfico 3.30

- En el cuadro de diálogo que aparezca, ir a "Avanzado". En la barra de entrada "Condición para mostrar el objeto" escribir el nombre de la arista seguido de "==*true*" (sin comillas). Los nombres de las aristas deben coincidir con los nombres dados a las casillas de control. Para la arista a_2, los vértices son (I, J). Entonces se escribirá como sigue:

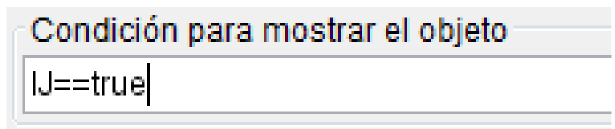


Gráfico 3.31

- Dar clic en la casilla IJ, se puede ver que ésta arista está presente cuando la casilla está activada, caso contrario, ésta desaparece.

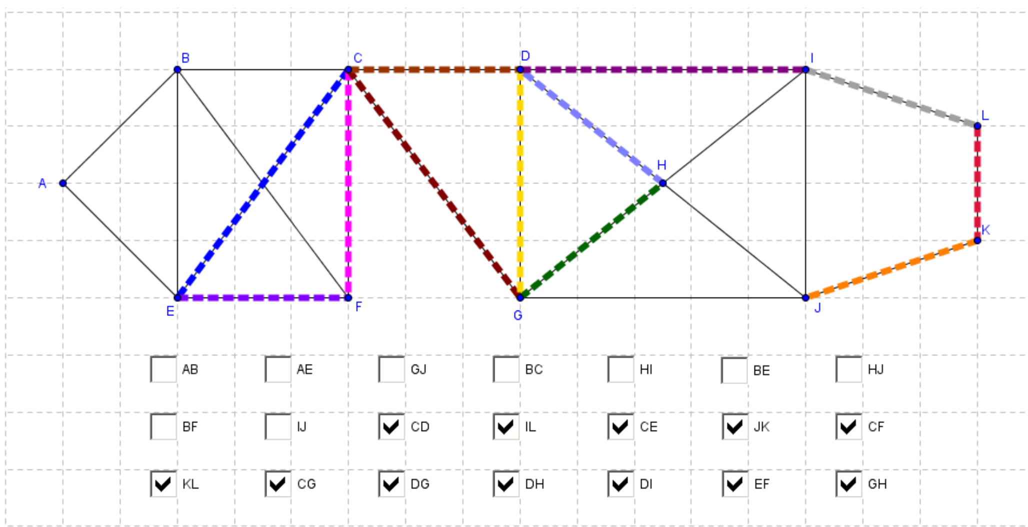


Gráfico 3.32

- Al observar que todos los vértices tienen grado par, excepto dos, un ciclo de Euler no es posible de trazar. Como demostración por reducción al absurdo, un posible camino es el siguiente: (A,E,F,C,D,I,H,D,G,H,J,I,L,K,J,G,C,E,B,C…).

  Como se puede observar, $\delta(C)$=5, $\delta(F)$=3, que es impar. Al llegar al vértice C, es imposible tomar otra ruta, pues la única opción sería tomar una ya utilizada, por lo que se puede demostrar que no es posible un ciclo de Euler cuando se tiene, al menos, un vértice de grado impar.

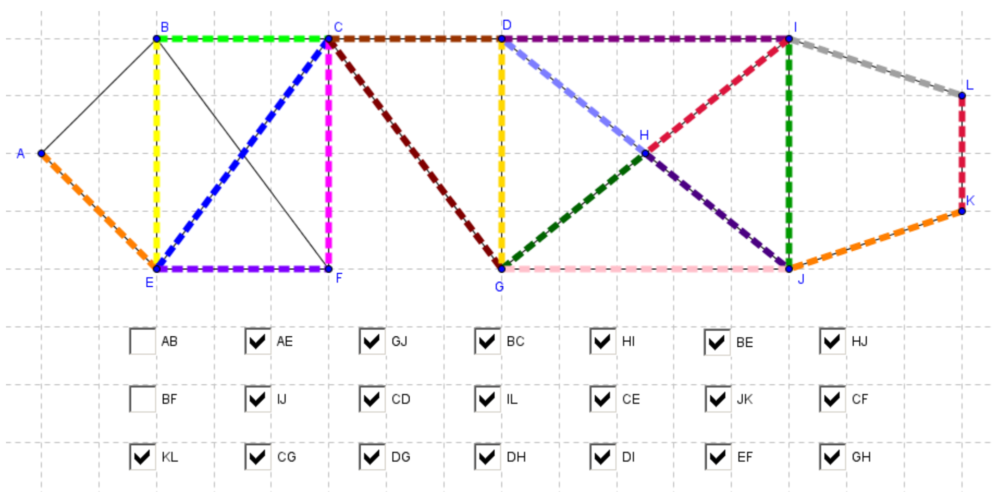


Gráfico 3.33

- Se puede observar que el trazado elegido no cumple las condiciones para ser un ciclo de Euler. Como tarea en clase, motive a los estudiantes a encontrar una forma de solucionar el problema propuesto (Trazar una arista que una C y F).

- Para ello, utilizaremos la herramienta “Arco de circunferencia” con la opción de centro y dos puntos. Aquí será útil tener la vista gráfica cuadriculada. Al seguir el ejemplo de esta guía, se puede estimar el punto centro (punto medio de BE), señalar F y luego C. Se hace lo mismo, pero escogiendo otro color y estilo de línea. Ingresar “CF_2=true” en la barra de entrada. Al punto entre BE lo ocultamos.

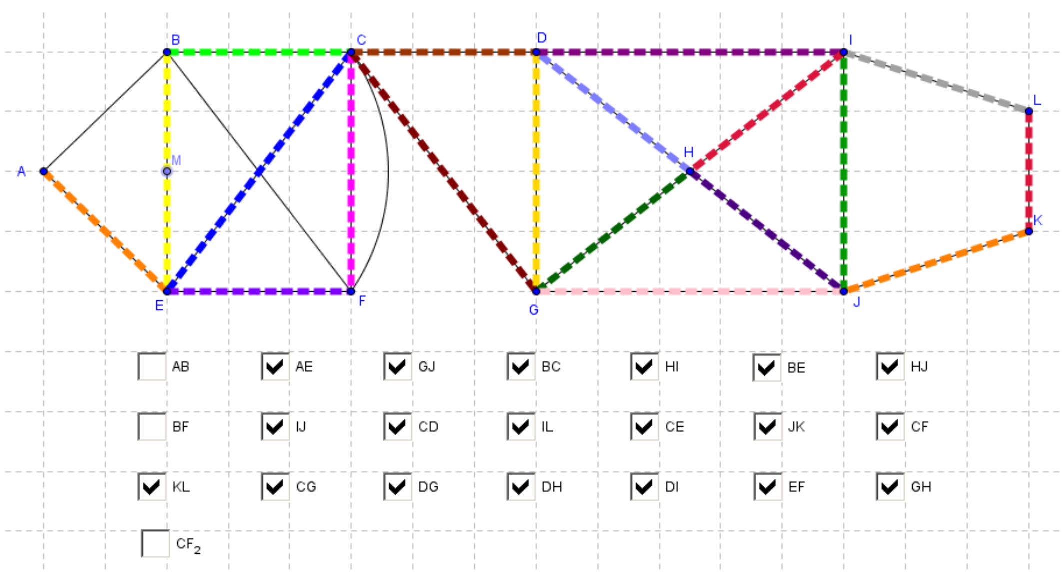


Gráfico 3.34

- Se complementa con la arista nueva (observar flecha en negrita); se obtiene (A,E,F,C,D,I,H,D,G,H,J,I,L,K,J,G,C,E,B,C,F,B,A). Con ello, los vértices C y F tienen grado par.

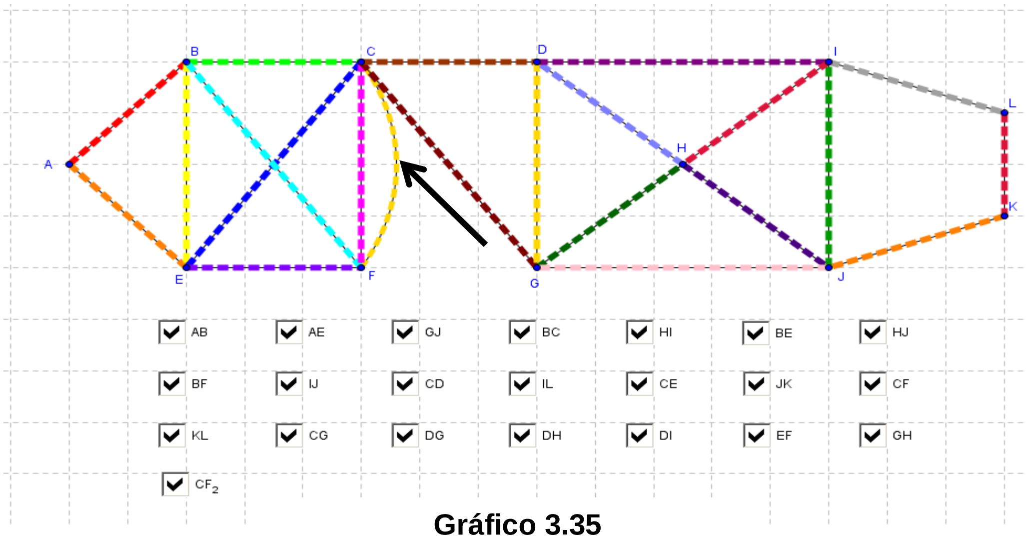


Gráfico 3.35

- Se observa que al agregar la arista CF (arco) es posible un ciclo de Euler en el grafo planteado.

3.3.2 CICLOS O CIRCUITOS DE HAMILTON

Destrezas con criterio de desempeño:

- *Definir un circuito de Hamilton.*
- *Comprender la diferencia entre un circuito de Hamilton y un circuito de Euler.*

- *Encontrar un circuito hamiltoniano de menor costo mediante los métodos de prueba y error, y del vecino próximo*.
- *Identificar un problema de transporte con base en sus características.*
- *Resolver problemas de transporte con el uso de TIC.*

Sir William Rowan Hamilton[5] fue el creador de un juego que tenía la forma de un dodecaedro. El juego, lanzado a mediados del siglo XIX consistía en un dodecaedro en donde cada esquina de cada una de las caras de la figura tenía asignada el nombre de una ciudad. La gráfica en forma tridimensional y unidimensional se puede observar en las figuras 3.36 y 3.37, respectivamente:

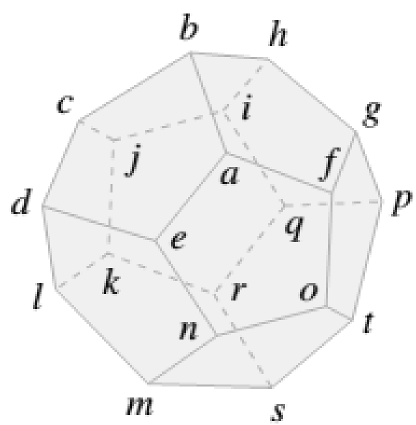


Gráfico 3.36

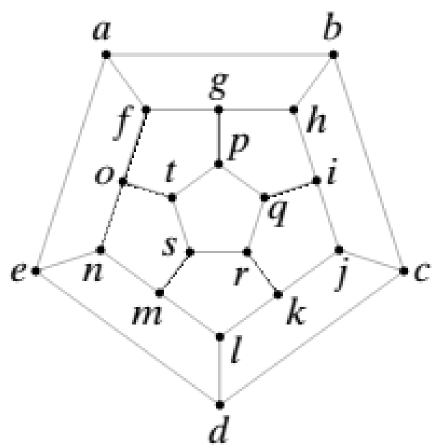


Gráfico 3.37

[5] Sir William Rowan Hamilton, matemático, físico y astrónomo de origen irlandés. Realizó contribuciones en óptica, dinámica y álgebra. Descubrió el cuaternión, extendión de los números reales, similar a la de los números complejos.

El juego consistía en salir de una ciudad, pasar por las aristas, visitar otras ciudades de modo que se retorne a la ciudad inicial. El juego se resuelve cuando se encuentra un camino que contenga cada vértice una sola vez, hasta llegar al vértice inicial.

La solución al juego planteado se puede observar en el gráfico 3.38:

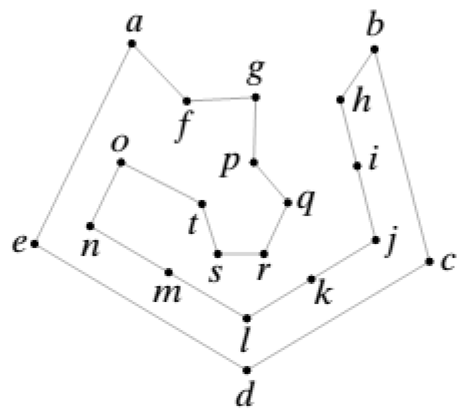


Gráfico 3.38

En honor a Sir Hamilton, un ciclo o circuito donde se pueden atravesar todos los vértices de un grafo pasando una sola vez por cada uno de ellos, excepto por el vértice inicial, el cual se constituye a su vez como vértice final o de llegada, se llama circuito de Hamilton, o hamiltoniano. De la definición se deduce que las aristas pueden repetirse.

Aunque la definición de ciclo de Hamilton es parecida a la definición de ciclo de Euler, son completamente diferentes. Un ciclo euleriano queda definido cuando se tiene que el grado de todos los vértices es par, pero no hay forma de saber con anticipación si un grafo tiene o no un circuito de Hamilton.

Si un grafo contiene uno o más vértices de grado uno, inmediatamente se dirá que el grafo no contiene un ciclo hamiltoniano. Para comprender lo dicho, revisar el siguiente ejemplo.

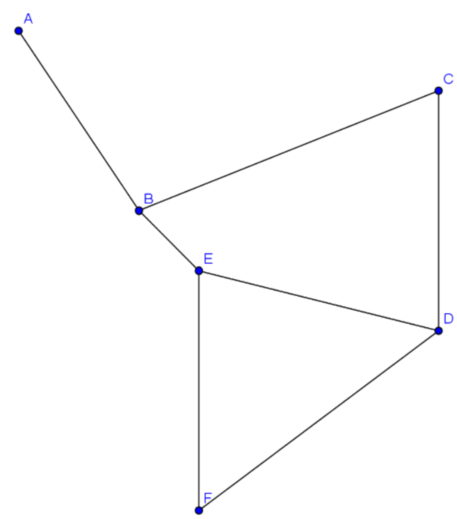


Gráfico 3.39

Al partir del punto A hacia el punto B, luego a C, a D, a E; luego, no hay forma de llegar nuevamente al punto A porque se debe pasar por B, pero ello incumple la definición de un ciclo de Hamilton, pues se pasaría dos veces por un mismo vértice, por lo que el grafo propuesto no contiene un ciclo de Hamilton.

En el grafo propuesto, para obtener un ciclo de Hamilton basta con añadir una arista entre A y C, de modo que un ciclo que cumpla la condición de Hamilton es (A,B,E,F,D,C,A), que se muestra en la siguiente imagen:

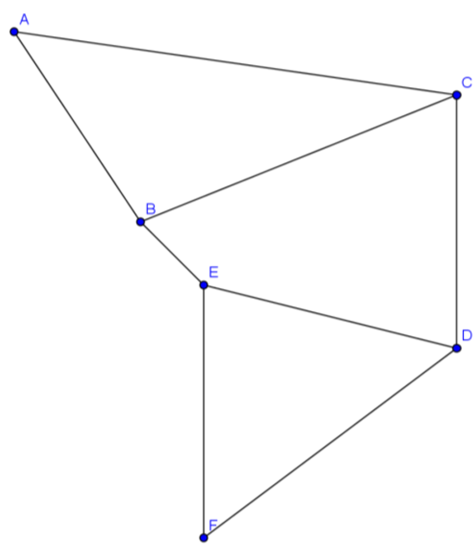


Gráfico 3.40

En varios casos se puede tener grafos eulerianos y hamiltonianos a la vez; grafos que sean eulerianos pero no hamiltonianos y viceversa. Lamentablemente, no existe forma directa de saber si un grafo contiene un ciclo de Hamilton, contrario de los grafos que contienen un ciclo de Euler, por lo que tampoco existe alguna relación directa entre estos tipos de grafos. Se establecerá la diferencia entre sus conceptos.

Un circuito de Euler implica recorrer las aristas de un grafo usa sola vez por cada una de ellas; como condición necesaria y suficiente[6] para un circuito euleriano se tiene que los vértices que conforman el grafo deben ser de grado par; la definición también implica que los vértices se pueden repetir. Un ciclo de Hamilton implica recorrer los vértices de un grafo pasando exactamente una sola vez por cada uno de ellos, a excepción, claro, del vértice inicial. La diferencia principal entre ambos circuitos son las condiciones. Mientras para un circuito de Euler se tiene una condición necesaria y suficiente para establecer un circuito, para Hamilton no existe condición que sea necesaria y suficiente a la vez. Existen teoremas que prueban la existencia, dando condiciones suficientes para la existencia de un ciclo de Hamilton, pero no son condiciones necesarias.

Entre ellas, se tienen las siguientes:

[6] Decir que A es *necesaria y suficiente* para B es decir dos cosas simultáneamente: el cumplimiento de A es necesaria para B y que el cumplimiento de A es suficiente para B

- Un grafo tiene un ciclo hamiltoniano si el número de vértices es igual al número de aristas.
- Un grafo tiene un ciclo hamiltoniano si el grado de sus vértices es 2.

Observar el siguiente cuadro comparativo:

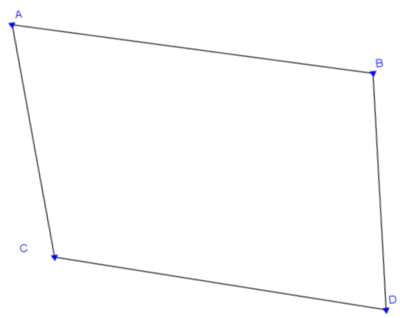
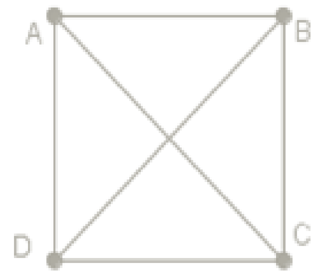
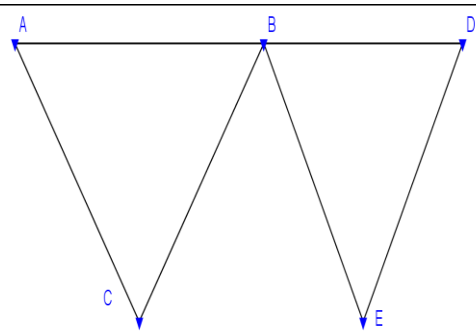
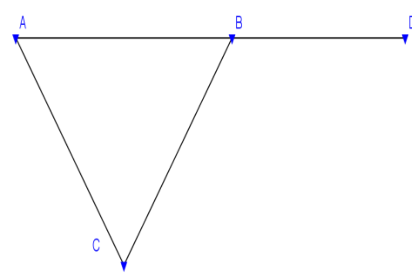
CICLO	***EULERIANO***	***NO EULERIANO***
HAMILTONIANO		
NO HAMILTONIANO		

Tabla 3.4

Grafos ponderados.

