UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA, LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

UNIVERSIDAD DE CUENCA
fundada en 1867

"FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA FÍSICA MODERNA CON MODELLUS"

Tesis previa a la obtención del título de Licenciados en Ciencias de la Educación en la especialidad de Matemáticas y Física

DIRECTOR: **Dr. ALBERTO SANTIAGO AVECILLAS JARA**

AUTOR: **ESTEBAN TEODORO MOLINA VALLEJO**
JONNATHAN ISRAEL ORTIZ ELIZALDE

CUENCA-ECUADOR
2014

R E S U M E N

Este proyecto de graduación está compuesto por un conjunto de animaciones para el estudio de la fundamentación matemática necesaria para la posterior introducción en la Física Moderna. Para llevar a cabo este proyecto y elaborar las animaciones de una manera didáctica y significativa, se ha utilizado el software llamado Modellus. Aquí también está dada una guía muy funcional acerca de Modellus, para así lograr una correcta interpretación por parte del usuario. Las animaciones están organizadas en tres categorías: Las primeras son las animaciones conceptuales, en la cual consta la parte teórico-conceptual del tema a tratar expresada de una manera concisa; seguido están las ejercitativas, en donde se desarrollan los procesos matemáticos de forma atrayente hacia el usuario; y al final se encuentran las de tipo lúdicas, en las que el usuario consolidara sus conocimientos a la vez que se recrea. Y finalmente como aditamento, para ayudar y mejorar la experiencia y manejo del conjunto de animaciones para el usuario, presentamos una guía, la cual consta de un breve resumen del funcionar y objetivos de las animaciones, además de listar todas las animaciones con sus respectivos códigos y una muestra en imagen de una animación con su descripción correspondiente, por cada tema.

A B S T R A C T

This graduation project is composed of a set of animations to get a deeply study of a mathematical foundation which is necessary for the following introduction in Modern Physics.

In order to get a didactic project and develop of the set of animations, it was necessary to use the Modellus software. For this reason, we are going to explain how to use this software to get a correct functional interpretation by the user.

Animations are divided into three categories: The first animations will be called conceptual animations because they contain a theoretical and conceptual part of the subject expressing a concise manner. The second animations are the exercisable. These animations show an attractive mathematical process. And the third animations are the playful type which users consolidate their knowledge recreantly.

Finally, we are going to present a guide. This guide includes a summary which explains how to work the animation and their objectives to get a correct management of all animation by the users. In addition, this study includes a list of each animation with its respective code and description.

Í N D I C E

PALABRAS CLAVE

Introducción
Modellus
Hermite
Legendre
Laguerre
Expresiones complejas
Operaciones con complejos
Funciones trascendentes
Derivación compleja
Ecuaciones diferenciales

UNIVERSIDAD DE CUENCA
Fundada en 1867

Yo, JONNATHAN ISRAEL ORTIZ ELIZALDE, autor de la tesis "FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA FÍSICA MODERNA CON MODELLUS", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor/a.

Cuenca, Abril del 2014

Jonnathan Israel Ortiz Elizalde.
010473978-4

Cuenca Patrimonio Cultural de la Humanidad. Resolución de la UNESCO del 1 de diciembre de 1999

Av. 12 de Abril, Ciudadela Universitaria, Teléfono: 405 1000, Ext.: 1311, 1312, 1316
e-mail cdjbv@ucuenca.edu.ec casilla No. 1103
Cuenca - Ecuador

UNIVERSIDAD DE CUENCA
Fundada en 1867

Yo, ESTEBAN TEODORO MOLINA VALLEJO, autor de la tesis "FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA FÍSICA MODERNA CON MODELLUS", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor/a.

Cuenca, Abril del 2014

Esteban Teodoro Molina Vallejo
010375093-1

Cuenca Patrimonio Cultural de la Humanidad. Resolución de la UNESCO del 1 de diciembre de 1999
Av. 12 de Abril, Ciudadela Universitaria, Teléfono: 405 1000, Ext.: 1311, 1312, 1316
e-mail cdjbv@ucuenca.edu.ec casilla No. 1103
Cuenca - Ecuador

UNIVERSIDAD DE CUENCA
Fundada en 1867

Yo, ESTEBAN TEODORO MOLINA VALLEJO, autor de la tesis "FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA FÍSICA MODERNA CON MODELLUS", reconozco y acepto el derecho de la Universidad de Cuenca, en base al Art. 5 literal c) de su Reglamento de Propiedad Intelectual, de publicar este trabajo por cualquier medio conocido o por conocer, al ser este requisito para la obtención de mi título de **Licenciado en Ciencias de la Educación en la especialidad de Matemáticas y Física**. El uso que la Universidad de Cuenca hiciere de este trabajo, no implicará afección alguna de mis derechos morales o patrimoniales como autor.

Cuenca, Abril del 2014

Esteban Teodoro Molina Vallejo
010375093-1

Cuenca Patrimonio Cultural de la Humanidad. Resolución de la UNESCO del 1 de diciembre de 1999

Av. 12 de Abril, Ciudadela Universitaria, Teléfono: 405 1000, Ext.: 1311, 1312, 1316
e-mail cdjbv@ucuenca.edu.ec casilla No. 1103
Cuenca - Ecuador

UNIVERSIDAD DE CUENCA

Fundada en 1867

Yo, JONNATHAN ISRAEL ORTIZ ELIZALDE, autor de la tesis "FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA FÍSICA MODERNA CON MODELLUS", reconozco y acepto el derecho de la Universidad de Cuenca, en base al Art. 5 literal c) de su Reglamento de Propiedad Intelectual, de publicar este trabajo por cualquier medio conocido o por conocer, al ser este requisito para la obtención de mi título de **Licenciado en Ciencias de la Educación en la especialidad de Matemáticas y Física**. El uso que la Universidad de Cuenca hiciere de este trabajo, no implicará afección alguna de mis derechos morales o patrimoniales como autor.

Cuenca, Abril del 2014

Jonnathan Israel Ortiz Elizalde
010473978-4

Cuenca Patrimonio Cultural de la Humanidad. Resolución de la UNESCO del 1 de diciembre de 1999

Av. 12 de Abril, Ciudadela Universitaria, Teléfono: 405 1000, Ext.: 1311, 1312, 1316
e-mail cdjbv@ucuenca.edu.ec casilla No. 1103
Cuenca - Ecuador

DEDICATORIAS

Para empezar dedico este proyecto de Tesis a Vilma, mi mamá, que fue y es un pilar fundamental en todas las acciones que tomo, porque gracias a ella tuve una gran guía en este maravilloso pero complejo camino que es la vida, ya que ella me brindo todo el apoyo necesario para que pueda alcanzar este objetivo, que es el obtener la licenciatura.

También se la dedico a los que conforman mi familia; a mis hermanos Christian, Diana y David, con los cuales he afrontado todos los momentos difíciles en mi vida y sé que cuento con su apoyo en cualquier momento.

Así mismo dedicarlo a mis sobrinos Valentina y Liam que son parte importante de mi vida, ya que llenaron aun con más alegría mis días y me enseñaron muchas cosas siendo aún unos niños.

Y finalmente dedico este trabajo a todos los que les pueda ser útil este proyecto, que les sea de su agrado y les resulte beneficioso.

Jonnathan Israel

A ti Dios, el creador de todo lo que existe y existirá; gracias por darme la oportunidad de vivir, De ti sale todo conocimiento, sabiduría, entendimiento, y a ti regresa todo .

Con mucho cariño a todas las personas que han estado conmigo, principalmente a mi mamá, por darme la vida, ella ha sido para mí un manantial de agua fresca y un claro remanso de paz en esos momentos más oscuros y duros de mi vida.

A la memoria de mi papá, al cual recuerdo con mucho amor y cariño. Y a la memoria de mis abuelos, quienes con su sabio consejo han ocupado un papel muy importante en mi vida; quienes han sido como unos padres para mí.

Esteban Teodoro

AGRADECIMIENTOS

Mis agradecimientos van para todos los que están o han estado dentro de mi vida, pero principalmente están dirigidos a Dios y a mi madre. A Dios por ponerme en este mundo, ser tan bondadoso conmigo y nunca dejarme solo. A mi madre le doy las gracias por darme la vida y no dejarme caer jamás, por acompañarme y guiarme en todo momento.

Mi agradecimiento también va para toda mi familia que para mí es lo más importante en la vida, ya que ellos están siempre a mi lado en todo momento.

