

## RESUMEN

El siguiente proyecto de graduación es de tipo informático didáctico está compuesto de animaciones enlazadas con la unidad didáctica “**CAMPOS MAGNÉTICOS ESTÁTICOS**” correspondiente al Electromagnetismo.

A partir del uso del programa Modellus se han efectuado variadas animaciones, las mismas que se dividen en: Conceptuales, Ejercitativas y Lúdicas. Las animaciones Conceptuales abarcan conceptos, teorías, teoremas y modelos matemáticos de la subunidad aludida en forma clara y sencilla; las animaciones Ejercitativas afianzan el aprendizaje del usuario con la ayuda de ejercicios modelo y propuestos permitiéndole una interacción directa; mientras que las animaciones Lúdicas o dicho de otra manera “juegos didácticos” perfeccionan el aprendizaje de forma recreativa e interactiva, motivando y desarrollando las destrezas mentales y motrices.

También, incluye una guía didáctica que permitirá al usuario el uso correcto de este proyecto. Además un resumen operativo los fundamentos básicos del programa Modellus para que los beneficiarios faciliten su aprendizaje. Así mismo una breve síntesis referente a cada uno de los temas que componen la unidad didáctica “**CAMPOS MAGNÉTICOS ESTÁTICOS**”, el listado de las animaciones que componen cada tema y una muestra representativa.

## PALABRAS CLAVE

**Electromagnetismo**  
**Modellus**  
**Campos Magnéticos**  
**Ley de Biot-Savart**  
**Intensidad de Campo Magnético**  
**Densidad Flujo Magnético**  
**Flujo Magnético**  
**Permeabilidad magnética**  
**Permeabilidad eléctrica**  
**Ley de Ampère**  
**Rotacional De H**  
**Fuerza**  
**Torque**  
**Dipolo Magnético**  
**Momento Dipolar Magnético**  
**Magnetización**  
**Inductores**  
**Inductancia**  
**Potencial Magnetostático**  
**Magnetomotancia**  
**Circuitos Magnéticos**

## Í N D I C E

<b>Certificado.....</b>	<b>5</b>
<b>Dedicatoria.....</b>	<b>6</b>
<b>Agradecimiento.....</b>	<b>7</b>
<b>Introducción.....</b>	<b>8</b>
<b>Descripción.....</b>	<b>9</b>
<b>Introducción a Modellus.....</b>	<b>11</b>
<b>Presentación.....</b>	<b>22</b>
<b>Ley de Biot-Savart. Intensidad de Campo Magnético.....</b>	<b>23</b>
<b>Densidad de Flujo Magnético. Flujo Magnético.....</b>	<b>31</b>
<b>Ley de Ampère. Rotacional de H.....</b>	<b>39</b>
<b>Fuerzas sobre partículas cargadas.....</b>	<b>45</b>
<b>Fuerzas y Torques sobre conductores con corriente.....</b>	<b>50</b>
<b>Dipolo Magnético. Momento Dipolar Magnético. Magnetización.....</b>	<b>57</b>
<b>Inductores e inductancia.....</b>	<b>64</b>
<b>Potencial magnetostático y magnetomotancia. Circuitos Magnéticos...</b>	<b>70</b>
<b>Circuitos magnéticos complejos.....</b>	<b>79</b>
<b>Relaciones de frontera.....</b>	<b>85</b>
<b>Conclusiones.....</b>	<b>92</b>
<b>Recomendaciones.....</b>	<b>93</b>
<b>Bibliografía.....</b>	<b>94</b>

**UNIVERSIDAD DE CUENCA**  
**FACULTAD DE FILOSOFÍA, LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN**  
**ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA**



**“APRENDIENDO CAMPOS MAGNÉTICOS ESTÁTICOS  
CON MODELLUS”**

Tesis previa a la obtención  
del título de Licenciada  
en Ciencias de la Educación  
en la especialidad de  
Matemáticas y Física

**DIRECTOR:** Dr. ALBERTO SANTIAGO AVECILLAS JARA

**AUTOR:** RUTH CECILIA PACHECO PACHECO

**CUENCA-ECUADOR**  
**2012**

## CERTIFICADO

Yo; Ruth Cecilia Pacheco Pacheco,  
certifico que todo el contenido  
del presente trabajo es  
de exclusiva responsabilidad de la autora.

.....

## DEDICATORIA

**Dedico la presente tesis a mí querida familia por el apoyo que me han sabido brindar para cumplir una meta; de manera muy especial a mi esposo Santiago Larrea por toda la ayuda brindada; y, a mi hijo Sebastián Larrea por soportar mis ausencias en varias ocasiones. También a Martha Ortega, Carmela Mendoza, Verónica Flores, Maribel Pacheco; y, mi madre Yolanda Pacheco, que supieron ayudarme en los momentos que más los necesité. Muchas Gracias.**

## AGRADECIMIENTO

**Agradezco a Dios por la vida prestada y por ser el mayor soporte, por guiarme siempre y poner en mi camino gente muy buena que me ha brindado su ayuda.**

**Doy gracias a mi familia y amigos por su colaboración en las diferentes etapas de mi estudio.**

**Por último; agradezco a todos mis maestros que con su esfuerzo me han transmitido sus conocimientos y valores durante mi vida de estudiante, de manera muy especial al Dr. Alberto Avecillas Jara, Director de Tesis que guió con mucha dedicación y profesionalismo mi trabajo hasta su culminación.**

## INTRODUCCIÓN

En un mundo en el que la tecnología avanza a pasos agigantados la Educación no puede quedarse al margen, tiene que actualizarse continuamente y estar a la par de las nuevas tendencias, es indispensable que los docentes y estudiantes saquen provecho de la tecnología y busquen nuevas y mejores opciones para obtener un cambio positivo en la educación.

Por esta razón, el proyecto que presento vincula la tecnología mediante el uso del programa Modellus con la Física y Matemática, posibilitándonos la creación de un software educativo novedoso y recreativo, que está encaminado a ayudar a los estudiantes a vencer los obstáculos que se les presente en el camino del aprendizaje, dándoles nuevas alternativas que faciliten la comprensión de cada uno de los temas de la unidad llamada “**CAMPOS MAGNÉTICOS ESTÁTICOS**”

La utilización de este software beneficiará tanto a los docentes como a los alumnos, proporcionando una innovación en la educación, contribuyendo a que en las aulas las clases sean más dinámicas y motivadoras. Las animaciones hechas en Modellus que componen este proyecto son interesantes e interactivas y tienen como objetivo afianzar el aprendizaje, mejorando la compresión de los temas abordados y el desarrollo de las destrezas.

## DESCRIPCIÓN DE CADA TEMA

**3.1.1 Ley de Biot-Savart. Intensidad de Campo Magnético:** El primer tema contiene un análisis para determinar a partir de los conceptos el modelo matemático de dicha ley, además de las aplicaciones de la ecuación a las formas estándar de corrientes eléctricas.

**3.1.2 Densidad de Flujo Magnético. Flujo Magnético:** En este tema se estudiarán los conceptos fundamentales y definirán las ecuaciones respectivas, también se conocerá la clasificación de las sustancias en función de sus permeabilidades relativas.

**3.1.3 Ley de Ampère:** Se presentarán los conceptos; y, con la ayuda de un gráfico se determinarán sus respectivos modelos matemáticos así como también las condiciones para sus aplicaciones.

**3.1.4 Fuerzas Sobre Partículas Cargadas:** Se presenta una explicación clara de los conceptos con sus ecuaciones importantes y se dan a conocer algunas aplicaciones de las ecuaciones fundamentales.

**3.1.5 Fuerzas y Torques sobre conductores con Corriente:** A partir de una explicación clara y detallada, con la ayuda de gráficos definiremos el tema y desarrollaremos sus respectivos modelos matemáticos para el caso de cada conductor. Además daremos a conocer algunas de sus aplicaciones.

**3.1.6 Dipolo Magnético. Momento Dipolar Magnético. Magnetización:** Está compuesto de una explicación sobre el dipolo magnético, los tipos de prototipos de dipolos y su vector cartesiano, así como también analizaremos el desarrollo de los modelos matemáticos con la ayuda de gráficos que facilitarán su comprensión y conoceremos las expresiones análogas a las del campo eléctrico.

**3.1.7 Inductores e Inductancia:** En este tema daremos a conocer lo que es un inductor, definiremos Flujo magnético de Enlace, estudiaremos a la inductancia como característica de los inductores y desarrollaremos sus expresiones matemáticas para cada caso dependiendo de la geometría del conductor.

**3.1.8 Potencial Magnetostático y Magnetomotancia. Circuitos Magnéticos:** Para este tema desarrollaremos los conceptos de manera sencilla y concreta, analizaremos los modelos matemáticos retomando el campo eléctrico.

**3.1.9 Circuitos Magnéticos Complejos:** En el penúltimo tema con la ayuda de gráficos consideramos tres situaciones como son: Circuitos simples con varias fuentes de fmm, Circuitos simples con espacios de aire; y, Circuitos paralelos; identificaremos cada caso y desarrollaremos las respectivas ecuaciones.

**3.1.10 Relaciones de frontera:** En el último tema se hará un estudio detallado de lo que ocurre con la continuidad del campo magnético en la interface de dos medios, presentaremos el desarrollo ordenado de las expresiones matemáticas del tema.

# INTRODUCCIÓN A MODELLUS

**(Herramienta para la Modelización de Sistemas)**

## 1. Introducción

Modellus, es una herramienta orientada a la simulación y modelización de sistemas válida para el estudio de diversas materias dentro de los currícula de Educación Secundaria, Bachillerato y Formación Profesional. Sus autores la han concebido como instrumento de apoyo en el aula y con ese objetivo es que se explica su funcionamiento y uso para profesores y estudiantes.

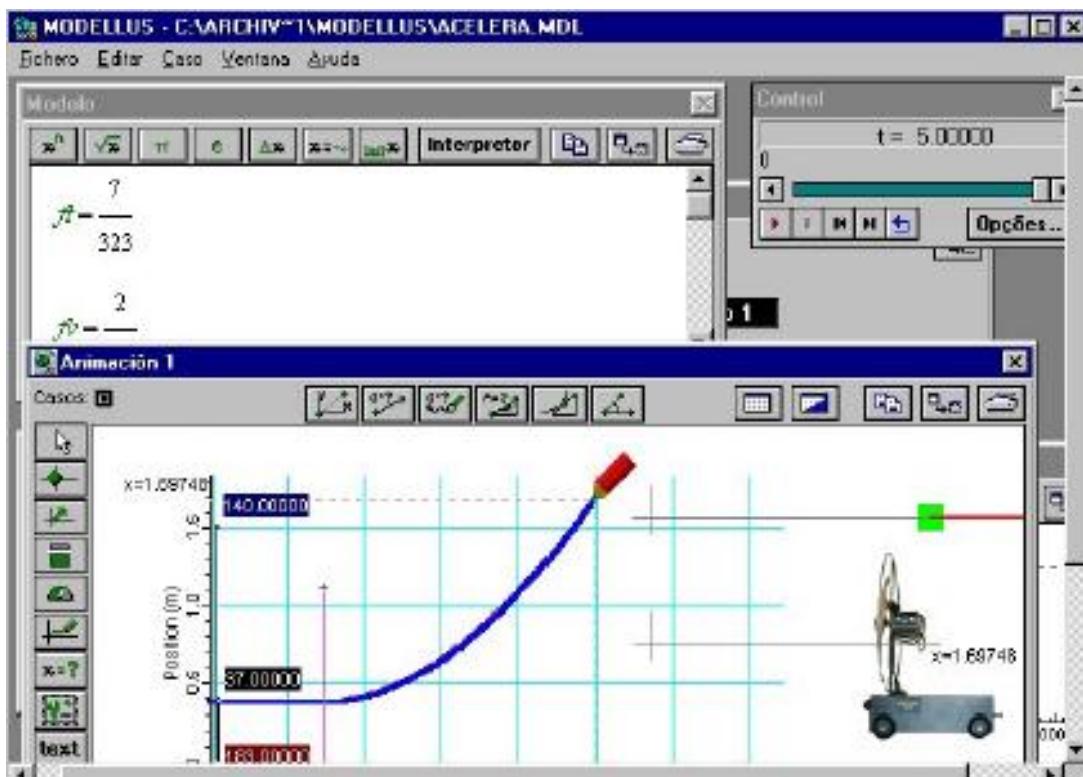
### Modelo matemático

Sabemos que los diversos fenómenos que se estudian en las materias del área de ciencias pueden explicarse y representarse mediante su modelo matemático. Este modelo recogerá el comportamiento del sistema tanto en su aspecto temporal (evolución a lo largo del tiempo) como en su aspecto puramente matemático (cálculo de valores). Modellus está orientado a los modelos temporales de tal manera que con él se puede estudiar el comportamiento dinámico de los distintos sistemas. Este comportamiento se podrá estudiar mediante la simulación en distintos escenarios “casos” en cada uno de los cuales cada uno de los parámetros o constantes del modelo pueden ser modificados. Tal sería el caso del estudio de la caída de un cuerpo en distintos planetas del sistema solar con distintas fuerzas de gravedad, o el comportamiento de un muelle con distintas constantes de elasticidad.

La modelización de cualquier fenómeno o sistema se apoya en la observación de los fenómenos que lo caracterizan, razón por la cual, en la medida que podamos reproducir esos fenómenos y experimentar con ellos, podremos comprender con más claridad el modelo. El estudio del modelo se realizará siempre en orden creciente de complejidad de tal forma que en una primera fase se tendrán en cuenta los aspectos más relevantes para posteriormente derivar hacia un modelo más perfecto a través de un método de “refinamiento”. Según lo define uno de sus autores (V. D. Teodoro), Modellus es, bajo el punto de vista computacional, un micromundo computacional para estudiantes y profesores a la vez, basado en un método de programación en el que el usuario escribe en la “Ventana de modelo”.

## 2. Estructura Básica de Modellus.

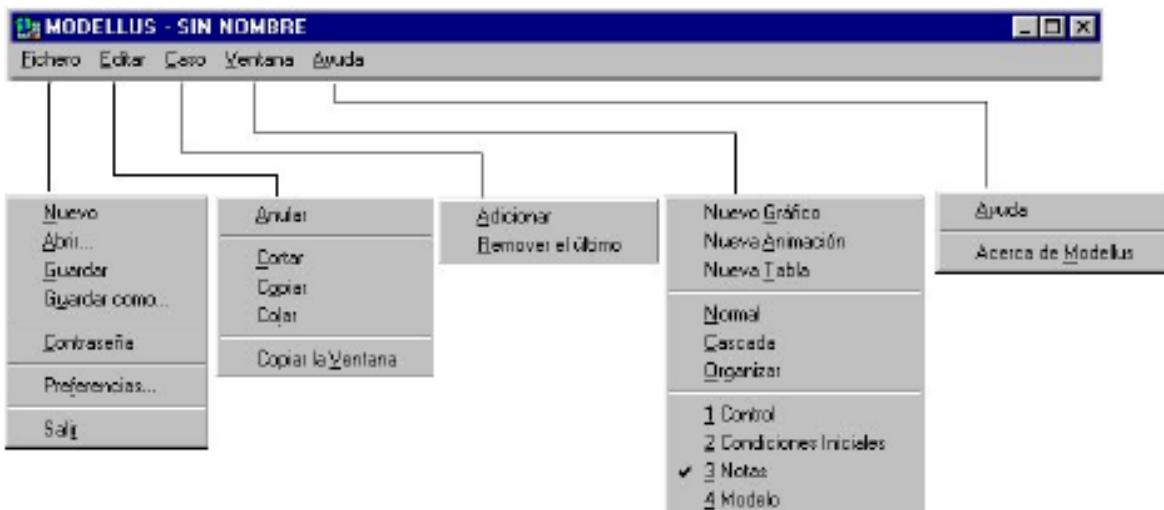
Modellus presenta un entorno muy “amigable” basado en una serie de ventanas, cada una de las cuales recoge o muestra una serie de informaciones muy concretas. En la figura vemos una imagen del entorno; las ecuaciones matemáticas se escriben de la misma manera que lo haría en el papel.



Por ser una aplicación que trabaja en Windows, aprovecha todas las ventajas del entorno y esto facilita su manejo. La versión que explicamos en este trabajo es la V:2.01 de 2000.

Las ventanas permiten la modificación de su tamaño y al activarlas pasan a primer plano colocando en segundo plano a las que estén dentro de su área; del mismo modo las ventanas se pueden mover dentro de la pantalla.

## Menú de Modelus:



El menú que presenta el entorno consta de cinco opciones principales:

Fichero  
 Editar  
 Caso  
 Ventana  
 Ayuda

**Fichero:** Con la opción Fichero podemos realizar las siguientes operaciones:

**Nuevo:** Crear un nuevo modelo.

**Abrir:** Leer un modelo del disco (ya creado).

**Guardar:** Guardar modelo en un fichero con el mismo nombre que tenga.

**Guardar Como:** Grabar un fichero con el nombre que le queramos dar.

**Contraseña:** Poner una clave al modelo de tal manera que no se puedan modificar los datos de las ventanas de animación y modelo.

**Preferencias:** Configurar ubicación de ficheros.

**Salir:** Salir y abandonar el programa.

**Editar:** Permite las operaciones de edición comunes a cualquier herramienta.

**Anular:** Anula la última operación de edición realizada

**Cortar:** Permite cortar el objeto seleccionado y lo coloca en el portapapeles.

**Copiar:** Copia el objeto seleccionado al portapapeles.

**Copiar la Ventana:** Copia todo el contenido de la ventana en la que estemos y lo deposita en el portapapeles.

**Caso:** Esta opción presenta dos posibilidades:

**Adicionar:** Añade un caso en la ventana de condiciones.

**Remover el último:** Quita el último de los casos añadidos, téngase en cuenta que al menos debe existir un caso en la ventana de condiciones.

**Ventanas:** Esta opción presenta las siguientes acciones encaminadas a la creación de ventanas dentro del modelo.

**Nuevo Gráfico:** Crea una nueva ventana de gráfico.

**Nueva Animación:** Crea una nueva ventana de animación.

**Nueva Tabla:** Crea una nueva ventana de tabla.

**Normal:** Sitúa las ventanas en la pantalla en modo normal

**Cascada:** Sitúa las ventanas en la pantalla en cascada.

**Organizar:** Sitúa las ventanas en pantalla de forma organizada.

**1 Control:** Activamos la ventana de control.

**2 Condiciones Iniciales:** Activamos la ventana de condiciones iniciales.

**3 Notas:** Activamos la ventana de notas.

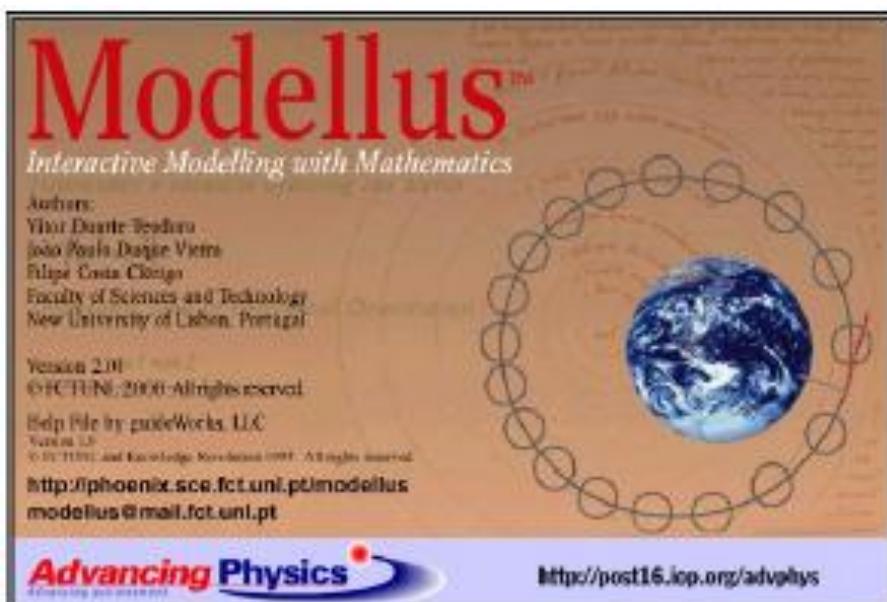
**4 Modelo:** Activamos la ventana de modelo.

Las ventanas que se van creando aparecerán en esta opción del menú con números consecutivos a partir del 4, téngase en cuenta que las ventanas 1,2,3 y 4 no se pueden eliminar.

**Ayuda:** Muestra las opciones siguientes:

**Ayuda:** Nos despliega la ventana de ayuda.

**Acerca de Modellus:** Esta opción nos presenta información sobre el programa



Modellus está estructurado en torno a un conjunto de ventanas sobre las que se escribe o se muestra la información de los modelos que se pretenden simular. Las ventanas son las siguientes:

- Ventana de modelo.
- Ventana de condiciones
- Ventana de animaciones
- Ventana de control
- Ventana de gráficos
- Ventana de tablas

A continuación se estudian estas ventanas, su utilización y contenidos.