Con los grafos ponderados se tendrá la oportunidad de modelar ciertos problemas en donde las conexiones tienen importancia. De lo visto anteriormente, se sabe que un grafo muestra las relaciones entre una pareja de elementos de un conjunto cualquiera, pudiendo precisar si esta relación está o no ordenada. De esto se tenían las siguientes dos opciones:

- Los vértices SI están conectados entre sí (1 en la matriz de adyacencia).
- Los vértices NO están conectados entre sí (0 en la matriz de adyacencia).

pero, no todas las conexiones tienen la misma importancia.

Entonces, cuando un grafo tiene etiquetas en las aristas (tiempo, dinero, etc.) se llama comúnmente grafo *ponderado*. A los valores sobre cada una de las aristas se le conoce con el nombre de *peso*. En el gráfico 3.41 se puede observar un grafo de 9 vértices y 13 aristas ponderadas.

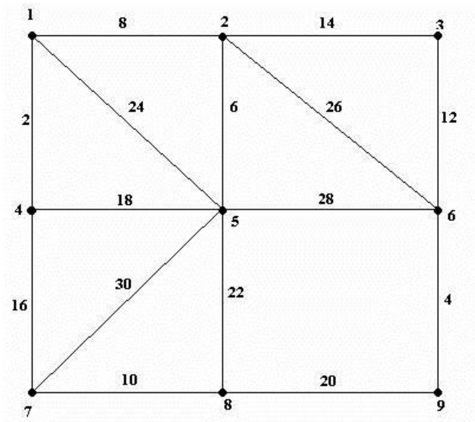


Gráfico 3.41

Ejercicios 3.5

3.5.1 Con sus propias palabras, defina un circuito de Hamilton.

3.5.2 Defina grafo ponderado.

3.5.3 De un ejemplo de un grafo ponderado de 5 vértices y 7 aristas.

3.5.4 Muestre que la siguiente gráfica tiene un ciclo de Hamilton. Indique cuál es el ciclo.

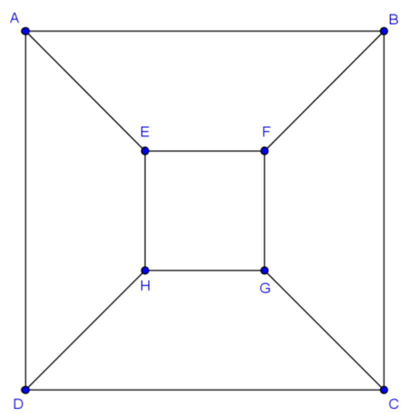


Gráfico 3.42

3.5.5 Indique si el siguiente grafo tiene o no un ciclo de Hamilton; en caso de que lo tenga, indique cuál es el ciclo.

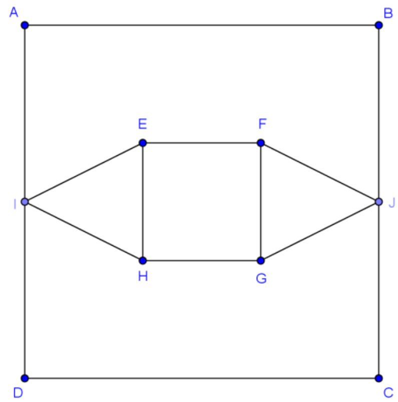


Gráfico 3.43

3.5.6 Demuestre que el siguiente grafo[7] no contiene un ciclo de Hamilton.

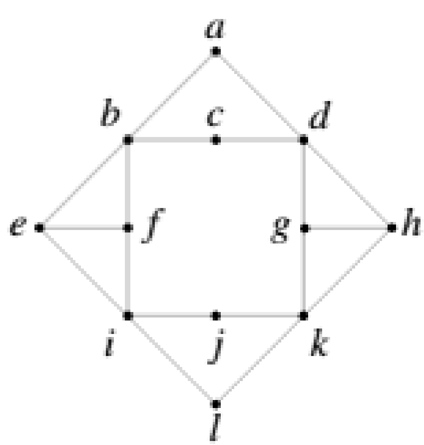


Gráfico 3.44

3.5.7 De un ejemplo de un grafo que tenga un ciclo de Euler y un ciclo de Hamilton, simultáneamente.

[7] Tomado de Matemáticas Discretas, Richard Jonhsonbaugh, pág 346.

3.5.8 De un ejemplo de un grafo que tenga un ciclo de Euler y no tenga un ciclo de Hamilton,

3.5.9 De un ejemplo de un grafo que no tenga un ciclo de Euler y un ciclo de Hamilton,

3.5.10 De un ejemplo de un grafo que no tenga un ciclo de Euler ni un ciclo de Hamilton.

3.4. APLICACIONES.

3.4.1 PROBLEMA DEL VIAJERO.

Objetivo: *Definir y encontrar un circuito de Hamilton partiendo desde una ciudad a otra, simbolizadas como vértices de un grafo.*

El ejemplo siguiente puede darse en el aula de Informática con conexión a Internet y el software GeoGebra, y generalmente se lo conoce como *Problema del viajero*. Consiste en, dados dos vértices, encontrar algún camino que los una, de manera que la suma de sus pesos sea la mínima posible.

<u>Instrucciones:</u>

- Abrir Google Maps (Para que sea más didáctico, seleccionar opción de visión Tierra, esquina inferior izquierda). Mediante esta herramienta se hallarán las distancias entre distintas ciudades.

- En el buscador de ciudades, escriba Cuenca.

- Debajo está la opción “Como llegar”. Dar clic y escribir, como punto de partida, “Cuenca” y como punto de llegada, “Azogues”.

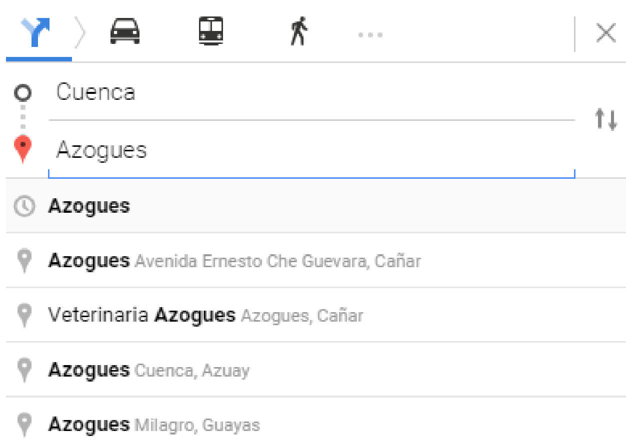


Gráfico 3.45

- Se da “enter” y el programa automáticamente dará una ruta y su distancia. Anotamos el valor de dicha distancia: 32,9 km. Pueden existir más de una ruta para unir dos ciudades, se tomará aquella que muestre un una unión directa, es decir, que no pase por una tercera ciudad.

- Se sigue el mismo procedimiento para anotar las distancias siguientes: Cuenca-Loja (198 km), Cuenca-Machala (170 km), Cuenca-Guayaquil (198 km), Cuenca-Zamora (248 km), Cuenca-Macas (200 km), Loja-Machala (238 km), Loja-Zamora (55,4 km), Macas-Zamora (279 km), Azogues-Guayaquil (201 km), Azogues-Macas (195 km), Machala-Guayaquil (186 km).

- En GeoGebra, dibujar un grafo de 7 vértices. En Propiedades de cada vértice, cambiar el nombre por una ciudad de las anteriormente nombradas. Unir mediante la herramienta Segmento.

- Con ayuda de la herramienta Texto, escribir las distancias ya halladas junto a cada arista que une dos ciudades.

- La pregunta es: Dada la red vial, con sus distintas distancias, ¿cuál es la ruta más corta que une la ciudad de Guayaquil con Zamora?

- El grafo que modela la situación planteada es el siguiente:

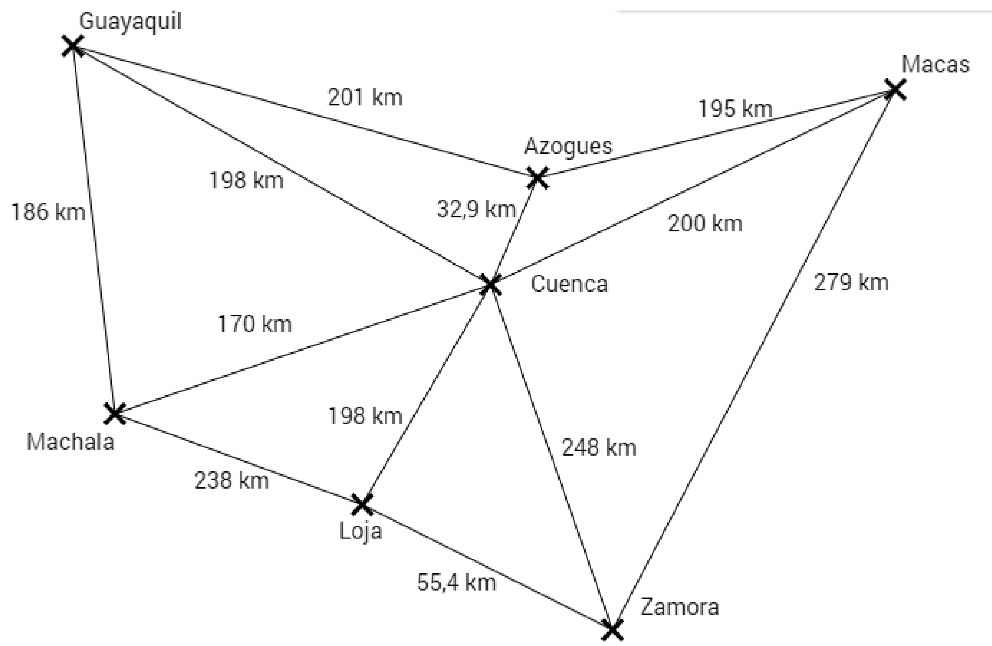


Gráfico 3.46

- En la clase en el laboratorio de Informática, se puede crear una tabla en Excel con los valores. Mediante fórmulas, sumar las distancias entre las ciudades:

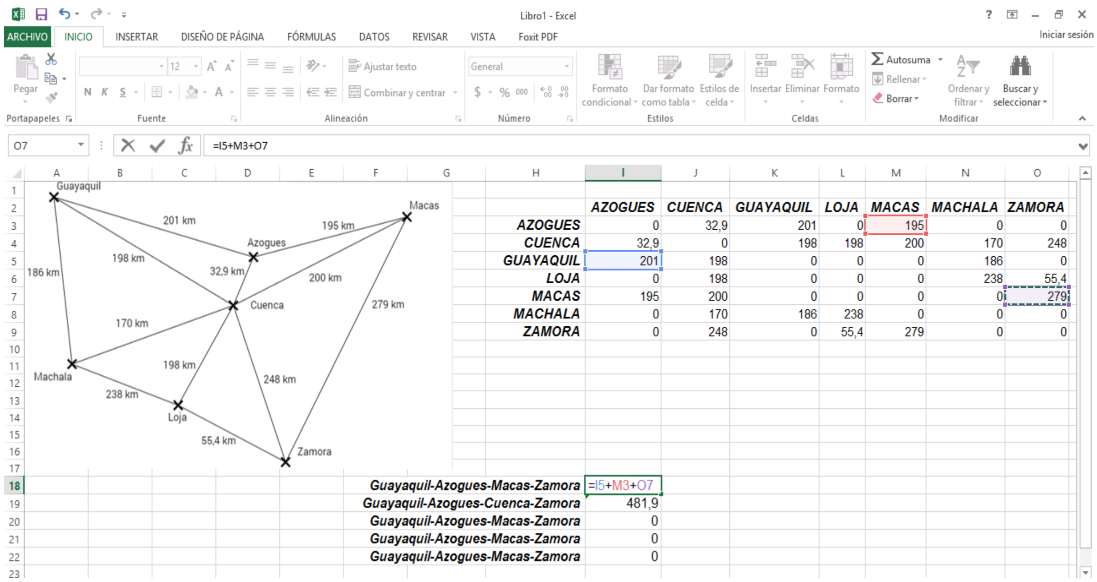


Gráfico 3.47

- Se realiza la suma de las distancias entre algunas rutas posibles que unan a Guayaquil con Zamora, como lo indica la siguiente tabla:

Guayaquil-Azogues-Macas-Zamora	675
Guayaquil-Azogues-Cuenca-Zamora	481,9
Guayaquil-Cuenca-Zamora	446
Guayaquil-Machala-Loja-Zamora	479,4
Guayaquil-Cuenca-Loja-Zamora	451,4
Guayaquil-Machala-Cuenca-Zamora	604

Tabla 3.5

Se puede observar que la distancia más corta que une estas dos ciudades del Ecuador es la ruta Guayaquil-Cuenca-Zamora, con 446 km.

3.4.2 PROBLEMA DEL CAMINO MÁS CORTO.

Objetivo: *Definir y encontrar un circuito de Hamilton partiendo desde una ciudad a otra, simbolizadas como vértices de un grafo.*

Similar al ejemplo planteado anteriormente.se utilizarán deslizadores y casillas de control, herramientas del software GeoGebra[8]. El problema consiste en, dado un grafo ponderado, encontrar la ruta que una todos los vértices, de modo que el vértice inicial y final sean iguales, de modo tal que la suma de sus pesos sea mínima.

En el ejercicio planteado, los pesos de cada arista representan el valor (en dólares) de trasladarse entre uno y otro punto. Se utilizarán deslizadores[9] y casillas de control[10]. Al señalar en las casillas de control, se sumarán los costos –pesos- de las aristas, de tal modo que la idea es encontrar un camino que lleve

[8] Revisar manual de usuario en http://geogebra.es/cvg/manual/index.html para mayor información.
[9] Un deslizador es una herramienta que, al ser adaptada a otras funciones de GeoGebra, permite variar su magnitud entre cierto intervalo
[10] Herramienta que permite visualizar u ocultar objetos en GeoGebra

desde el vértice A y de regreso a él, atravesando los demás vértices, y que implique el menor costo posible.

<u>Instrucciones:</u>

- Al tener la pantalla gráfica sin los ejes cartesianos, y con la cuadrícula activa, colocamos puntos al azar, en este ejemplo se han colocado 6, los cuales representarán los *vértices* de nuestro grafo.

- A continuación, en la barra de herramientas *Líneas*, elegimos la opción *Segmento* y unimos todos los puntos, de tal manera que se obtienen las aristas AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE, pertenecientes a un grafo no dirigido.

- Se ocultan las etiquetas década arista (clic derecho sobre la arista, dar clic en “Mostrar etiqueta” para desactivar la opción)

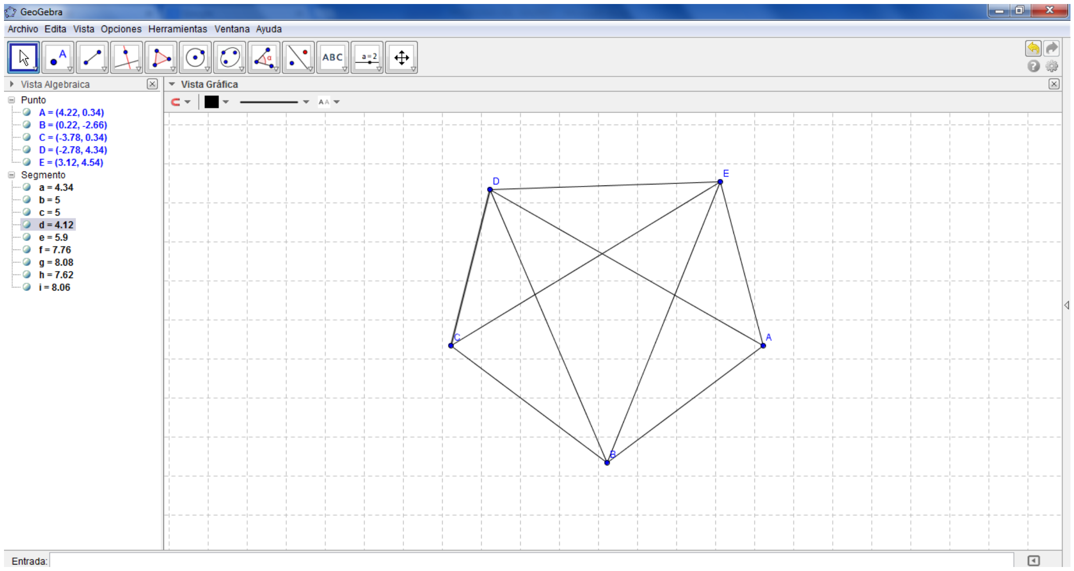


Gráfico 3.48

- Señalamos la opción segmento. Debajo de “Vista gráfica”, seleccionamos otro color, rojo por ejm., y seleccionamos línea punteada; aumentamos el grosor, como señala la figura (Observar la flecha negra).