Por otra parte agradezco a mis amigos que han compartido conmigo gran parte de su tiempo, me han ayudado, me han guidado y me han otorgado grandes y gratas experiencias.

Y finalmente un sincero agradecimiento, al Dr. Santiago Avecillas, ya que a más de guiarme en este proyecto, también ha sido un gran profesor que ha logrado trasmitir muchos aspectos positivos de manera directa o indirecta hacia mi persona y ha dejado huella como el mejor profesor que he tenido en toda mi vida como estudiante.

Jonnathan Israel

A mi familia que ha estado conmigo y amigos por brindarme su apoyo. A mi compañero de tesis, por su tiempo y empuje, sin él no hubiera sido posible esta tesis. Y de manera especial al Dr. Alberto Santiago Avecillas Jara por su tiempo que dedico para guiarnos en la elaboración de este trabajo de tesis.

Esteban Teodoro

INTRODUCCIÓN

“FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA FISICA MODERNA CON MODELLUS” es un proyecto dirigido al apoyo del estudio de fundamentos matemáticos para el posterior estudio de la física moderna. El cual tiene como fundamento teórico el constructivismo, que nos dice que el aprendizaje significativo se logra por medio de las experiencias propias del individuo.

Uno de los principales problemas educativos es el avance tecnológico por el cual los estudiantes no generan el mismo interés por aprender, como en épocas anteriores. Es por eso que el docente debe ser versátil a la hora de enseñar, debe brindar un sinnúmero de experiencias al estudiante y adaptarse a las necesidades generadas por el contexto actual.

Al encontrarnos con esta dificultad decidimos desarrollar el proyecto en base a animaciones conceptuales, ejercitativas y lúdicas de una forma interactiva e ilustrativa mediante Modellus, que a diferencia de otros programas con relación a la Matemática y Física, es un programa: gratuito, liviano, fácil de manejar y asequible tanto para docentes como para estudiantes, sirviendo de apoyo en la educación, el mismo que relaciona el software y elementos informáticos.

Nuestro proyecto se basa en animaciones hechas de tal forma que motivan al estudiante y sirven de sustento transformador para los docentes en el momento de impartir sus clases. Debido a su constante uso, los usuarios se introducen en el mundo de la programación desarrollando su lógica y organización. De esta manera introducimos un método diferente de enseñar y aprender física.

DESCRIPCIÓN DE CADA TEMA

1.1 Ecuación diferencial de Hermite: El tema contiene la estructura particular de esta ecuación diferencial y su resolución; y ejemplos propuestos para reforzar el tema.

1.2 Ecuación diferencial de Legendre: Este tema incluye el particular modelo matemático de esta ecuación diferencial y como se lo desarrolla; y actividades para fortalecer los conocimientos.

1.3 Ecuación diferencial asociada de Legendre: En ese tema esta descrito la estructura matemática propia de esta ecuación diferencial; y actividades que sirvan de refuerzo.

1.4 Ecuación diferencial de Laguerre: Este tema contiene la expresión matemática particular de esta ecuación diferencial y su resolución; y tareas para complementar el conocimiento.

1.5 Ecuación diferencial asociada de Laguerre: El tema presenta la estructura propia de esta ecuación diferencial y su solución; y actividades para reforzar lo aprendido.

1.6 Expresiones complejas: Contiene conceptos preliminares relacionados con números complejos y actividades para fortalecer los conocimientos.

1.7 Operaciones algebraicas con complejos: El tema contiene las operaciones básicas con complejos y su proceso de resolución.

1.8 Funciones trascendentes elementales: En este tema están descritas algunas funciones del campo complejo así como actividades que sirvan para fortalecer lo aprendido.

1.9 Derivación compleja: El tema contiene algunos conceptos pertinentes a la derivación en el campo complejo, para así poder compararlos con los del campo real y actividades que sirvan de refuerzo del tema.

INTRODUCCIÓN A MODELLUS

(Herramienta para la Modelización de Sistemas)

1. Introducción

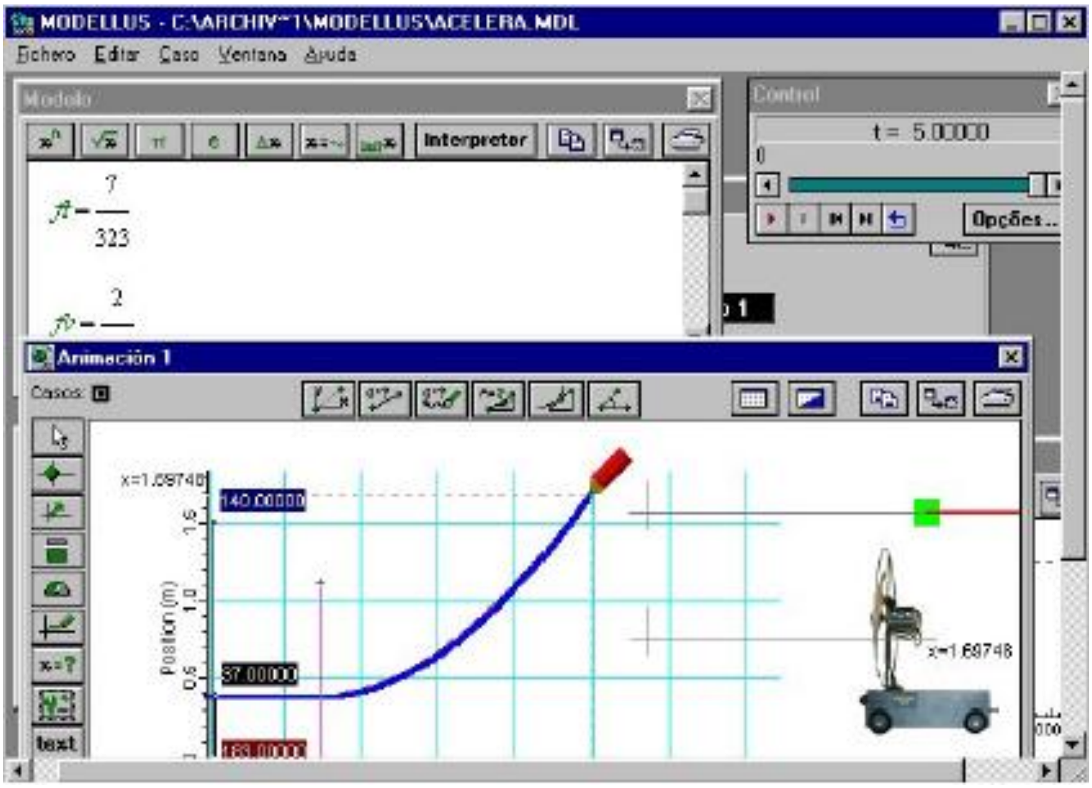
Modellus es una herramienta orientada a la simulación y modelización de sistemas válida para el estudio de diversas materias dentro de los currículos de Educación Secundaria, Bachillerato y Formación Profesional. Sus autores la han concebido como instrumento de apoyo en el aula y con ese objetivo es que se explica su funcionamiento y uso para profesores y estudiantes.

Modelo matemático

Sabemos que los diversos fenómenos que se estudian en las materias del área de ciencias pueden explicarse y representarse mediante su modelo matemático. Este modelo recogerá el comportamiento del sistema tanto en su aspecto temporal (evolución a lo largo del tiempo) como en su aspecto puramente matemático (cálculo de valores). Modellus está orientado a los modelos temporales de tal manera que con él se puede estudiar el comportamiento dinámico de los distintos sistemas. Este comportamiento se podrá estudiar mediante la simulación en distintos escenarios “casos” en cada uno de los cuales cada uno de los parámetros o constantes del modelo pueden ser modificados. Tal sería el caso del estudio de la caída de un cuerpo en distintos planetas del sistema solar con distintas fuerzas de gravedad, o el comportamiento de un muelle con distintas constantes de elasticidad.
La modelización de cualquier fenómeno o sistema se apoya en la observación de los fenómenos que lo caracterizan, razón por la cual, en la medida que podamos reproducir esos fenómenos y experimentar con ellos, podremos comprender con más claridad el modelo. El estudio del modelo se realizará siempre en orden creciente de complejidad de tal forma que en una primera fase se tendrán en cuenta los aspectos más relevantes para posteriormente derivar hacia un modelo más perfecto a través de un método de “refinamiento”. Según lo define uno de sus autores (V. D. Teodoro), Modellus es, bajo el punto de vista computacional, un micromundo computacional para estudiantes y profesores a la vez, basado en un método de programación en el que el usuario escribe en la “Ventana de modelo”.