**2.1. VENTANA DE MODELO:** Escritura de las ecuaciones del modelo. Para iniciar el trabajo con Modellus, una vez arrancada la aplicación, debemos ir al menú Modelo (Nuevo) y de esta manera iniciamos la creación de un modelo nuevo. Lo primero que debemos hacer es escribir las ecuaciones del modelo, y esto lo hacemos en la “ventana de modelo” que aparece en la figura. A la hora de escribir las ecuaciones tenemos que hacerlo observando unas normas básicas en lo que se refiere a la sintaxis. Estas normas son las siguientes:

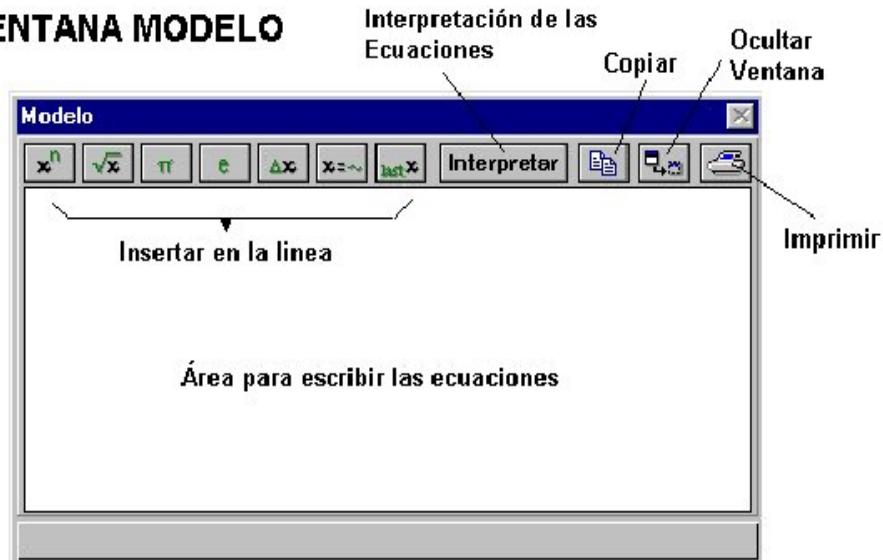
### ***Sintaxis de los modelos:***

Modellus soporta ecuaciones algebraicas, diferenciales e iterativas.

Usted puede modelar ecuaciones que van desde las relaciones simples como las líneas rectas y paráolas a los conceptos más complejos como son las ecuaciones de Van der Pol o de Lorentz.

La entrada de un modelo en Modellus es casi como la escritura de ecuaciones matemáticas en el papel.

## VENTANA MODELO



## 2.2. VENTANA DE CONDICIONES

Cuando se ha escrito el modelo en la correspondiente ventana y se ha pulsado por primera vez el botón interpretar aparecerá la ventana de “condiciones” que se encarga de recoger los valores de los “parámetros” y los “valores iniciales” del modelo en forma de tabla formando parte del “caso 1” que es el primer caso de simulación que Modellus crea por defecto.

Los “parámetros” se podrán modificar en esta misma ventana o también en la ventana de “animación” haciendo uso de algunos de sus objetos como veremos más adelante.

Cada uno de los posibles casos, que nosotros podremos añadir en el estudio del modelo, no son otra cosa que distintos escenarios para aplicar a las mismas ecuaciones. Esto nos permitirá poder estudiar el modelo cambiando a nuestro gusto distintos parámetros.

Condiciones Iniciales			
Parámetros	caso 1	caso 2	caso 3
$A1$	6.00	6.00	6.00
$f1$	3.00	3.00	3.00
$A2$	4.00	4.00	4.00
$f2$	2.00	2.00	2.00

Valores Iniciales		
caso 1	caso 2	caso 3

Si deseamos modificar los parámetros desde la ventana de animación quedará invalidado el valor del parámetro que se coloque en esta ventana. Cada uno de los casos que nosotros establezcamos en la simulación tendrá la posibilidad de verse en la ventana de “animación”; bastará con seleccionarlo de entre los que aparecerán señalados en la parte superior izquierda de la ventana, y esto ocurrirá en las ventanas de “tabla” y “gráfico” teniendo en cuenta que en la ventana de “gráfico” pueden coexistir los gráficos de cada uno de los casos con el fin de poder ver las distintas curvas superpuestas.

## 2.3. VENTANA DE ANIMACIONES

Una vez que hemos escrito las ecuaciones del modelo, la siguiente operación será diseñar la ventana de animaciones en la que se realizarán las representaciones gráficas de aquellos valores que nos interese ver.

Esta ventana tiene mucho interés de cara a ser el “interface” con el estudiante ya que si se hace buen uso de todas sus posibilidades encontraremos en ella una poderosa herramienta. En la figura vemos la estructura de esta ventana de “animación” mostrando un ejemplo de movimiento de un balón lanzado hacia arriba.



El tamaño y posición de esta ventana, al igual que el resto, se puede modificar colocando el puntero en los bordes y estirando hacia dentro o hacia fuera o manteniendo pulsado y moviendo en el caso de cambiar la posición.

En esta ventana se pueden colocar distintos elementos gráficos que se corresponden con los botones que aparecen en la parte superior. Cada uno de estos elementos se podrá asociar a las variables del modelo y realizar las funciones que correspondan a él de acuerdo a los parámetros que se hayan colocado en su ventana de parámetros asociada. Pasaremos a explicar cada uno de los elementos, así como sus ventanas asociadas.



Los botones de la parte superior se usan para realizar mediciones sobre las imágenes (GIF o BMP) o videos (AVI), que pueden colocarse en el fondo, usando el botón de fondo.



El rayado (grid) puede mostrarse u ocultarse mediante el botón . Pulsando sobre el botón de fondo puede definir el espaciado del grid y su color así como el color del fondo de la pantalla.

A continuación se muestra una tabla en la que se puede identificar cada uno de los botones que representan un determinado objeto.

Use esta herramienta.....para añadir:

Partícula



Imagen, bola (partícula), rectángulo, o referencia.

Vector



Vector con o sin flecha resultante o componentes.

Indicador de Nivel



Horizontal o Vertical.

Medidor Analógico



Aguja, reloj, o medidor circulo completo.

**Trazador**

Realiza el trazado interactivo de líneas o puntos.

**Medidor Digital**

Medidor digital, mostrado o no el nombre de la Variable.

**Importar imagen**

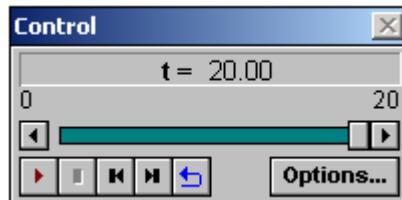
Importa imagen en formato BMP o GIF

**Texto**

Texto con el color, fuente, estilo y tamaño especificables.

**Objeto Geométrico**

Líneas y figuras tales como círculos y polígonos.

**2.4. VENTANA DE CONTROL**

Una vez que hemos diseñado el modelo en la ventana “Modelo” y hemos colocado en la ventana “animaciones los objetos, así como las condiciones y las tablas y gráficos que nos haya parecido bien, se debe pasar a la fase de “simulación”.

En la fase de “simulación” Modellus realizará los cálculos y mostrará los valores de la forma que hayamos previsto. La ventana “Control” es la que permite el control del proceso de simulación.

Los botones de esta ventana sirven para:

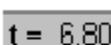
Simular o detener la simulación.

Terminar la simulación.

Reiniciar  el modelo, ir al principio sin perder los valores calculados.

Saltar  al último valor calculado del modelo.

Repetir  la simulación del modelo.

Lee  el actual valor de la variable independiente.

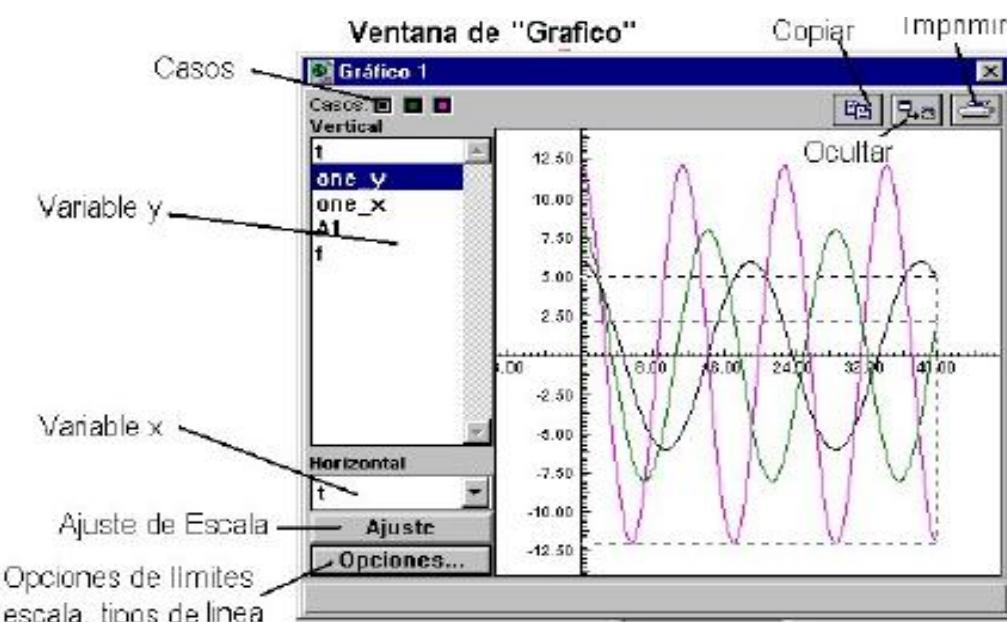
Muestra  el valor actual de la variable independiente y chequea visualmente el progreso de esta variable.

Ir atrás  o adelante  un simple paso.

Acceder a caja de diálogo Opciones...:

## 2.5. VENTANA DE GRÁFICO

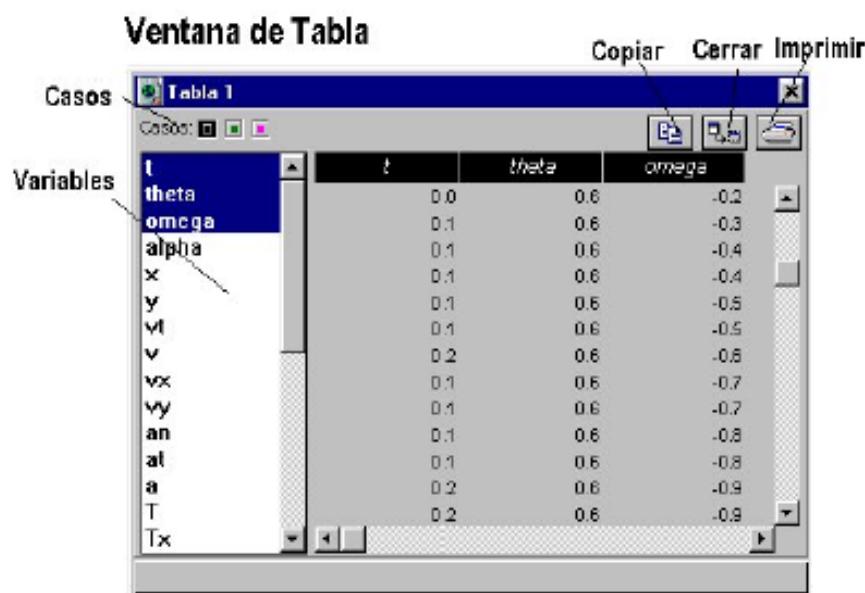
Mediante esta ventana podemos realizar representaciones gráficas en ejes de coordenadas (XY) de las variables que queramos y para los casos que hayamos definido mediante la opción del menú “Casos”. En la figura vemos la ventana de “gráficos” y en ella se puede distinguir el área de representación en donde se dibujan los gráficos y a la izquierda aparecen las ventanas de las variables.



## 2.6. VENTANA DE TABLA

En numerosas aplicaciones será necesario realizar una tabla con los valores de las variables, esta posibilidad nos la brinda la ventana de “tabla” que sencillamente permite la creación de tablas con tantas variables como seleccionemos en la ventana de la izquierda simplemente pulsando las teclas “Control” o “Shift” a la vez que señalamos con el ratón (tecla izquierda) sobre éstas.

**Ventana de Tabla**



The table window displays the following data:

Casos	t	theta	omega
l	0.0	0.6	-0.2
theta	0.1	0.6	-0.3
omega	0.1	0.6	-0.4
alpha	0.1	0.6	-0.4
x	0.1	0.6	-0.5
y	0.1	0.6	-0.5
v <sub>t</sub>	0.1	0.6	-0.5
v <sub>x</sub>	0.2	0.6	-0.6
v <sub>y</sub>	0.1	0.6	-0.7
a <sub>n</sub>	0.1	0.6	-0.8
a <sub>t</sub>	0.1	0.6	-0.8
a	0.2	0.6	-0.9
T	0.2	0.6	-0.9
T <sub>x</sub>			

## 2.7. PROTECCIÓN DE LOS TRABAJOS

Mediante la opción Contraseña dentro del menú de “Fichero” podremos conseguir proteger el trabajo, de tal manera que a quien realice las simulaciones solo le estará permitido ver los resultados, pero nunca modificar la ventana “Modelo” o la ventana Animación ni podrá modificar ni crear ventanas de “gráficos” o “tablas”.

Cuando activamos por primera vez ésta opción aparece una ventana como la de la figura en la que se nos pide el Password y la Confirmación, es decir debemos escribir dos veces, una en cada ventana, el password (clave).



# PRESENTACIÓN

A continuación se da inicio al estudio de “**CAMPOS MAGNÉTICOS ESTÁTICOS**” con Modellus, subunidad perteneciente al Electromagnetismo.

Dicho estudio abarca el desarrollo de los diez temas que fueron descritos anteriormente y cada uno de ellos contiene:

- 1) Logros de aprendizaje;
- 2) Fundamentación teórica, sus gráficas en caso de haberlas y sus ecuaciones matemáticas;
- 3) Problema modelo;
- 4) Evaluación de logros, con las respuestas;
- 5) Listado y descripción por grupos de las animaciones, y
- 6) Animación de muestra con su descripción.

Es importante señalar que la **animación de muestra** presentada en este trabajo de graduación es sólo un ejemplo de animación por cada tema; puesto que todas las animaciones de la subunidad mencionada se encuentran en el CD adjunto en formato DVD.

### 3.1.1 LEY DE BIOT-SAVART. INTENSIDAD DE CAMPO MAGNÉTICO

#### 1) LOGROS DE APRENDIZAJE:

- 1- Conocer y aprender esta Ley que relaciona la corriente eléctrica con la intensidad de campo magnético y formularla matemáticamente.
- 2- Desarrollar eficazmente las actividades propuestas al final del tema.
- 3- Trabajar mancomunadamente con el grupo y velar por su buen funcionamiento.

#### 2) FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA:

El Físico Danés Hans Christian Oersted descubrió casualmente en 1819 que, una corriente eléctrica originaba un campo magnético. En general, una carga eléctrica en movimiento es la causa del magnetismo. Una vez alcanzada una cabal comprensión de este fenómeno sabemos que:

- 1- Hay dos polos magnéticos llamados norte y sur.
- 2- Polos de igual nombre se repelen, polos de diferentes nombres se atraen.
- 3- La interacción magnética es de naturaleza diferente que la eléctrica.
- 4- Los polos magnéticos son inseparables.
- 5- Las líneas del campo magnético son cerradas; es decir, no tienen ni principio ni fin.
- 6- El campo magnético es vectorial no conservativo, de modo que es muy diferente de los campos gravitacional y eléctrico.

El descubrimiento de Oersted motivó una gran investigación en Europa habiendo sido los físicos franceses quienes triunfaron en esta carrera, entre ellos Ampère, Laplace, Biot y Savart. Precisamente estos dos últimos determinaron la expresión para el diferencial de intensidad de campo magnético,  $d\vec{H}$ , utilizando montajes como el de la figura 3.1.1.1. Encontraron que  $d\vec{H}$  es proporcional al segmento  $d\vec{l}$ , a la intensidad de corriente  $I$ , al ángulo  $\theta$  en la forma  $\text{Sen}\theta$ , e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia  $r$ , esto es:

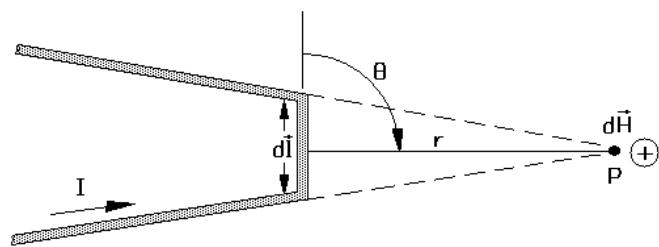


Figura 3.1.1.1

$$d\vec{H} = k \frac{Idl \operatorname{Sen}\theta}{r^2}$$

en donde la constante de proporcionalidad tiene la forma  $k = 1/4\pi$ . También, dado el carácter vectorial de  $d\vec{H}$ , en lugar de  $\operatorname{Sen}\theta$  se escribe el producto  $(\vec{u}_l \times \vec{u}_r)$ , es decir, el producto de dos vectores unitarios paralelos a  $dl$  y a  $r$ , respectivamente; con todo esto la expresión moderna de  $d\vec{H}$  es:

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{(\vec{u}_l \times \vec{u}_r) dl}{r^2} = \frac{I}{4\pi} \frac{\operatorname{Sen}\theta}{r^2} dl \vec{u} \quad (3.1.1.1)$$

la cual se expresa en amperios por metro,  $A/m$ , y es la expresión conocida como la "ley de Biot-Savart". Para la intensidad de campo magnético producida por un conductor completo se suman todas las contribuciones de los elementos diferenciales mediante una integral de línea:

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{(\vec{u}_l \times \vec{u}_r) dl}{r^2} = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{\operatorname{Sen}\theta}{r^2} dl \vec{u} \quad (3.1.1.2)$$

La aplicación de la ecuación anterior a las "formas estándar" de corrientes eléctricas arroja los siguientes resultados:

### a) CONDUCTOR RECTILÍNEO, a una distancia $R$ :

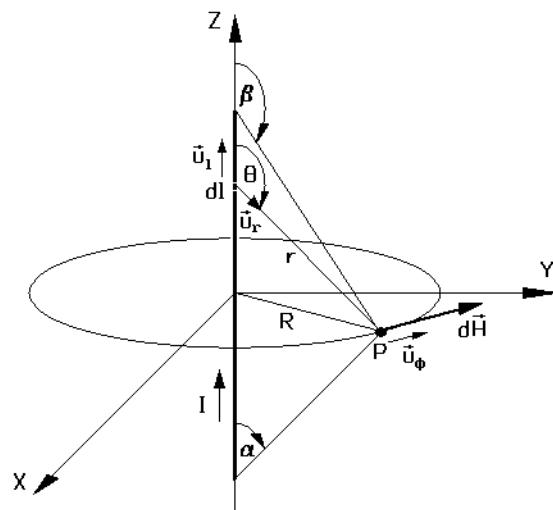
$$\vec{H} = \frac{-I}{4\pi R} (\operatorname{Cos}\beta - \operatorname{Cos}\alpha) \vec{u}_\phi \quad (3.1.1.3)$$

Si el conductor es infinitamente largo:

$\alpha \rightarrow 0$  y  $\beta \rightarrow \pi$

luego:

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi R} \vec{u}_\phi \quad (3.1.1.4)$$



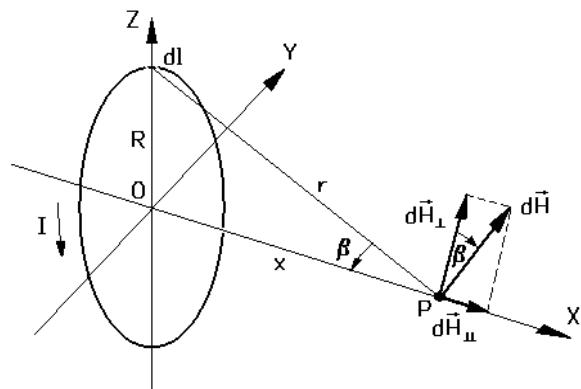
F i g u r a 3 . 1 . 1 . 2

en donde  $\vec{u}_\phi$  es el vector unitario azimutal dado por el producto vectorial  $(\vec{u}_l \times \vec{u}_r)$  o también por la ley de la mano derecha para campos producidos por corrientes linea-

les: "se extiende el pulgar en el sentido de la intensidad, los demás dedos empuñados ligeramente muestran el sentido del campo".