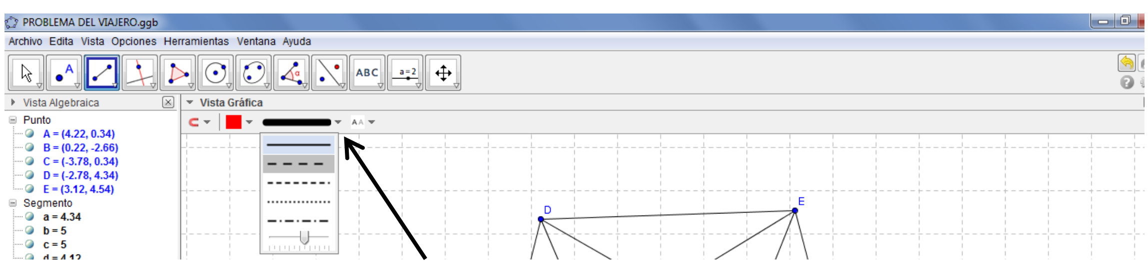


Gráfico 3.49

- Ocultamos las etiquetas. Renombramos a cada una como a_1, a_2, …, etc., para poder diferenciar en la programación siguiente. Para colocar los subíndices, hacer clic derecho sobre el segmento, elegir "Renombra" y colocar "b_1", así:

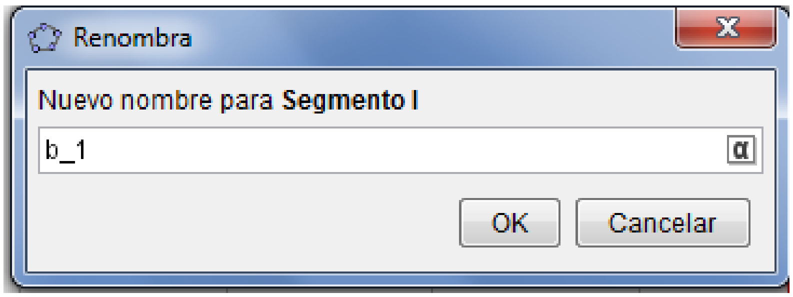


Gráfico 3.50

- En la barra de herramientas, buscamos "Casilla de control", herramienta que ayuda a exponer u ocultar objetos; se puede encontrar dicha herramienta como lo muestra la figura siguiente:

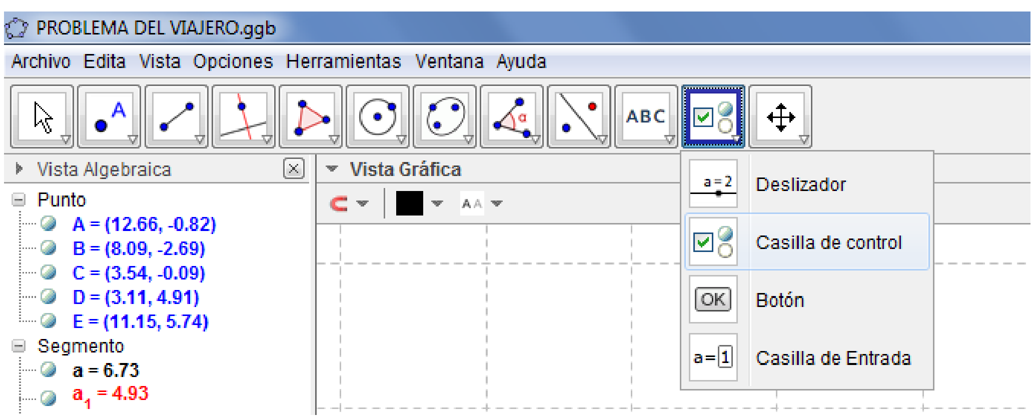


Gráfico 3.51

- Se insertarán 10 casillas de control, una por cada arista. A cada una se le dará el nombre de una arista, y en Objeto se escogerá la arista punteada en color rojo que se agregó, así:

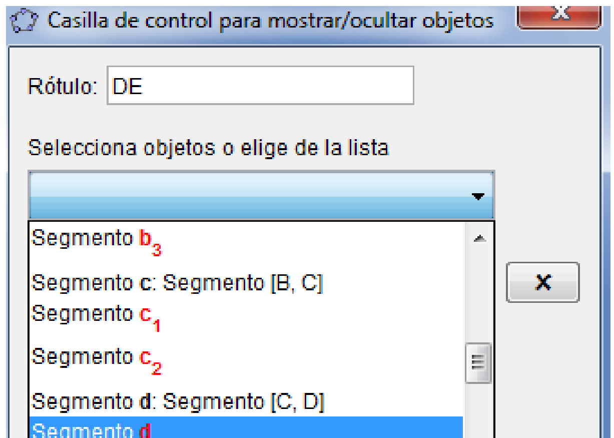


Gráfico 3.52

- Ahora, se deben cambiar los valores lógicos de cada casilla de control. Sobre cada casilla de control, clic derecho y Propiedades. En Valor, escribir “false”. Observamos que en la vista algebraica (parte izquierda) se hayan cambiado los valores lógicos.

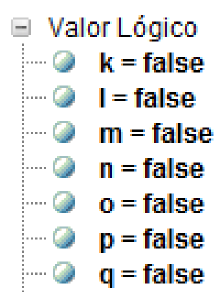


Gráfico 3.53

- Seleccionamos la opción Deslizador. Se agregarán 10 deslizadores. El nombre será correspondiente a cada arista. Elegir la opción "Entero", colocar el nombre de la arista, elegir el intervalo que desee (esto representará la ponderación dada a la arista). En la pestaña Animación, elegir "Incrementando". Clic en Aplicar.

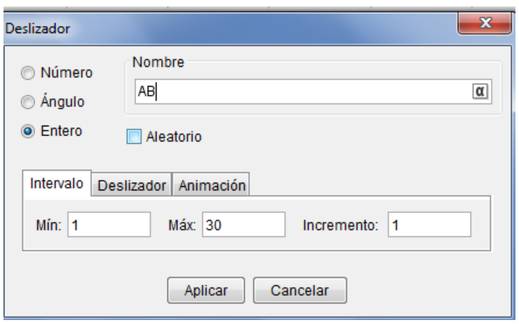


Gráfico 3.54

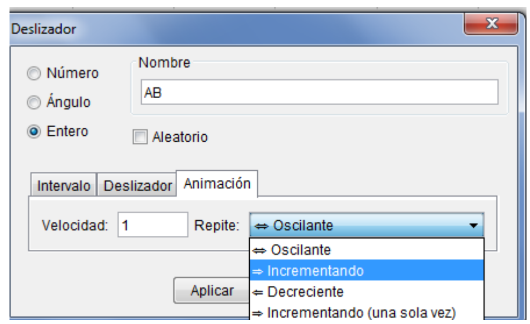


Gráfico 3.55

- Agregaremos texto junto a cada arista. Elegimos la herramienta "Texto" y hacemos clic junto a cada una de las aristas. Al hacerlo, nos saldrá un cuadro de diálogo como el siguiente. En este ejercicio la ponderación será el costo ($) que representa ir de un vértice a otro. Escribimos el signo "$" y en Objetos elegimos el nombre dado a cada deslizador, referente a cada arista. En lo realizado hasta ahora, la arista AB está representada por el deslizador AB; por tanto, en Objetos, elegiremos AB. Al hacerlo, se puede comprobar que al mover el deslizador AB el texto cambiará de valor. Esto se repite para las demás aristas.

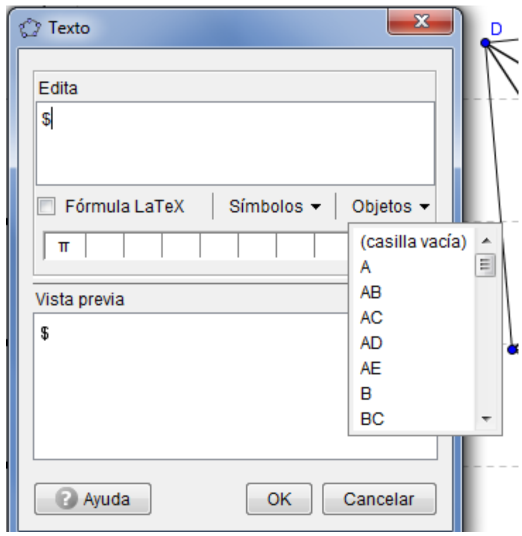


Gráfico 3.56

- Se crean 10 números y uno que representará el costo total. Para ello, en la barra de entrada, escribir “num0=0”, “num1=0”, …, “num9=0”, y uno llamado “total=0”. Éstos representaran el valor de ir de un vértice a otro, por ejemplo, de A a B.

- Se hace clic derecho en las propiedades de cada número. Para “num0=0” que representará al coste de ir desde A hasta B, arista AB, escribimos en la barra Definición lo siguiente: “Si[k == true, AB, 0]” (Al revisar las propiedades nuevamente, se observa que == se transforma en el símbolo $\stackrel{?}{=}$). Hacer eso para cada número, cambiando tanto el valor lógico (Ver en la Vista algebraica, en la parte inferior) como el nombre de la arista.

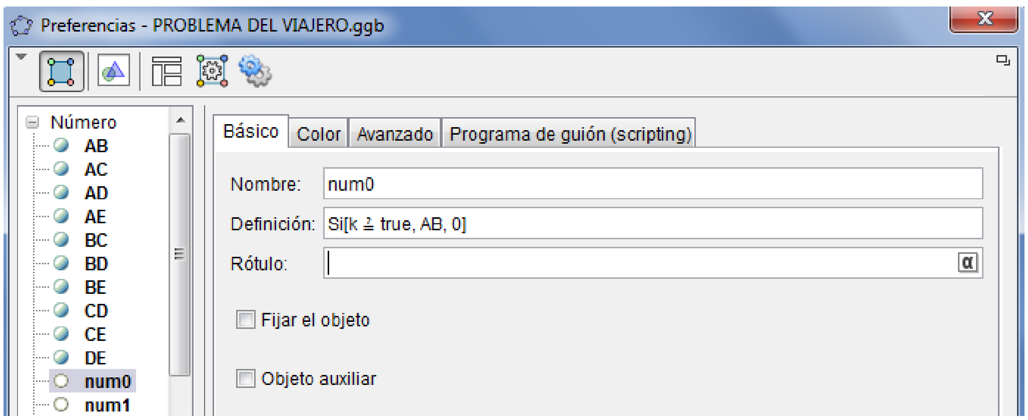


Gráfico 3.57

- Se agrega texto. Se escribe el símbolo “$”; en Objetos se selecciona “total” que fue el último número en ser ingresado.

- En la vista algebraica, clic derecho sobre “total=0” y Propiedades. En Definición escribimos “num0 + num1 + num2 + num3 + num4 + num5 + num6 + num7 + num8 + num9”

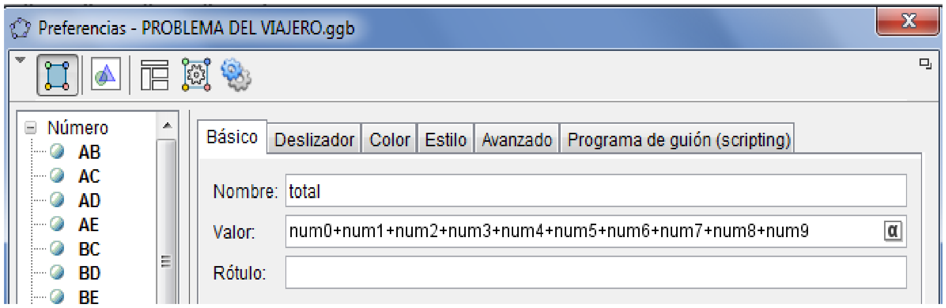


Gráfico 3.58

- Se pueden alterar los deslizadores, el valor de total cambiará. Así se puede observar si el camino elegido por los estudiantes resulta el de menor coste.

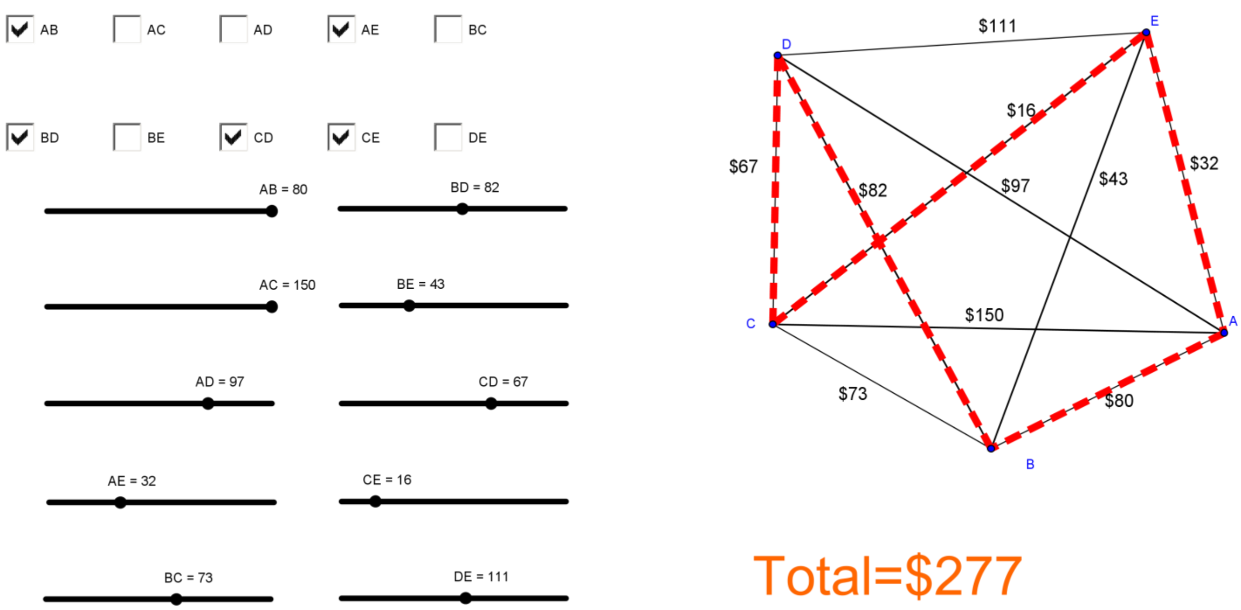


Gráfico 3.59

3.4.3 ÁRBOL GENERADOR DE MENOR COSTO

Destreza con criterios de desempeño

- Determinar el árbol generador de menor costo.

Primeramente, partamos del concepto de árbol, para ello tomaremos la nomenclatura A= (V, E), el cual representa un árbol el mismo que deberá ser un grafo simple, no dirigido, conexo y que no contenga ciclos.

Si en el árbol A un vértice de grado uno se denominará hoja, para vértices de grados mayores a uno se denominaran ramas.

Si designamos a uno de los vértices del árbol como raíz, éste grafo se denominará árbol con raíz. A su vértice raíz se lo denomina con la letra *r.*

Podemos añadir que si un grafo esta constituido por un conjunto de árboles éste se denominará bosque.

<u>Teoremas:</u>

- Si A y B son vértices de un árbol, existe un único camino que conecte éstos vértices.
- En cualesquier árbol el número de vértices es igual al número de aristas más uno, es decir: V= E+1

<u>Niveles de un árbol.</u>

En el gráfico 3.60 podemos observar que el nivel más alto corresponde al nivel tres, siendo esta su altura.

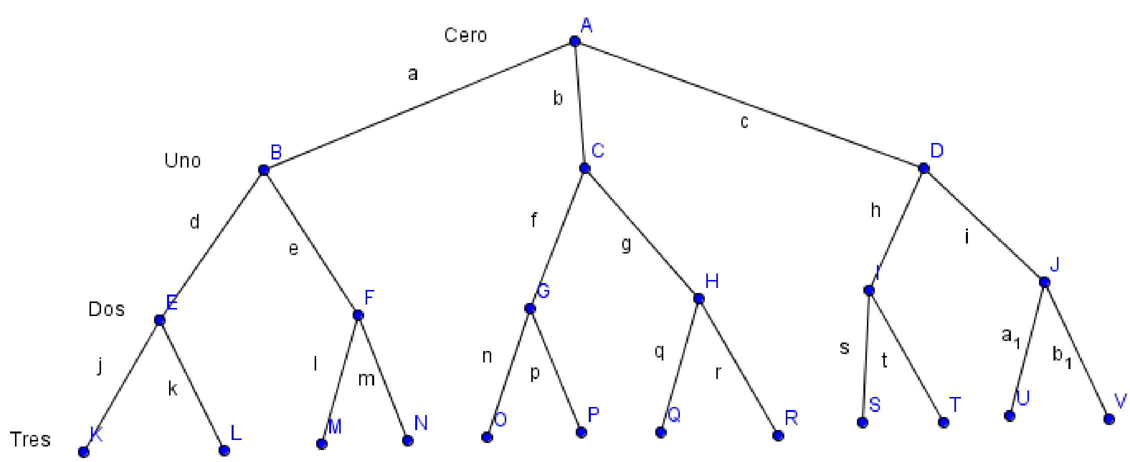


Gráfico 3.60

Si en el gráfico anterior al vértice A lo designamos como raíz del árbol, este se convertirá en un *árbol con raíz*.

De esta manera, por tanto, se puede argumentar que un árbol generador de menor costo es un subgrafo del grafo inicial el cual debe formar un árbol y contener todos los vértices *v* del grafo inicial; cada arista contendrá un peso. El objetivo es encontrar un árbol que al sumar todos los pesos de sus aristas de por resultado el menor costo.

3.4.3.1 ALGORITMO DE KRUSKAL

Este algoritmo es usado para encontrar el árbol generador de menor costo siempre que se trabaje con un grafo conexo y ponderado.

Este algoritmo consiste en que dado un grafo G, buscar subconjuntos de G que formen árboles en los cuales se incluya todas los vértices del grafo inicial

En el siguiente ejemplo se puede observar cómo se procede para encontrar el árbol generador de menor costo haciendo uso del Algoritmo de Kruskal.

Paso 1. Señalar la arista con menor peso o costo.

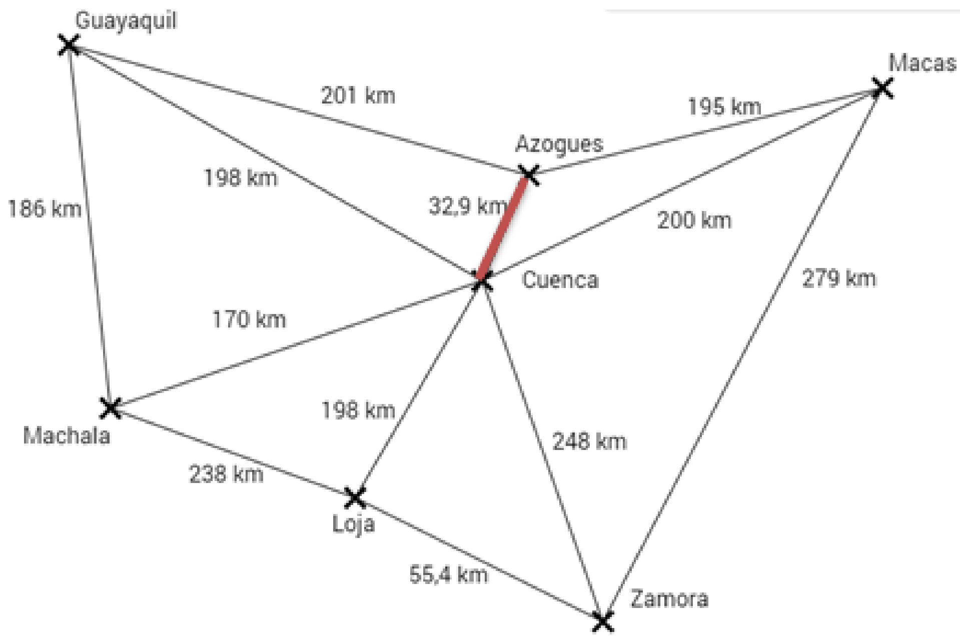


Gráfico 3.61

Paso 2. Marcar la siguiente arista de costo menor a las restantes.