2. Estructura Básica de Modellus.

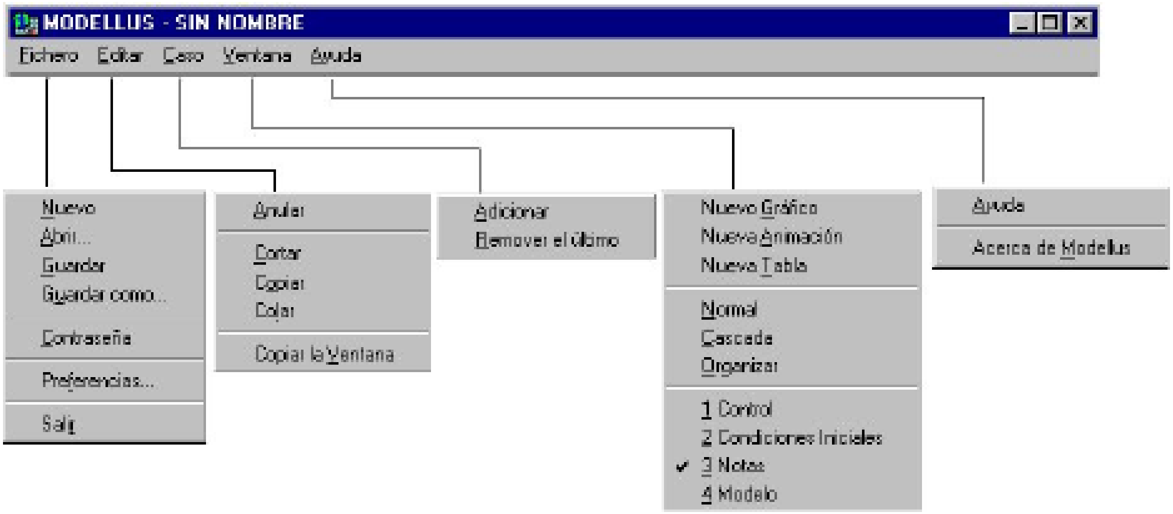
Modellus presenta un entorno muy “amigable” basado en una serie de ventanas, cada una de las cuales recoge o muestra una serie de informaciones muy concretas. En la figura vemos una imagen del entorno; las ecuaciones matemáticas se escriben de la misma manera que lo haría en el papel.



Por ser una aplicación que trabaja en Windows, aprovecha todas las ventajas del entorno y esto facilita su manejo. La versión que explicamos en este trabajo es la V:2.01 de 2000.

Las ventanas permiten la modificación de su tamaño y al activarlas pasan a primer plano colocando en segundo plano a las que estén dentro de su área; del mismo modo las ventanas se pueden mover dentro de la pantalla.

Menú de Modellus:



El menú que presenta el entorno consta de cinco opciones principales:

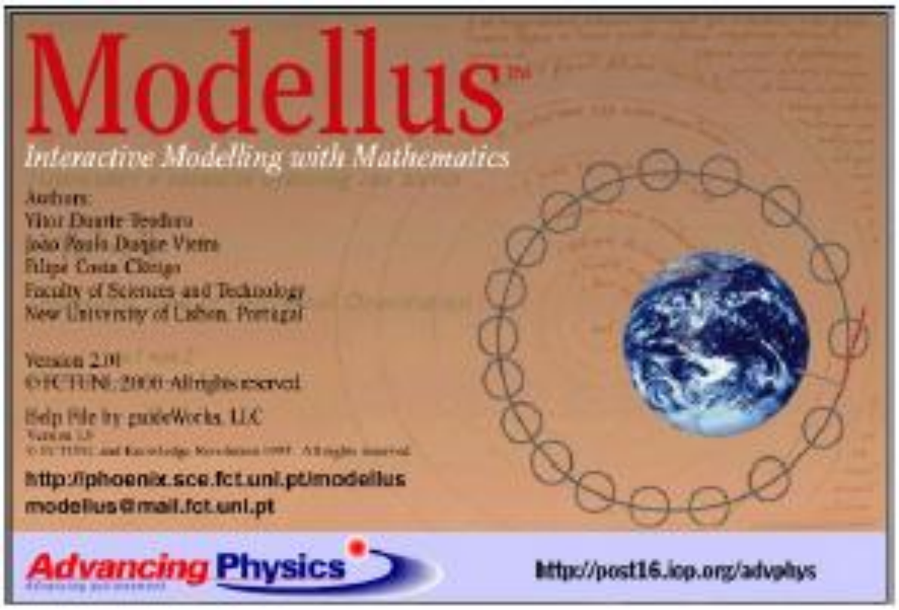
Fichero
Editar
Caso
Ventana
Ayuda

Fichero: Con la opción Fichero podemos realizar las siguientes operaciones:
Nuevo: Crear un nuevo modelo.
Abrir: Leer un modelo del disco (ya creado).
Guardar: Guardar modelo en un fichero con el mismo nombre que tenga.
Guardar Como: Grabar un fichero con el nombre que le queramos dar.
Contraseña: Poner una clave al modelo de tal manera que no se puedan modificar los datos de las ventanas de animación y modelo.
Preferencias: Configurar ubicación de ficheros.
Salir: Salir y abandonar el programa.
Editar: Permite las operaciones de edición comunes a cualquier herramienta.
Anular: Anula la última operación de edición realizada
Cortar: Permite cortar el objeto seleccionado y lo coloca en el portapapeles.
Copiar: Copia el objeto seleccionado al portapapeles.
Copiar la Ventana: Copia todo el contenido de la ventana en la que estemos y lo deposita en el portapapeles.

Caso: Esta opción presenta dos posibilidades:
Adicionar: Añade un caso en la ventana de condiciones.
Remover el último: Quita el último de los casos añadidos, téngase en cuenta que al menos debe existir un caso en la ventana de condiciones.
Ventanas: Esta opción presenta las siguientes acciones encaminadas a la creación de ventanas dentro del modelo.
Nuevo Gráfico: Crea una nueva ventana de gráfico.
Nueva Animación: Crea una nueva ventana de animación.
Nueva Tabla: Crea una nueva ventana de tabla.
Normal: Sitúa las ventanas en la pantalla en modo normal
Cascada: Sitúa las ventanas en la pantalla en cascada.
Organizar: Sitúa las ventanas en pantalla de forma organizada.
1 Control: Activamos la ventana de control.
2 Condiciones Iniciales: Activamos la ventana de condiciones iniciales.
3 Notas: Activamos la ventana de notas.
4 Modelo: Activamos la ventana de modelo.
Las ventanas que se van creando aparecerán en esta opción del menú con números consecutivos a partir del 4, téngase en cuenta que las ventanas 1,2,3 y 4 no se pueden eliminar.

Ayuda: Muestra las opciones siguientes:

Ayuda: Nos despliega la ventana de ayuda.
Acerca de Modellus: Esta opción nos presenta información sobre el programa



Modellus está estructurado en torno a un conjunto de ventanas sobre las que se escribe o se muestra la información de los modelos que se pretenden simular. Las ventanas son las siguientes:

- Ventana de modelo.
- Ventana de condiciones
- Ventana de animaciones
- Ventana de control
- Ventana de gráficos
- Ventana de tablas

A continuación se estudian estas ventanas, su utilización y contenidos.