**b) ESPIRA CIRCULAR**, sobre su eje:

$$\vec{H}_{II} = \frac{IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \vec{i} \quad (3.1.1.5)$$



En el centro de la espira,  $x = 0$ , se tiene:

F i g u r a 3 . 1 . 1 . 3

$$\vec{H}_{II} = \frac{I}{2R} \vec{i} \quad (3.1.1.6)$$

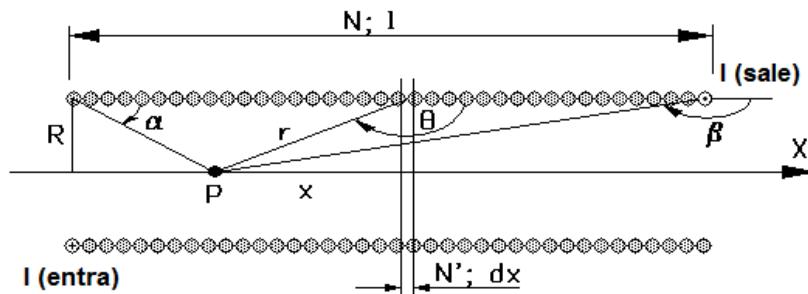
Si en lugar de una espira se tiene un multiplicador (bobina de  $N$  espiras muy empaquetadas de modo que  $D \gg l$ ), las expresiones anteriores se convierten en:

$$\vec{H}_{II} = \frac{NIR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \vec{i} \quad (3.1.1.7)$$

$$\vec{H}_{II} = \frac{NI}{2R} \vec{i} \quad (3.1.1.8)$$

en donde  $\vec{i}$  está dado por la ley de la mano derecha para campos producidos por corrientes cerradas: "se empuñan los dedos en el sentido de la intensidad, se extiende el pulgar el cual muestra el sentido del campo".

**c) SOLENOIDE CIRCULAR**, sobre su eje: (bobina de muchas espiras tal que  $I \gg D$ )



F i g u r a 3 . 1 . 1 . 4

$$\vec{H}_{II} = \frac{-NI}{2l} (\cos\beta - \cos\alpha) \vec{i} \quad (3.1.1.9)$$

En el centro del solenoide:

$$\vec{H}_{II} = \frac{NI}{l} \vec{i} \quad (3.1.1.10)$$

En uno de los extremos del solenoide:

$$\vec{H}_{II} = \frac{NI}{2l} \vec{i} \quad (3.1.1.11)$$

en donde  $\vec{i}$  está dado por la ley de la mano derecha del caso (b).

### 3) PROBLEMAS MODELO:

1) Un solenoide rectilíneo, con la longitud de 40 cm y una sección recta de  $8 \text{ cm}^2$ , está constituido por 300 espiras conductoras, por las que circula una corriente de 1,2 A de intensidad. La permeabilidad magnética relativa del hierro de su núcleo vale 600. Hallar la intensidad del campo  $\vec{H}$ .

Datos:

$$l = 40 \text{ cm}$$

$$S = 8 \text{ cm}^2$$

$$N = 300 \text{ espiras}$$

$$I = 1,2 \text{ A}$$

$$\vec{H} = ?$$

La intensidad de campo magnético de un solenoide está dada por:

$$\vec{H} = \frac{NI}{l}$$

$$H = \frac{300 \cdot 1,2}{0,4}$$

$$H = 900 \frac{A}{m}$$

2) En el núcleo de hierro de un solenoide, para una intensidad magnética  $H = 200 \text{ A/m}$ . La densidad de flujo magnético vale  $B = 0,14 \text{ T}$ . Deducir el valor de la permeabilidad absoluta  $\mu$  y relativa  $\mu_r$  del hierro.

Datos:

$$H = 200 \text{ A/m}$$

$$B = 0,14 \text{ T}$$

$$\mu = ?$$

$$\mu_r = ?$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\mu = \frac{B}{H}$$

$$\mu = \frac{0,14}{200}$$

$$\mu = 7 E - 4 \text{ Wb/A.m}$$

Para la permeabilidad relativa:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$

$$\mu_r = \frac{7 E - 4}{4\pi E - 7}$$

$$\mu_r = 557,04$$

## 4) EVALUACIÓN DE LOGROS:

### a) Complete:

1- ¿Cuál es la causa del magnetismo?.....

2- Mencione tres características del magnetismo:

1. .....
2. .....
3. .....

3- Escriba la expresión moderna para el diferencial de intensidad de campo magnético.

.....

4- Una lo correcto:

Solenoide	Bobina de N espiras muy empaquetadas
	Bobina de muchas espiras
Multiplicador	$D \gg I$
	$I \gg D$

**b) Resuelva, en su cuaderno de ejercicios, los siguientes problemas:**

1- Por un solenoide, de  $15 \text{ cm}^2$  de sección y 700 espiras/m, circula una corriente de 0,5 A de intensidad. Hallar la intensidad de campo magnético  $\vec{H}$  si: a) si el núcleo es de aire, b) si es de hierro de permeabilidad relativa 1 000.

$$R = a) 350 \text{ A/m}; b) 350 \text{ A/m}.$$

2- La densidad de flujo magnético en el núcleo de hierro de un solenoide toroidal es de 0,54 T, cuando la intensidad del campo magnético vale 360 A/m. Hallar la permeabilidad magnética absoluta y relativa del hierro.

$$R = 1,5 E - 3 \text{ Wb/A.m}; 1,19 E 3.$$

## 5) LISTADO DE ANIMACIONES-DESCRIPCIÓN

**a) Conceptuales:** Estas animaciones corresponden a la parte teórica de los temas Ley de Biot-Savart e Intensidad de campo, como son: conceptos, leyes, modelos matemáticos y gráficos expresados de manera muy clara.

EM311C01

EM311C02

EM311C03

EM311C04

EM311C05

EM311C06

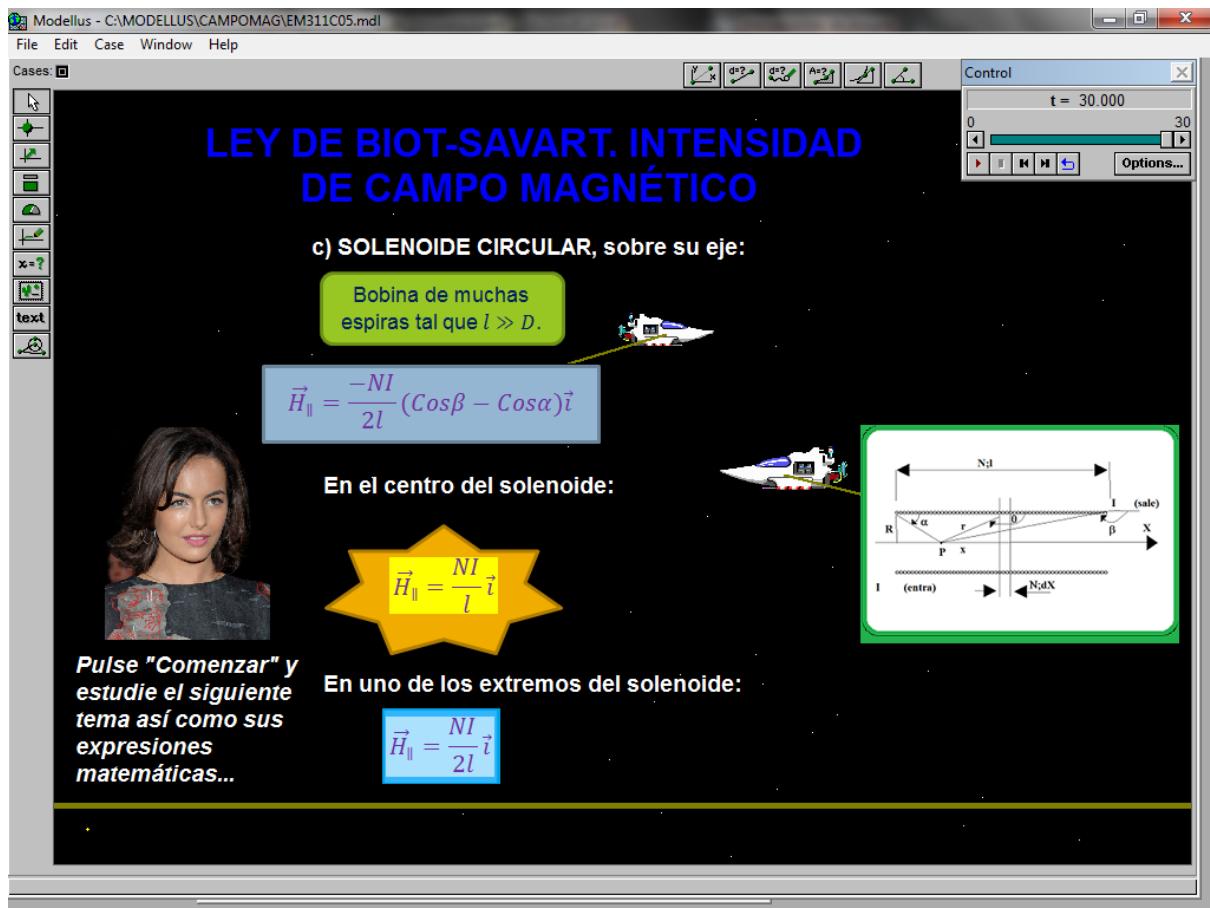
**b) Ejercitativas:** La siguiente animación contiene un ejercicio modelo resuelto correspondiente al tema.

EM311E01

**c) Lúdicas:** Esta animación posee un juego didáctico que permite la directa interacción del usuario y al final el premio será, las ecuaciones fundamentales del tema.

EM311L01

## 6) ANIMACIÓN DE MUESTRA:



### Descripción:

Esta es una animación de tipo Conceptual; contiene el desarrollo del tema Solenoide Circular y sus expresiones matemáticas.

## 3.1.2 DENSIDAD DE FLUJO MAGNÉTICO. FLUJO MAGNÉTICO

### 1) LOGROS DE APRENDIZAJE:

- 1- Conocer y aprender los conceptos importantes, unidades, expresiones matemáticas y sus aplicaciones a situaciones cotidianas. También conocer las permeabilidades relativas de algunos materiales.
- 2- Realizar las actividades propuestas con orden y precisión, demostrando el dominio de los conocimientos adquiridos.
- 3- Ayudarse entre compañeros con el fin de superar las dificultades que se presenten en la comprensión del tema.

### 2) FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA:

En el tema anterior conocimos el concepto de intensidad de campo magnético,  $\vec{H}$ , parámetro que no considera la influencia del medio ambiente sobre el campo magnético. Ahora conoceremos el vector "densidad de flujo magnético",  $\vec{B}$ , que sí considera el influjo del medio, y se define mediante la expresión:

$$\boxed{\vec{B} = \mu \vec{H}} \quad (3.1.2.1)$$

la cual se expresa en teslas,  $T$ , y en donde la constante  $\mu$  representa la "permeabilidad magnética del medio", en  $H/m$ , y representa dentro del campo magnético lo que la permitividad eléctrica,  $\epsilon$ , dentro del campo eléctrico. La permeabilidad del vacío es  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m$  y se acostumbra tomarla como referencial para definir la permeabilidad relativa de las sustancias,  $\mu_r$ , en la forma:

$$\boxed{\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}} \quad (3.1.2.2)$$

Las sustancias se clasifican en función de sus permeabilidades relativas en diamagnéticas ( $\mu_r < 1$ ), paramagnéticas ( $\mu_r > 1$ ) y ferromagnéticas ( $\mu_r \gg 1$ ), aunque en función de su comportamiento magnético hay además materiales anti-ferromagnéticos, ferrimagnéticos y superparamagnéticos. En la tabla 3.1.2.1 se presentan algunas sustancias y sus permeabilidades relativas.

La ley de Biot-Savart permite expresar la densidad de flujo magnético en la forma:

$$\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint \frac{(\vec{u}_l \times \vec{u}_r)}{r^2} dl = \frac{\mu I}{4\pi} \oint \frac{\text{Sen}\theta}{r^2} dl \vec{u} \quad (3.1.2.3)$$

Se llama "flujo magnético",  $\Phi$ , al campo escalar definido como la integral de superficie, bajo producto punto, del campo vectorial  $\vec{B}$ ; así, el flujo magnético que cruza por una superficie dada es:

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (3.1.2.4)$$

la cual se expresa en wéberes,  $Wb$ . Pero las líneas de flujo magnético son cerradas, de modo que no tienen ni principio ni fin, en otras palabras, el campo magnético  $\vec{B}$  no tiene ni fuentes ni sumideros de modo que:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (3.1.2.5)$$

A partir de la ecuación (3.1.2.4) se puede redefinir la densidad de flujo magnético en la forma:

$$\vec{B} = \frac{d\Phi}{dS} \vec{u} \quad (3.1.2.6)$$

en donde  $\vec{u}$  es el vector unitario normal a  $dS$  y orientado según el sentido de las líneas de flujo  $\Phi$ .

Si la superficie de integración de la ecuación (3.1.2.4) es cerrada, entonces:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3.1.2.7)$$

lo cual garantiza la no existencia del "monopolio magnético", así como el hecho de que las líneas de  $\Phi$  son cerradas, esto es, no tienen ni principio ni fin. *Esta cuestión parece estar en tela de duda en los últimos tiempos, pues alguien pretende haber obtenido el monopolio magnético.*

MATERIAL	T I P O	PERMEABILIDAD RELATIVA
bismuto	diamagnético	0,999 830
plata	diamagnético	0,999 980
plomo	diamagnético	0,999 983
cobre	diamagnético	0,999 991
agua	diamagnético	0,999 991
vacío	no magnético	1,000 000
aire	paramagnético	1,000 002
aluminio	paramagnético	1,000 020
paladio	paramagnético	1,000 800
permalloy 2-81	ferromagnético	130
cobalto	ferromagnético	250
níquel	ferromagnético	699
ferroxcube	ferromagnético	1 500
acero suave	ferromagnético	2 000
hierro	ferromagnético	5 000
hierro al silicio	ferromagnético	7 000
permalloy 78	ferromagnético	100 000
mumetal	ferromagnético	100 000
hierro purificado	ferromagnético	200 000
supermalloy	ferromagnético	1 000 000

**T a b l a 3 . 1 . 2 . 1**

### 3) PROBLEMAS MODELO:

1) Un solenoide de 2,5 cm de diámetro y 30 cm de longitud tiene 300 vueltas y lleva una intensidad de corriente de 12 A. Calcule el flujo magnético a través de la superficie de un disco de 5 cm de radio que está colocado de forma perpendicular y centrado al eje del solenoide.

Datos:

$$D = 0,025 \text{ m}$$

$$l = 0,30 \text{ m}$$

$$N = 300$$

$$I = 12 \text{ A}$$

$$R = 0,05 \text{ m}$$

La magnitud del campo magnético dentro del solenoide está dada por:

$$\vec{B} = \frac{\mu NI}{l}$$

El flujo magnético será:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = \vec{B} \pi \left( \frac{D}{2} \right)^2 = \frac{\vec{B} \pi D^2}{4}$$

Sustituyendo el campo magnético:

$$\Phi = \frac{\frac{\mu NI}{l} \pi D^2}{4} = \frac{\mu N I D^2}{4l}$$

Sustituimos los valores:

$$\Phi = \frac{(4\pi E - 7)(\pi)(300)(12)(0,025)^2}{4(0,3)}$$

$$\Phi = 7,4 \mu \text{ Wb}$$

2) Un solenoide toroidal tiene una sección de  $6 \text{ cm}^2$  y la densidad de flujo magnético en su núcleo de aire vale  $10 \text{ E} - 3 \text{ T}$ . Hallar la densidad de flujo magnético y el flujo magnético en el solenoide, si su núcleo fuera del hierro de permeabilidad relativa 500.

Datos:

$$S = 6 \text{ cm}^2$$

$$B = 10 \text{ E} - 3 \text{ T}$$

$$B = ?$$

$$\Phi = ?$$

La densidad de flujo magnético está dada por:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$B = 500(10E - 3)$$

$$B = 5 \text{ Wb/m}^2$$

EL flujo magnético está dado por:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

$$\Phi = 5(6E - 4)$$

$$\Phi = 3E - 3 \text{ Wb}$$

#### 4) EVALUACIÓN DE LOGROS:

**a) Complete:**

1- La densidad de flujo magnético se define mediante la expresión.....  
y se expresa en....., en donde la constante  $\mu$  representa la.....  
.....

2- La permeabilidad del vacío es:.....

3- Consulte acerca de materiales antiferromagnéticos, ferrimagnéticos y superparamagnéticos y ponga dos ejemplos de cada uno:.....  
.....  
.....  
.....

4- El flujo magnético que cruza por una superficie dada es:  
.....

**b) Resuelva, en su cuaderno de ejercicios, los siguientes problemas:**

1- Una bobina circular, constituida por 40 espiras de conductor tiene un diámetro de 32 cm y una sección despreciable. Hallar la intensidad de corriente que debe circular por ella para que la densidad de flujo magnético en su centro sea de  $3E - 4 \text{ T}$ .  
 $R = I = 1,9 \text{ A}$ .

2- Determine la densidad de flujo magnético en el centro de una espira cuyo radio es de 8 cm; por ella circula una corriente de 6 A. La espira se encuentra en el aire.  
 $B = 4,71 E - 5 \text{ T}$ .

3- Calcule el radio de una bobina que tiene 200 espiras de alambre en el aire por la cual circula una corriente de 5 A y se produce una densidad de flujo magnético en su centro de  $8 \text{ E-3 T}$ .

$$R = r = 0,078 \text{ m.}$$

4- Hallar la densidad de flujo magnético en un punto de aire a 5 cm de un conductor rectilíneo por el que circula una intensidad de 15 A.

$$R = 6E - 5T.$$

## 5) LISTADO DE ANIMACIONES-DESCRIPCIÓN

**a) Conceptuales:** En estas animaciones se desarrolla la parte teórica de los temas Densidad del Flujo Magnético y Flujo Magnético y sus modelos matemáticos en forma clara y ordenada.

EM312C01  
EM312C02  
EM312C03  
EM312C04  
EM312C05

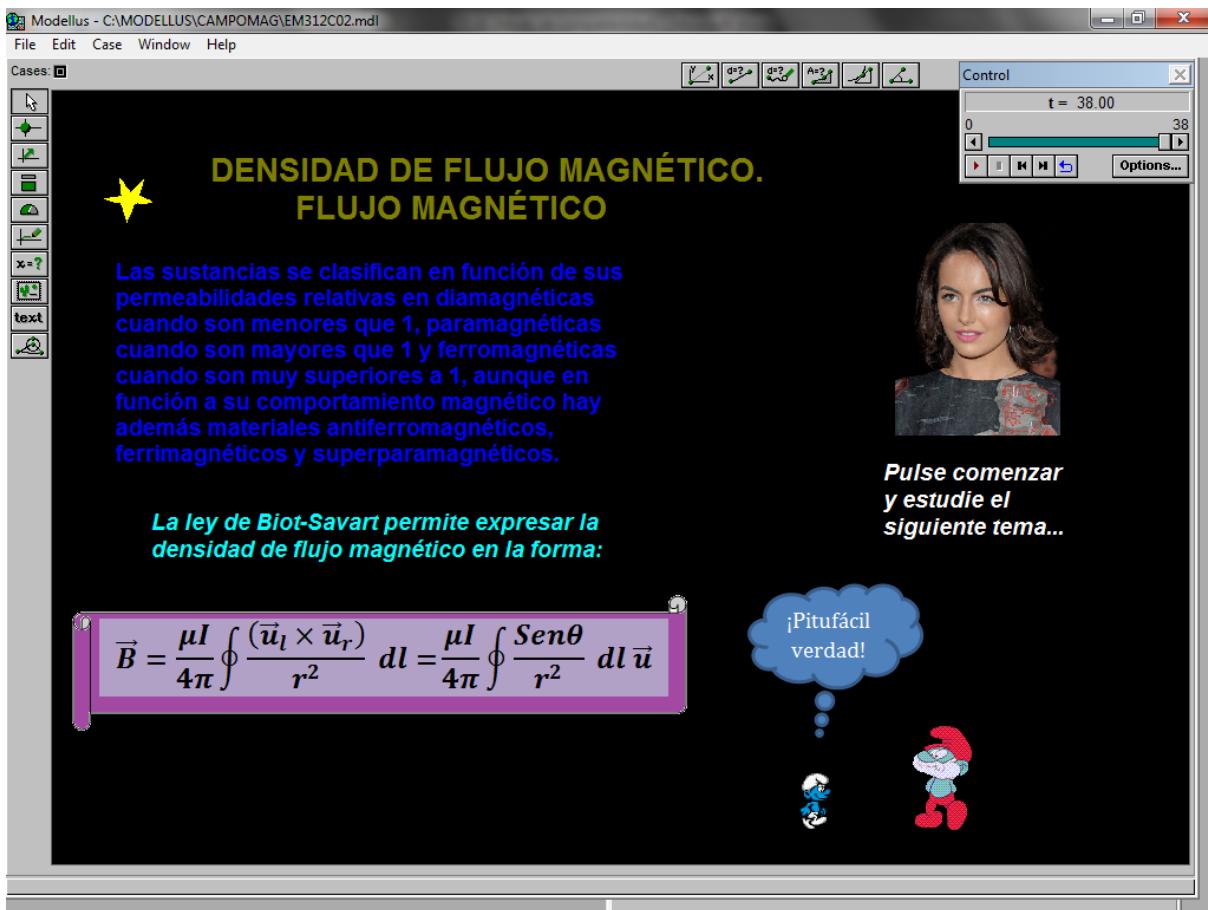
**b) Ejercitativas:** En las siguientes animaciones se realizan dos ejercicios modelos como aplicación a lo enseñado en las animaciones conceptuales.