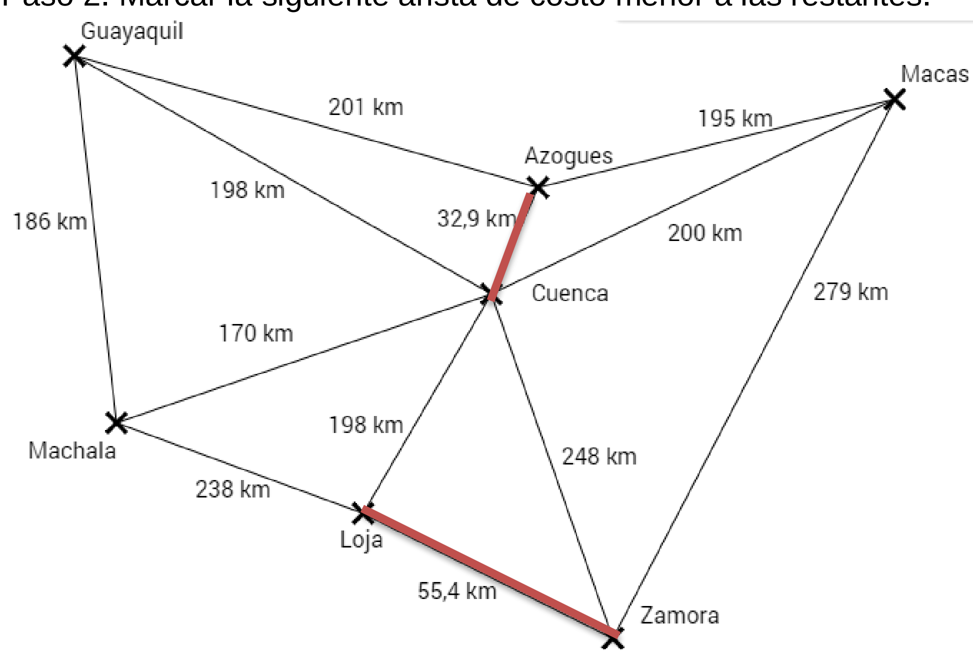


Gráfico 3.62

Paso 3. Continuar señalando las aristas que correspondan a los costos menores a las restantes, cuidando de que no se forme un ciclo. (Se debe formar un árbol). Si dos aristas coinciden con igual costo se debe señalar según nuestro criterio, evitando que se formen ciclos, si al señalar cualquiera de las dos se formase un ciclo, es aconsejable no señalar.

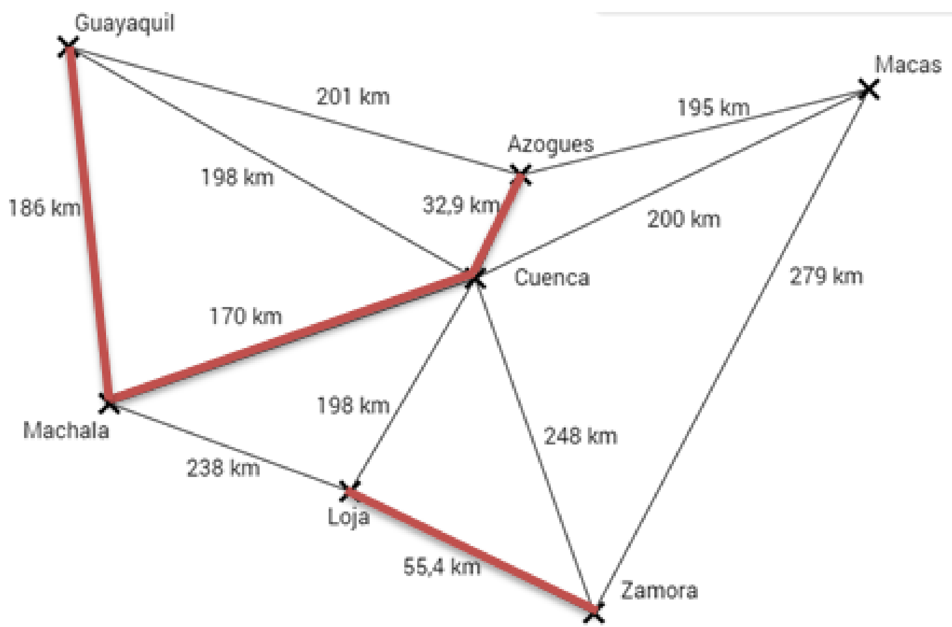


Gráfico 3.63

Como podemos observar existen dos aristas: la de Guayaquil-Cuenca y Cuenca-Loja, que coinciden con el kilometraje, es decir su etiqueta o peso, en este caso si señalamos Guayaquil-Cuenca podemos llegar a formar un ciclo entre Guayaquil, Cuenca y Machala, por lo tanto no se debe señalar esta arista. Si se presta atención la arista Cuenca-Loja no forma ningún ciclo, por tanto esta arista si se debe señalar.

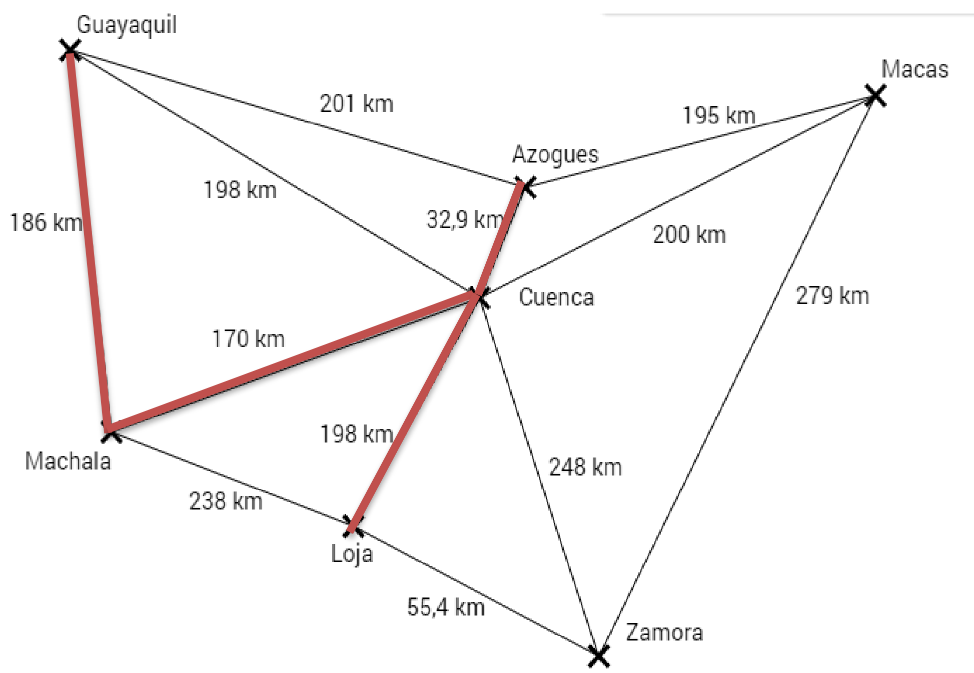


Gráfico 3.64

Entre las aristas sobrantes, es decir, aquellas aristas que no han sido señaladas, la arista menor cuyo peso es el menor a las restantes, es la de Azogues-Macas. Se señala dicha arista, y de esta manera se ha encontrado el árbol generador de menor costo que corresponde a 787.3 Km.

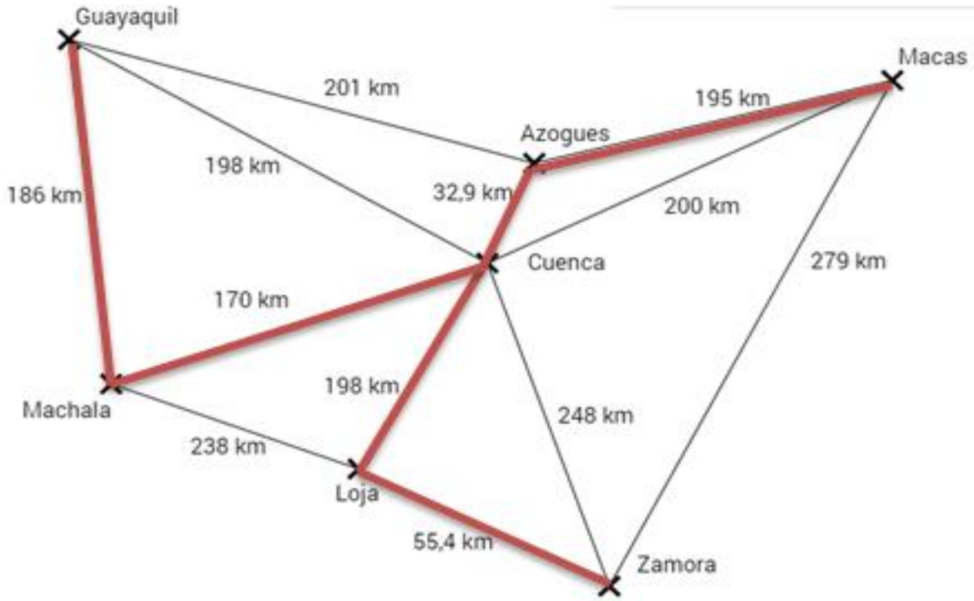


Gráfico 3.65

Ejercicios 3.6

3.6.1 Halle, utilizando el algoritmo del problema del viajero, la ruta más corta desde A hasta A, pasando por todos los vértices.

.

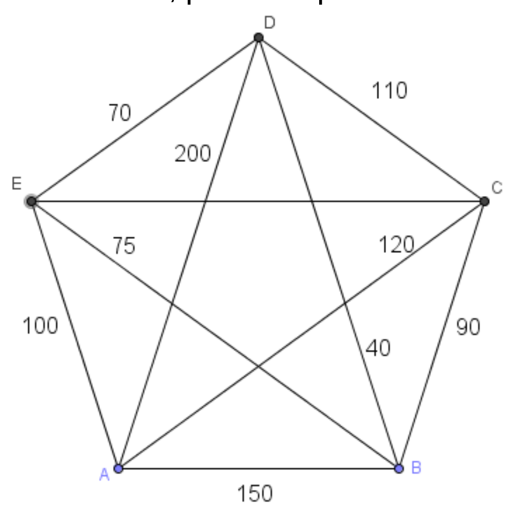


Gráfico 3.66

3.6.2 En el siguiente grafo, los vértices representan ciudades, y el peso de cada arista representa el tiempo en horas que se tarda en ir de una a otra ciudad. Halle el tiempo mínimo en ir de la ciudad A hasta E utilizando el menor tiempo posible.

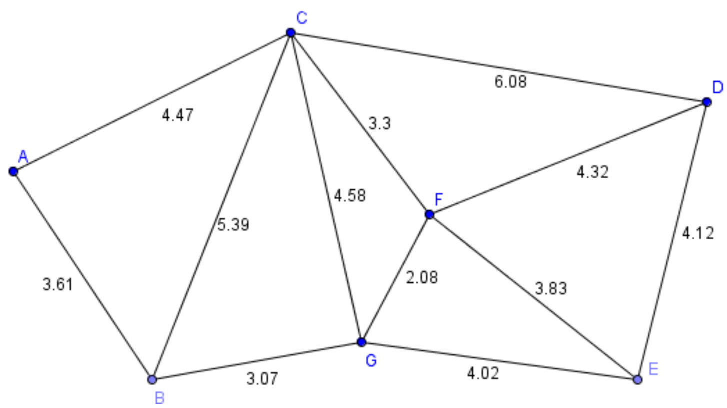


Gráfico 3.67

3.6.3 Un inspector de una red distribuidora de carrocerías tiene que visitar los locales en ciertas ciudades del país, y regresar al punto donde inició. El tiempo promedio que se demora en viajar de una ciudad a otra está dado en la siguiente tabla:

	UBICACIÓN				
UBICACIÓN	Cuenca	Guayaquil	Quito	Loja	Manta
Cuenca	-	3	7	3	6
Guayaquil	3	-	6	6	3
Quito	7	6	-	10	6
Loja	3	6	10	-	10
Manta	6	3	6	10	-

Tabla 3.6

Si empieza en Cuenca, halle la ruta más corta que cumple con el planteamiento propuesto.

3.6.4 Mediante el algoritmo de Kruskal, determine el árbol generador de menor costo del siguiente grafo.

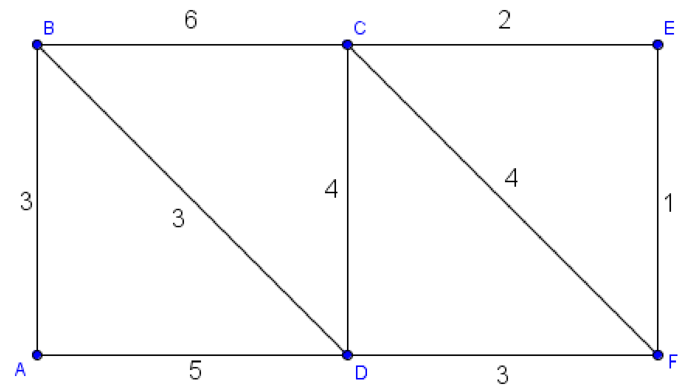


Gráfico 3.68

3.6.5 Encuentre un árbol generador de menor costo del ejercicio 3.5.3 con la ayuda del algoritmo de Kruskal.

3.5 PROBLEMA DEL TRANSPORTE

Destrezas con criterio de desempeño:

- *Plantear un problema de profanación lineal para resolver un problema de transporte.*

La programación lineal corresponde al bloque 3 (Matemáticas Discretas) del Primer Año de Bachillerato General Unificado, por lo que el problema del transporte significa un caso especial de un tema visto en un año anterior. La programación lineal es una herramienta que fue desarrollada para la toma de decisiones de tipo económico-administrativo; la idea es resolver una serie de inecuaciones lineales de dos, identificando previamente cada una de las variables. Un problema de transporte consiste en buscar la manera óptima de transportar bienes y asignar recursos; en otras palabras, consiste en la minimización de costos de transporte al decidir cuántas unidades trasladar desde un punto de origen hasta un punto final, por ejemplo un centro de distribución.

Ejemplo:

Un distribuidor de automóviles tiene almacenes en Cuenca y Manta y centros de distribución en Quito y Guayaquil. Todo auto que se venda en estos centros de distribución debe ser entregado desde uno de los almacenes. En cierto día en Quito los distribuidores venden 10 autos, y los distribuidores de Guayaquil venden 12 autos. El almacén de Cuenca tiene 15 autos disponibles y el almacén de Manta tiene 10. El costo de enviar un auto es $60 de Cuenca a Quito, $55 de Cuenca a Guayaquil, $50 de Manta a Quito y $40 de Manta a Guayaquil. ¿Cuántos autos deben enviarse de cada almacén a cada centro de distribución para cumplir con los pedidos al mínimo costo?

Nuestro primer paso es organizar la información dada. Se construirá una tabla y un diagrama para mostrar el movimiento de autos de los almacenes a los centros de distribución.

Almacenes	**Punto de Distribución**	
	Quito	Guayaquil
Cuenca	$ 60	$ 55
Manta	$ 50	$ 40

Tabla 3.7

Gráfico 3.69

El objetivo del problema es reducir al mínimo los costos de trasporte de distribución. Las variables *x* e *y* están dadas en el gráfico 3.69, y se puede ver allí el significado de cada una. Entonces, la función de costos, *C(x,y),* que será la función objetivo del problema, está representada por:

$$C(x,y) = 60x + 55y + 50(10 - x) + 40(12 - y)$$
$$C(x,y) = 10x + 15y + 980$$

Las desigualdades que modelan la situación y generarán la región factible se obtienen de la siguiente manera:

1. El número de autos enviados en cada ruta no puede ser negativo, por tanto:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 10 - x \geq 0 \\ 12 - y \geq 0 \end{cases}$$

2. El número total de autos enviados desde cada uno de los almacenes no puede exceder del número de venta en cada almacén, de modo que:

$$\begin{cases} x + y \leq 15 \\ (10 - x) + (12 - y) \leq 10 \rightarrow x + y \geq 12 \end{cases}$$

Las restricciones son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 10 - x \geq 0 \\ 12 - y \geq 0 \\ x + y \leq 15 \\ x + y \geq 12 \end{cases}$$

Se realizará el gráfico en el software GeoGebra. Para ello, se ingresará cada función en la barra de entrada, en la parte inferior de la pantalla.

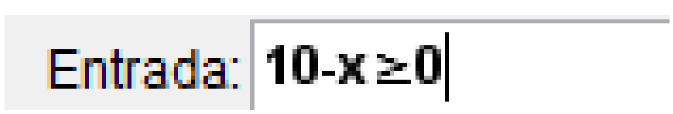


Gráfico 3.70

Al ingresar cada desigualdad, GeoGebra "pintará" la región correspondiente, obteniéndose al final de las seis restricciones el siguiente gráfico. Es recomendable, para poder diferenciar claramente, que a cada desigualdad se le designe de un color diferente:

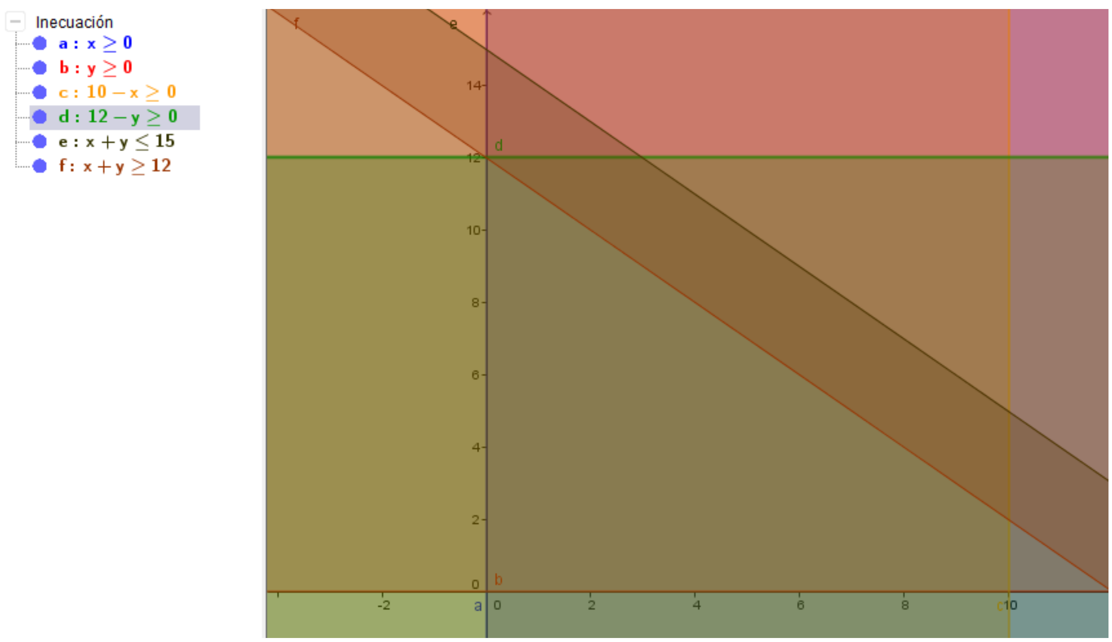


Gráfico 3.71

En la barra de entrada se procede a ingresar cada desigualdad como una ecuación, para obtener una recta, es decir, en lugar de escribir $12 - y \geq 0$ se escribirá $12 - y = 0$. Con esto se obtienen rectas que definan las regiones que se graficaron anteriormente.