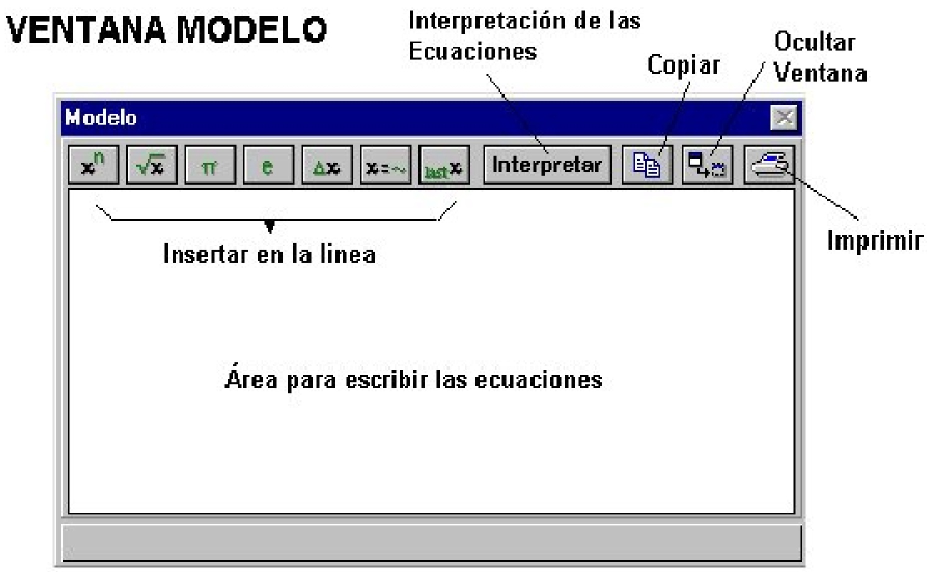
2.1. VENTANA DE MODELO: Escritura de las ecuaciones del modelo.Para iniciar el trabajo con Modellus, una vez arrancada la aplicación, debemos ir al menú Modelo (Nuevo) y de esta manera iniciamos la creación de un modelo nuevo.
Lo primero que debemos hacer es escribir las ecuaciones del modelo, y esto lo hacemos en la "ventana de modelo" que aparece en la figura. A la hora de escribir las ecuaciones tenemos que hacerlo observando unas normas básicas en lo que se refiere a la sintaxis. Estas normas son las siguientes:

Sintaxis de los modelos:

Modellus soporta ecuaciones algebraicas, diferenciales e iterativas.

Usted puede modelar ecuaciones que van desde las relaciones simples como las líneas rectas y parábolas a los conceptos más complejos como son las ecuaciones de Van der Pol o de Lorentz.

La entrada de un modelo en Modellus es casi como la escritura de ecuaciones matemáticas en el papel.



2.2. VENTANA DE CONDICIONES

Cuando se ha escrito el modelo en la correspondiente ventana y se ha pulsado por primera vez el botón interpretar aparecerá la ventana de “condiciones” que se encarga de recoger los valores de los “parámetros” y los “valores iniciales” del modelo en forma de tabla formando parte del “caso 1" que es el primer caso de simulación que Modellus crea por defecto.
Los “parámetros” se podrán modificar en esta misma ventana o también en la ventana de “animación” haciendo uso de algunos de sus objetos como veremos más adelante.

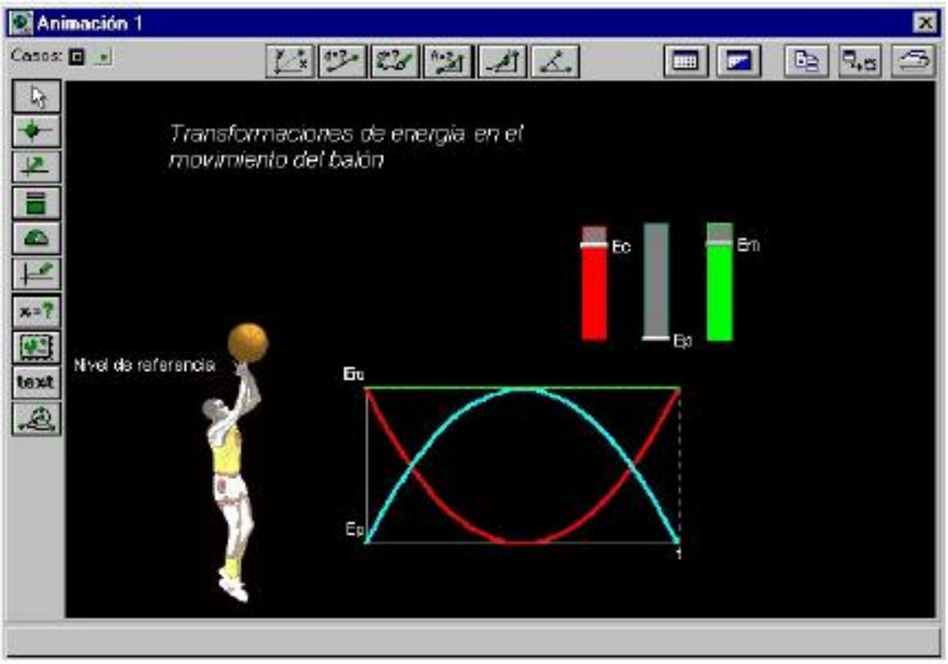
Cada uno de los posibles casos, que nosotros podremos añadir en el estudio del modelo, no son otra cosa que distintos escenarios para aplicar a las mismas ecuaciones. Esto nos permitirá poder estudiar el modelo cambiando a nuestro gusto distintos parámetros.

Si deseamos modificar los parámetros desde la ventana de animación quedará invalidado el valor del parámetro que se coloque en esta ventana. Cada uno de los casos que nosotros establezcamos en la simulación tendrá la posibilidad de verse en la ventana de “animación”; bastará con seleccionarlo de entre los que aparecerán señalados en la parte superior izquierda de la ventana, y esto ocurrirá en las ventanas de “tabla” y “gráfico” teniendo en cuenta que en la ventana de “gráfico” pueden coexistir los gráficos de cada uno de los casos con el fin de poder ver las distintas curvas superpuestas.

2.3. VENTANA DE ANIMACIONES

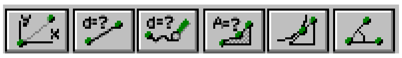
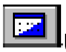
Una vez que hemos escrito las ecuaciones del modelo, la siguiente operación será diseñar la ventana de animaciones en la que se realizarán las representaciones gráficas de aquellos valores que nos interese ver.

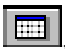
Esta ventana tiene mucho interés de cara a ser el “interface” con el estudiante ya que si se hace buen uso de todas sus posibilidades encontraremos en ella una poderosa herramienta. En la figura vemos la estructura de esta ventana de “animación” mostrando un ejemplo de movimiento de un balón lanzado hacia arriba.



El tamaño y posición de esta ventana, al igual que el resto, se puede modificar colocando el puntero en los bordes y estirando hacia dentro o hacia fuera o manteniendo pulsado y moviendo en el caso de cambiar la posición.

En esta ventana se pueden colocar distintos elementos gráficos que se corresponden con los botones que aparecen en la parte superior. Cada uno de estos elementos se podrá asociar a las variables del modelo y realizar las funciones que correspondan a él de acuerdo a los parámetros que se hayan colocado en su ventana de parámetros asociada. Pasaremos a explicar cada uno de los elementos, así como sus ventanas asociadas.

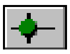
Los botones de la parte superior  se usan para realizar mediciones sobre las imágenes (GIF o BMP) o videos (AVI), que pueden colocarse en el fondo, usando el botón de fondo.

El rayado (grid) puede mostrarse u ocultarse mediante el botón . Pulsando sobre el botón de fondo puede definir el espaciado del grid y su color así como el color del fondo de la pantalla.

A continuación se muestra una tabla en la que se puede identificar cada uno de los botones que representan un determinado objeto.

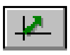
Use esta herramienta………..……..para añadir:

Partícula



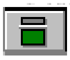
Imagen, bola (partícula), rectángulo, o referencia.

Vector



Vector con o sin flecha resultante o componentes.

Indicador de Nivel

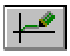


Horizontal o Vertical.

Medidor Analógico

Aguja, reloj, o medidor circulo completo.

Trazador

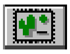


Realiza el trazado interactivo de líneas o puntos.

Medidor Digital

Medidor digital, mostrado o no el nombre de la Variable.

Importar imagen



Importa imagen en formato BMP o GIF

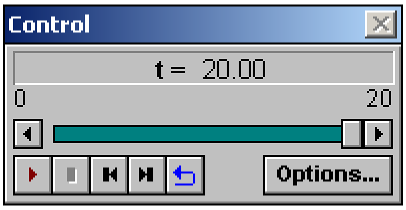
Texto

Texto con el color, fuente, estilo y tamaño especificables.

Objeto Geométrico

Líneas y figuras tales como círculos ypolígonos.

2.4. VENTANA DE CONTROL



Una vez que hemos diseñado el modelo en la ventana “Modelo” y hemos colocado en la ventana “animaciones los objetos, así como las condiciones y las tablas y gráficos que nos haya parecido bien, se debe pasar a la fase de “simulación”.

En la fase de “simulación” Modellus realizará los cálculos y mostrará los valores de la forma que hayamos previsto. La ventana “Control” es la que permite el control del proceso de simulación.

Los botones de esta ventana sirven para:

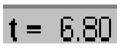
Simular o detener la simulación.

Terminar  la simulación.

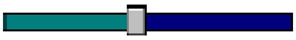
Reiniciar  el modelo, ir al principio sin perder los valores calculados.