EM312E01  
EM312E02

**c) Lúdicas:** En la presente animación se desarrolla un juego didáctico, en el que el usuario demostrará sus habilidades y como premio recibirá las ecuaciones más importantes del tema.

EM312L01

## 6) ANIMACIÓN DE MUESTRA:



### Descripción:

Es una animación de tipo conceptual, en la que se estudia el Flujo Magnético, la clasificación de las sustancias según sus permeabilidades relativas y la expresión matemática de la densidad del flujo magnético según la Ley de Biot-Savart.

### 3.1.3 LEY DE AMPÈRE. ROTACIONAL DE $\vec{H}$

#### 1) LOGROS DE APRENDIZAJE:

- 1- Conocer la Ley de Ampère, las condiciones para su aplicación y las expresiones matemáticas del tema.
- 2- Utilizar los conceptos adquiridos en la resolución de las actividades propuestas y en las situaciones de la vida cotidiana.
- 3- Colaborar con los compañeros a quienes se le dificulta comprender el tema.

#### 2) FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA:

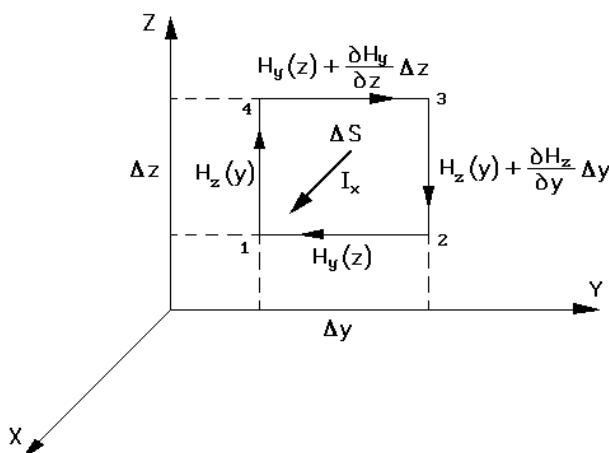
La integral cerrada de línea de la componente tangencial del campo  $\vec{H}$  alrededor de una trayectoria C es igual a la intensidad de corriente encerrada por la trayectoria, es decir:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enc} \quad (3.1.3.1)$$

expresión conocida como la "ley de Ampère" y cuya función es similar a la ley de Gauss. Para aplicar la ecuación anterior debe cumplirse que: 1) en todo punto de la trayectoria,  $\vec{H}$  es o tangencial o normal a la misma, 2) en los puntos donde  $\vec{H}$  es tangencial a la trayectoria, su magnitud debe ser constante.

Ahora desarrollaremos un poco más la ecuación (3.1.3.1). Supongamos una trayectoria cuadrada sobre el plano YZ, de lados  $\Delta y$  &  $\Delta z$ , como se indica en la figura 3.1.3.1:

Si en el punto (1), de coordenadas  $(x; y; z)$ , el campo  $\vec{H}$  es de la forma  $\vec{H} = H_x \hat{i} + H_y \hat{j} + H_z \hat{k}$ , en el punto (3), de coordenadas  $(x+\Delta x; y+\Delta y; z+\Delta z)$ , las componentes  $H_y$  &  $H_z$  sufren las va-



F i g u r a 3 . 1 . 3 . 1

riaciones infinitesimales  $\frac{\partial H_y}{\partial z} \Delta z$  y  $\frac{\partial H_z}{\partial y} \Delta y$ , respectivamente, de modo que tienen los nuevos valores indicados en la figura. También vemos que la componente normal de la intensidad a través de  $\Delta S$  es  $I_x$ . Entonces, dividiendo la ecuación (3.1.3.1) para  $\Delta S$  y multiplicando por el vector unitario  $\vec{i}$ , normal a  $\Delta S$ , tenemos:

$$\frac{\int \vec{H} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} \vec{i} = \frac{I_x}{\Delta S} \vec{i} = J_x \vec{i} = \vec{J}_x$$

La integral del numerador es:

$$\begin{aligned} \int \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_1^2 \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_2^3 \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_3^4 \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_4^1 \vec{H} \cdot d\vec{l} \\ \int \vec{H} \cdot d\vec{l} &= H_y \Delta y + \left( H_z + \frac{\partial H_z}{\partial y} \Delta y \right) \Delta z - \left( H_y + \frac{\partial H_y}{\partial z} \Delta z \right) \Delta y - H_z \Delta z \\ \int \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \left( H_y - H_y - \frac{\partial H_y}{\partial z} \Delta z \right) \Delta y + \left( H_z + \frac{\partial H_z}{\partial y} \Delta y - H_z \right) \Delta z \\ \int \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \frac{\partial H_z}{\partial y} \Delta y \Delta z - \frac{\partial H_y}{\partial z} \Delta y \Delta z = \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \Delta S \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\frac{\int \vec{H} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} \vec{i} = \frac{\left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \Delta S}{\Delta S} \vec{i} = \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{i}$$

y por lo tanto:

$$\frac{\int \vec{H} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} \vec{i} = \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{i} = \vec{J}_x \quad (\text{a})$$

Similarmente, para trayectorias cuadradas sobre los otros dos planos se tiene:

$$\frac{\int \vec{H} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} \vec{j} = \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{j} = \vec{J}_y \quad (\text{b})$$

$$\frac{\int \vec{H} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} \vec{k} = \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{k} = \vec{J}_z \quad (\text{c})$$

Sumando (a), (b) y (c) obtenemos:

$$\left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{k} = \vec{J}_x + \vec{J}_y + \vec{J}_z$$

Pero el miembro izquierdo de la igualdad es el rotacional de  $\vec{H}$  en tanto que el de la derecha es la densidad de corriente, luego:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J}$$

(3.1.3.2)

ecuación que relaciona matemáticamente la causa con su efecto, esto es, la densidad de corriente  $\vec{J}$  con la intensidad de campo magnético  $\vec{H}$ .

### 3) PROBLEMA MODELO:

- 1) Por un alambre largo y recto de 3 mm de radio circula una corriente de 25 A. Determine el campo  $\vec{H}$  y calcule el valor del campo magnético en la superficie del alambre.

*Dentro del alambre:*

Aplicando la ley de Ampère a una trayectoria circular de radio  $R \leq R_1$ , tenemos:

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{enc}}$$

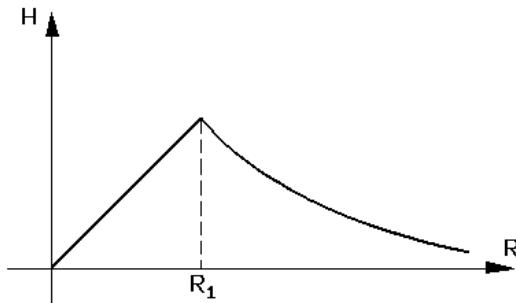
$$H 2\pi R = I \frac{\pi R^2}{\pi R_1^2} = \frac{IR^2}{R_1^2}$$

luego:

$$\vec{H} = \frac{IR}{2\pi R_1^2} \vec{u}_\phi$$

*Fuera del alambre:*

Para una trayectoria circular de radio  $R > R_1$ ,



F i g u r a 3 . 1 . 3 . 2

tenemos:

$$H 2\pi R = I$$

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi R} \vec{u}_\phi$$

Por lo tanto:

$$\vec{H} = \frac{25}{2\pi(3E - 3)}$$

$$\vec{H} = 1326,29 \text{ A/m}^2$$

Para calcular el valor de campo magnético tenemos:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{B} = 4\pi E - 7(1326,29)$$

$$\vec{B} = 1,66E - 3 \text{ T}$$

## 4) EVALUACIÓN DE LOGROS:

### a) Complete:

1- Defina la ley de Ampère:

.....  
.....

2- Las condiciones para la aplicación de la Ley de Ampère son:

- 1-.....  
2-.....

3- Escriba la ecuación que define la Ley de Ampère:

.....

### b) Resuelva, en su cuaderno de ejercicios, los siguientes problemas:

1- Si  $F = 3ya_x - 4x^3a_z$ , evalúe: la integral de línea de  $F$  alrededor de la secuencia de segmentos rectilíneos,  $(1, 1, 1)$  a  $(1, 1, -1)$  a  $(-3, 1, -1)$  a  $(-3, 1, 1)$  a  $(1, 1, 1)$ ; b) la componente y el rot  $F$ , en  $(-1, 1, 0)$ .

$R = a)$  224;  $b)$  12.

2- Encuentre  $|\nabla \times H|$ , en  $(x = 0, y = 1, z = 0)$ , dado  $H =$ : a)  $r^2za_\phi$ ; b)  $r^2\sin\theta a_\phi$ .

$R = a)$  1;  $b)$  3.

## 5) LISTADO DE ANIMACIONES-DESCRIPCIÓN

**a) Conceptuales:** Estas animaciones contienen el concepto y la ecuación de la Ley de Ampère, las condiciones para su aplicación, también el desarrollo del Rotacional de H y su ecuación que relaciona la causa con su efecto.

EM313C01  
EM313C02  
EM313C03  
EM313C04  
EM313C05

**b) Ejercitativas:** Cada animación contiene un ejercicio resuelto como aplicación de los conceptos adquiridos que facilitará la compresión del tema.

EM313E01  
EM313E02

**c) Lúdicas:** En esta animación el usuario demostrar sus destrezas adquiridas, y será premiado con las expresiones matemáticas fundamentales del tema.

EM313L01

## 6) ANIMACIÓN DE MUESTRA:

**LEY DE AMPÈRE. ROTACIONAL DE H**

**EJERCICIO:**

En la región  $\{0 \leq R \leq 0,5\}$  la densidad de corriente es  $\vec{J} = 4,5 e^{-2R} \vec{k}$  y  $\vec{J} = 0$  en cualquier otra región. Determine el campo  $\vec{H}$ .

**DATOS:**

$$\vec{J} = 4,5 e^{-2R} \vec{k}$$

$$\vec{J} = 0$$

$$\vec{H} = ?$$

a) 
$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_\phi 2\pi R = \oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R 4,5 e^{-2R} R dR$$

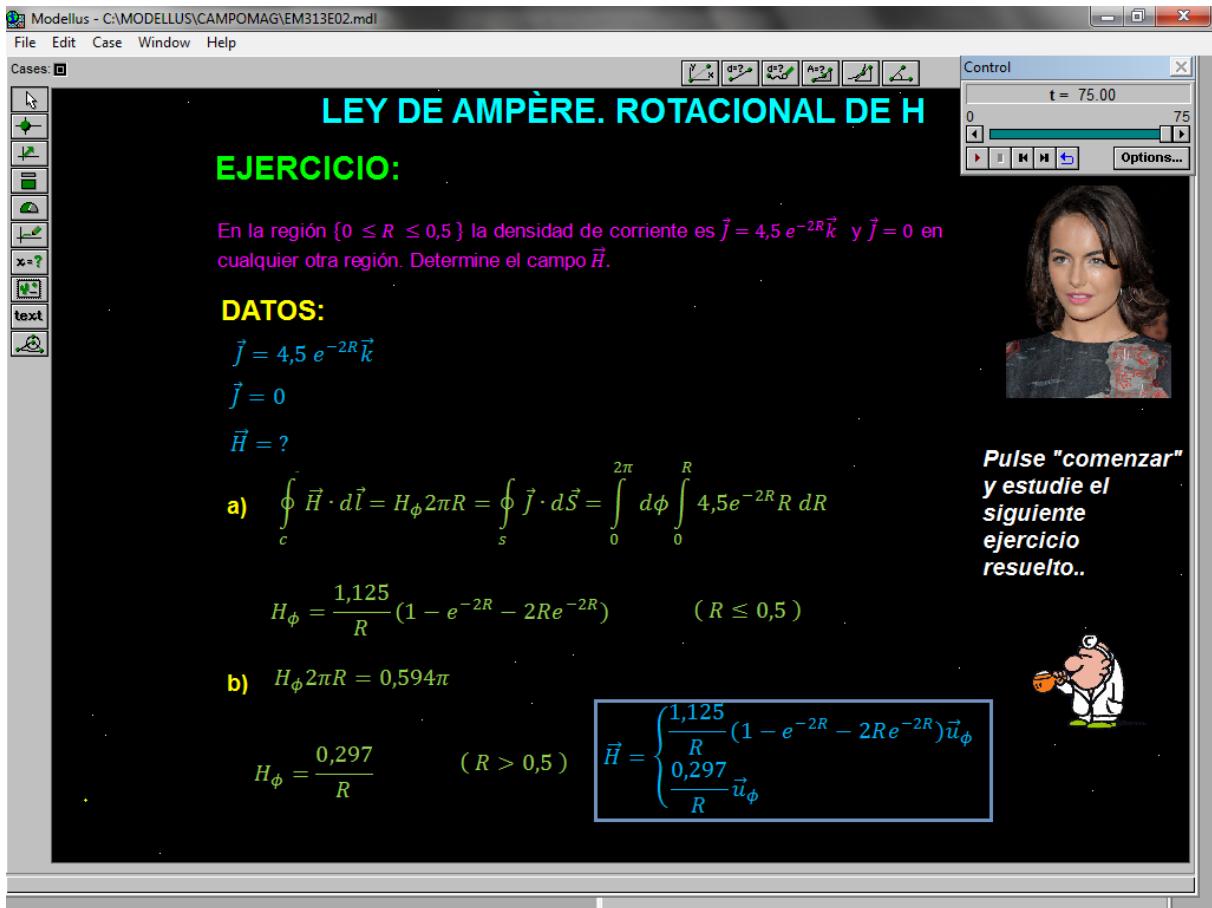
$$H_\phi = \frac{1,125}{R} (1 - e^{-2R} - 2Re^{-2R}) \quad (R \leq 0,5)$$

b) 
$$H_\phi 2\pi R = 0,594\pi$$

$$H_\phi = \frac{0,297}{R} \quad (R > 0,5)$$

**Pulse "comenzar" y estudie el siguiente ejercicio resuelto..**

**Control**  
t = 75.00  
0 75  
Options...



### Descripción:

Esta es una animación de tipo Ejercitativo; contiene el desarrollo de un ejercicio modelo en el que aplica la Ley de Ampère y también incluye la respectiva explicación de su funcionamiento.

## 3.1.4 FUERZAS SOBRE PARTÍCULAS CARGADAS

### 1) LOGROS DE APRENDIZAJE:

- 1- Aprender los conceptos y relacionarlos con la vida cotidiana y conocer las ecuaciones importantes del tema para aplicarlas a la resolución de ejercicios.
- 2- Desarrollar eficazmente las actividades propuestas al final del tema.
- 3- Colaborar con entusiasmo con el grupo en las dificultades que se presenten.

### 2) FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA:

Si una partícula de masa  $m$  que retiene una carga  $+Q$  es colocada dentro de un campo magnético de densidad  $\vec{B}$ , se mantendrá estática en el sitio donde fue colocada; esto se debe a que no interactúa con el campo. Sin embargo al ponerse en movimiento con velocidad  $\vec{U}$  dentro del campo, experimentará una fuerza lateral que la desviará de su trayectoria obligándola a describir una curva. La investigación experimental ha demostrado que esta fuerza de tipo magnético que actúa sobre la partícula cargada en movimiento, figura 3.1.4.1, es:

$$\vec{F}_M = Q(\vec{U} \times \vec{B}) \quad (3.1.4.1)$$

cuya magnitud es simplemente:

$$F_M = QUB \operatorname{Sen}\theta$$

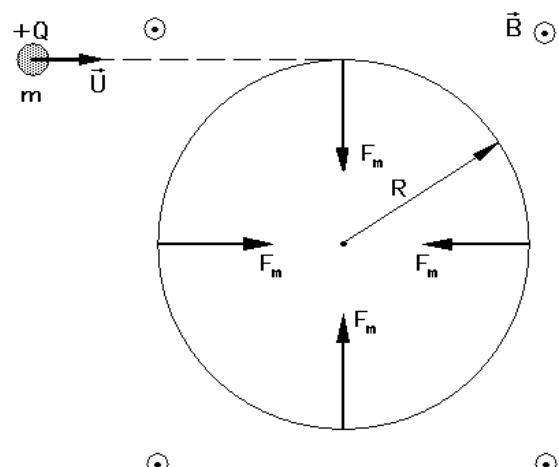
Si el campo en la región es suficientemente extenso, la partícula terminará por describir una circunferencia (si  $\theta = 90^\circ$ ) o una hélice circular (si  $\theta \neq 90^\circ$ ) de modo que la fuerza magnética es una fuerza centrípeta y, de acuerdo a la segunda ley de Newton:

$$QUB \operatorname{Sen}\theta = \frac{mU^2}{R}$$

de donde:

$$QUB \operatorname{Sen}\theta = \frac{mU}{R}$$

$$(3.1.4.2)$$



F i g u r a 3 . 1 . 4 . 2

de donde se puede despejar y calcular cualquier parámetro requerido.

Si la partícula cargada móvil se encuentra en una región con campos eléctrico y magnético, la fuerza total que experimenta será la suma vectorial de las dos interacciones, es decir:

$$\vec{F}_T = \vec{F}_E + \vec{F}_M = Q\vec{E} + Q(\vec{U} \times \vec{B})$$

esto es:

$$\boxed{\vec{F}_T = Q[\vec{E} + (\vec{U} \times \vec{B})]} \quad (3.1.4.3)$$

Algunas de las aplicaciones de la ecuación anterior las hallamos en ciertos aceleradores de partículas, en los tubos de televisión y radar, en los filtros de velocidades, en los espectrógrafos de masas, etc.

### 3) PROBLEMA MODELO:

- 1) Una partícula alfa tiene una velocidad de  $\vec{U} = (3\vec{i} + 5\vec{j} - 9\vec{k}) m/s$  dentro de un campo magnético uniforme dado por  $\vec{B} = (3\vec{i} - 20\vec{j} + 5\vec{k}) \mu T$ . ¿Cuál es la fuerza que siente la partícula alfa?

Datos:

$$\begin{aligned} Q &= 3,2 E - 19 C \\ \vec{U} &= (3\vec{i} + 5\vec{j} - 9\vec{k}) m/s \\ \vec{B} &= (3\vec{i} - 20\vec{j} + 5\vec{k}) \mu T \end{aligned}$$

La Fuerza está dada por:

$$\vec{F} = Q(\vec{U} \times \vec{B})$$

Sustituyendo:

$$\vec{F} = (3,2E - 19) \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 5 & -9 \\ 3E - 6 & -20E - 6 & 5E - 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= 3,2E - 19[(25E - 6 - 180E - 6)\vec{i} - (15E - 6 + 27E - 6)\vec{j} \\ &\quad + (-60E - 6 - 15E - 6)\vec{k}] \end{aligned}$$

$$\vec{F} = (-4,96E - 23\vec{i} - 1,34E - 23\vec{j} - 2,4E - 23\vec{k}) N.$$

## 4) EVALUACIÓN DE LOGROS:

1- ¿Qué son los ciclotrones? .....

.....  
.....  
.....

2- La fuerza de tipo magnético que actúa sobre la partícula cargada en movimiento es:.....

### c) Resuelva, en su cuaderno de ejercicios, los siguientes problemas:

1- En un campo magnético de magnitud  $\vec{B} = 1,27 T$  con dirección hacia el sur, se mueve un deuterón hacia el este con una velocidad de  $1,9 \times 10^4 \text{ m/s}$ . ¿Cuál es la magnitud y la dirección de la fuerza magnética sobre el deuterón?

$$R = 3,861E - 15 \text{ N.}$$

2- En un campo magnético de  $1,9 \text{ T}$  se está moviendo una partícula alfa con una rapidez de  $6 \times 10^6 \text{ m/s}$  y experimenta una fuerza de  $1,3 \times 10^{-12} \text{ N}$ . ¿Cuál es el ángulo entre la velocidad de la partícula alfa y el campo magnético?

$$R = \theta = 20,88^\circ \text{ o } \theta = 159,12^\circ.$$

3- Un deuterón tiene una velocidad de  $\vec{U} = (3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}) \times 10^6 \text{ m/s}$  dentro de un campo magnético uniforme dado por  $\vec{B} = (2\vec{j} + 5\vec{k}) \text{ T}$ . ¿Cuál es la fuerza que siente el deuterón?

$$R = \vec{F} = (-4,8\vec{i} - 2,4\vec{j} + 0,96\vec{k}) \text{ pN.}$$

4- En un campo magnético de  $1,5 \text{ T}$  se introduce un protón con una velocidad de  $2 \times 10^7 \text{ m/s}$  formando un ángulo de  $30^\circ$  con la dirección de aquél. Hallar la fuerza aplicada sobre la partícula.

$$R = 2,4 E - 12 \text{ N.}$$

## 5) LISTADO DE ANIMACIONES-DESCRIPCIÓN

**a) Conceptuales:** Estas animaciones corresponden a la parte teórica del tema: Fuerzas sobre partículas cargadas, incluyen gráficos que facilitarán la comprensión de los conceptos y también el desarrollo de sus expresiones matemáticas.