Se puede observar una sección que contiene todos los colores de las desigualdades dadas; se procede a marcar los puntos de intersección de las regiones, aprovechando que ahora las regiones están limitadas por rectas, y ocultar las desigualdades, para obtener una imagen similar a la siguiente:

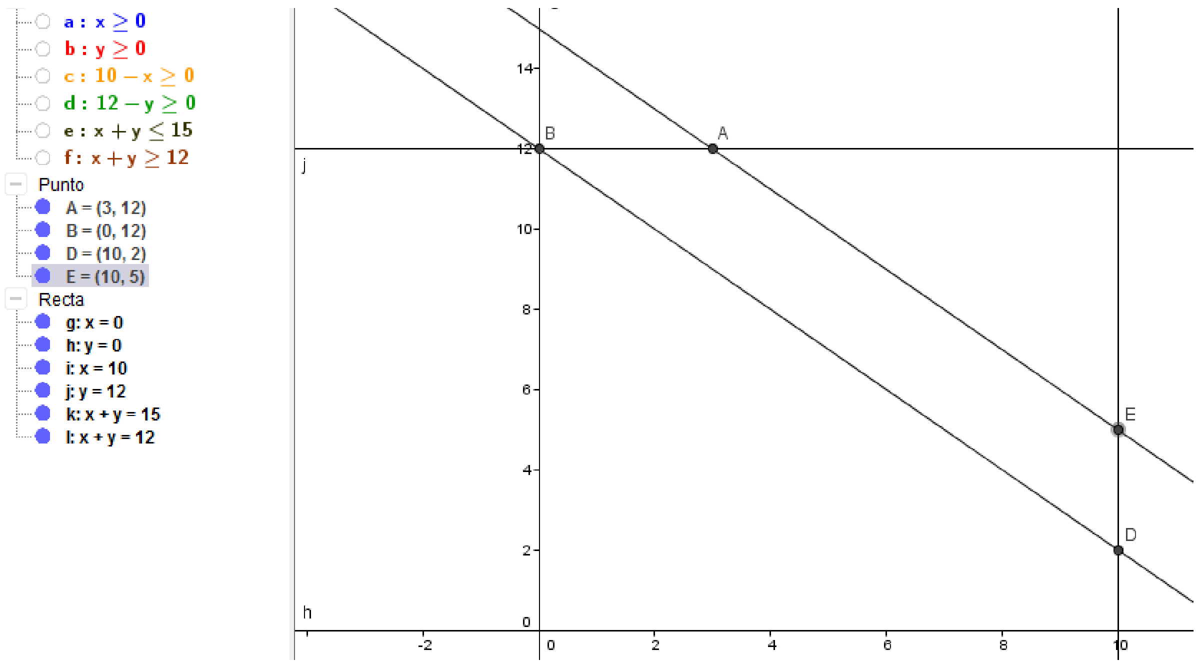


Gráfico 3.72

La región factible del problema es el polígono ABDE. Entonces, en la parte izquierda, en la vista algebraica de GeoGebra, se puede observar los puntos de intersección. Se procede a reemplazar el valor de dichos puntos en la función de costos:

Vértices	**Función de Costos** $C(x,y)=10x+15y+980$
(0,12)	$0+15(12)+980=\$1160$
(3,12)	$10(3)+15(12)+980=\$1190$
(10,5)	$10(10)+15(5)+980=\$1155$
(10,2)	$10(10)+15(2)+980=\$1110$

Tabla 3.8

De donde se puede observar que se tendrá el costo mínimo cuando x=10, y=2, es decir, si se observa el gráfico 3.69, se tiene que la empresa incurrirá en el menor gasto al enviar los autos de la siguiente manera:

- 10 autos de Cuenca a Quito
- 2 autos de Cuenca a Guayaquil
- 0 autos de Manta a Quito
- 10 autos de Manta a Guayaquil

Ejercicio 3.7

3.7.1 Realizar el ejercicio propuesto con los siguientes datos.

Almacenes	Punto de Distribución	
	Quito	Guayaquil
Cuenca	$ 100	$ 110
Manta	$ 70	$ 80

Tabla 3.9

3.7.2 Una cadena de tiendas de aparatos electrónicos vende televisores marca LG. La cadena tiene tiendas en Quito y Guayaquil y almacenes en Cuenca y Riobamba. Para satisfacer pedidos urgentes, deben enviarse 15 aparatos de los almacenes a la tienda de Quito y 19 a la tienda de Guayaquil. El costo de enviar un aparato es $5 de Cuenca a Quito, $6 de Cuenca a Guayaquil, $4 de Riobamba a Quito y $5.50 de Riobamba a Guayaquil. Si el almacén de Cuenca tiene 24 aparatos y el almacén de Riobamba tiene 18 aparatos en existencia, ¿cuántos aparatos deben ser enviados de cada almacén a cada tienda para satisfacer los pedidos a un mínimo costo de envío?

Almacenes	Tiendas	
	Quito	Guayaquil
Cuenca	$ 5	$ 6
Riobamba	$ 4	$ 5,50

Tabla 3.10

3.7.3 Un hombre, dueño de dos tiendas de material de construcción, una en el lado Este y la otra en el lado Oeste de Cuenca. Dos clientes solicitan planchas de plywood. El cliente X necesita 50 hojas y el cliente Y necesita 70 hojas. La tienda del Este tiene en existencia 80 hojas y la del Oeste tiene 45 hojas de esta madera. Los costos de entrega de la tienda del Este son $0.50 por pieza al cliente X y $0.60 al cliente Y. Los costos de entrega de la tienda del Oeste son $0.40 por pieza al cliente X y $0.55 al cliente Y. ¿Cuántas hojas deben enviarse de cada tienda a cada cliente para reducir al mínimo los costos de envío?

Tienda	**Cliente**	
	X	Y
Este	$ 0,50	$ 0,60
Oeste	$ 0,40	$ 0,55

Tabla 3.11

CONCLUSIONES.

- Los docentes especializados en el área de Matemática están de acuerdo del cambio en el sistema educativo implementado por el Ministerio de Educación del Ecuador que estableció cada asignatura en bloques del conocimiento, y que para BGU se tiene 4 bloques en Matemática: Números y Funciones, Álgebra y Geometría, Matemáticas Discretas, Probabilidad y Estadística.

- El software GeoGebra es un programa de geometría dinámica que cuenta con varias potencialidades para su utilización y aprovechamiento en varias ramas de la matemática, como la Matemática Discreta, por ejemplo.

- De acuerdo al estudio estadístico realizado, se considera a la Matemática Discreta como un tema nuevo en el sistema educativo ecuatoriano, pero de mucha importancia para la formación de los estudiantes, al ser un tema de gran utilidad en el estudio de redes y sistemas de transporte o rutas, entre otros.

RECOMENDACIONES.

- Es necesario e importante que los docentes del Segundo Año BGU de las instituciones educativas, fiscales o particulares, se preparen en contenidos y metodologías referentes a la Teoría de Grafos, tema correspondiente al bloque de Matemáticas Discretas del mencionado año.

- Estar en constante actualización conforme avanza la tecnología y, por tanto, la aparición y/o mejoramiento de varios softwares educativos para matemática, de manera que se pueda aprovechar al máximo sus potencialidades

- La guía realizada para docentes del Segundo Año BGU, contiene actividades propuestas para la clase, y presenta algunos ejercicios realizados con el software GeoGebra para poder desarrollar de una mejor manera la clase y tratar de alcanzar las destrezas con criterios de desempeño del respectivo bloque.

ANEXOS.

- Anexo 1: Formato de encuesta realizada a docentes de Segundo Año BGU de colegios de la ciudad de Cuenca
- Anexo 2: Formato de entrevista realizada a docentes de Segundo Año BGU de colegios de la ciudad de Cuenca
- Anexo 3: Encuesta realizada a docentes de Segundo Año BGU de la ciudad de Cuenca.
- Anexo 4: Entrevista realizada a docentes de Segundo Año BGU de la ciudad de Cuenca.
- Anexo 5: Guía de solución a ejercicios propuestos.

Anexo 1: Encuesta

ENCUESTA SOBRE MATEMÁTICAS DISCRETAS EN SEGUNDO AÑO DE BGU

El presente instrumento es una encuesta INDIVIDUAL y ANÓNIMA que consta de 15 ítems, realizada a docentes de los Segundos Años de Bachillerato de Colegios de la ciudad de Cuenca como parte de la investigación del trabajo de graduación previo a la obtención del título en Licenciatura en Ciencias de la Educación, especialidad de Matemáticas y Física. Solicitamos a usted comedidamente nos colabore contestándola. Por favor marque con una X la respuesta que desee. Responda con la mayor veracidad posible.

OBJETIVO GENERAL

Desarrollar una guía didáctica para docentes del Área de Matemáticas, enfocada en el Bloque de Matemáticas Discretas de Segundo Año BGU, que proporcione herramientas metodológicas que faciliten la explicación del tema y la comprensión por parte del estudiantado.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Facilitar a los docentes y futuros docentes del área de Matemáticas una guía metodológica sobre el Bloque de Matemáticas Discretas.
- Incentivar el gusto por las Matemáticas Discretas a través una guía metodológica, acorde a los lineamientos del Nuevo BGU, de modo que el aprendizaje se torne significativo en las y los estudiantes de segundo año de BGU
- Promover el uso de Geogebra en el aula para la enseñanza del bloque de Matemáticas Discretas y reforzar los conocimientos adquiridos a través del mencionado software.

ENCUESTA SOBRE MATEMÁTICAS DISCRETAS EN SEGUNDO AÑO DE BGU

El presente instrumento es una encuesta INDIVIDUAL y ANÓNIMA que consta de *15 ítems*, realizada a docentes de los Segundos Años de Bachillerato de Colegios de Cuenca como parte de la investigación del trabajo de graduación, previo a la obtención del título en Licenciatura en Ciencias de la Educación, especialidad de Matemáticas y Física. Marque con una X la respuesta que desee. Por favor, conteste con la mayor veracidad posible.

FECHA: …………………………………………

EDAD: ………………………

SEXO: ☐ Hombre ☐ Mujer

TIPO DE INSTITUCIÓN: ☐ Fiscal ☐ Fiscomisional ☐ Municipal ☐ Particular

EJEMPLOS:

Señale con una X la respuesta que expresa su opinión con respecto a las siguientes afirmaciones:

Ejemplo 1:

Existe material concreto para la enseñanza del bloque de Matemáticas Discretas.

☐ Totalmente de acuerdo ☐ De acuerdo ☒ Más o menos de acuerdo ☐ Más o menos en desacuerdo ☐ En desacuerdo ☐ Totalmente en desacuerdo

Si desea cambiar una respuesta ya marcada en el recuadro, marque una nueva X en el recuadro deseado y encierre la misma en un círculo.

Ejemplo 2:

Existe material concreto para la enseñanza del bloque de Matemáticas Discretas.

☐ Totalmente de acuerdo ☐ De acuerdo ☒ Más o menos de acuerdo ☐ Más o menos en desacuerdo ☒ En desacuerdo ☐ Totalmente en desacuerdo

Ahora, exprese su opinión respecto a las siguientes afirmaciones:

1. **Indique la titulación correspondiente a su tercer nivel educativo.**

☐ Arquitecto/a ☐ Ingeniero/a ☐ Economista o similar ☐ Licenciado/a en Educación ☐ Otra

Si señaló "Ingeniería", señale su especialización (Civil, Electrónica, etc);
si señaló "Otra", indique cuál es su titulación: ……………………………………………..

2. **Por favor, indique el tiempo que ha laborado como docente en el área de matemáticas.**

☐ Menos de 1 año ☐ 1-4 años ☐ 5-9 años ☐ 10-14 años ☐ 15-19 años ☐ Más de 20 años

3. **¿Cuál es su metodología de enseñanza en el aula de clases? (Más de una respuesta es posible)**

☐ Clase magistral ☐ Método Heurístico ☐ Metodología Constructivista ☐ ABP ☐ Trabajo Cooperativo ☐ Conductista/ Tradicional

4. **Como docente, ¿indica a su clase la importancia de la Matemática en la vida como motivación para sus estudiantes?**

☐ Siempre ☐ Casi siempre ☐ A veces ☐ Casi nunca ☐ Nunca

5. **En su formación universitaria, tuvo formación en el área de Matemáticas discretas:**

☐ Excelente ☐ Muy buena ☐ Buena ☐ Regular ☐ Mala ☐ Ninguna

6. **¿Considera usted que el bloque de Matemáticas Discretas es importante para la formación del estudiante?**

☐ Si ☐ No

En caso que su respuesta sea NO, argumente:
………
………

7. **¿Cuál es su posición respecto al planteamiento del Ministerio de Educación sobre la división por bloques curriculares?**

☐ Totalmente de acuerdo ☐ De acuerdo ☐ Más o menos de acuerdo ☐ Más o menos en desacuerdo ☐ En desacuerdo ☐ Totalmente en desacuerdo

8. **¿Piensa que se están alcanzando las destrezas con criterios de desempeño que están planificadas en el bloque de Matemáticas Discretas?**

☐ Totalmente de acuerdo ☐ De acuerdo ☐ Más o menos de acuerdo ☐ Más o menos en desacuerdo ☐ En desacuerdo ☐ Totalmente en desacuerdo

9. **¿Considera que las precisiones para la enseñanza y el aprendizaje planteadas por el Ministerio de Educación son suficientes para alcanzar las destrezas con criterios de desempeño?**

☐ Totalmente de acuerdo ☐ De acuerdo ☐ Más o menos de acuerdo ☐ Más o menos en desacuerdo ☐ En desacuerdo ☐ Totalmente en desacuerdo

10. ¿Considera que los textos sobre Matemáticas Discretas existentes en nuestro país son acordes a la realidad del mismo?

☐ Totalmente de acuerdo ☐ De acuerdo ☐ Más o menos de acuerdo ☐ Más o menos en desacuerdo ☐ En desacuerdo ☐ Totalmente en desacuerdo

11. ¿Considera que la bibliografía existente acerca del tema de Matemáticas Discretas satisface las necesidades de la realidad de nuestro país?

☐ Totalmente de acuerdo ☐ De acuerdo ☐ Más o menos de acuerdo ☐ Más o menos en desacuerdo ☐ En desacuerdo ☐ Totalmente en desacuerdo

12. ¿Considera que la tecnología puede ayudar a alcanzar las Destrezas con Criterios de Desempeño para el BGU, planteadas por el Ministerio de Educación?

☐ Totalmente de acuerdo ☐ De acuerdo ☐ Más o menos de acuerdo ☐ Más o menos en desacuerdo ☐ En desacuerdo ☐ Totalmente en desacuerdo

13. ¿Ha utilizado la tecnología para la explicación de contenidos en su clase de Matemática?

☐ Si ☐ No

En caso que su respuesta sea SI, indique los recursos utilizados: ……………………………………………………….

En caso que su respuesta anterior fue SI, conteste la pregunta 14 y 15. En caso que haya respondido NO, agradecemos su colaboración.

14. ¿El plantel tiene los recursos para utilizar la tecnología que usted indicó en la pregunta anterior?

☐ Si ☐ No

15. ¿Utiliza el software Geogebra para sus clases de Matemáticas?

☐ Siempre ☐ Casi siempre ☐ A veces ☐ Casi nunca ☐ Nunca

Anexo 2: Entrevista

ENTREVISTA: MATEMÁTICAS DISCRETAS EN SEGUNDO AÑO DE BGU

El presente instrumento es una entrevista INDIVIDUAL y ANÓNIMA que consta de 5 ítems, realizada a docentes de los Segundos Años de Bachillerato de Colegios de la ciudad de Cuenca como parte de la investigación del trabajo de graduación, previo a la obtención del título en Licenciatura en Ciencias de la Educación, especialidad de Matemáticas y Física. Solicitamos a usted comedidamente nos colabore contestándola. Responda con la mayor veracidad posible.

OBJETIVO GENERAL

Desarrollar una guía didáctica para docentes del Área de Matemáticas, enfocada en el Bloque de Matemáticas Discretas de Segundo Año BGU, que proporcione herramientas metodológicas que faciliten la explicación del tema y la comprensión por parte del estudiantado.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Facilitar a los docentes y futuros docentes del área de Matemáticas una guía metodológica sobre el Bloque de Matemáticas Discretas.
- Incentivar el gusto por las Matemáticas Discretas a través una guía metodológica, acorde a los lineamientos del Nuevo BGU, de modo que el aprendizaje se torne significativo en las y los estudiantes de segundo año de BGU
- Promover el uso de Geogebra en el aula para la enseñanza del bloque de Matemáticas Discretas y reforzar los conocimientos adquiridos a través del mencionado software.

ENTREVISTA

1. Acorde a los bloques curriculares del Bachillerato General Unificado, ¿Piensa que existen guías para Matemáticas Discretas en nuestro país? (Si, pasar a pregunta 2, caso contrario, pasar a pregunta 3)

   ____

   ____

2. ¿Considera que los textos guías sobre Matemáticas Discretas existentes en nuestro país responden a la realidad del mismo?

   ____

   ____

3. Como docente del Segundo BGU, ¿piensa que se están alcanzando las destrezas con criterios de desempeño que están planificadas en el bloque de Matemáticas Discretas?

   ____

   ____

   ____

   ____

4. Durante la exposición de sus clases, ¿cómo considera que es el nivel de comprensión de los contenidos por parte de sus estudiantes, respecto al bloque de matemáticas discretas?

   ____

   ____

5. ¿Con respecto a los bloques curriculares planteados por el actual currículo, cuál considera usted que representa mayor dificultad para el aprendizaje de los estudiantes? ¿Por qué?

6. ¿Considera que la tecnología puede ayudar a alcanzar las destrezas con criterios de desempeño propuestas en el bloque de Matemáticas Discretas?

LE AGRADECEMOS POR SU ESPACIO Y TIEMPO BRINDADO.

Anexo 3: Encuesta realizada a docentes

ENCUESTA SOBRE MATEMÁTICAS DISCRETAS EN SEGUNDO AÑO DE BGU

El presente instrumento es una encuesta INDIVIDUAL y ANÓNIMA que consta de *15 ítems*, realizada a docentes de los Segundos Años de Bachillerato de Colegios de Cuenca como parte de la investigación del trabajo de graduación, previo a la obtención del título en Licenciatura en Ciencias de la Educación, especialidad de Matemáticas y Física. Marque con una X la respuesta que desee. Por favor, conteste con la mayor veracidad posible.

FECHA: 22/10/2014

EDAD: ....

SEXO: [ ] Hombre [X] Mujer

TIPO DE INSTITUCIÓN: [X] Fiscal [ ] Fiscomisional [ ] Municipal [ ] Particular

EJEMPLOS:

Señale con una X la respuesta que expresa su opinión con respecto a las siguientes afirmaciones:

Ejemplo 1:

Existe material concreto para la enseñanza del bloque de Matemáticas Discretas.

[ ] Totalmente de acuerdo [ ] De acuerdo [X] Más o menos de acuerdo [ ] Más o menos en desacuerdo [ ] En desacuerdo [ ] Totalmente en desacuerdo

Si desea cambiar una respuesta ya marcada en el recuadro, marque una nueva X en el recuadro deseado y encierre la misma en un círculo.

Ejemplo 2:

Existe material concreto para la enseñanza del bloque de Matemáticas Discretas.