Saltar  al último valor calculado del modelo.

Repetir  la simulación del modelo.

Lee 

el actual valor de la variable independiente.

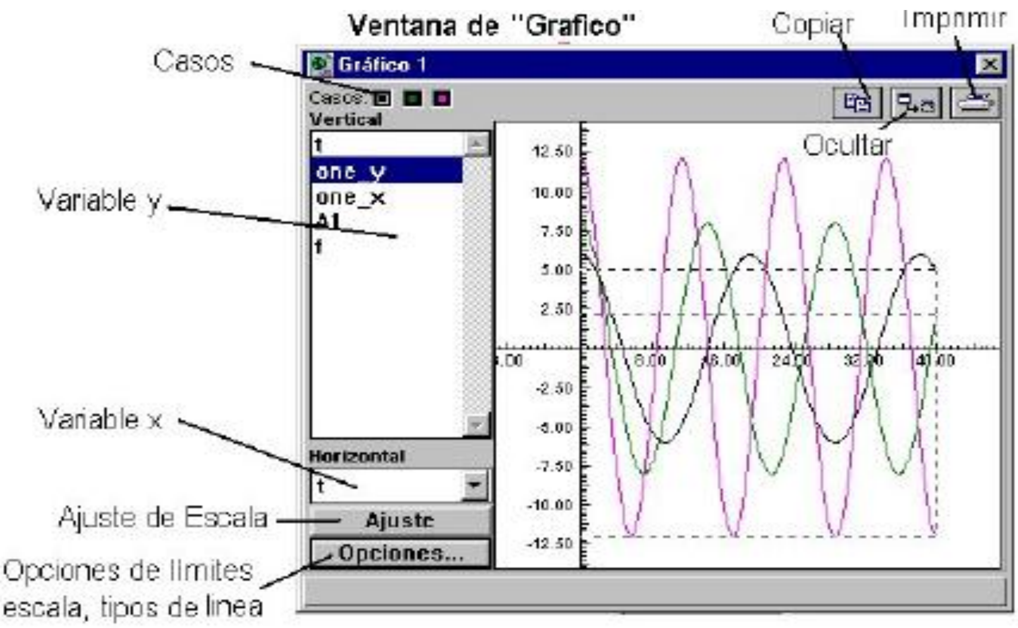
Muestra  el valor actual de la variable independiente y chequea visualmente el progreso de esta variable.

Ir atrás  o adelante  un simple paso.

Acceder a caja de diálogo Opciones…:

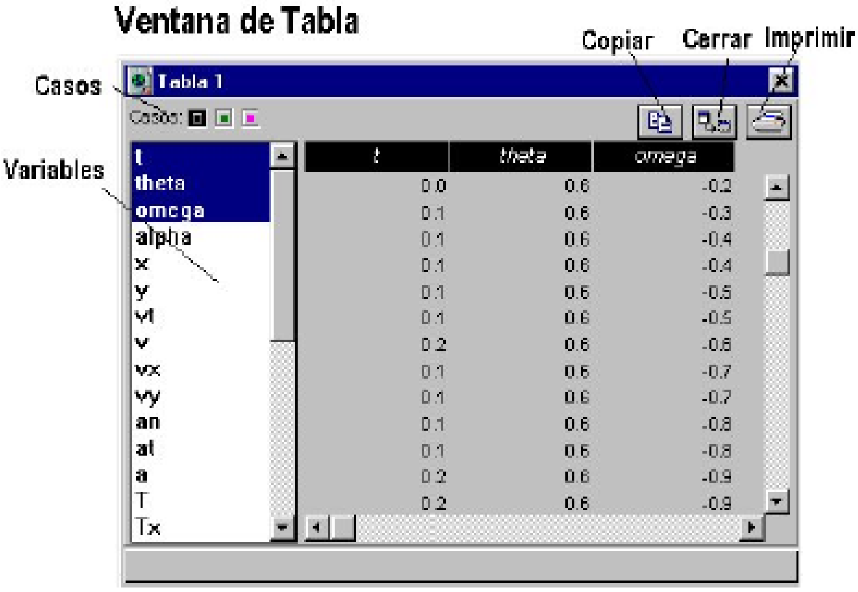
2.5. VENTANA DE GRÁFICO

Mediante esta ventana podemos realizar representaciones gráficas en ejes de coordenadas (XY) de las variables que queramos y para los casos que hayamos definido mediante la opción del menú "Casos". En la figura vemos la ventana de "gráficos" y en ella se puede distinguir el área de representación en donde se dibujan los gráficos y a la izquierda aparecen las ventanas de las variables.



2.6. VENTANA DE TABLA

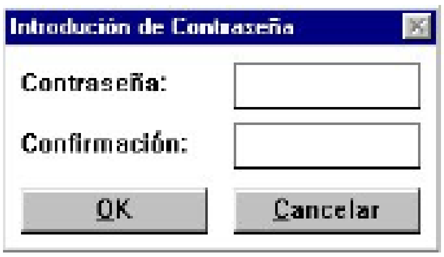
En numerosas aplicaciones será necesario realizar una tabla con los valores de las variables, esta posibilidad nos la brinda la ventana de “tabla” que sencillamente permite la creación de tablas con tantas variables como seleccionemos en la ventana de la izquierda simplemente pulsando las teclas “Control” o “Shift” a la vez que señalamos con el ratón (tecla izquierda) sobre éstas.



2.7. PROTECCIÓN DE LOS TRABAJOS

Mediante la opción Contraseña dentro del menú de “Fichero” podremos conseguir proteger el trabajo, de tal manera que a quien realice las simulaciones solo le estará permitido ver los resultados, pero nunca modificar la ventana “Modelo” o la ventana Animación ni podrá modifica ni crear ventanas de “gráficos” o “tablas”.

Cuando activamos por primera vez ésta opción aparece una ventana como la de la figura en la que se nos pide el Password y la Confirmación, es decir debemos escribir dos veces, una en cada ventana, el password (clave).



PRESENTACIÓN

Continuamos ahora el estudio con Modellus de la subunidad estructural "FUNDAMENTACIÓN MATEMÁTICA", perteneciente a FÍSICA MODERNA.

El desarrollo de esta unidad comprende la búsqueda por afianzar el conocimiento sobre los nueve temas que abarca la subunidad, antes descritos, los cuales están estructurados de la siguiente manera:

1) Logros de aprendizaje;
2) Fundamentación teórica, sus ecuaciones matemáticas y sus respectivas gráficas en caso de tenerlas;
3) Problemas modelo;
4) Evaluación de logros, con las respuestas;
5) Listado y descripción por grupos de las animaciones, y
6) Animación de muestra con su descripción.

Cada **animación de muestra** presentada en este trabajo de graduación es sólo un ejemplo de animación por cada tema, puesto que todas las animaciones de la subunidad mencionada se encuentran en el CD adjunto en formato DVD.

1.1 ECUACIÓN DIFERENCIAL DE HERMITE

1) LOGROS DE APRENDIZAJE:

1- Conocer la expresión matemática de esta ecuación diferencial.
2- Conocer el proceso para la resolución de esta ecuación diferencial.
3- Aplicar a la resolución de ejercicios.

2) FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA:

La estructura matemática de la ecuación diferencial de Hermite es:

$$\boxed{y'' - 2xy' + 2ny = 0} \qquad (n = 0; 1; 2; 3; \ldots) \qquad (1.1.1)$$

La solución depende del número n y tiene la forma:

$$y_n = C_1 H_n(x) + C_2 G_n(x)$$

en donde:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

son los polinomios de Hermite de primera especie en la variable x, y:

$$G_n(x) = G_n(x)$$

son los polinomios de Hermite de segunda especie en la variable x, aún no definidos.