EM314C01

EM314C02

EM314C03

EM314C04

**b) Ejercitativas:** La siguiente animación contiene un ejercicio modelo resuelto correspondiente al tema en el que se aplicará lo aprendido y mejorará el razonamiento del usuario.

EM314E01

**c) Lúdicas:** Esta animación tiene un juego didáctico que permite la directa interacción del usuario, al final del mismo como premio se obtendrá las ecuaciones más importantes del tema.

EM314L01

## 6) ANIMACIÓN DE MUESTRA:



### Descripción:

Esta es una animación Lúdica; contiene un juego didáctico con sus instrucciones respectivas, en el que el usuario podrá distraerse demostrando sus habilidades y que finalmente recibirá como premio las ecuaciones más importantes del tema estudiado.

## 3.1.5 FUERZAS Y TORQUES SOBRE CONDUCTORES CON CORRIENTE

### 1) LOGROS DE APRENDIZAJE:

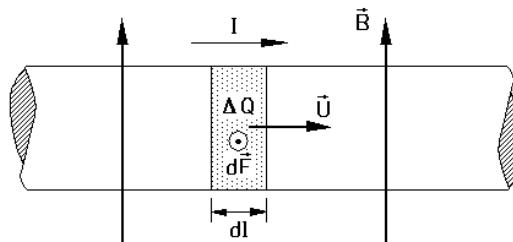
- 1- Conocer y aprender estos parámetros tan importantes, sus ecuaciones, aplicaciones a ejercicios y la vida cotidiana.
- 2- Desarrollar las actividades propuestas demostrando los conocimientos adquiridos con esmero y dedicación.
- 3- Mantener la unión y compañerismo en el grupo para un excelente trabajo en equipo.

### 2) FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA:

Sabemos que una carga móvil experimenta una fuerza al encontrarse dentro de un campo magnético. También sabemos que la corriente eléctrica dentro de un conductor implica el desplazamiento de una gran cantidad de lagunas o cargas positivas, de modo que un conductor con corriente dentro de un campo magnético debe experimentar una fuerza de tipo magnético, cuya expresión vamos a desarrollar.

Consideremos la pequeña porción de conductor, de longitud  $dl$ , la cual contiene la cantidad de carga  $dQ$  moviéndose con velocidad  $\vec{U} = d\vec{l}/dt$ , figura 3.1.5.1. Ya que el conductor se encuentra dentro del campo  $\vec{B}$ , el diferencial de fuerza que experimenta será:

$$d\vec{F}_M = dQ(\vec{U} \times \vec{B})$$



F i g u r a 3 . 1 . 5 . 1

Pero sabemos que  $I = dQ/dt$ , de donde  $dQ = I dt$ , y que  $\vec{U} = d\vec{l}/dt$ , entonces:

$$d\vec{F}_M = I dt \left( \frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B} \right)$$

es decir:

$$\boxed{d\vec{F}_M = I(d\vec{l} \times \vec{B})} \quad (3.1.5.1)$$

en donde  $d\vec{l}$  tiene el sentido convencional de la intensidad. Para hallar la fuerza total que experimenta la porción ab de conductor sumergida en el campo, integramos la expresión anterior a lo largo del mismo (integral de línea) desde a hasta b, es decir:

$$\vec{F}_M = \int_a^b (d\vec{l} \times \vec{B}) = \int_a^b B \sin \theta d\vec{l} \vec{u} \quad (3.1.5.2)$$

en donde  $\theta$  es el ángulo entre  $d\vec{l}$  y  $\vec{B}$  y  $\vec{u}$  es el vector unitario correspondiente al producto  $d\vec{l} \times \vec{B}$ .

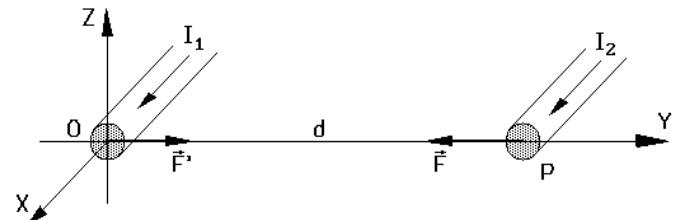
Para el caso de un conductor rectilíneo de longitud  $l$  sumergido en un campo  $B = \text{constante}$  tenemos:

$$\vec{F}_M = I(\vec{l} \times \vec{B}) = IIB \sin \theta \vec{u} \quad (3.1.5.3)$$

En particular, si  $\theta = 90^\circ$ :

$$\vec{F}_M = IIB \vec{u} \quad (3.1.5.3')$$

Si se tienen dos conductores paralelos con corrientes, separados una distancia  $d$ , éstos se ejercerán fuerzas de interacción debido al campo magnético generado por el otro y a la corriente que conduce cada conductor, figura 3.1.5.2.



F i g u r a 3 . 1 . 5 . 2

Para determinar la expresión de dichas fuerzas de interacción empecemos determinando la densidad de flujo magnético  $\vec{B}_i$  en el punto P originado por el conductor que lleva la corriente  $I_i$ :

$$\vec{B}_i = \frac{\mu I_i}{2\pi d} \vec{k}$$

La fuerza magnética que experimenta el otro conductor al estar sumergido en el campo  $\vec{B}_i$  es:

$$\vec{F} = I_2 (\vec{l} \times \vec{B}_i) = I_2 \vec{l} \times \frac{\mu I_i}{2\pi d} \vec{k} = -\frac{\mu I_1 I_2 l}{2\pi d} \vec{j}$$

de modo que la fuerza por unidad de longitud es:

$$\frac{\vec{F}}{l} = -\frac{\mu I_1 I_2}{2\pi d} \vec{j}$$

Con un análisis similar se encuentra para el otro conductor:

$$\frac{\vec{F}'}{l} = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi d} \vec{j}$$

de modo que  $\vec{F} = -\vec{F}'$  o  $F = F'$ . En resumen, las fuerzas por unidad de longitud con que interactúan dos conductores paralelos con corriente son:

$$\frac{\vec{F}}{l} = \pm \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi d} \vec{j}$$

(3.1.5.4)

Consideremos ahora el caso de un conductor doblado en forma de espira y que lleva la corriente  $I$  dentro del campo magnético  $\vec{B}$ , figura 3.1.5.3. La porción ab, como vector, es  $-I\vec{k}$  y experimenta la fuerza  $\vec{F}_1 = IB\vec{i}$ . La porción cd, como vector, es  $I\vec{k}$  y experimenta la fuerza  $\vec{F}_2 = -IB\vec{i}$ . Luego  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$  originan el torque de par de tipo magnético  $\vec{\tau}_M$  dado por:

$$\vec{\tau}_M = \vec{c}b \times \vec{F}_1 = -r\vec{j} \times IB\vec{i} = rI\vec{i} \times IB\vec{j}$$

pero  $rI = S$  es el área de la espira, luego:

$$\vec{\tau}_M = \vec{S}\vec{i} \times IB\vec{j} = I(\vec{S}\vec{i} \times \vec{B})$$

o, en general, con  $\vec{S} = S\vec{u}_n$ :

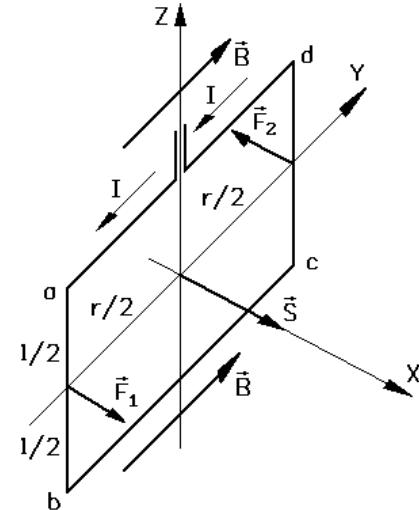


Figura 3.1.5.3

$$\vec{\tau}_M = I(\vec{S} \times \vec{B})$$

(3.1.5.5)

Para el caso de un multiplicador de  $N$  espiras se tiene:

$$\vec{\tau}_M = NI(\vec{S} \times \vec{B})$$

(3.1.5.6)

Algunas de las aplicaciones de la ecuación anterior las hallamos en los instrumentos analógicos de medición eléctrica (de aguja) y en los motores de corriente continua.

### 3) PROBLEMAS MODELO:

1) Un alambre de 10 m de longitud lleva una intensidad de corriente de 12 A de este a oeste. El campo magnético de la Tierra en la vecindad del alambre es de  $58 \mu T$  y está dirigido hacia el norte inclinado hacia abajo a  $70^\circ$  con la horizontal. Halle la magnitud de la fuerza.

Datos:

$$l = 10 \vec{k}$$

$$I = 12 \text{ A}$$

$$\vec{B} = 58 E - 6 T$$

Ángulo de inclinación de  $70^\circ$

El vector  $\vec{B}$  es:

$$\vec{B} = (58 E - 6 \times \cos 70^\circ \vec{i} - 58 E - 6 \times \sin 70^\circ \vec{j}) T$$

$$\vec{B} = (1,98 E - 5\vec{i} - 5,45 E - 5\vec{j}) T$$

La fuerza magnética está dada por:

$$\vec{F} = Il \times B$$

Sustituyendo valores:

$$\vec{F} = 12(-10\vec{k}) \times (1,98 E - 5\vec{i} - 5,45 E - 5\vec{j})$$

$$\vec{F} = (-6,54 E - 3\vec{i} - 2,376 E - 3\vec{j}) N$$

La magnitud de la fuerza está dada por:

$$F = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2}$$

$$F = \sqrt{(-6,54 E - 3)^2 + (-2,376 E - 3)^2}$$

$$F = 6,96 \text{ mN}$$

2) Un motor eléctrico sencillo posee una bobina circular de 15 mm de radio y 100 vueltas por la que pasa una corriente de 65 mA. Suponer que el campo magnético es uniforme y tiene un valor  $\vec{B} = 23 \text{ mT}$ . En un instante particular la bobina está orientada de forma que el vector área  $\vec{S}$  forma un ángulo  $\theta = 25^\circ$  con el campo. La bobina puede girar alrededor de un eje perpendicular a  $S$  y a  $B$  que pade por el centro. Determine el valor del torque sobre la bobina en dicho instante.

Cada espira circular tiene un área  $S = \pi r^2$

Sustituyendo valores:

$$S = \pi 0,015^2$$

$$S = 7,07 E - 4 \text{ m}^2$$

El torque está dado por la ecuación:

$$\vec{\tau} = NI(\vec{S} \times \vec{B}) = NISB\sin\theta$$

Sustituyendo valores:

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= (100)(0.065)(7.07E - 4)(23E - 3)\sin 25^\circ \\ \vec{\tau} &= 4.5E - 5 \text{ N.m}\end{aligned}$$

## 4) EVALUACIÓN DE LOGROS:

**a) Complete:**

1- La fuerza de tipo magnético que experimenta un conductor con corriente dentro de un campo magnético se expresa con:.....

2- La fuerza de tipo magnético para el caso de un conductor rectilíneo de longitud  $l$  sumergido en un campo  $B = \text{constante}$  es:.....

3- La expresión para el torque magnético para el caso de un multiplicador de  $N$  espiras es:.....

**b) Dar ejemplo de motores de c.c.:.....**

.....

.....

**c) Resuelva, en su cuaderno de ejercicios, los siguientes problemas:**

1- Una bobina formada por treinta espiras circulares está situada en la zona del espacio donde existe un campo magnético  $\vec{B} = 2\vec{i}$  T de modo que el vector  $\vec{S}$  que representa la superficie de las espiras forma un ángulo  $\theta = 30^\circ$  con el vector  $\vec{B}$ . El radio de la bobina es  $r = 10$  cm y por ella circula una corriente  $I = 0.05$  A.

$$R = \vec{\tau} = -0.046 \vec{k}$$

2- Un alambre forma un ángulo de  $30^\circ$  con respecto al campo  $\vec{B}$ , cuyo valor es de 0,2 T. Si la longitud del alambre es de 8 cm y pasa a través de él una corriente de 4 A, determine la magnitud y la dirección de la fuerza resultante sobre el alambre.

$$R = \vec{F} = 0.032 \text{ N.}$$

3- Dos conductores rectilíneos y paralelos, de gran longitud, distan 10 cm en el aire y son recorridos por 6 y 4 A de intensidad, respectivamente. Calcular la fuerza de atracción, por unidad de longitud de conductor, si las corrientes tienen: a) el mismo sentido, b) sentidos opuestos.

$$R = 4.8E - 5 \text{ N de repulsión y de atracción.}$$

## 5) LISTADO DE ANIMACIONES-DESCRIPCIÓN

**a) Conceptuales:** En las siguientes animaciones se desarrollará la parte conceptual del tema Fuerzas y Torques sobre conductores con corriente y con la ayuda de gráficos se deducen sus expresiones matemáticas.

EM315C01  
EM315C02  
EM315C03  
EM315C04  
EM315C05

**b) Ejercitativas:** En las posteriores animaciones se desarrollarán ejercicios modelos en los que se aplican las expresiones matemáticas del tema y que tienen por objetivo facilitar su comprensión.

EM315E01  
EM315E02

**c) Lúdicas:** Esta animación contiene un juego didáctico, en el que el usuario se divertirá y al final del mismo recibirá como premio las ecuaciones más sobresalientes del tema.

EM315L01

## 6) ANIMACIÓN DE MUESTRA:



### Descripción:

Esta es una animación de tipo Lúdico, que consta en un juego didáctico que siendo muy interesante pretende llamar la atención del usuario y contiene instrucciones muy claras para su ejecución y al final recibirá a cambio las ecuaciones más significativas del tema.

## 3.1.6 DIPOLO MAGNÉTICO. MOMENTO DIPOLEAR MAGNÉTICO. MAGNETIZACIÓN

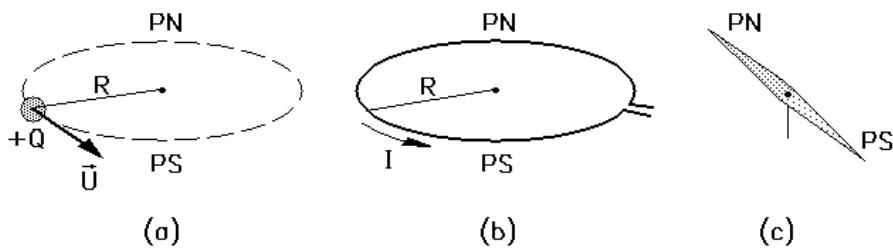
### 1) LOGROS DE APRENDIZAJE:

- 1- Conocer que es un dipolo magnético y su vector cartesiano además diferenciar los tres posibles prototipos de dipolos, y comprender sus aplicaciones en la vida dia-ria.
- 2- Resolver las actividades propuestas al final del tema con esmero y dedicación, en forma tal que se demuestren los conocimientos adquiridos.
- 3- Trabajar mancomunadamente con el grupo y velar por su buen funcionamiento.

### 2) FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA:

Como su nombre lo indica, se llama dipolo magnético un sistema físico capaz de dar origen a los dos polos magnéticos de la manera más pura y elemental posible; por ello serían tres los prototipos de dipolos:

**a) Carga puntual en movimiento orbital:** como es el caso de la carga  $+Q$  mo-viéndose sobre la trayectoria circular de radio  $R$  con velocidad orbital  $\vec{U}$ , figura 3.1.6.1(a).



F i g u r a 3 . 1 . 6 . 1

**b) Espira circular con corriente:** como es el caso de la espira de radio  $R$  que transporta la corriente  $I$  mostrada en la figura 3.1.6.1(b).

**c) Imán en forma de varilla delgada y larga:** como la aguja de una brújula, figura 3.1.6.1(c).

Lo característico de los dipolos es el hecho de que dan origen a un campo magnético elemental, con sus polos magnéticos ubicados en la forma mostrada en las figuras, y con líneas de flujo magnético cerradas que recorren, fuera del dipolo y por convenio, de norte a sur y, dentro del dipolo, de sur a norte.

Para definir y cuantificar a un dipolo magnético se utiliza el vector "momento dipolar magnético orbital",  $\vec{m}_o$ , que se define en las formas:

$$\boxed{\vec{m}_o = \frac{\omega Q S}{2\pi} \vec{u}_n} \quad (\text{para una carga puntual orbitante}) \quad (3.1.6.1)$$

y:

$$\boxed{\vec{m}_o = I S \vec{u}_n} \quad (\text{para una espira con corriente}) \quad (3.1.6.2)$$

en donde las orientaciones de  $\vec{m}_o$  se muestran en las partes (a) y (b) de la figura 3.1.6.2. El vector  $\vec{m}_o$  se expresa en  $A.m^2$ .

Al colocar un dipolo magnético dentro de un campo magnético externo de densidad  $\vec{B}$ , ocurre una interacción entre  $\vec{m}_o$  y  $\vec{B}$ , lo cual da origen a un torque que tiende a girar al dipolo hasta que se alineen los vectores  $\vec{m}_o$  y  $\vec{B}$ ; desarrollamos la expresión matemática de dicho torque:

$$\tau_M = I(\vec{S} \times \vec{B}) = I\vec{S} \times \vec{B}$$

es decir:

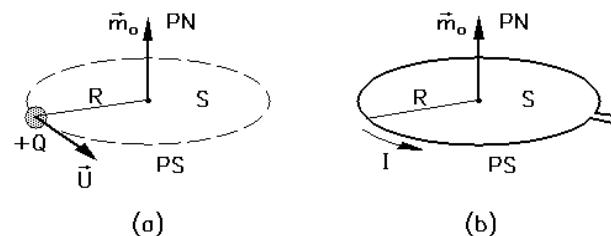
$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{m}_o \times \vec{B}} \quad (3.1.6.3)$$

y precisamente cuando  $\vec{m}_o$  y  $\vec{B}$  quedan alineados, es decir, paralelos, el sistema se encuentra en su estado de menor energía potencial magnética. Al ser retirado de dicha posición un ángulo  $\theta$ , figura 3.1.6.3, el sistema almacena la energía potencial magnética:

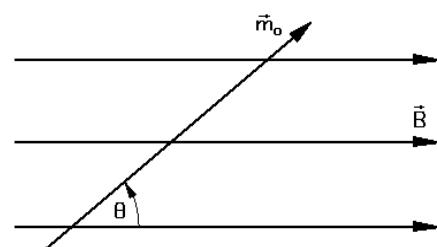
$$E_{PM} = \int \tau d\theta = \int I S B \sin \theta d\theta = -I S B \cos \theta = -m_o B \cos \theta$$

es decir:

$$\boxed{E_{PM} = -\vec{m}_o \cdot \vec{B}} \quad (3.1.6.4)$$



F i g u r a 3 . 1 . 6 . 2



F i g u r a 3 . 1 . 6 . 3

Vemos entonces que cuando  $\theta=\pi/2$ ,  $E_{pM}=0$  y cuando  $\theta=\pi$ ,  $E_{pM}=m_0B=E_{P(\text{máx})}$ .

El movimiento orbital de cada electrón en torno al núcleo da origen a los diferentes vectores  $\vec{m}_o$  dentro del átomo, cuyo valor total, que puede ser grande, pequeño o nulo, explica el comportamiento magnético de la materia como tal, y sus diferentes formas de interacción con campos magnéticos externos.

Una forma bastante sencilla y práctica de entender el fenómeno del magnetismo de la materia es considerar que ésta está constituida por una cantidad enorme de minúsculos dipolos magnéticos de momentos dipolares  $\vec{m}_o$ , sea por dictamen propio de la naturaleza del material o por acción de un campo magnético externo. En todo caso, el momento dipolar magnético por unidad de volumen se denomina "magnetización",  $\bar{M}$ , esto es:

$$\bar{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{N\bar{m}_o}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{N\omega Q S}{2\pi \Delta V} \bar{u} \quad (3.1.6.5)$$

Las expresiones análogas a las del campo eléctrico nos permiten escribir:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} = \mu \vec{H} \quad (3.1.6.6)$$

$$\mu = \mu_0 + \frac{M}{H} \quad (3.1.6.7)$$

y:

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_M) = \mu_0 \mu_r \quad (3.1.6.8)$$

de modo que  $\mu_r = 1 + \chi_M$ , en donde  $\chi_M$  es la susceptibilidad magnética de la sustancia o medio ambiente.

### 3) PROBLEMA MODELO:

- 1) Por una espira circular de 25 mm de radio pasa una corriente de 750 mA en el sentido positivo de eje X. Calcular el campo magnético producido por la corriente en el punto x = 0 sobre el eje de la espira, con el origen de coordenadas en su centro.