[ ] Totalmente de acuerdo [ ] De acuerdo [X] Más o menos de acuerdo [ ] Más o menos en desacuerdo [X] En desacuerdo [ ] Totalmente en desacuerdo

Ahora, exprese su opinión respecto a las siguientes afirmaciones:

1. **Indique la titulación correspondiente a su tercer nivel educativo.**

[ ] Arquitecto/a [ ] Ingeniero/a [ ] Economista o similar [X] Licenciado/a en Educación [ ] Otra

Si señaló "Ingeniería", señale su especialización (Civil, Electrónica, etc); si señaló "Otra", indique cuál es su titulación: ....

2. **Por favor, indique el tiempoque ha laborado como docente en el área de matemáticas.**

[ ] Menos de 1 año [ ] 1-4 años [ ] 5-9 años [X] 10-14 años [ ] 15-19 años [ ] Más de 20 años

3. **¿Cuál es su metodología de enseñanza en el aula de clases? (Más de una respuesta es posible)**

- [ ] Clase magistral
- [ ] Método Heurístico
- [ ] Metodología Constructivista
- [x] ABP
- [x] Trabajo Cooperativo
- [ ] Conductista/ Tradicional

4. **Como docente, ¿indica a su clase la importancia de la Matemática en la vida como motivación para sus estudiantes?**

- [ ] Siempre
- [ ] Casi siempre
- [x] A veces
- [ ] Casi nunca
- [ ] Nunca

5. **En su formación universitaria, tuvo formación en el área de Matemáticas discretas:**

- [ ] Excelente
- [ ] Muy buena
- [ ] Buena
- [ ] Regular
- [x] Mala
- [ ] Ninguna

6. **¿Considera usted que el bloque de Matemáticas Discretas es importante para la formación del estudiante?**

- [x] Si
- [ ] No

En caso que su respuesta sea NO, argumente:

....

....

7. **¿Cuál es su posición respecto al planteamiento del Ministerio de Educación sobre la división por bloques curriculares?**

- [ ] Totalmente de acuerdo
- [ ] De acuerdo
- [x] Más o menos de acuerdo
- [ ] Más o menos en desacuerdo
- [ ] En desacuerdo
- [ ] Totalmente en desacuerdo

8. **¿Piensa que se están alcanzando las destrezas con criterios de desempeño que están planificadas en el bloque de Matemáticas Discretas?**

- [ ] Totalmente de acuerdo
- [ ] De acuerdo
- [x] Más o menos de acuerdo
- [ ] Más o menos en desacuerdo
- [ ] En desacuerdo
- [ ] Totalmente en desacuerdo

9. **¿Considera que las precisiones para la enseñanza y el aprendizaje planteadas por el Ministerio de Educación son suficientes para alcanzar las destrezas con criterios de desempeño?**

- [ ] Totalmente de acuerdo
- [ ] De acuerdo
- [x] Más o menos de acuerdo
- [ ] Más o menos en desacuerdo
- [ ] En desacuerdo
- [ ] Totalmente en desacuerdo

10. **¿Considera que los textos sobre Matemáticas Discretas existentes en nuestro país son acordes a la realidad del mismo?**

- [ ] Totalmente de acuerdo
- [ ] De acuerdo
- [ ] Más o menos de acuerdo
- [ ] Más o menos en desacuerdo
- [x] En desacuerdo
- [ ] Totalmente en desacuerdo

11. **¿Considera que la bibliografía existente acerca del tema de Matemáticas Discretas satisface las necesidades de la realidad de nuestro país?**

- [ ] Totalmente de acuerdo
- [ ] De acuerdo
- [ ] Más o menos de acuerdo
- [ ] Más o menos en desacuerdo
- [x] En desacuerdo
- [ ] Totalmente en desacuerdo

12. **¿Considera que la tecnología puede ayudar a alcanzar las Destrezas con Criterios de Desempeño para el BGU, planteadas por el Ministerio de Educación?**

- [ ] Totalmente de acuerdo
- [x] De acuerdo
- [ ] Más o menos de acuerdo
- [ ] Más o menos en desacuerdo
- [ ] En desacuerdo
- [ ] Totalmente en desacuerdo

13. ¿Ha utilizado la tecnología para la explicación de contenidos en su clase de Matemática?

☒ Si ☐ No

En caso que su respuesta sea SI, indique los recursos utilizados: ....Proyectores....

En caso que su respuesta anterior fue SI, conteste la pregunta 14 y 15. En caso que haya respondido NO, agradecemos su colaboración.

14. ¿El plantel tiene los recursos para utilizar la tecnología que usted indicó en la pregunta anterior?

☒ Si ☐ No

15. ¿Utiliza el software Geogebra para sus clases de Matemáticas?

☐ Siempre ☐ Casi siempre ☐ A veces ☐ Casi nunca ☒ Nunca

Anexo 4: Entrevista realizada a docentes

ENTREVISTA

1. Acorde a los bloques curriculares del Bachillerato General Unificado, ¿Piensa que existen guías para Matemáticas Discretas en nuestro país? (Si, pasar a pregunta 2, caso contrario, pasar a pregunta 3)

Para el bloque en mención, pienso que falta una bibliografía más clara y fácil de entender, para estudiantes y docentes además de la existente que, al menos, yo utilizo. (Matemáticas 2 Grado

2. ¿Considera que los textos guías sobre Matemáticas Discretas existentes en nuestro país responden a la realidad del mismo?

El (el) libro que se nombró en la pregunta anterior contiene ejercicios no tan abstractos, pero hace falta un mayor acercamiento a las prácticas de enseñanza actuales y vinculación con la tecnología.

3. Como docente del Segundo BGU, ¿piensa que se están alcanzando las destrezas con criterios de desempeño que están planificadas en el bloque de Matemáticas Discretas?

No. Son varias destrezas a trabajar, y aunque se pueden utilizar recursos distintos a la práctica tradicional, con cuatro horas /semana no es factible avanzar con el programa.

4. Durante la exposición de sus clases, ¿cómo considera que es el nivel de comprensión de los contenidos por parte de sus estudiantes, respecto al bloque de matemáticas discretas?

Medio a medio bajo, no ponen atención a clases, pocos son quienes aprovechan cada momento. Al ver estas actitudes, el docente, y me ha pasado, termina dando clase tradicional. Con ello se pierde un poco de contacto con el estudiante.

5. ¿Con respecto a los bloques curriculares planteados por el actual currículo, cuál considera usted que representa mayor dificultad para el aprendizaje de los estudiantes? ¿Por qué?

Dentro del Segundo BGU, pienso que el tema de los grafos, bloque Matemáticas Discretas, pues los estudiantes necesitan un nivel más alto de abstracción para la comprensión del tema

6. ¿Considera que la tecnología puede ayudar a alcanzar las destrezas con criterios de desempeño propuestas en el bloque de Matemáticas Discretas?

No solo en este bloque, sino en todos los bloques y todas las áreas del conocimiento. Existimos docentes que no manejamos las nuevas tecnologías, pero de que ayudan en el proceso de enseñanza hay que darlo por sentado

Anexo 5: Guía de solución a ejercicios propuestos.

Ejercicios 3.1

3.1.1 La teoría de grafos nació en:

a) 1 789

b) 1 746

c) 1 736

d) 1796

3.1.2 El matemático que dio origen a la teoría de grafos se llamaba:

a) Gottfried Leibniz

b) Isaac Newton

c) Carl Friedrich Gauss

d) Leonard Euler

3.1.3 La ciudad en donde nació la teoría de grafos a través del famoso problema de los puentes se llama:

a) Siracusa-Grecia

b) Könisberg (Kaliningrado)-Rusia

c) Paris-Francia

d) Londres-Reino Unido

Ejercicios 3.2

3.2.1 Indique el concepto de vértice.

Vértice es un punto que forma parte de un grafo.

3.2.2 Indique el concepto de arista.

Arista es un segmento de recta, dirigido o no, que une dos o más vértices.

3.2.3 Indique el concepto de lazo.

Lazo es aquella arista cuyo punto inicial y final es el mismo vértice.

3.2.4 Exprese cuál es la diferencia entre aristas y aristas paralelas.

Aristas: Una arista es aquella línea que une dos o más vértices, se la denomina con la letra E.

Aristas paralelas: Son aquellas aristas que unen al mismo conjunto de vértices, es decir, cuando las aristas en mención empiezan en un vértice *v* y terminan en un vértice *w*.

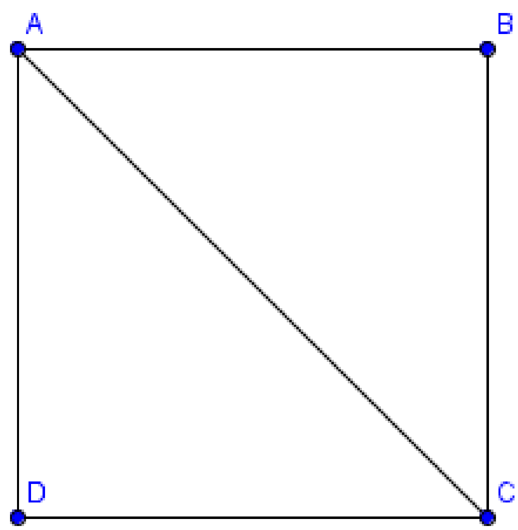
3.2.5 De una definición de grafo.

Grafo es un conjunto de vértices y aristas que unen a los vértices, y sirven para representar varias situaciones matemáticas y/o de la vida real de forma práctica y sencilla

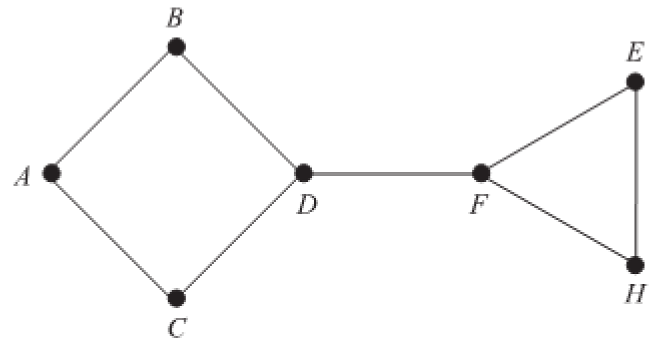
3.2.6 De un ejemplo de la vida real que se pueda modelar como un grafo.

Redes de computadoras, rutas aéreas, lazos de amistad, diagramas eléctricos (Leyes de Kirchoff), entre otros.

3.2.7 Dibuje un grafo de4 vértices y 5 aristas.



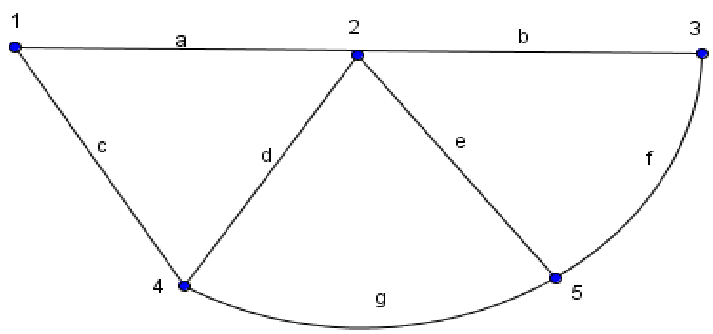
3.2.8 Dado el siguiente grafo, escriba el conjunto V de vértices que lo conforman.



Respuesta: $\boldsymbol{V = \{A, B, C, D, F, E, H\}}$

3.2.9 En el siguiente gráfico identifique el conjunto de vértices y aristas.

E



Respuesta: $\boldsymbol{V = \{1, 2, 3, 4, 5\}}$; $\boldsymbol{E = \{a, b, c, d, e, f, g\}}$

3.2.10 GeoGebra. En el laboratorio de Informática, plantear a los estudiantes que en el software GeoGebra se dibuje un grafo de 7 vértices.

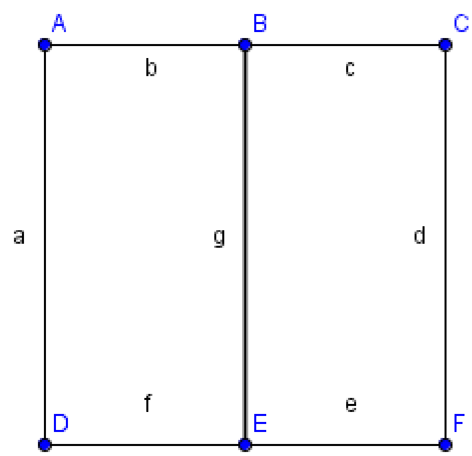
Nota: El ejercicio está resuelto en la guía.

Ejercicios 3.3

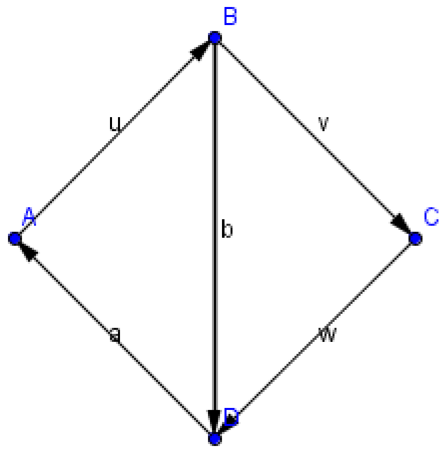
3.3.1 Establezca, con sus propias palabras, la diferencia que existe entre un grafo dirigido y un grafo no dirigido.

Un grafo dirigido es aquel en el que el segmento de recta muestra una punta de flecha o saeta, indicando el camino que se debe seguir entre un vértice y otro; en un grafo no dirigido no importa el orden al ir de uno a otro vértice.

3.3.2 Realice un grafo no dirigido que contenga 6 vértices y 7 aristas.



3.3.3 Realice un grafo dirigido que contenga 4 vértices y 5 aristas.



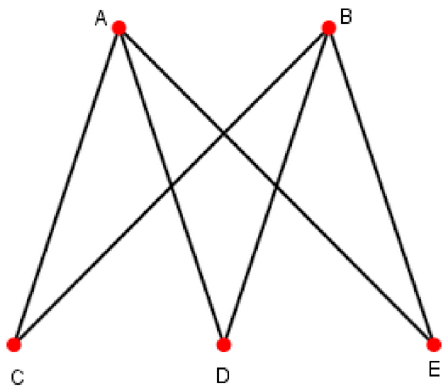
3.3.4 Defina matriz de adyacencia de un grafo no dirigido.

Una matriz de adyacencia es una matriz cuadrada que usa el sistema binario para representar las relaciones de un grafo.

3.3.5 ¿Qué representa el número 1 en una matriz de adyacencia? ¿Y el número 0?

El número 0 muestra que no existe conexión entre dos o más vértices; el número 1 representa la conexión entre dos vértices.

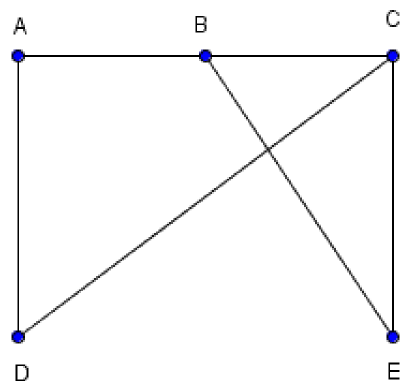
3.3.6 Realice la matriz de adyacencia del siguiente grafo.



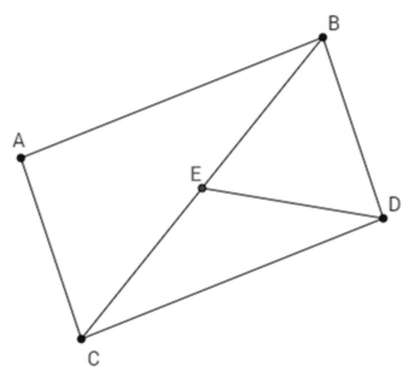
$$\begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ A & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ C & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ D & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ E & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

3.3.7 A partir de la siguiente matriz de adyacencia, construya el grafo que la representa.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$



3.3.8 Relacionar el siguiente grafo con la matriz de adyacencia correspondiente.

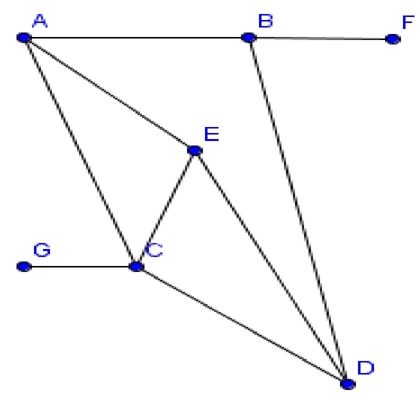


a) $\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$ **b)** $\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$ **c)** $\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$ **d)** $\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$

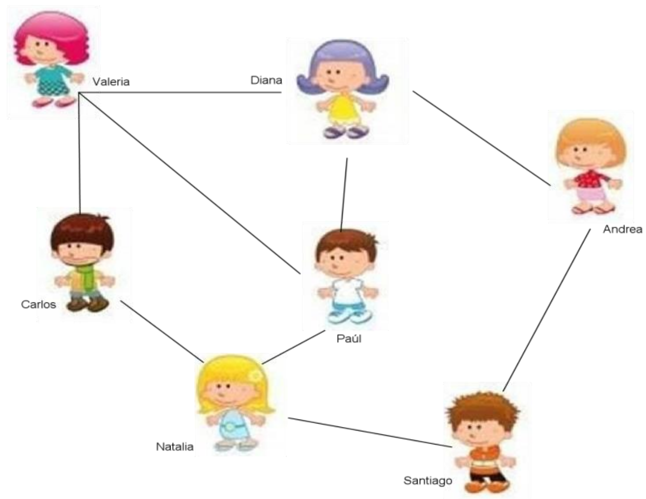
Respuesta: c)

3.2.9 Realice un grafo que simbolice la siguiente matriz de adyacencia.

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \Leftrightarrow$$



3.2.10 Represente mediante una matriz de adyacencia el grafo planteado al en la página 10 de esta guía (gráfico 3.2).



	Diana	*Carlos*	*Paúl*	*Natalia*	*Valeria*	*Santiago*	*Andrea*
Diana	0	0	1	0	1	0	1
Carlos	0	0	0	1	1	0	0
Paúl	1	0	0	1	1	0	0
Natalia	0	1	1	0	0	1	0
Valeria	1	1	1	0	0	0	0
Santiago	0	0	0	1	0	0	1
Andrea	1	0	0	0	0	1	0

Ejercicios 3.4

3.4.1 Defina grado de un vértice

Grado de un vértice representa el número de aristas salientes desde dicho vértice.

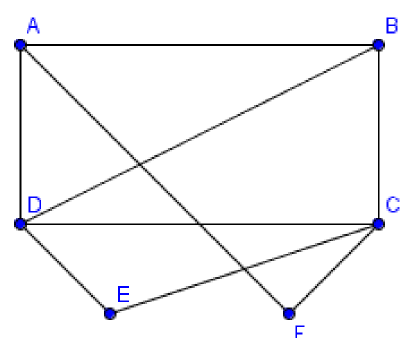
3.4.2 Establezca una condición suficiente para la existencia de un circuito de Euler.