Algunas de sus propiedades son:

1) $H_{n+1}(x) = 2x\,H_n(x) - 2n\,H_{n-1}(x)$

2) $\dfrac{dH_n(x)}{dx} = 2n\,H_{n-1}(x)$

3) $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$

3) PROBLEMA MODELO:

1.- Resuelva la ecuación diferencial $y'' - 2xy' + 14y = 0$

n=7

$$H_7(x) = (-1)^7 e^{x^2} \frac{d^7}{dx^7}\left(e^{-x^2}\right) = 128x^7 - 1\,344x^5 + 3\,360x^3 - 1\,680x$$

&

$$G_7(x) = G_7(x)$$

Luego:

$$y_7 = C_1\left(128x^7 - 1\,344x^5 + 3\,360x^3 - 1\,680x\right) + C_2G_7(x)$$

4) EVALUACIÓN DE LOGROS:

a) Complete:

1.- La estructura matemática de la solución de una ecuación diferencial de Hermite es:

i)

2.- Escriba dos propiedades de la ecuación diferencial de Hermite:

i)

ii)

3.- La expresión $H_3(x)$ representa…………………………………………………………...
………………………………………………………………………………………………………

b) Resuelva, en su cuaderno de ejercicios, los siguientes problemas:

1.- Resuelva la ecuación diferencial $y'' - 2xy' + 16y = 0$

Solución:

$$y_8 = C_1\left(256x^8 - 3\,584x^6 + 13\,340x^4 - 13\,440x^2 + 1\,680\right) + C_2G_8(x)$$

2.- Verifique la propiedad $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$

5) LISTADO DE ANIMACIONES-DESCRIPCIÓN

a) Conceptuales: Este conjunto de animaciones presenta la parte teórico-conceptual relacionada con el tema: modelos matemáticos y una breve reseña bio-gráfica de Hermite.

FM11C01
FM11C02
FM11C03
FM11C04

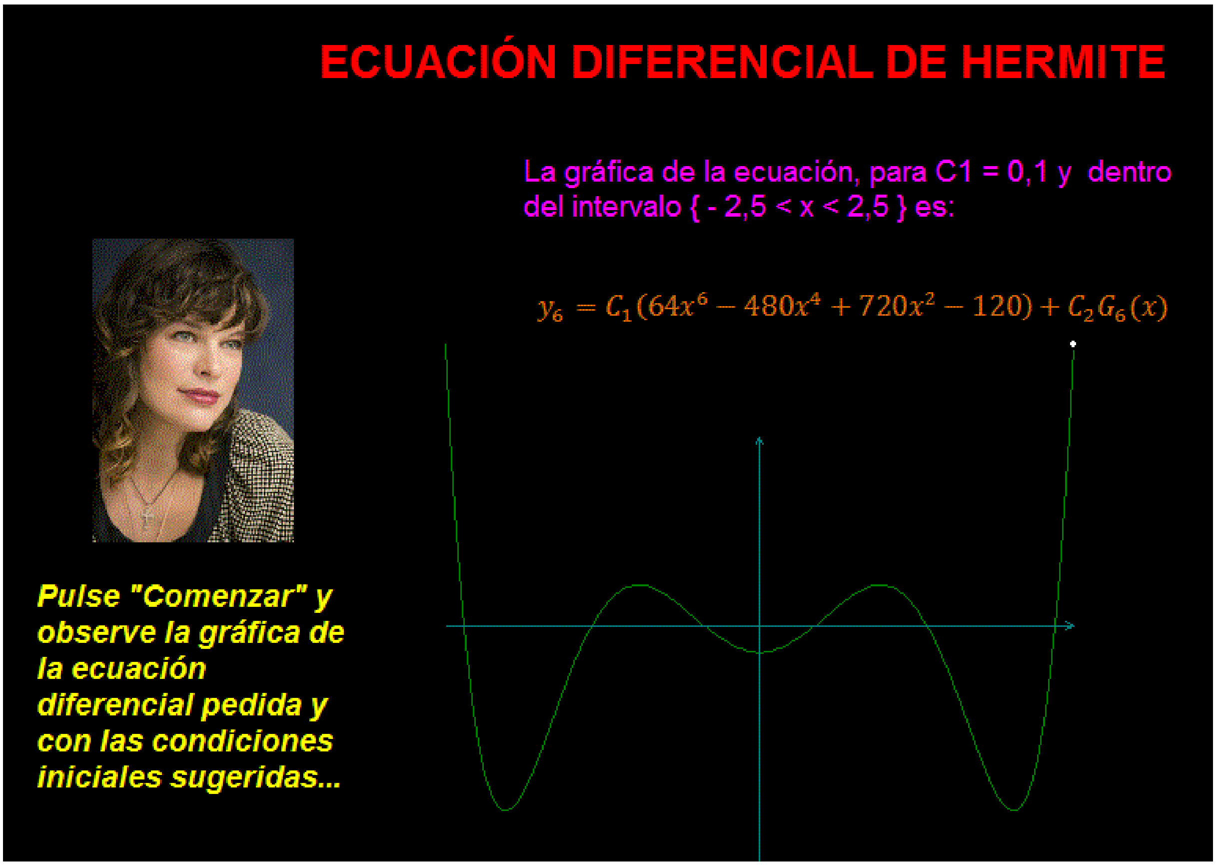
b) Ejercitativas: Estas animaciones complementan a la teoría ya que en ellas está todo lo relacionado al tema propuesto mediante ejercicios modelos.

FM11E01
FM11E02
FM11E03

c) Lúdicas: Estas animaciones sirven para reforzar el aprendizaje obtenido de una forma divertida y didactica.

FM11L01
FM11L02
FM11L03

6) ANIMACIÓN DE MUESTRA:



Descripción:

Esta animación es de tipo ejercitativa, en la cual el usuario puede revisar como es la gráfica de una ecuación diferencial de Hermite, tomando en cuenta las restricciones para las constantes C_1 y C_2, y los polinomios de segunda especie.

1.2 ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LEGENDRE

1) LOGROS DE APRENDIZAJE:

1- Conocer la expresión matemática de esta ecuación diferencial.
2- Captar y dominar el proceso de resolución de esta ecuación diferencial.
3- Aplicar a la resolución de ejercicios.

2) FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA:

La estructura matemática de la ecuación diferencial de Legendre es:

$$\boxed{\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0} \qquad (n = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots) \qquad (1.2.1)$$

La solución depende del número n y tiene la forma:

$$y_n = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x)$$

en donde:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n . n!} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n$$

son los polinomios de Legendre de primera especie y orden n en la variable x, para $|x| < 1$, y:

$$Q_n(x) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n/2}.2^n\left[\left(\dfrac{n}{2}\right)!\right]^2}{n!}\left\{x - \dfrac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \dfrac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \ldots\right\} & (n = 0;\ 2;\ 4;..) \\[2ex] \dfrac{-(-1)^{\frac{n-1}{2}}.2^{n-1}\left[\left(\dfrac{n-1}{2}\right)!\right]^2}{n!}\left\{1 - \dfrac{n(n+1)}{2!}x^2 + \dfrac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \ldots\right\} & (n = 1;\ 3;\ 5;\ldots) \end{cases}$$

son los polinomios de Legendre de segunda especie y orden n en la variable x, para $|x| < 1$. Para $x = \pm 1$, los $Q_n(x)$ son ilimitados, en tanto que $P_n(1) = 1$ & $P_n(-1) = (-1)^n$.

Algunas de sus propiedades son:

1) $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)x\,P_n(x) - n\,P_{n-1}(x)$

2) $n\,P_n(x) = x\,P_n{}'(x) - P_{n-1}{}'(x)$

3) $(n+1)P_n(x) = P_{n+1}{}'(x) - x\,P_n{}'(x)$

4) $P_n(-x) = (-1)^n\,P_n(x)$

5) $|P_n(x)| \leq 1$

NOTA: Las mismas propiedades para $Q_n(x)$.

3) PROBLEMA MODELO:

1.- Resuelva la ecuación diferencial $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$

En este caso n = 1, luego:

$$P_1(x) = \frac{1}{2^1.1!}\frac{d^1}{dx^1}(x^2-1)$$

$P_1(x)=x$

Luego:

$$Q_1(x) = -\frac{(-1)^0.2^0\,(0!)^2}{1!}\left\{1-\frac{1(2)}{2!}x^2+\frac{1(-1)2.4}{4!}x^4-\frac{1(-1)(-3).2.4.6}{6!}x^6+\ldots\right\}$$

$$Q_1(x) = -\left(1-x^2-\frac{x^4}{3}-\frac{x^6}{5}\right) = -1-x^2+\frac{x^4}{3}+\frac{x^6}{5}+\ldots$$

$$Q_1(x) = x\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^6}{5}+\ldots\right)-1$$

$$Q_1(x) = \frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-1$$

Entonces:

$$y_1 = C_1 x + C_2\left[\frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1\right]$$

4) EVALUACIÓN DE LOGROS:

a) Complete:

1.- La estructura matemática de la solución de una ecuación diferencial de Legendre es:

i)

2.- Escriba dos propiedades de la ecuación diferencial de Legendre:

i)

ii)

3.- La expresión $Q_4(sen\ \phi)$ representa…………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

b) Resuelva, en su cuaderno de ejercicios, los siguientes problemas:

1.- Resuelva la ecuación diferencial $(1-x^2)y'' - 2xy' + 20y = 0$

Solución:

$$y_4 = C_1(35x^4 - 30x^2 + 3) + C_2\left[\left(-\frac{35x^3}{8} + \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{16}\right)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{55x}{24}\right]$$

2.- Resuelva la ecuación diferencial $(1-x^2)y'' - 2xy' + 30y = 0$

Solución:

$$y_4 = C_1(63x^5 - 70x^3 + 15x) + C_2\left[\left(\frac{-63x^4 + 49x^2}{8} + \frac{63x^5 - 70x^3 + 15x}{16}\right)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{8}{15}\right]$$

5) LISTADO DE ANIMACIONES-DESCRIPCIÓN

a) Conceptuales: En estas animaciones se encuentra la información teórico-conceptual relacionada con el tema: modelos matemáticos y una breve reseña bio-gráfica de Legendre.