Datos:

$$R = 25 \text{ mm}$$

$$I = 750 \text{ mA}$$

$$x = 0$$

El valor de momento dipolar magnético de la espira es:

$$\vec{m}_0 = IS\vec{u}_n$$

$$\vec{m}_0 = I\pi R^2$$

$$\vec{m}_0 = (0,750)\pi(0.025)^2$$

$$\vec{m}_0 = 1,47 E - 3 \text{ A.m}^2$$

Para x = 0 el campo vale.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{m}_0}{2\pi r}$$

$$\vec{B} = \frac{(4\pi E - 7)(1,47 E - 3)}{2\pi[(0)^2 + (0,025)^2]^{3/2}}$$

$$\vec{B} = 1,88 E - 5 \text{ T.}$$

## 4) EVALUACIÓN DE LOGROS:

### a) Complete:

1- Definir dipolo magnético:.....

.....

2- Cuales son los tres prototipos de dipolos:.....

.....

.....

3- Escribir la expresión del torque que tiende a girar al dipolo hasta que se alineen los vectores  $\vec{m}_0$  y  $\vec{B}$ :.....

4- Se denomina magnetización a:.....

5- La máxima energía potencial magnética que almacena un dipolo situado en un campo  $\vec{B}$  es:

.....

**b) Resuelva, en su cuaderno de ejercicios, los siguientes problemas:**

1- Halle la velocidad angular si el torque máximo sobre un electrón en giro es  $3,2E - 27 N.m$ , sobre una órbita de  $5E - 11 m$  dentro de un campo de  $4E - 4 T$ .  
 $R = \omega = 4E16 rad/s$ .

2- Un multiplicador rectangular de 40 espiras, de  $0,12$  por  $0,1 m$ , lleva una corriente de  $2 A$ . Se encuentra dentro del campo  $B = 0,25 T$ . Halle el momento dipolar magnético y el máximo torque.  
 $R = \vec{m}_o = 0,96 A.m^2$ ;  $\tau_{máx} = 0,24 N.m$ .

3- Una espira de 12 cm de diámetro situada en el plano YZ lleva la corriente  $I = 5 A$ . Si el campo en la región es de  $\vec{B} = (2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}) T$ , halle el torque que experimenta la espira.

$$R = \vec{\tau} = (0,282\vec{j} - 0,169\vec{k}) N.m.$$

## 5) LISTADO DE ANIMACIONES-DESCRIPCIÓN

**a) Conceptuales:** En estas animaciones se desarrollarán el concepto de dipolo magnético, se diferenciarán los prototipos de dipolos, se dará a conocer lo característico de un dipolo y las expresiones matemáticas para cuantificarlos además se explicará lo que es momento dipolar magnético y la magnetización con sus respectivas ecuaciones.

EM316C01

EM316C02

EM316C03

EM316C04

EM316C05

EM316C06

EM316C07

EM316C08

EM316C09

**b) Ejercitativas:** La siguiente animación contiene un ejercicio modelo resuelto, en el que se aplica los conceptos y ecuaciones aprendidas, con la finalidad de facilitar la compresión del tema, para que el usuario pueda realizar las actividades propuestas con eficacia.

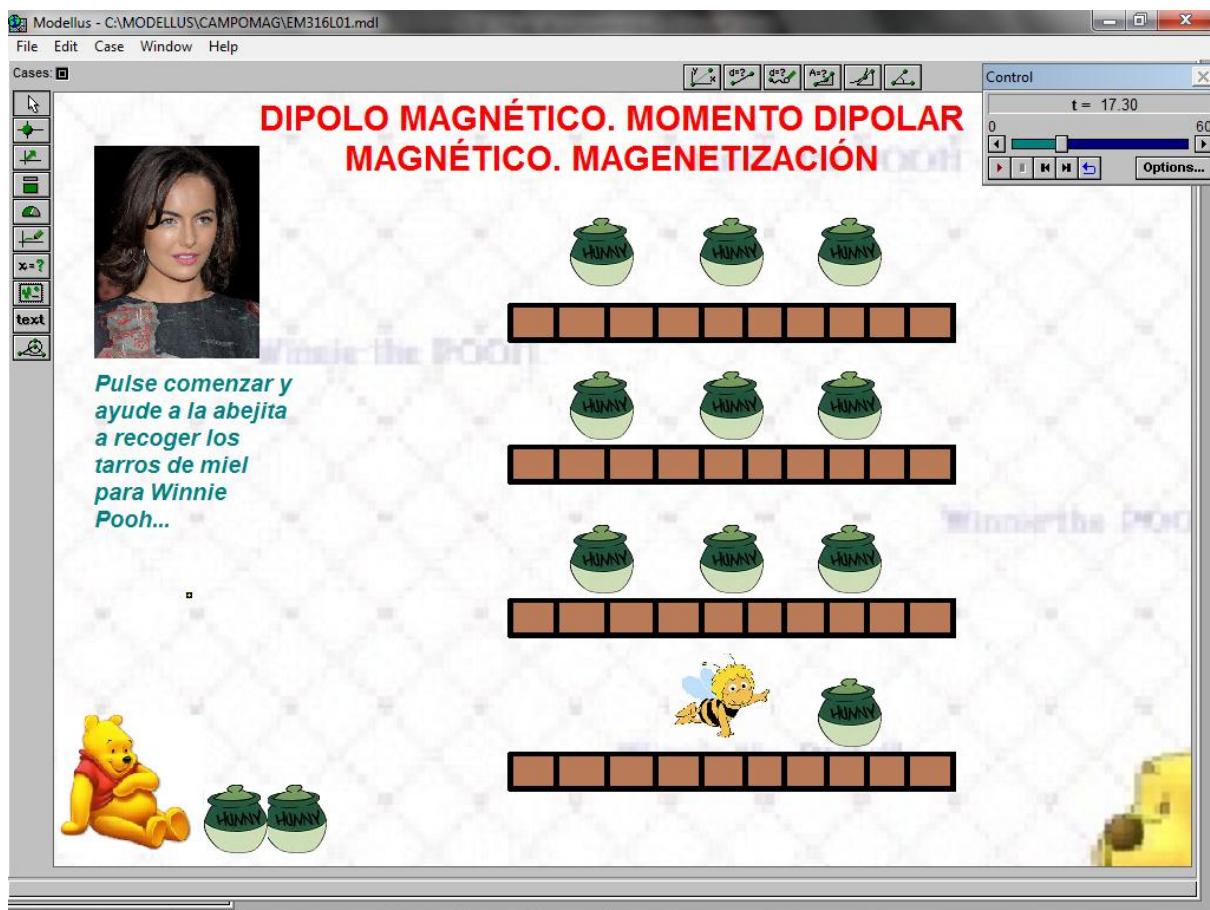
EM316E01

EM316E02

**c) Lúdicas:** Esta animación consta de un juego didáctico muy interesante, con sus respectivas indicaciones, que permite la directa interacción del usuario para que demuestre sus habilidades y se divierta, como premio se otorgará los modelos matemáticos principales del tema.

EM316L01

## 6) ANIMACIÓN DE MUESTRA:



### Descripción:

Esta es una animación Lúdica; contiene un juego didáctico interactivo con sus respectivas indicaciones, al finalizar el juego el usuario obtendrá como premio las ecuaciones sobresalientes del tema.

### 3.1.7 INDUCTORES E INDUCTANCIA

#### 1) LOGROS DE APRENDIZAJE:

- 1- Conocer que es un inductor y su característica, también saber cuáles son las expresiones para la inductancia dependiendo de la geometría del conductor, y además otros parámetros importantes.
- 2- Desarrollar satisfactoriamente las actividades propuestas al culminar el tema.
- 3- Colaborar con el grupo para superar los problemas que se presenten en el transcurso del desarrollo del tema para lograr un buen trabajo en equipo.

#### 2) FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA:

Un inductor es un dispositivo capaz de almacenar energía potencial magnética, de modo que dentro del campo magnético es el equivalente de lo que fue el capacitor dentro del campo eléctrico. Aunque un simple conductor o una pareja de ellos presenta inductancia, son las bobinas (multiplicadores, solenoides, carretes,...) los mejores ejemplos de inductores. Sin embargo, en términos más precisos, debemos decir que un inductor es un dispositivo que comprende dos conductores separados por vacío y arreglados en una geometría tal que el flujo magnético de uno de ellos enlaza al otro. Por ello es necesario definir en esta parte el "flujo magnético de enlace",  $\Lambda$ , en la forma:

$$\Lambda = N\Phi \quad (3.1.7.1)$$

que se expresa en  $Wb$  y en la cual  $N$  representa el número de espiras que canalizan al flujo magnético  $\Phi$ . Evidentemente para dos conductores paralelos,  $N = 1$ .

La característica propia de los inductores es su "inductancia", que se expresa en henrios,  $H$ ; se trata de una cantidad escalar que se define como "el flujo de enlace por unidad de intensidad de corriente que recorre el conductor", esto es:

$$L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{d\Lambda}{dI} \quad (3.1.7.2)$$

La expresión concreta de  $L$  depende de la geometría del conductor, siendo las más típicas las siguientes:

**a) Solenoide largo:**

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$$

en donde:  $S$ : sección transversal del solenoide;  $l$ : longitud del solenoide.

**b) Multiplicador:**

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{2R}$$

en donde:  $S$ : sección transversal del multiplicador;  $R$ : radio del multiplicador.

**c) Toroide de sección transversal cuadrada:**

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln \frac{R_e}{R_i}$$

en donde:  $a$ : lado de la sección transversal;  $R_e, R_i$ : radios externo e interno del toroide.

**d) Toroide de sección transversal general  $S$ :**

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi R}$$

en donde:  $S$ : sección transversal;  $R$ : radio medio del toroide.

**e) Conductores paralelos:**

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{\pi} \operatorname{Cosh}^{-1} \frac{d}{2a} \quad (\text{si } d > a)$$

$$\frac{L}{l} \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{a} \quad (\text{si } d \gg a)$$

en donde:  $d$  distancia entre los conductores;  $a$ : radio de los conductores.

**f) Cable coaxial:**

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_e}{R_i}$$

en donde:  $R_e, R_i$ : radios de los conductores externo e interno.

La energía magnética almacenada por un inductor es:

$$E_M = \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dv$$

(3.1.7.3)

que es la equivalente de la ecuación (2.2.6.6) para el campo eléctrico, de modo que otras expresiones útiles, por analogía con las del campo eléctrico, son:

$$E_M = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \Lambda I = \frac{1}{2} \frac{\Lambda^2}{L} \quad (3.1.7.4)$$

Similarmente, las expresiones para la "densidad volumétrica de energía magnética" son:

$$e_M = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta E_M}{\Delta v} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} (\mu_0 H^2 + M H) \quad (3.1.7.5)$$

Relacionando las ecuaciones (3.1.7.3) y (3.1.7.4) podemos redefinir la inductancia en la forma:

$$L = \int \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{r^2} dv \quad (3.1.7.6)$$

Dos o más inductores pueden asociarse en serie, paralelo y mixto. Las ecuaciones y resolución de los correspondientes circuitos son idénticas que para el caso de resistores, sólo que en vez de  $R_i$  se utilizarán  $L_i$ .

### 3) PROBLEMA MODELO:

1) Un alambre de cobre se enrolla en forma de solenoide sobre un núcleo de hierro de 5 cm de diámetro y 25 cm de largo. Si la bobina tiene 220 vueltas y la permeabilidad magnética del hierro es de  $1,8 \times 10^{-3}$  Wb/A.m. Calcule la inductancia de la bobina.

Datos:

$$r = 0,025 \text{ m}$$

$$l = 0,25 \text{ m}$$

$$N = 220$$

Calculamos el área del alambre:

$$S = \pi r^2$$

$$S = \pi 0,025^2$$

$$S = 1,96 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

Luego calculamos su inductancia:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$$

$$L = \frac{1,8 E - 3.220^2 \cdot 1,96 E - 3}{0,25}$$

$$L/l = 0,6830 \text{ H/m}$$

## 4) EVALUACIÓN DE LOGROS:

### a) Complete:

1- Tres ejemplos de inductores:

1- .....

2- .....

3- .....

2- La ecuación del flujo magnético de enlace es:.....

3- La inductancia es la característica de los.....y se expresa en.....; se trata de una cantidad escalar que se define como.....

4- La expresión concreta de la inductancia para un multiplicador es:.....

### b) Resuelva, en su cuaderno de ejercicios, los siguientes problemas:

1- Una bobina de 500 espiras tiene un núcleo de 20 cm de largo y un área de sección transversal de  $15 E - 4 m^2$ . Calcular la inductancia de la bobina: a) si esta tiene un núcleo de hierro con una permeabilidad relativa de  $1 E4$ . b) si el núcleo de la bobina es aire.

$$R = a) L/m = 2,35 \text{ H/m}; b) L/m = 2,35 E - 3 \text{ H/m}.$$

2- Encuéntrese la inductancia de: a) un solenoide de 1 000 espiras de 50 cm de largo y una sección transversal cuadrada de 3 cm por 3 cm; b) de un solenoide de la misma longitud pero de 1 500 espiras, y una sección transversal de 4 cm por 4 cm.

$$R = a) L = 2,26 \text{ mH}; b) L = 9,05 \text{ mH}.$$

4- Una bobina de 25 cm de largo tiene 1500 espiras de alambre que rodean a un núcleo de hierro con un área de sección transversal de  $2 \text{ cm}^2$ . Si la permeabilidad relativa del hierro es de 800. Calcule la inductancia de la bobina.

$$R = \frac{L}{m} = 1,8 \frac{H}{m}$$

## 5) LISTADO DE ANIMACIONES-DESCRIPCIÓN

**a) Conceptuales:** Las siguientes animaciones contienen la definición de inductor, las expresiones matemáticas de la inductancia según la geometría del conductor, además de los conceptos y ecuaciones de: la energía almacenada por un inductor y la densidad de energía magnética.

EM317C01

EM317C02

EM317C03

EM317C04

EM317C05

EM317C06

EM317C07

EM317C08

**b) Ejercitativas:** Las siguientes animaciones contienen dos ejercicios modelos en los cuales se aplican las ecuaciones de la Inductancia según la geometría de los inductores con el motivo de reforzar los contenidos aprendidos.

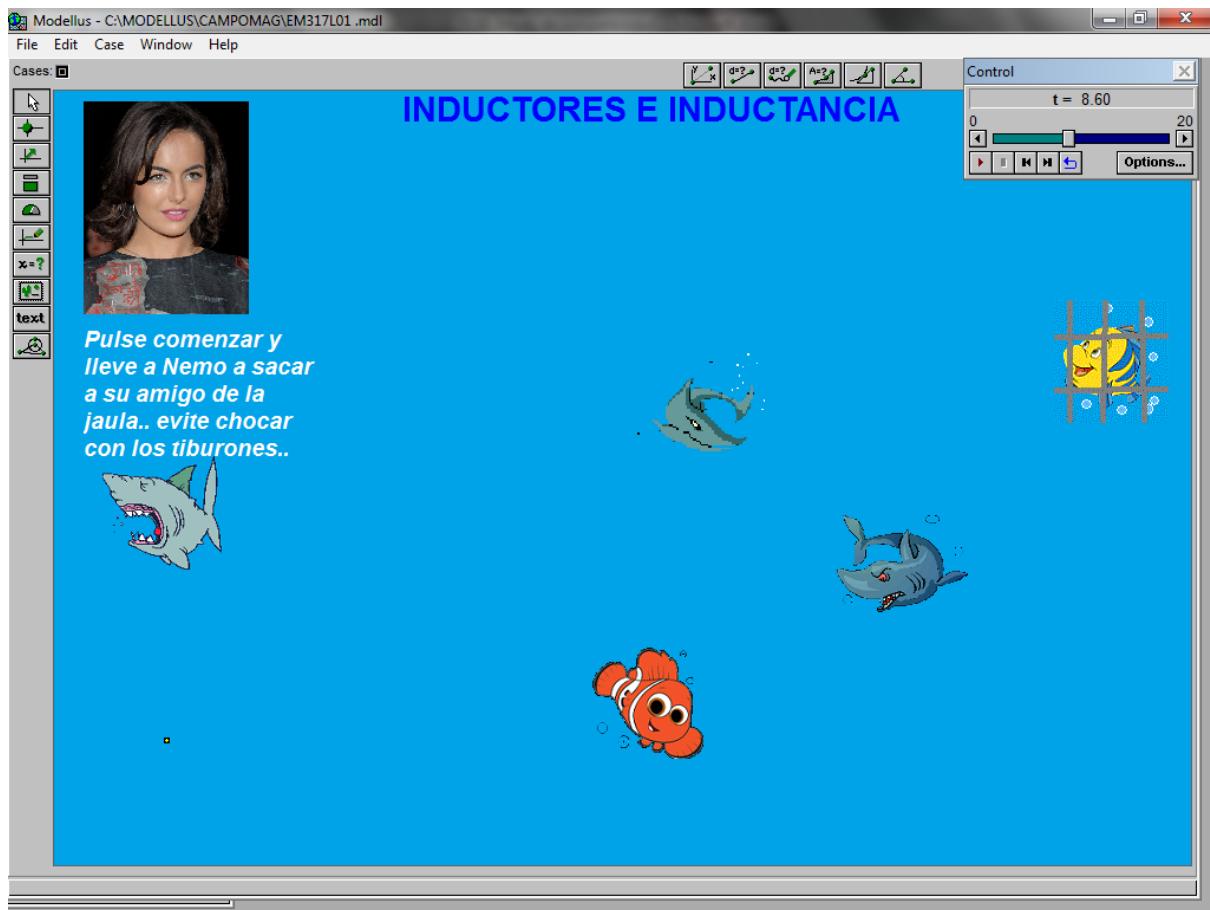
EM317E01

EM317E02

**c) Lúdicas:** Esta animación comprende un juego didáctico con sus indicaciones correspondientes, permitiendo al usuario interactuar en forma directa y demostrar sus habilidades, al concluir el juego satisfactoriamente como premio se recibirá las ecuaciones sobresalientes del tema.

EM317L01

## 6) ANIMACIÓN DE MUESTRA:



### Descripción:

Esta es una animación Lúdica; contiene un juego didáctico muy interesante, con sus respectivas instrucciones claramente especificadas para su uso correcto, y al finalizar el premio será las expresiones matemáticas más importantes del tema.

## 3.1.8 POTENCIAL MAGNETOSTÁTICO Y MAGNETOMOTANCIA.CIRCUITOS MAGNÉTICOS

### 1) LOGROS DE APRENDIZAJE:

- 1- Aprender estos conceptos y diferenciarlos de los aspectos semejantes del campo eléctrico, conocer sus modelos matemáticos y aplicarlos a las situaciones que los requieran.
- 2- Realizar correctamente las actividades propuestas al final del tema.
- 3- Trabajar en equipo, ayudándose mutuamente en los problemas que se presente a lo largo del estudio del tema.

### 2) FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA:

Sabemos que en ausencia de fuentes de electromotancia, la integral cerrada de línea del campo  $\vec{E}$  es cero, es decir:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

y dichos campos, denominados "laminares", se pueden deducir a partir de una función escalar de potencial eléctrico  $V$ . Por ejemplo, para campos originados por cargas estáticas,  $\vec{E}$  es igual al gradiente negativo de  $V$ , es decir:

$$\vec{E} = -\text{grad } V$$

y entre dos puntos cualesquiera a lo largo de una trayectoria en el campo:

$$\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_1 - V_2$$

Si la estructura del campo magnético fuera idéntica a la del campo eléctrico, se podrían determinar expresiones equivalentes a las tres anteriores; sin embargo el campo magnético difiere en muchos aspectos del campo eléctrico y no es posible hallar tales expresiones, o al menos no con la validez general que tienen dentro del campo eléctrico. Por ello, a pesar de que el campo magnético no es laminar, puede ser tratado como un campo laminar si las trayectorias de integración quedan enteramente fuera de regiones de corriente y no encierran, o mejor aun, no son encerradas en ninguna de sus partes por corriente alguna. En estas condiciones, la ley de Ampère en el "campo magnético restringido" toma la forma:

$$\boxed{\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0}$$

(3.1.8.1)

y el campo  $\vec{H}$  puede ser obtenido a partir de una función escalar de "potencial magnetostático",  $U$ , en la forma:

$$\vec{H} = -\text{grad}U \quad (3.1.8.2)$$

de modo que entre dos puntos cualesquiera de una trayectoria en el campo restringido se tiene:

$$\int_1^2 \vec{H} \cdot d\vec{l} = U_1 - U_2 \quad (3.1.8.3)$$

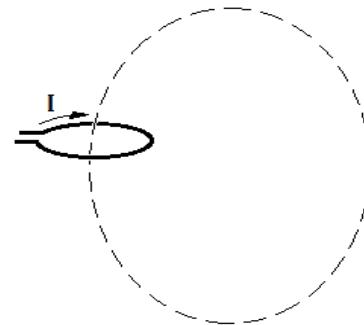
que expresa la diferencia de potencial magnetostático, en donde  $U$  se expresa en amperios,  $A$ .