El grado de cada vértice debe ser par.

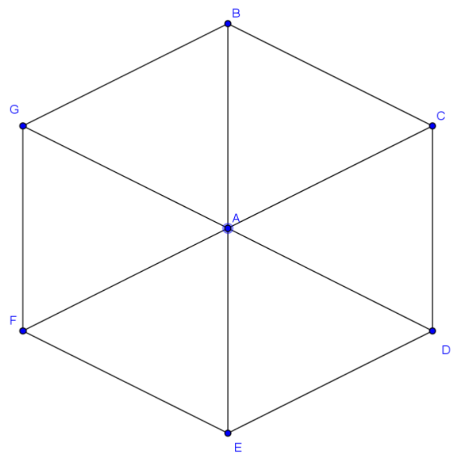
3.4.3 Cuando Leonard Euler resolvió el problema de los puentes de Könisberg, ¿tomó en cuenta la longitud de los puentes o la extensión superficial de la ciudad, o el caudal de los ríos? Enuncie la forma en que Euler resolvió el problema.

Euler no tomó en cuenta ninguno de los factores mencionados; el simbolizó las porciones de tierra como puntos (vértices) y los puentes que unían dichas porciones de tierra como líneas (aristas).

3.4.4 Realizar un grafo de 6 vértices en el cual se tenga 4 vértices de grado par y 2 vértices de grado impar.



3.4.5 Determinar en el siguiente grafo el grado de cada uno de los vértices, y completar la tabla.



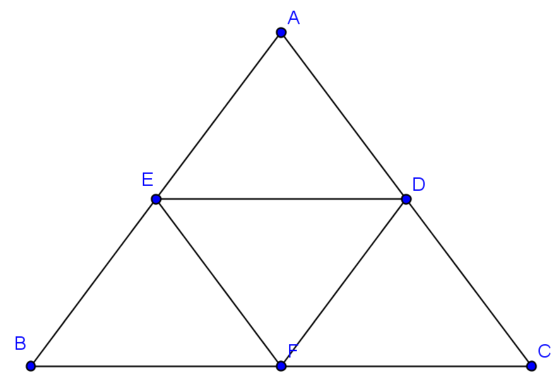
$\delta(v)$	Valor
$\delta(A)$	6
$\delta(B)$	3
$\delta(C)$	3
$\delta(D)$	3
$\delta(E)$	3
$\delta(F)$	3
$\delta(G)$	3

3.4.6 Defina con sus propias palabras que es un ciclo o circuito de Euler.

Un ciclo o circuito de Euler es aquel ciclo o circuito en el que existe un camino o trayectoria que pase por cada arista del grafo una sola vez.

3.4.7 Enunciar si el siguiente grafo tiene un ciclo de Euler, y argumente su respuesta.

El grafo anterior *SI* tiene un ciclo de Euler puesto que todos los vértices tienen grado par.



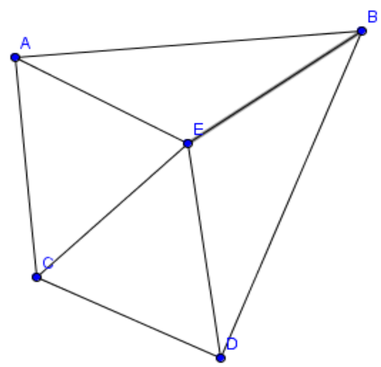
3.4.8 En el grafo de la pregunta anterior, encuentre, al menos, 2 circuitos de Euler.

Respuesta: 1) *(A, E, B, F, C, D, F, E, D, A)*

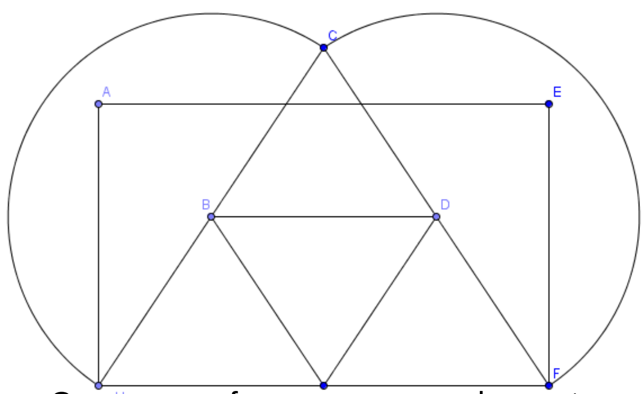
2) (F, B, E, A, D, E, F, D, C, F)

3.4.9 De un ejemplo de grafo que *no* tenga un ciclo de Euler. Pruebe que el grafo no tiene un circuito de Euler.

El grafo dado no tiene un ciclo de Euler pues los vértices A, B, C y D tienen grado impar, y solamente E tiene grado par.



3.4.10 Realizar un grafo que de 8 vértices en el cual haya un circuito de Euler.



3.4.11 GeoGebra. Crear un grafo en que se pueda mostrar un camino de Euler.

Nota: El ejercicio está resuelto en la guía.

Ejercicios 3.5

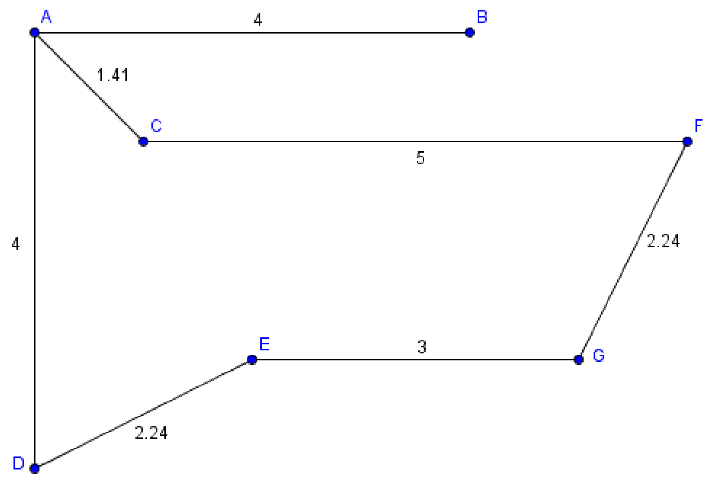
3.5.1 Con sus propias palabras, defina un circuito de Hamilton.

Un ciclo o circuito donde se pueden atravesar todos los vértices de un grafo pasando una sola vez por cada uno de ellos, excepto por el vértice inicial, el cual se constituye a su vez como vértice final o de llegada, se llama circuito de Hamilton

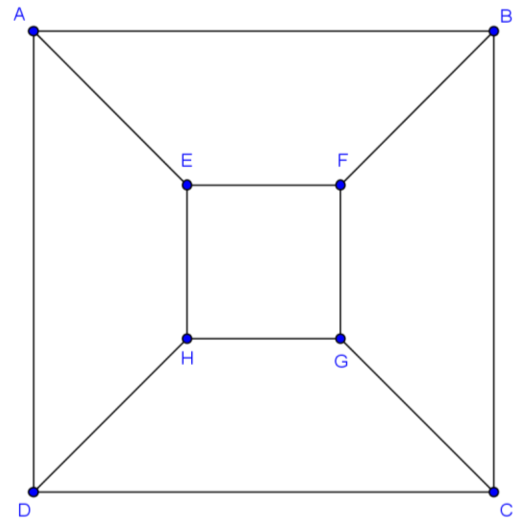
3.5.2 Defina grafo ponderado.

Grafo ponderado es aquel en el que las aristas tienen un valor o peso que puede simbolizar tiempo o dinero.

3.5.3 De un ejemplo de un grafo ponderado de 5 vértices y 7 aristas.

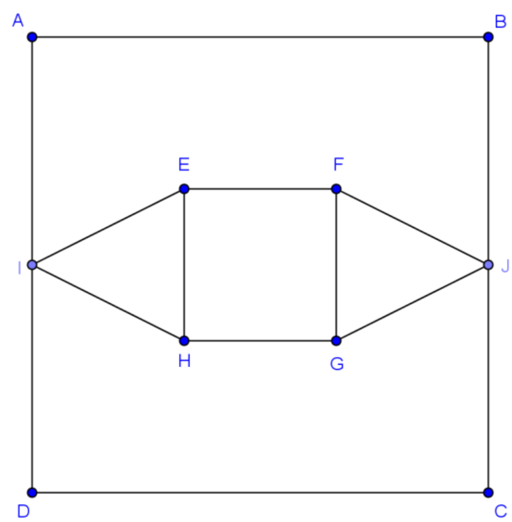


3.5.4 Muestre que la siguiente gráfica tiene un ciclo de Hamilton. Indique cuál es el ciclo.



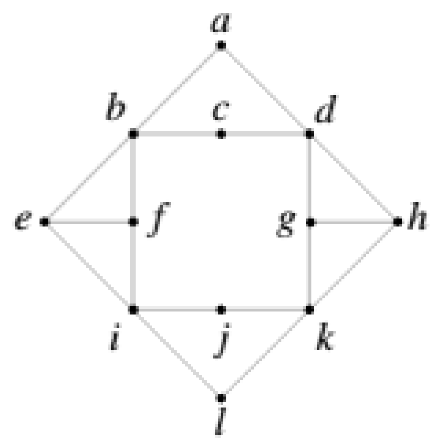
Respuesta: El ciclo es
(A, D, C, B, F, G, H, E, A)

3.5.5 Indique si el siguiente grafo tiene o no un ciclo de Hamilton; en caso de que lo tenga, indique cuál es el ciclo.



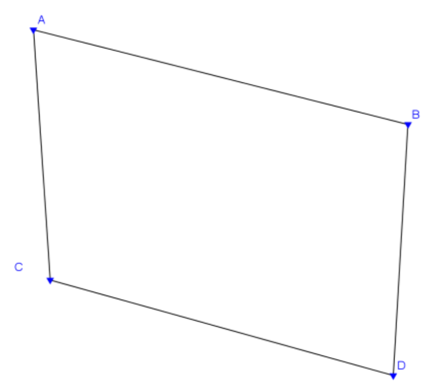
El ciclo propuesto no tiene un ciclo de Hamilton, puesto que si se parte desde el vértice A se tendría que: *(A, I, D, C, J, G, H, E, F, J…)* donde se puede observar que el vértice J se repite, lo cual contradice la definición.

3.5.6 Demuestre que el siguiente grafo no contiene un ciclo de Hamilton.

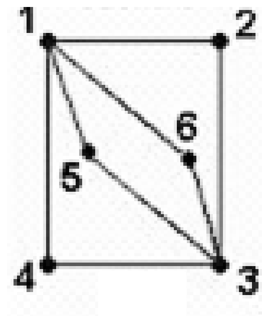


Se tendrán que eliminar dos aristas cada una en b, d, i y k, dejando 19−8 =11 aristas. Un ciclo de Hamilton tendría 12 aristas, por tanto el grafo mostrado no tiene un ciclo de Hamilton

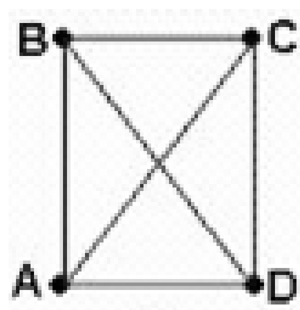
3.5.7 De un ejemplo de un grafo que tenga un ciclo de Euler y un ciclo de Hamilton, simultáneamente.



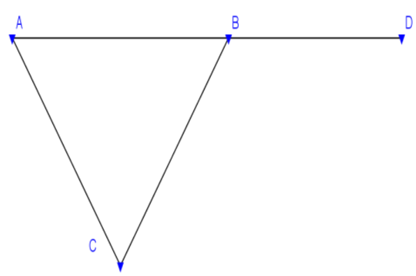
3.5.8 De un ejemplo de un grafo que tenga un ciclo de Euler y no tenga un ciclo de Hamilton,



3.5.9 De un ejemplo de un grafo que no tenga un ciclo de Euler y sí un ciclo de Hamilton,

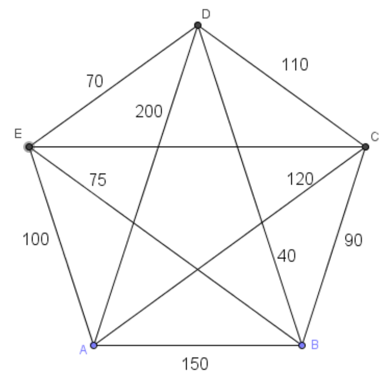


3.5.10 De un ejemplo de un grafo que no tenga un ciclo de Euler ni un ciclo de Hamilton.



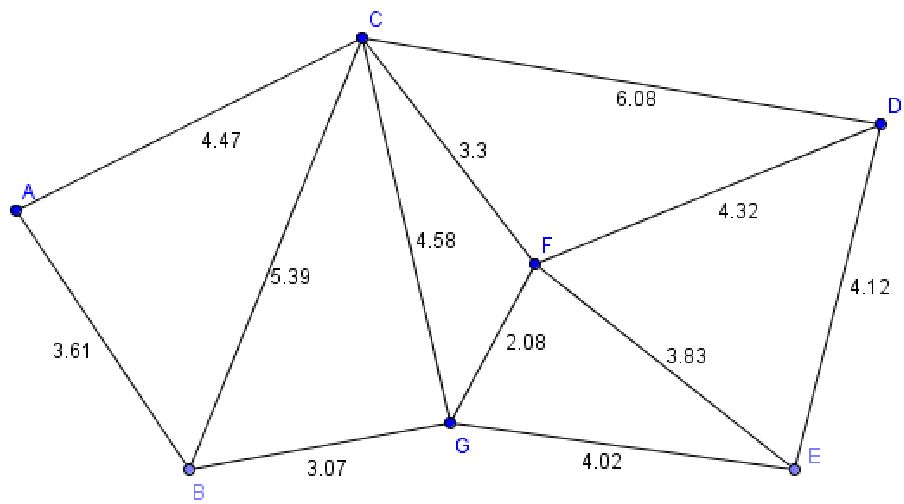
Ejercicios 3.6

3.6.1 Halle, utilizando el algoritmo del problema del viajero, la ruta más corta desde A hasta A, pasando por todos los vértices, en el grafo siguiente.



Respuesta: {AEBDCA}

3.6.2 En el siguiente grafo, los vértices representan ciudades, y el peso de cada arista representa el tiempo en horas que se tarda en ir de una a otra ciudad. Halle el tiempo mínimo en ir de la ciudad A hasta E, pasando por todas las ciudades, utilizando el menor tiempo posible.



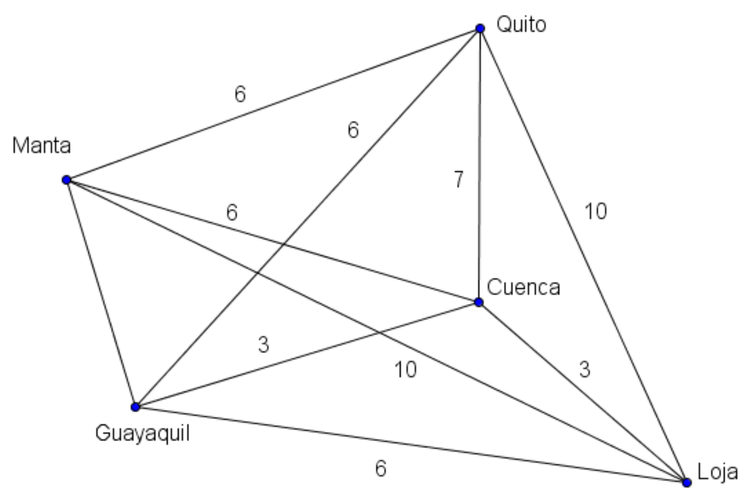
La Ruta es: {ABGFCDE}=21,17 Horas

3.6.3 Un inspector de una red distribuidora de carrocerías tiene que visitar los locales en ciertas ciudades del país, y regresar al punto donde inició. El tiempo promedio que se demora en viajar de una ciudad a otra está dado en la siguiente tabla:

	UBICACIÓN				
UBICACIÓN	Cuenca	Guayaquil	Quito	Loja	Manta
Cuenca	-	3	7	3	6
Guayaquil	3	-	6	6	3
Quito	7	6	-	10	6
Loja	3	6	10	-	10
Manta	6	3	6	10	-

Si empieza en Cuenca, halle la ruta más corta que cumple con el planteamiento propuesto.

El grafo que modela la situación es el siguiente:

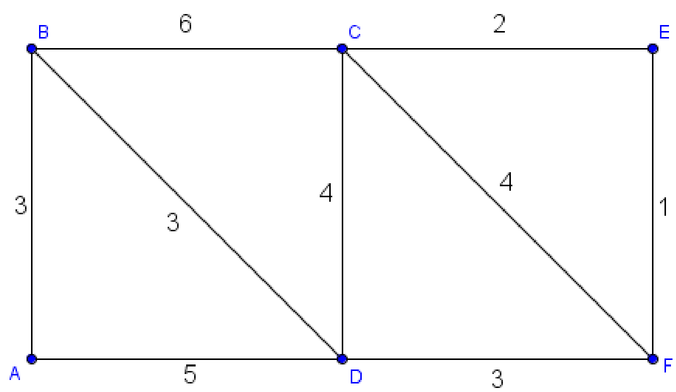


Las dos posibles rutas a seguir son:

Cuenca, Guayaquil, Manta, Quito, Loja, Cuenca: 25 horas.

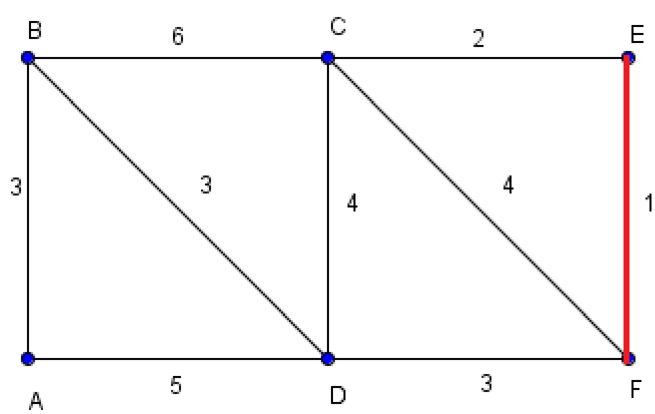
Cuenca, Quito, Manta, Guayaquil, Loja, Cuenca: 25 horas.