FM12C01
FM12C02
FM12C03
FM12C04

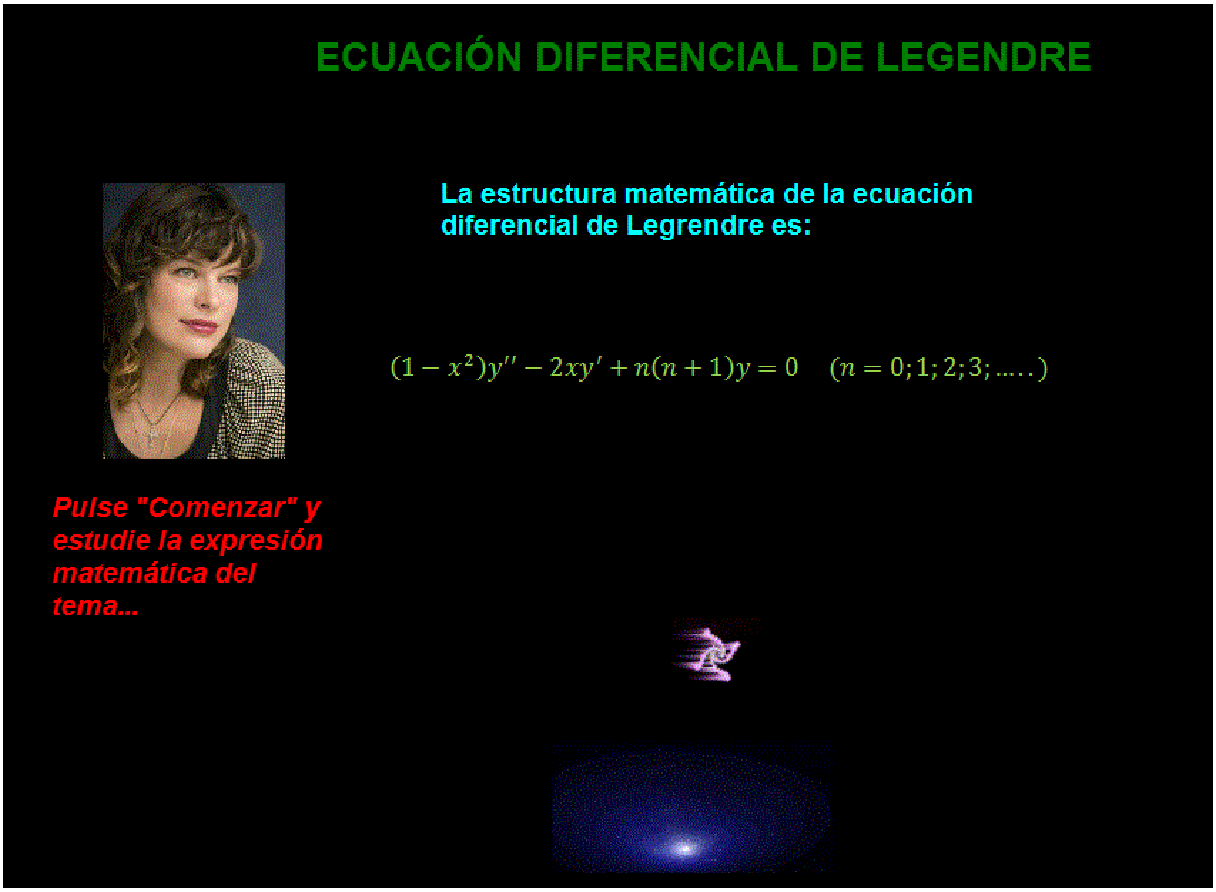
b) Ejercitativas: Estas animaciones sirven para reforzar, ya que estas contienen ejercicios modelos, realizados paso a paso.

FM12E01
FM12E02
FM12E03

c) Lúdicas: Estas animaciones ponen en práctica los conocimientos adquiridos de los usuarios de una manera entretenida.

FM12L01
FM12L02

6) ANIMACIÓN DE MUESTRA:



Descripción:

Esta animación es conceptual, en la cual el usuario encuentra descrito todo lo referente a definiciones, estructuras de las ecuaciones y propiedades, respecto al tema estudiado.

1.3 ECUACIÓN DIFERENCIAL ASOCIADA DE LEGENDRE

1) LOGROS DE APRENDIZAJE:

1- Conocer la expresión matemática de esta ecuación diferencial.
2- Conocer el proceso para la resolución de esta ecuación diferencial.
3- Capacidad de resolución de ejercicios.

2) FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA:

La estructura matemática de la ecuación diferencial asociada de Legendre es:

$$\boxed{\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\left\{n\left(n+1\right)-\frac{m^2}{1-x^2}\right\}y=0} \quad \left(n \wedge m = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ ...\right)$$

La solución depende de los números n & m y tiene la forma:

$$y = C_1P_n^m\left(x\right)+C_2Q_n^m\left(x\right)$$

en donde:

$$P_n^m\left(x\right)=\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n\left(x\right)=\frac{\left(1-x^2\right)^{m/2}}{2^n\,.n!}\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}\left(x^2-1\right)^n$$

son los polinomios asociados de Legendre de primera especie en la variable x, y:

$$Q_n^m\left(x\right)=\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}Q_n\left(x\right)$$

son los polinomios asociados de Legendre de segunda especie en la variable x, los cuales son ilimitados para $x=\pm 1$, en tanto que $P_n^m\left(\pm 1\right)=0$.

Algunas de sus propiedades son:

1) $P_n^0\left(x\right)=P_n\left(x\right)$

2) $P_n^m\left(x\right)=0$, si $m > n$.

3) $(n+1-m)P_{n+1}^{m}(x)-(2n+1)xP_n^m(x)+(n+m)P_{n-1}^{m}(x)=0$

4) $P_n^{m+2}(x)-\dfrac{2(m+1)x}{\left(1-x^2\right)^{1/2}}P_n^{m+1}(x)+(n-m)(n+m+1)P_n^m(x)=0$

3) PROBLEMA MODELO:

1.- Resuelva la ecuación diferencial $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\left(12-\dfrac{4}{1-x^2}\right)y=0$

n=3 & m=2

$$P_3^2(x)=\left(1-x^2\right)^1\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{5x^3-3x}{2}\right)=15x(1-x^2)$$

&

$$Q_3^2(x)=\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{5x^3-3x}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{5}{2}x^2+\frac{2}{3}\right)$$

$$=(1-x^2)\left[\frac{15x}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-\frac{5x^2-7}{(x+1)^2(x-1)^2}-15\right]$$

$$y=C_1 15x(1-x^2)+C_2(1-x^2)\left[\frac{15x}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-\frac{5x^2-7}{(x+1)^2(x-1)^2}-15\right]$$

4) EVALUACIÓN DE LOGROS:

a) Complete:

1.- La estructura matemática de la solución de una ecuación diferencial asociada de Legendre es:

i)

2.- Escriba dos propiedades de la ecuación diferencial asociada de Legendre:

i)

ii)

3.- La expresión $Q_5^3(x)$ representa…………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………….

b) Resuelva, en su cuaderno de ejercicios, los siguientes problemas:

1.- Resuelva la ecuación diferencial $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\left(6-\frac{1}{1-x^2}\right)y=0$

Solución:

$$y=C_1 3x(1-x^2)+C_2\left[\frac{3x-3x^3}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+3x^2-3x+1\right]$$

2.- Resuelva la ecuación diferencial $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\left(\frac{1}{1-x^2}\right)y=0$

Solución:

$$y=C_2\left[\frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}\right]$$

3.- Verifique la propiedad $P_n^m\left(x\right)=0$ si m > n

5) LISTADO DE ANIMACIONES-DESCRIPCIÓN

a) Conceptuales: Este conjunto de animaciones tienen las estructuras matemáticas de la ecuación diferencial y de los métodos para solucionarla.