Retomando lo del campo eléctrico, sabemos que si existen fuentes de fem en la trayectoria de integración, entonces:

$$\int \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = \varepsilon$$

Similarmente, en el campo magnético restringido, cuando hay corrientes que encierran en alguna parte la trayectoria de integración, figura 3.1.8.1, la ley de Ampère expresa que:

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = I = F \quad (3.1.8.4)$$



en donde  $F$  es la "fuerza magnetomotriz" o "magnetomotancia" y es igual a la corriente  $I$  "encerradora". Si la trayectoria de integración es encerrada  $N$  veces por la corriente  $I$  en el mismo sentido, como es el caso de una bobina con corriente, la ecuación anterior se generaliza a:

Figura 3.1.8.1

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI = F \quad (3.1.8.5)$$

Cuando la integración se restringe a regiones libres de corrientes y a trayectorias que no son cerradas, la diferencia de potencial magnetostático  $U$  y la fuerza magnetomotriz  $F$  son iguales, entonces:

$$\int_1^2 \vec{H} \cdot d\vec{l} = U_1 - U_2 = I \quad (3.1.8.6)$$

Las superficies equipotenciales magnetostáticas son en todo punto perpendiculares a las líneas del campo  $\vec{H}$  y se extienden desde la superficie del alambre hasta el infinito; pero no se extienden hacia el interior del conductor.

La teoría desarrollada hasta aquí ha estado relacionada con el vacío, como medio ambiente; sin embargo si una bobina con corriente rodea a una porción de material magnético, como el núcleo cerrado de la figura 3.1.8.2, el flujo magnético se canaliza dentro de dicho "circuito magnético" y el comportamiento resulta muy diferente de lo que se ha visto en espacio vacío, debido al efecto de la permeabilidad del núcleo magnético en el valor

de  $\vec{B}$ . La alinealidad de la curva  $B - H$  implica que la permeabilidad no es constante, sino función de  $H$ ; por ello la gran mayoría de los circuitos magnéticos ha de resolverse por métodos tentativos y/o gráficos, utilizando las tablas respectivas.

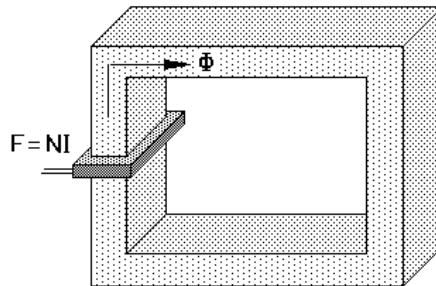


Figura 3.1.8.2

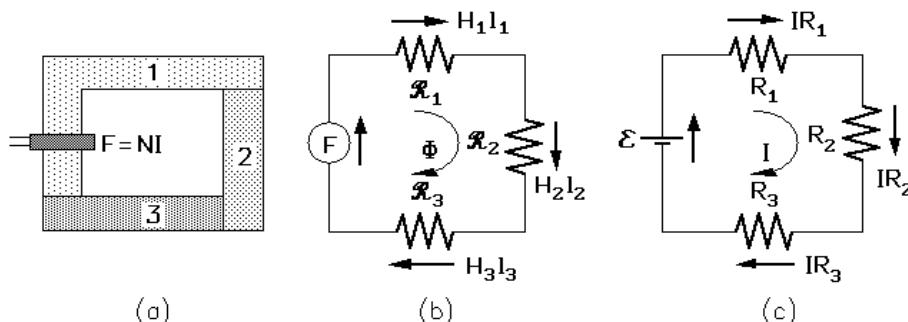


Figura 3.1.8.3

Al aplicar la ley de Ampère, ecuación (3.1.8.5), al circuito magnético de la figura 3.1.8.3, parte (a), se obtiene:

$$NI = F = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_1 \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_2 \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_3 \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

$F = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3$

(3.1.8.7)

en donde  $l_1, l_2$  y  $l_3$  son las longitudes recorriendo por la "fibra media" del elemento. La ecuación anterior es similar a la de un circuito eléctrico de resistores en serie en el que  $\varepsilon = V_1 + V_2 + V_3$ , entonces la fuerza magnetomotriz es igual a la suma de las caídas de  $HI$ .

Las "reluctancias",  $\mathfrak{R}_i$ , son equivalentes a las resistencias  $R_i$  del circuito eléctrico; el flujo  $\Phi$  es equivalente a la intensidad  $I$ ; las caídas de fuerza magnetomotriz  $H_i I_i$  son equivalentes a las caídas de fuerza electromotriz  $I R_i$ . Desarrollemos algunas expresiones:

$$HI = \frac{B}{\mu} I \frac{S}{S} = BS \left( \frac{I}{\mu S} \right) = \Phi \mathfrak{R}$$

luego:

$$\boxed{\mathfrak{R} = \frac{I}{\mu S} [H^{-1}]} \quad (3.1.8.8)$$

comparable a la expresión de la resistencia  $R = \frac{I}{\sigma S}$ , pero con la gran diferencia de que  $\sigma$  es independiente de la corriente, mientras  $\mu$  es función de  $H$ . Igualmente:

$$\boxed{\Phi = \frac{\sum F_i}{\sum \mathfrak{R}_i}} \quad (3.1.8.9)$$

$H$ $A/m$	$B(T)$			
	<i>HIERRO</i> COLADO	<i>ACERO</i> COLADO	<i>SILICIO-</i> <i>ACERO</i>	<i>NÍQUEL-</i> <i>HIERRO</i>
10	0,02	0,02	0,03	0,60
20	0,02	0,03	0,04	0,80
30	0,02	0,03	0,08	0,90
40	0,02	0,04	0,14	0,95
50	0,02	0,05	0,23	1,00
60	0,03	0,06	0,39	1,03
70	0,03	0,07	0,55	1,06
80	0,04	0,08	0,65	1,08
90	0,04	0,10	0,71	1,09
100	0,05	0,12	0,76	1,10
125	0,06	0,16	0,87	1,13
150	0,07	0,22	0,95	1,15

175	0,08	0,28	1,02	1,17
200	0,09	0,33	1,07	1,19
250	0,11	0,44	1,14	1,22
300	0,14	0,55	1,19	1,25
350	0,16	0,64	1,22	1,28
400	0,18	0,73	1,24	1,31
500	0,22	0,83	1,29	1,35
600	0,26	0,91	1,32	1,38
700	0,30	0,98	1,35	1,40
800	0,33	1,04	1,37	1,42
900	0,36	1,10	1,38	1,44
1000	0,39	1,14	1,40	1,45
1200	0,43	1,23	1,42	1,47
1400	0,47	1,29	1,43	1,48
1600	0,50	1,34	1,44	1,49
1800	0,53	1,38	1,46	1,50
2000	0,55	1,42	1,47	1,51
2200	0,57	1,44	1,48	1,52
2400	0,59	1,46	1,48	1,52
2600	0,61	1,48	1,49	1,52
2800	0,63	1,50	1,50	1,53
3000	0,64	1,52	1,51	1,53
3500	0,68	1,56	1,52	1,54
4000	0,70	1,58	1,53	1,54
4500	0,72	1,60	1,56	1,54
5000	0,74	1,62	1,58	1,54
5500	0,76	1,63	1,59	1,54
6000	0,78	1,65	1,60	1,54

T a b l a 3 . 1 . 8 . 1

### 3) PROBLEMA MODELO:

1) El flujo magnético en un electroimán, cuya bobina tiene 600 espiras recorridas por una intensidad de corriente de 0,08 A, es de  $1,2E - 3 \text{ Wb}$ . Hallar la reluctancia del circuito magnético.

Datos:

$$N = 600 \text{ espiras}$$

$$I = 0,08 \text{ A}$$

$$\Phi = 1,2E - 3 \text{ Wb}$$

$$\mathfrak{R} = ?$$

La reluctancia está dada por:

$$\mathfrak{R} = \frac{fmm}{\Phi} = \frac{NI}{\Phi}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{600(0,08)}{1,2E - 3}$$

$$\mathfrak{R} = 4E 4 \text{ A/Wb.}$$

### 4) EVALUACIÓN DE LOGROS:

#### a) Complete:

1- Se denominan campos laminares a.....

.....

2- La Ley de Ampère en el “campo magnético restringido” toma la forma:.....

.....

3- La magnetomotancia es.....

.....

4- Se llama circuito magnético.....

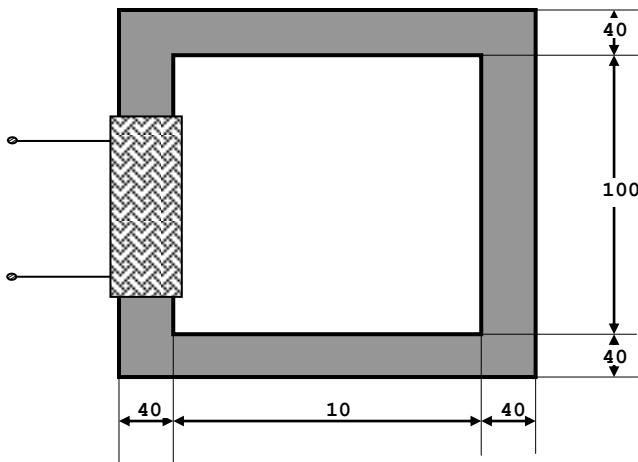
.....

5- Se llama reluctancia.....

.....

**b) Resuelva, en su cuaderno de ejercicios, los siguientes problemas:**

- 1- Un circuito magnético de la figura está construido con chapa magnética al silicio y se desea obtener una densidad de flujo magnético de 1,8 T. Calcule con ayuda de la tabla. Las dimensiones están dadas en milímetros.
- Longitud de la línea de fuerza media.
  - Intensidad de campo.
  - Intensidad que debe circular por la bobina de 2000 espiras.



R: a) 56 cm; b) 27 500 A/m; c) 7,7 A.

- 2- Un núcleo toroidal de hierro, de  $4 \text{ cm}^2$  de sección recta y de 10 cm de diámetro medio, se bobina a base de 5 espiras/cm. La permeabilidad relativa del hierro en cuestión es 2 000. Calcular a) la reluctancia del núcleo, b) la fuerza magnetomotriz producida por una corriente de 0,5 A circulando por el arrollamiento y c) el flujo en el núcleo cuando circulan 0,5 A de intensidad de corriente.

R = a)  $3,12E5 \text{ A/Wb}$ ; b)  $78,5 \text{ A}$ ; c)  $2,52 E - 4 \text{ Wb}$ .

- 3- Un núcleo toroidal de hierro tiene una sección  $4\text{cm}^2$  y un diámetro medio de 20 cm. Se bobina, uniformemente, con 500 espiras de conductor por las que se hace circular una corriente de 1 A. La permeabilidad relativa del hierro es 1 200. Hallar los valores de la densidad de flujo magnético y del flujo magnético en el núcleo.

R =  $B = 1,2 \text{ T}$ ;  $\Phi = 4,8E - 4 \text{ Wb}$ .

## 5) LISTADO DE ANIMACIONES-DESCRIPCIÓN

**a) Conceptuales:** Estas animaciones corresponden a la parte teórica de los temas Potencial Magnetostático, Magnetomotancia y Circuitos magnéticos, en las cuales se desarrollan de forma clara y ordenada los conceptos, leyes, modelos matemáticos y gráficos.

EM318C01

EM318C02

EM318C03

EM318C04

EM318C05

EM318C06

EM318C07

EM318C08

EM318C09

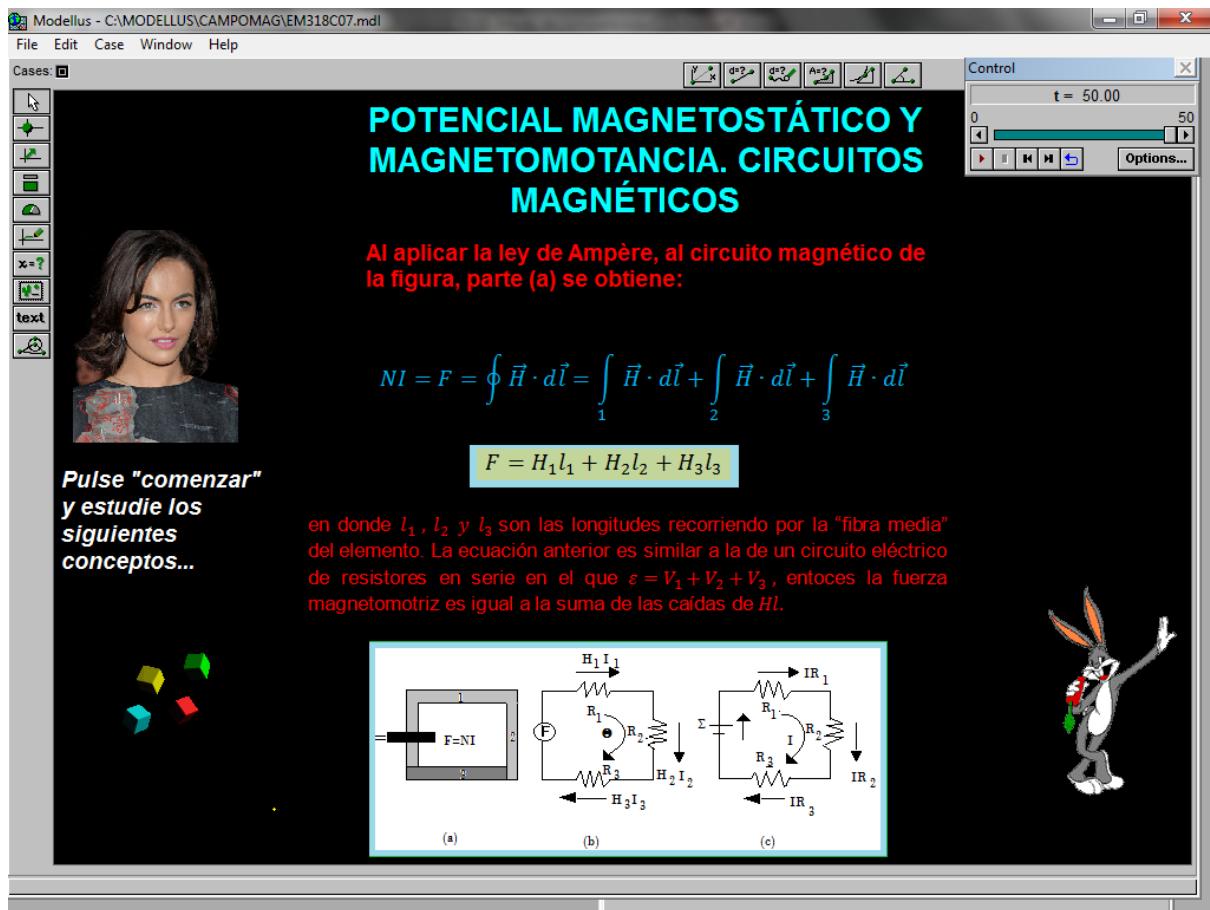
**b) Ejercitativas:** La siguiente animación contiene un ejercicio modelo resuelto de manera clara, correspondiente al tema Circuitos magnéticos con la finalidad de reforzar los contenidos aprendidos.

EM318E01

**c) Lúdicas:** Esta animación es un juego didáctico con las correspondientes indicaciones, en el que el usuario podrá divertirse y demostrar sus destrezas, como premio se entregarán las ecuaciones más sobresalientes del tema.

EM318L01

## 6) ANIMACIÓN DE MUESTRA:



### Descripción:

Esta es una animación de tipo Conceptual; contiene el desarrollo de las expresiones matemáticas de un circuito magnético a aplicar la Ley de Ampère y un gráfico que facilitará su comprensión.

## 3.1.9 CIRCUITOS MAGNÉTICOS COMPLEJOS

### 1) LOGROS DE APRENDIZAJE:

- 1- Aprender que son y cómo se resuelven los Circuitos magnéticos complejos, considerando cada situación.
- 2- Efectuar satisfactoriamente las actividades propuestas al final del tema.
- 3- Ayudar a los demás, para que el trabajo en equipo sea eficaz.

### 2) FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA:

Consideraremos las tres siguientes situaciones:

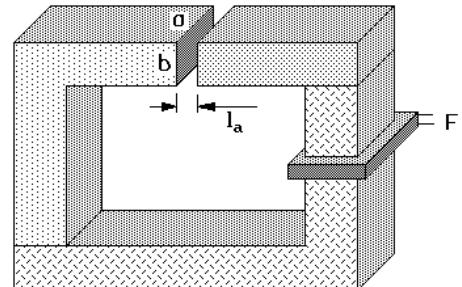
#### a) Circuitos simples con varias fuentes de FMM:

Como el de la figura 3.1.9.1. Su análisis y solución es similar a lo estudiado en el tema anterior, con la novedad de que la fmm total es la suma algebraica de las fmm parciales, de modo que tiene razón de ser la ecuación (3.1.8.9).

#### b) Circuitos simples con espacios de aire:

Como el de la figura 3.1.9.2. El espacio de aire, o brecha de aire, o entrehierro, debe ser muy pequeño de modo que su abertura  $I_a$  no exceda de un décimo del menor de los lados de la sección transversal del núcleo; de esa manera se puede definir un "área aparente",  $S_a$ , del espacio de aire mediante:

$$S_a = (a + I_a)(b + I_a) \quad (a)$$



F i g u r a 3 . 1 . 9 . 2

Si el flujo total es conocido en la brecha de aire, entonces:

$$H_a = \frac{1}{\mu_0} \frac{\Phi}{S_a} \quad (3.1.9.1)$$

$$H_a I_a = \frac{I_a \Phi}{\mu_0 S_a} \quad (3.1.9.2)$$

$$F = \sum H_i I_i + H_a I_a = \sum H_i I_i + \frac{I_a \Phi}{\mu_0 S_a} \quad (3.1.9.3)$$

Si el flujo es conocido, es sencillo aplicar lo anterior; pero si no lo es, la resolución exigirá pruebas de ensayo y error.

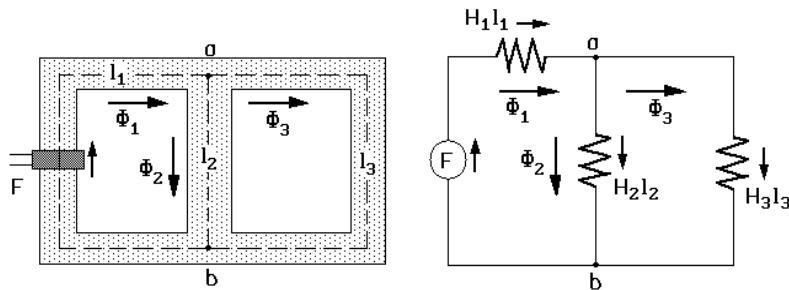
### c) Circuitos paralelos:

Como el de la figura 3.1.9.3. Lo recomendable es dibujar el diagrama equivalente, que también se muestra en la figura, y aplicar ecuaciones equivalentes mediante las leyes de Kirchhoff; observe que el sentido de las  $H_i I_i$  es el de los  $\Phi_i$ :

$$\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0$$

$$H_1 I_1 + H_2 I_2 = F$$

$$-H_2 I_2 + H_3 I_3 = 0$$



F i g u r a 3 . 1 . 9 . 3

### 3) PROBLEMA MODELO:

- 1) El entrehierro de aire de un circuito magnético tiene una sección recta de  $24 \text{ cm}^2$  y una longitud de 0,8 cm. El resto de circuito consta de 100 cm de hierro de  $20 \text{ cm}^2$  de sección recta y permeabilidad relativa de 600. Hallar el número de amperios necesarios para producir un flujo de  $1,2 E - 4 \text{ Wb}$  en el entrehierro.

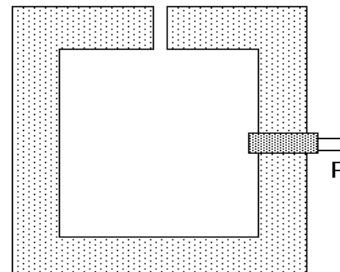
Datos:

$$S = 24 \text{ cm}^2$$

$$l = 0,8 \text{ cm}$$

$$S = 20 \text{ cm}^2$$

$$\Phi = 1,2 E - 4 \text{ Wb}$$



F i g u r a 3 . 1 . 9 . 4

El flujo en el entrehierro es el mismo que el que atraviesa el circuito magnético. La reluctancia de cada material está dada por:

$$\mathfrak{R}_{entrehierro} = \frac{l}{\mu S}$$

$$\mathfrak{R}_{entrehierro} = \frac{8E - 3}{4\pi E - 7(24E - 4)}$$

$$\mathfrak{R}_{entrehierro} = \frac{10^8}{12\pi}$$

$$\mathfrak{R}_{hierro} = \frac{1}{600(4\pi E - 7)(20E - 4)}$$

$$\mathfrak{R}_{hierro} = \frac{10^8}{48\pi}$$

$$NI = fmm = \Phi\mathfrak{R} = 1,2E - 4 \cdot \left( \frac{10^8}{12\pi} + \frac{10^8}{48\pi} \right) = 398 A.$$

## 4) EVALUACIÓN DE LOGROS:

### a) Complete:

1- ¿Cuáles son las tres situaciones considerables de circuitos magnéticos complejos?

- 1. ....
- 2. ....
- 3. ....