3.6.4 Mediante el algoritmo de Kruskal, determine el árbol generador de menor costo del siguiente grafo.

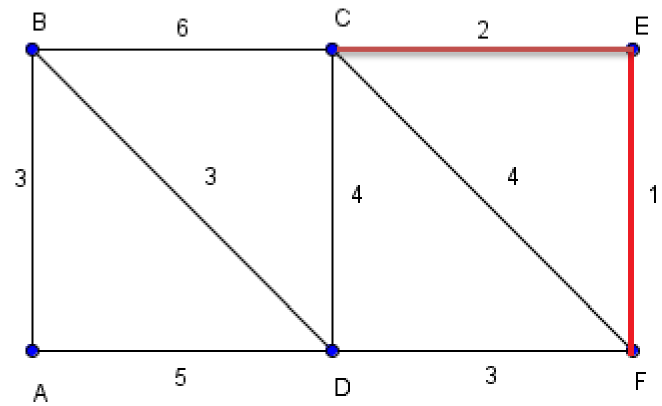


Resolución:

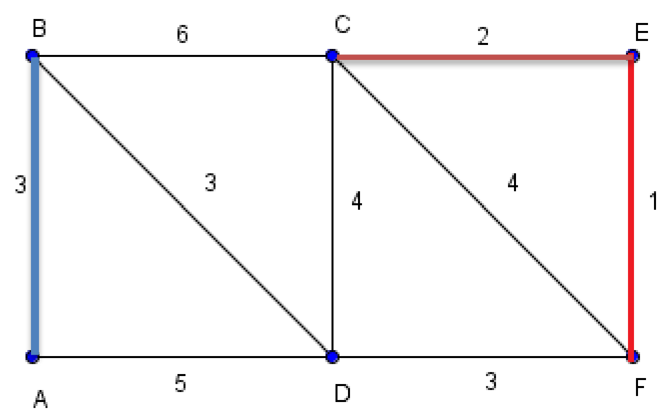
a.



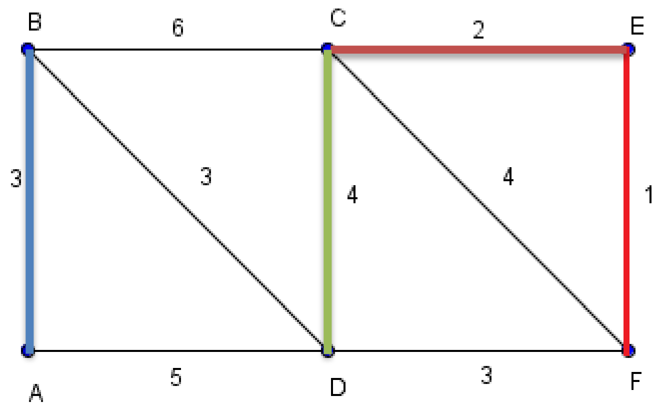
b.



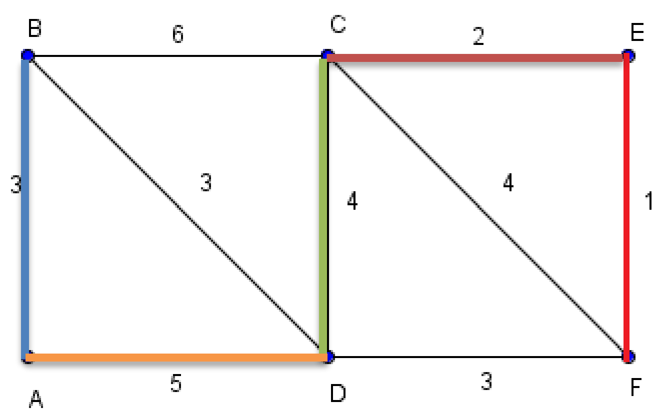
c.



d.

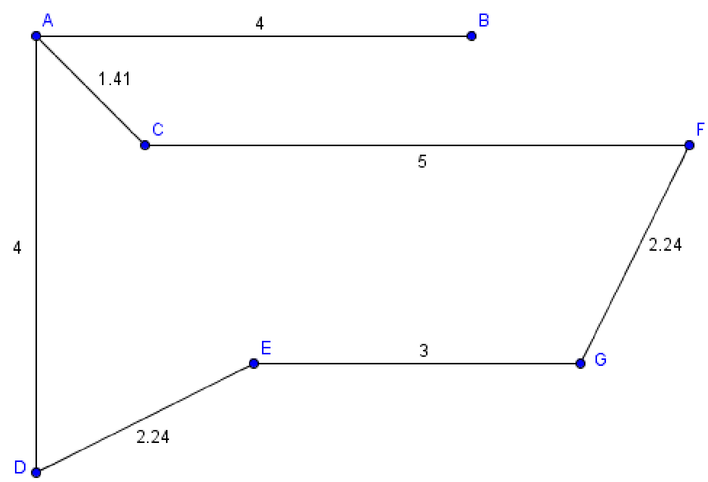


e.



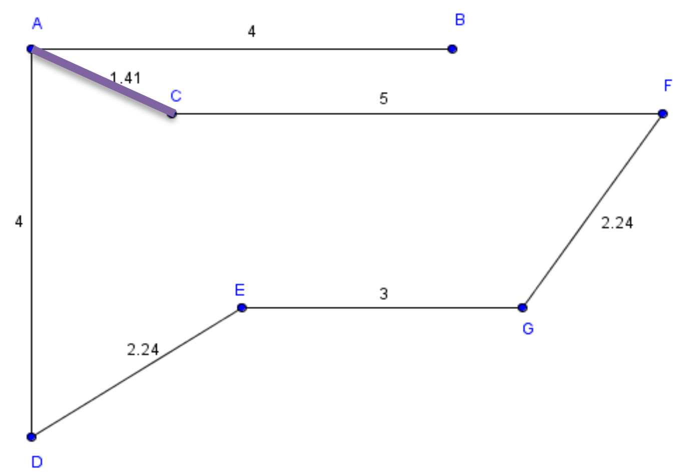
Que es la solución buscada.

3.6.5 Encuentre un árbol generador de menor costo del ejercicio 3.5.3 con la ayuda del algoritmo de Kruskal.

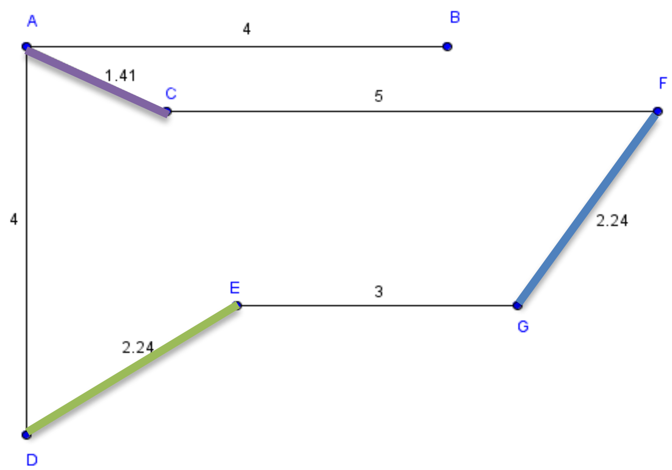


RESOLUCIÓN

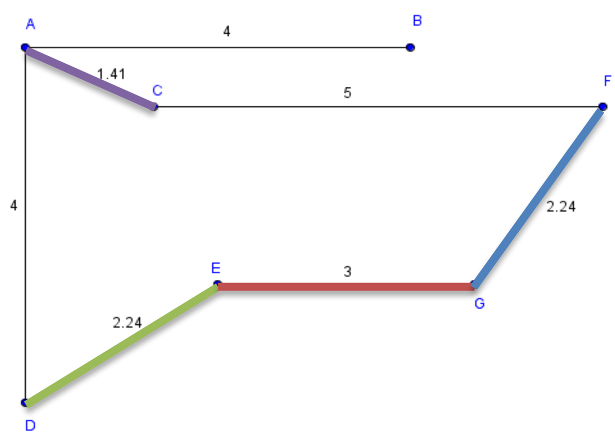
a.



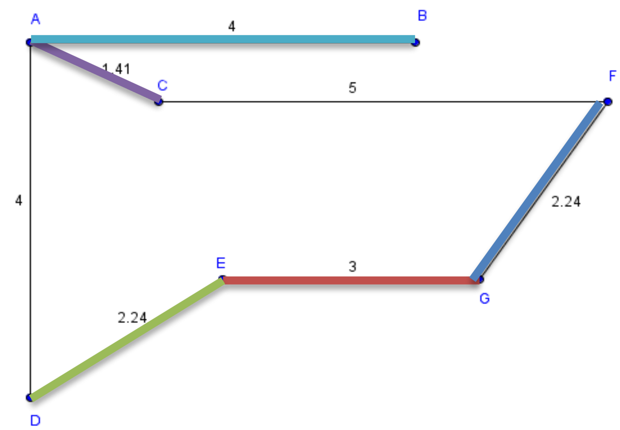
b.



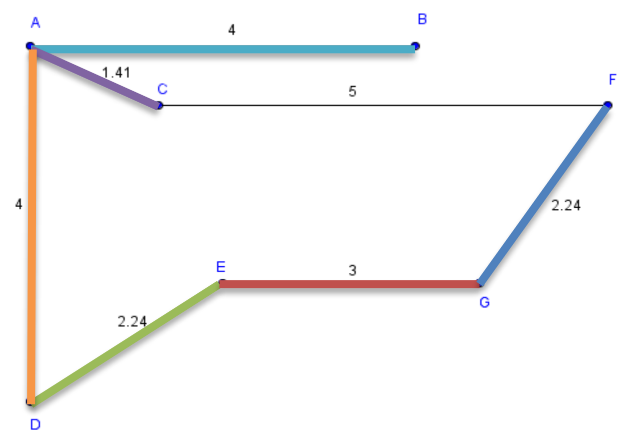
c.



d.



e.



Que es la solución buscada.

Ejercicio 3.7

3.7.1 Realizar el ejercicio propuesto con los siguientes datos.

Almacenes	Punto de Distribución	
	Quito	Guayaquil
Cuenca	$ 100	$ 110
Manta	$ 70	$ 80

La función de costos es: $C(x,y) = 30x + 30y + 1660$

Restricciones: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 10 - x \geq 0 \\ 12 - y \geq 0 \\ x + y \leq 15 \\ x + y \geq 12 \end{cases}$

Vértices	Función de Costos $C(x,y) = 30x + 30y + 1660$
(0,12)	$0 + 30(12) + 1660 = \$2020$
(3,12)	$30(3) + 30(12) + 1660 = \$2110$
(10,5)	$30(10) + 30(5) + 1660 = \$2110$
(10,2)	$30(10) + 30(2) + 980 = \$2020$

De la tabla, se observa que la empresa incurrirá en el menor gasto al enviar los autos de la siguiente manera:

- 10 autos de Cuenca a Quito
- 2 autos de Cuenca a Guayaquil
- 0 autos de Manta a Quito
- 10 autos de Manta a Guayaquil

También se puede tener de la siguiente manera:

- 0 autos de Cuenca a Quito
- 12 autos de Cuenca a Guayaquil
- 10 autos de Manta a Quito
- 0 autos de Manta a Guayaquil

3.7.2 Una cadena de tiendas de aparatos electrónicos vende televisores marca LG. La cadena tiene tiendas en Quito y Guayaquil y almacenes en Cuenca y Riobamba. Para satisfacer pedidos urgentes, deben enviarse 15 aparatos de los almacenes a la tienda de Quito y 19 a la tienda de Guayaquil. El costo de enviar un aparato es \$5 de Cuenca a Quito, \$6 de Cuenca a Guayaquil, \$4 de Riobamba a Quito y \$5.50 de Riobamba a Guayaquil. Si el almacén de Cuenca tiene 24 aparatos y el almacén de Riobamba tiene 18 aparatos en existencia, ¿cuántos aparatos deben ser enviados de cada almacén a cada tienda para satisfacer los pedidos a un mínimo costo de envío?

Almacenes	Tiendas	
	Quito	Guayaquil
Cuenca	$ 5	$ 6
Riobamba	$ 4	$ 5,50

Función de Costos: $C(x,y)=5x+6y+4(15-x)+5{,}50(19-y)$

$$C(x,y)=x+0{,}5y+164{,}5$$

Restricciones: $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ 10-x\geq 0 \\ 12-y\geq 0 \\ x+y\leq 15 \\ x+y\geq 12 \end{cases}$

Vértices	Función de Costos $C(x,y)=x+0{,}5y+164{,}5$
(0,16)	$0+0{,}5(16)+164{,}5=\$172{,}50$
(0,19)	$0+0{,}5(19)+164{,}5=\$174$
(5,19)	$0+0{,}5(16)+164{,}5=\$179$
(15,9)	$0+0{,}5(16)+164{,}5=\$184$
(15,1)	$0+0{,}5(16)+164{,}5=\$180$

Respuesta: Se debe enviar:

- 0 de Cuenca a Quito
- 16 de Cuenca a Guayaquil
- 24 de Riobamba a Quito
- 3 de Riobamba a Guayaquil

3.7.3 Un hombre, dueño de dos tiendas de material de construcción, una en el lado Este y la otra en el lado Oeste de Cuenca. Dos clientes solicitan planchas de plywood. El cliente X necesita 50 hojas y el cliente Y necesita 70 hojas. La tienda del Este tiene en existencia 80 hojas y la del Oeste tiene 45 hojas de esta madera. Los costos de entrega de la tienda del Este son \$0.50 por pieza al cliente X y \$0.60 al cliente Y. Los costos de entrega de la tienda del Oeste son \$0.40 por pieza al cliente X y \$0.55 al cliente Y. ¿Cuántas hojas deben enviarse de cada tienda a cada cliente para reducir al mínimo los costos de envío?

Tienda	**Cliente**	
	X	Y
Este	\$ 0,50	\$ 0,60
Oeste	\$ 0,40	\$ 0,55

Función de Costos: $C(x,y)=0{,}50x+0{,}6y+0{,}4(50-x)+0{,}55(70-y)$

$$C(x,y)=0{,}10x+0{,}05y+58{,}50$$

Restricciones: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 50 - x \geq 0 \\ 70 - y \geq 0 \\ x + y \leq 80 \\ x + y \geq 75 \end{cases}$

Vértices	**Función de Costos** $C(x, y) = 0{,}10x + 0{,}05y + 58{,}50$
(5,70)	$0{,}10(5) + 0{,}05(70) + 58{,}50 = \$62{,}50$
(50,30)	$0{,}10(50) + 0{,}05(30) + 58{,}50 = \$65$
(50,25)	$0{,}10(50) + 0{,}05(25) + 58{,}50 = \$64{,}75$
(10,70)	$0{,}10(10) + 0{,}05(63) + 58{,}50 = \$63$

Respuesta: Se debe enviar las hojas de plywood de la siguiente manera:

- 5 al cliente X desde la tienda Este
- 70 al cliente Y desde la tienda Este
- 45 al cliente X desde la tienda Oeste
- 0 al cliente Y desde la tienda Oeste

Bibliografía

Alarcón, Laura. «Diccionario práctico de Geometría.» Abril de 2013. *II Encuentro de Andalucía: Geogebra en el aula (Resumen de las comunicaciones).* Acceso: 28 de Septiembre de 2014. <http://thales.cica.es/geogebra/sites/thales.cica.es.geogebra/files/Resumen%20de%20las%20comunicaciones%20II%20encuentro.pdf>.

Ayala, Edwin y Germania Pineda. «http://repositorio.utn.edu.ec/.» 2008. 14 de Septiembre de 2014. <http://repositorio.utn.edu.ec/bitstream/123456789/2286/1/05%20FECYT%20740%20TESIS.pdf>.

Braicovich, Teresa Claudia. «http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/2167/980.» Octubre de 2013. Septimbre de 2014.

Cantoral, Ricardo y Rosa María Farfán. «Portal Aprende en línea, Universidad de Antioquia.» Enero-Abril de 2003. 16 de Septiembre de 2014. <http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyp/article/viewFile/5953/5363>.

Contreras, María. «Sociedad Mexicana de Computación en la Educación.» s.f. *Facultad de Química, UNAM.* 16 de Septiembre de 2014. <http://www.somece.org.mx/virtual2003/ponencias/contenidos/guiasdidacticas/guiasdidacticas.pdf>.

Ecuador, Gobierno del. *Decretos: http://decretos.cege.gob.ec/decretos/decretos.aspx?id=2007*. 2007. Acceso: 05 de Octubre de 2014.

Geogebra. *http://www.geogebra.org*. s.f. Acceso: 29 de Septiembre de 2014. <http://www.geogebra.org/cms/es/info/13-what-is-geogebra>.

Giroux, Henry. «Introducción: Democracia, Educación y Política en la Pedagogía Crítica.» McLaren, Peter y Joe Kincheloe. *Pedagogía Crítica: De qué hablamos, donde estamos*. Barcelona: GRAÓ, 2008.

Gutiérrez, Luis. *Didáctica de la Matemática para la formación docente*. San José, CR: CEE/SICA, 2009.

Iranzo, Nuria y Josep Fortuny. «La influencia conjunta del uso de Geogebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado.» 2009. *Departamento de Didáctica de las matemáticas.* Ed. Universidad Autónoma de Barcelona. Acceso: 05 de Octubre de 2014. <http://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v27n3p433.pdf>.

Johnsonbaugh, Richard. *Matemáticas Discretas*. VI Edición. México DF: Pearson Educación, 2005.

Lipschutz, Seymour y Marc Lipson. *Matemáticas Discretas*. México DF: McGraw-Hill, 2009.

Lombardo, Carmen, y otros. «La enseñanza de Matemática con Geogebra.» 2012. *http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/8394/6589.* Acceso:05 de Octubre de 2014.

Ministerio de Educación, . *Actualización y Fortalecimiento Curricular de EGB*. Quito, 2010.

Moreno, Eduardo y Héctor Ramírez. *Grafos: Fundamentos y Algoritmos*. Santiago de Chile: Comité Editorial Monografías, 2011.

Morocho, Sara y Martha Romero. «http://repositorio.utc.edu.ec/.» Marzo de 2010. *Aplicación de talleres populares para el proceso de enseñanza aprendizaje.* Acceso: 22 de Septiembre de 2014. <http://repositorio.utc.edu.ec/bitstream/27000/728/1/T-UTC-1124.pdf>.

Nouche, Fabián. «Instituto Superior del Profesorado Dr. Joaquín V. González.» Noviembre de 2008. *Sociedad Argentina de Educación Matemática.* Consulta: 17 de Septiembre de 2014. <http://www.soarem.org.ar/Documentos/39%20Nouche.pdf>.

Tascón, Claudio. «Aportaciones de Bruner.» s.f. *Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.* 09 de Septiembre de 2014. <http://www.ctascon.com/Aportaciones%20de%20Bruner.pdf>.

Tzic, Giovanny y . et al. «Teorías del aprendizaje del hombre.» Enero de 2014. 14 de Septiembre de 2014. <http://es.calameo.com/read/00314297811d7dbbea7f0>.

UNESCO. «UNESCO.» 1989. 16 de Septiembre de 2014. <http://unesdoc.unesco.org/images/0009/000919/091954SB.pdf>.

Valero, José. *Educación personalizada ¿Utopía o realidad?* Loja: UTPL, 2005.

Zuluaga, Juan Manuel, Franklin Pérez y Juan Diego Gómez. «Matemáticas y TIC. Ambientes virtuales de aprendizaje en clase de Matemáticas. (Ponencia).» 2014. *Virtual Educa Organización virtual.* Acceso: 29 de Septiembre de 2014.

<http://www.virtualeduca.org/ponencias2014/14/MatematicasyTIC.Ambientesvirtualesdeaprendizajeenlaclasedematematicas.pdf>.