2- ¿Cuál es la diferencia entre un circuito magnético y un circuito simple con varias fuentes de FMM.....

3- Una brecha de aire es.....

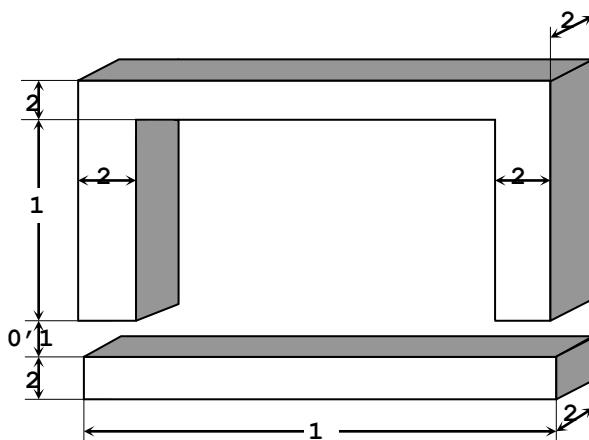
4- Si el flujo no es conocido la resolución será por.....

### b) Resuelva, en su cuaderno de ejercicios, los siguientes problemas:

1- El circuito magnético de la figura constituye un electroimán utilizado para sujetar pesos. Sabiendo que deseamos tener una densidad de flujo magnético de 1,3 T. Calcule:

- a) La intensidad de campo en el circuito magnético.
- b) La intensidad de campo en el aire (entrehierro).
- c) La intensidad en la bobina si esta tiene 1000 espiras.

El circuito magnético es de chapa al silicio. Las dimensiones están dadas en centímetros.



R: a) 1 300 A/m; b) 1 034,507 A/m; c) 2,69 A.

2- Un núcleo toroidal de hierro, de  $8 \text{ cm}^2$  de sección recta y de 15 cm de diámetro medio, se bobina con 400 espiras de hilo conductor. Dicho núcleo tiene un entrehierro de aire de 0,2 cm de longitud y la permeabilidad relativa del material es 500. Hallar el valor de la corriente que debe circular por el arrollamiento para que el flujo asociado sea de  $10 E - 4 \text{ Wb}$ .

$$R = 0,73 \text{ A.}$$

3- El núcleo de silicio-acero de la figura tiene una sección transversal rectangular de 10 mm  $\times$  8 mm y una longitud media de 150 mm. La longitud del espacio de aire es 0,8 mm y la fmm es de 562,125 A. Halle el flujo magnético.

$$R = \Phi = 80 \mu\text{Wb.}$$

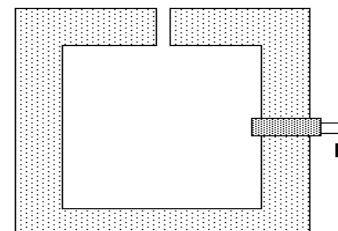


Figura 3.1.9.5

## 5) LISTADO DE ANIMACIONES-DESCRIPCIÓN

**a) Conceptuales:** Estas animaciones desarrollan la parte conceptual y las expresiones matemáticas del tema considerando las tres situaciones en las que se presentan los circuitos magnéticos complejos

EM311C01  
EM311C02  
EM311C03  
EM311C04  
EM311C05  
EM311C06

**b) Ejercitativas:** Esta animación contiene el desarrollo de un ejercicio modelo con el que aprenderemos como se resuelven los Circuitos simples con varias fuentes de FMM.

EM311E01

**c) Lúdicas:** Esta animación es un juego didáctico, que tiene sus indicaciones respectivas para su correcta ejecución, y como premio se ofrece las expresiones matemáticas principales del tema.

EM311L01

## 6) ANIMACIÓN DE MUESTRA:



### Descripción:

Esta es una animación Lúdica; que trata de un juego didáctico con indicaciones claras, y luego de su correcta ejecución el usuario recibirá como motivación un premio que consta de las ecuaciones trascendentales del tema.

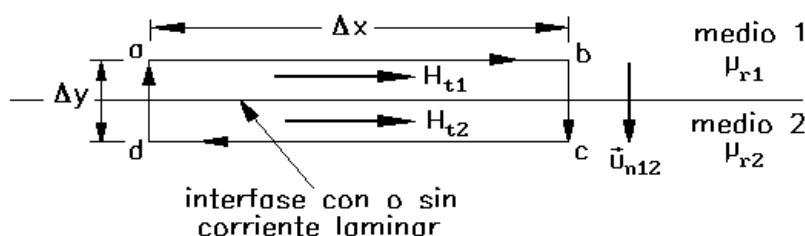
### 3.1.10 RELACIONES DE FRONTERA

#### 1) LOGROS DE APRENDIZAJE:

- 1- Analizar lo que ocurre con los componentes tangencial y normal del campo magnético cuando pasan de un medio ambiente a otro y desarrollar las expresiones para la continuidad del campo magnético en la interfase de dos medios.
- 2- Desarrollar con dedicación y seguridad las actividades propuestas al terminar el estudio del tema.
- 3- Ayudar a los compañeros que tengan problemas para comprender el tema, para que le equipo supere sus inconvenientes.

#### 2) FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA:

Aquí analizaremos lo que ocurre con las componentes tangencial y normal del campo magnético cuando pasan de un medio ambiente a otro, anticipando que los resultados pueden mostrar continuidad o discontinuidad. Consideremos la relación para las componentes tangenciales de  $\vec{H}$ ; en la figura 3.1.10.1 se muestran dos medios, de permeabilidades relativas  $\mu_{r1}$  y  $\mu_{r2}$  y una trayectoria rectangular de longitud  $\Delta x$  paralela a la interfase y de longitud  $\Delta y$  perpendicular a la misma centrada con respecto a la interfase, la cual puede tener o no una corriente laminar  $\vec{K} = \frac{I}{\Delta l} \vec{u}$ , perpendicular al plano de la figura. Al aplicar la ley de Ampère a la trayectoria cerrada obtenemos:



F i g u r a 3 . 1 . 1 0 . 1

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enc}$$

Las integrales segunda y cuarta se anulan al hacer que  $\Delta y$  tienda a cero, entonces:

$$\int_a^b \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enc}$$

$$H_{t1} \Delta x - H_{t2} \Delta x = I_{enc}$$

es decir:

$$H_{t1} - H_{t2} = \frac{I_{enc}}{\Delta x} = K$$

o, en forma vectorial:

$$\boxed{(\vec{H}_{t1} - \vec{H}_{t2}) \times \vec{u}_{n12} = \vec{K}} \quad (3.1.10.1)$$

en donde  $\vec{u}_{n12}$  es el vector unitario indicado en la figura. Si la interfase no conlleva ninguna corriente laminar, la ecuación anterior se reduce a:

$$\boxed{H_{t1} = H_{t2}} \quad (3.1.10.2)$$

Similarmente:

$$\boxed{\left( \frac{\vec{B}_{t1}}{\mu_{r1}} - \frac{\vec{B}_{t2}}{\mu_{r2}} \right) \times \vec{u}_{n12} = \vec{K}} \quad (3.1.10.3)$$

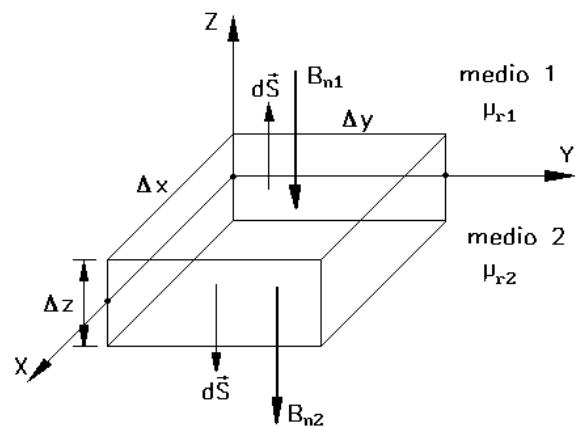
y:

$$\boxed{\frac{B_{t1}}{\mu_{r1}} = \frac{B_{t2}}{\mu_{r2}}} \quad (3.1.10.4)$$

de modo que la componente tangencial de  $\vec{H}$  es continua a través de la interfase si ésta no conlleva corriente laminar y sufre una discontinuidad de magnitud  $K$  en presencia de corriente laminar.

Consideremos ahora la relación para las componentes normales de  $\vec{B}$ . En la figura 3.1.10.2 se muestran dos medios de permeabilidades relativas  $\mu_{r1}$  y  $\mu_{r2}$  y una superficie cerrada de aristas  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  &  $\Delta z$  centrada con respecto a la interfase. Considerando que las líneas de flujo magnético no tienen ni fuentes ni sumideros tenemos:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$



F i g u r a 3 . 1 . 1 0 . 2

$$\int_{arriba} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{abajo} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{lado} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Si  $\Delta z$  tiende a cero, la tercera integral se anula, entonces:

$$\int_{arriba} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{abajo} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$-B_{n1} \Delta x \Delta y + B_{n2} \Delta x \Delta y = 0$$

de donde:

$$B_{n1} = B_{n2} \quad (3.1.10.5)$$

y:

$$\mu_{r1} H_{n1} = \mu_{r2} H_{n2} \quad (3.1.10.6)$$

Una última relación útil, más bien de tipo geométrico, se obtiene de la figura 3.1.10.3, en donde se muestran dos medios de permeabilidades relativas  $\mu_{r1}$  y  $\mu_{r2}$  y una línea de campo magnético,  $\vec{H}$  o  $\vec{B}$ , que cruza del medio 1 hacia el medio 2 formando los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , respectivamente. Ya que  $H_{t1} = H_{t2}$  y  $B_{n1} = B_{n2}$ , entonces:

$$H_{t1} = H_1 \operatorname{Sen} \theta_1 ; H_{t2} = H_2 \operatorname{Sen} \theta_2$$

$$B_{n1} = B_1 \operatorname{Cos} \theta_1 ; B_{n2} = B_2 \operatorname{Cos} \theta_2$$

luego:

$$H_1 \operatorname{Sen} \theta_1 = H_2 \operatorname{Sen} \theta_2 \quad (a)$$

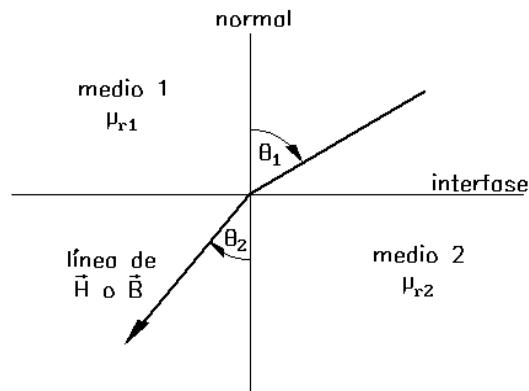
$$B_1 \operatorname{Cos} \theta_1 = B_2 \operatorname{Cos} \theta_2 \quad (b)$$

Dividiendo (a) para (b) se obtiene:

$$\frac{\operatorname{Tan} \theta_1}{\mu_{r1}} = \frac{\operatorname{Tan} \theta_2}{\mu_{r2}}$$

de donde:

$$\frac{\operatorname{Tan} \theta_1}{\operatorname{Tan} \theta_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} \quad (3.1.10.7)$$



F i g u r a 3 . 1 . 1 0 . 3

### 3) PROBLEMAS MODELO:

Las líneas de  $\vec{B}$  pasan de hierro dulce ( $\mu_r = 7\,000$ ) a aire. Si se transmiten en un ángulo de  $45^\circ$ , ¿cuál es el ángulo de incidencia?

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left( \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} \tan \theta_2 \right) = \tan^{-1} \left( \frac{7\,000}{1} \tan 45^\circ \right)$$

$$\theta_1 = 89,991^\circ$$

Repita el ejercicio anterior para una transmisión,  $\theta_2 = 89,999^\circ$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left( \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} \tan \theta_2 \right) = \tan^{-1} \left( \frac{7\,000}{1} \tan 89,999^\circ \right)$$

$$\theta_1 = 89,999^\circ$$

de modo que aunque las líneas del campo  $\vec{B}$  dentro del hierro son casi tangenciales a la interfase, al salir al aire son casi normales a la misma.

### 4) EVALUACIÓN DE LOGROS:

#### a) Complete:

1- La relación de los componentes tangenciales de  $\vec{H}$  a ambos lados de una interfase con corriente laminar es:

.....

2- La relación de los componentes normales de  $\vec{B}$  a ambos lados de una interfase es:

.....

#### b) Resuelva, en su cuaderno de ejercicios, los siguientes problemas:

1- La región 1 es  $x < 0$  y  $\mu_{r1} = 3$ ; la región 2 es  $x > 0$  y  $\mu_{r2} = 5$ . Si  $\vec{H}_2 = (2,4\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}) \text{ A/m}$ , determine  $\vec{H}_1$  y  $\theta_2$ .

$$R = \vec{H}_1 = (4\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}) \text{ A/m}; \theta_2 = 70,3^\circ.$$

2- La región 1, donde  $\mu_{r1} = 4$ , es el lado del plano  $y + z = 1$  que contiene el origen; la región 2, en donde  $\mu_{r2} = 6$ , es la otra parte. Si  $\vec{B}_2 = (3\vec{i} + 1,25\vec{j} - 0,25\vec{k}) T$ , halle  $\vec{B}_1$ .

$$R = \vec{B}_1 = (2\vec{i} + \vec{j}) T.$$

3- Una corriente laminar  $\vec{K} = (10\vec{j}) A/m$ , en  $x = 0$ , separa la región 1,  $x < 0$ , en donde  $\vec{H}_1 = (16,5\vec{j}) A/m$ , de la región 2,  $x > 0$ . Halle  $\vec{H}_2$ .

$$R = \vec{H}_2 = (26,5\vec{j}) A/m.$$

## 5) LISTADO DE ANIMACIONES-DESCRIPCIÓN

**a) Conceptuales:** Las siguientes animaciones corresponden a la parte conceptual de las Relaciones de frontera y se desarrollan las expresiones matemáticas para la continuidad del campo magnético en la interfase de dos medios.

EM311C01

EM311C02

EM311C03

EM311C04

EM311C05

EM311C06

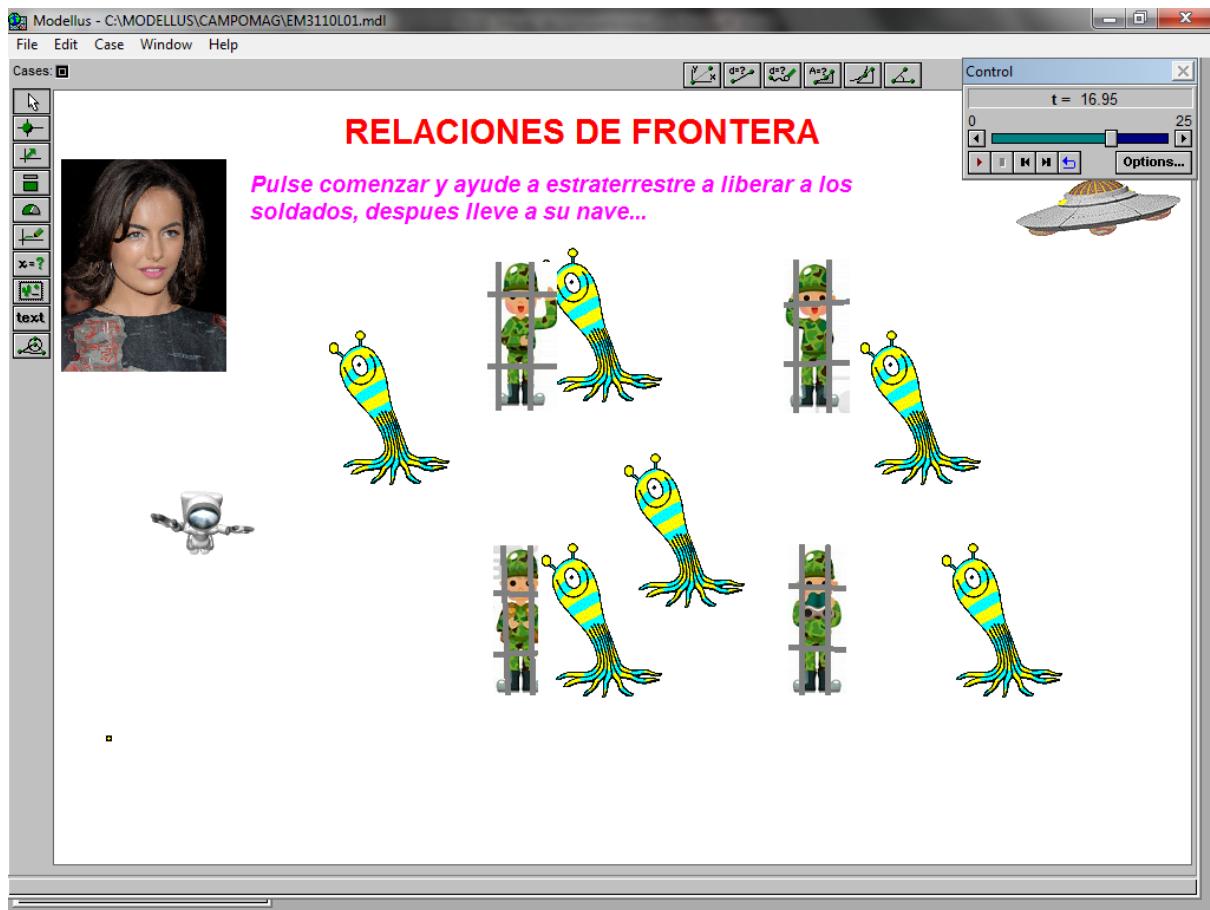
**b) Ejercitativas:** La siguiente animación contiene un ejercicio modelo resuelto sobre las relaciones de frontera, que favorecerá la comprensión y adquisición de los contenidos.

EM311E01

**c) Lúdicas:** Esta animación incluye un juego didáctico con sus oportunas indicaciones, que tiene como objetivo que el usuario demuestre sus habilidades y se distraiga, al terminar el juego correctamente, el premio correspondiente serán las ecuaciones sobresalientes del tema.

EM311L01

## 6) ANIMACIÓN DE MUESTRA:



### Descripción:

Esta es una animación Lúdica; contiene un juego didáctico muy interesante con sus respectivas indicaciones, que ayudará a desarrollar las destrezas motrices del usuario, al culminar se entregará como motivación las ecuaciones más importantes del tema para enriquecer su aprendizaje.

## CONCLUSIONES

- Debemos aprovechar los recursos tecnológicos que tenemos a nuestro alcance como en este caso el programa Modellus para facilitar la enseñanza y el aprendizaje de temas tan complejos como es el caso de "**CAMPOS MAGNÉTICOS ESTÁTICOS**".
- El programa Modellus es una herramienta clave para el desarrollo de este proyecto que busca nuevas tendencias en la educación, para que sea más amena y comprensible, sobre todo que despierte la atención y el interés del usuario.
- Con la ayuda de las animaciones hechas en Modellus los alumnos desarrollarán nuevas destrezas, la creatividad, el pensamiento, la inteligencia y el razonamiento, lo que favorecerá al desempeño de su vida estudiantil.
- Las animaciones realizadas en el programa Modellus son muy interesantes, dinámicas e interactivas por lo que ayudarán a que el alumno no sea más un oyente pasivo, sino que participe en la construcción de su conocimiento.
- Sin duda el proceso educativo exige al docente una actualización permanente, con el uso de la tecnología los maestros tendrán más recursos didácticos que ofrecer a la hora de enseñar, lo que facilitará a los alumnos la comprensión de los temas de "**CAMPOS MAGNÉTICOS ESTÁTICOS**".

## RECOMENDACIONES

- Es importante que el usuario tenga conocimientos acerca del programa Modellus, para que el software sea utilizado correctamente.
- Es indispensable que el maestro guía conozca ampliamente del programa para poder asesorar a sus alumnos, despejar sus dudas e inquietudes.
- Se debe estudiar cada tema con sus respectivas animaciones en forma ordenada siguiendo el siguiente orden: 1) animaciones conceptuales; 2) animaciones ejercitativas y 3) animaciones lúdicas.
- Es fundamental leer detenidamente las indicaciones de cada animación antes de su reproducción, para que sean ejecutadas correctamente y así lograr el óptimo aprendizaje
- Es necesario que la nomenclatura de animaciones e imágenes tengan un código propio que siga una secuencia ordenada.

## BIBLIOGRAFÍA

- Avecillas Jara, Santiago. (2008). *Electromagnetismo*. Cuenca.
- Kraus, John D. (2000). *Electromagnetismo*. New York: McGraw-Hill.
- Serrano, Víctor., García, Graciela., y Gutiérrez, Carlos. (2001). Electricidad y Magnetismo. México D.F: Practice Hall.
- Gettys, W., Keller, F., y Skove, M. (1991). Física Clásica y Moderna. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- Alonso, Marcelo. (1995). Física. Madrid: Addison-Wesley Iberoamericana.
- Pinzón, Álvaro. (2005). Física II. México: Harper.
- Serway. (1992). Física. Madrid: McGraw-Hill.