FM13C01
FM13C02

b) Ejercitativas: En estas animaciones el usuario puede ver la resolución de ecuaciones diferenciales de este tema, y que a su vez le pueden servir de guía para su aprendizaje.

FM13E01
FM13E02
FM13E03
FM13E04

c) Lúdicas: Estas animaciones, además de ser divertidas y causar interés en el usuario, sirven para reforzar el tema, haciendo que lleve las respuestas correctas a través de caminos o de empatar correctamente.

FM13L01
FM13L02
FM13L03
FM13L04

6) ANIMACIÓN DE MUESTRA:

Descripción:

Es una animación del tipo lúdica y consiste en que el usuario lleve a la fotografía hacia la respuesta correcta, logrando así el encendido de fuegos artificiales.

1.4 ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LAGUERRE

1) LOGROS DE APRENDIZAJE:

1- Comprender la expresión matemática de esta ecuación diferencial.
2- Dominar el proceso para la resolución de esta ecuación diferencial.
3- Capacidad de resolución de ejercicios.

2) FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA:

La estructura matemática de la ecuación diferencial de Laguerre es:

$$\boxed{xy'' + (1-x)y' + ny = 0} \qquad (n = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots) \qquad (1.4.1)$$

La solución depende del número n y tiene la forma:

$$y = C_1 L_n(x) + C_2 R_n(x)$$

en donde:

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$$

son los polinomios de Laguerre de primera especie en la variable x, y:

$$R_n(x) = R_n(x)$$

son los polinomios de Laguerre de segunda especie en la variable x, *¡aún no definidos!*

Algunas de sus propiedades son:

1) $L_n(0) = n!$

2) $\displaystyle\int_0^x L_n(t)dt = L_n(x) - \frac{L_{n+1}(x)}{n+1}$

3) $L_{n+1}(x) - (2n + 1 - x)L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0$

4) $L_n'(x) - n\,L_{n-1}'(x) + n\,L_{n-1}(x) = 0$

5) $x\,L_n'(x) = n\,L_n(x) - n^2\,L_{n-1}(x)$

3) PROBLEMA MODELO:

1.- Resuelva la ecuación diferencial $xy'' + (1-x)y' + 3y = 0$

n = 3

$$L_3(x) = e^x \frac{d^3}{dx^3}\left(x^3 e^{-x}\right)$$

$$L_3(x) = x^3 - 9x^2 + 18x - 6$$

&

$$R_3(x) = R_3(x)$$

Luego:

$$y = C_1(x^3 - 9x^2 + 18x - 6) + C_2 R_3(x)$$

4) EVALUACIÓN DE LOGROS:

a) Complete:

1.- La estructura matemática de la solución de una ecuación diferencial de Laguerre es:

i)

2.- Escriba dos propiedades de la ecuación diferencial de Laguerre:

i)

ii)

3.- La expresión $R_5(x)$ representa…………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………….

b) Resuelva, en su cuaderno de ejercicios, los siguientes problemas:

1.- Resuelva la ecuación diferencial $xy'' + (1-x)y' + y = 0$

Solución:

$$y = C_1(1-x) + C_2 R_1(x)$$

2.- Resuelva la ecuación diferencial $xy'' + (1-x)y' + 6y = 0$

Solución:

$$y = C_1(x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720) + C_2 R_6(x)$$

3.- Verifique la propiedad $L_n(0) = n!$

5) LISTADO DE ANIMACIONES-DESCRIPCIÓN

a) Conceptuales: Este conjunto de animaciones tienen las estructuras matemáticas de la ecuación diferencial y las reglas para hallar su solución.

FM14C01
FM14C02
FM14C03
FM14C04

b) Ejercitativas: En estas animaciones el usuario puede ver cómo están descritos todos los pasos a seguir para solucionar los ejercicios de un ejercicio en concreto.

FM14E01
FM14E02
FM14E03

c) Lúdicas: Estas animaciones contienen retos para el usuario, además de lograr una retroalimentacion del aprendizaje en él.

FM14L01
FM14L02
FM14L03
FM14L04

6) ANIMACIÓN DE MUESTRA:

Descripción:

Es una animación del tipo lúdica en la cual el usuario debe rellenar los espacios en blanco utilizando las palabras del recuadro logrando una frase coherente y obteniendo su premio.

1.5 ECUACIÓN DIFERENCIAL ASOCIADA DE LAGUERRE

1) LOGROS DE APRENDIZAJE:

1- Conocer la expresión matemática de esta ecuación diferencial.
2- Comprender el proceso para la resolución de esta ecuación diferencial.
3- Capacidad de resolución de ejercicios.

2) FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA:

La estructura matemática de la ecuación diferencial asociada de Laguerre es:

$$\boxed{xy'' + (m+1-x)y' + (n-m)y = 0} \qquad (n \wedge m = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ ...)$$

La solución depende de los números n & m y tiene la forma:

$$y = C_1 L_n^m(x) + C_2 R_n^m(x)$$

en donde:

$$L_n^m(x) = \frac{d^m}{dx^m} L_n(x) = \frac{d^m}{dx^m}\left\{ e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)\right\}$$

son los polinomios asociados de Laguerre de primera especie en la variable x, y:

$$R_n^m(x) = R_n^m(x)$$

son los polinomios asociados de Laguerre de segunda especie en la variable x, *¡aún no definidos!*

Algunas de sus propiedades son:

1) $L_n^0(x) = L_n(x)$

2) $L_n^m(x) = 0$, si $m > n$.

3) $\frac{n - m + 1}{n + 1} L_{n+1}^{m}(x) + (x + m - 2n - 1) L_n^m(x) + n^2 L_{n-1}^{m}(x) = 0$

4) $\frac{d}{dx}\{L_n^m(x)\} = L^{m+1}_{n}(x)$

5) $\frac{d}{dx}\{x^m e^{-x} L_n^m(x)\} = (m - n - 1) x^{m-1} e^{-x} L^{m-1}_{n}(x)$

6) $x \frac{d}{dx}\{L_n^m(x)\} = (x - m) L_n^m(x) + (m - n - 1) L^{m-1}_{n}(x)$

3) PROBLEMA MODELO:

1.- Resuelva la ecuación diferencial $xy'' + (2 - x)y' + y = 0$

Vemos que m = 1 y n = 2, entonces:

$$L_2^1(x) = \frac{d}{dx}\left\{e^x \frac{d^2}{dx^2}\left(x^2 e^{-x}\right)\right\}$$

$$L_2^1(x) = \frac{d}{dx}(x^2 - 4x + 2)$$

$$L_2^1(x) = 2x - 4$$

Luego:

$$R_2^1(x) = R_2^1(x)$$

De donde:

$$y = C_1(2x - 4) + C_2 R_2^1(x)$$

4) EVALUACIÓN DE LOGROS:

a) Complete:

1.- La estructura matemática de la solución de una ecuación diferencial asociada de Laguerre es:

i)

2.- Escriba dos propiedades de la ecuación diferencial de Laguerre:

i)

ii)

3.- La expresión $R_6^2(cos\ \phi)$ representa…………………………………………………..
………………………………………………………………………………………………..

b) Resuelva, en su cuaderno de ejercicios, los siguientes problemas:

1.- Resuelva la ecuación diferencial $xy'' + (2 - x)y' + 2y = 0$

Solución:

$$y = C_1\left(3x^2 - 18x + 18\right) + C_2 R_3^1(x)$$

2.- Resuelva la ecuación diferencial $xy'' + (3 - x)y' = 0$

Solución:

$$y = C_1\left(30x^4 - 720x^3 + 5400x^2 - 14400x + 10800\right) + C_2 R_6^2(x)$$

3.- Verifique la propiedad $\frac{d}{dx}\left\{x^m e^{-x} L_n^m(x)\right\} = (m - n - 1)x^{m-1} e^{-x} L_n^{m-1}(x)$ para

m = 3 y n = 5.

5) LISTADO DE ANIMACIONES-DESCRIPCIÓN

a) Conceptuales: Este conjunto de animaciones poseen las estructuras matemáticas de la ecuación diferencial, sus reglas y propiedades.

FM15C01
FM15C02
FM15C03

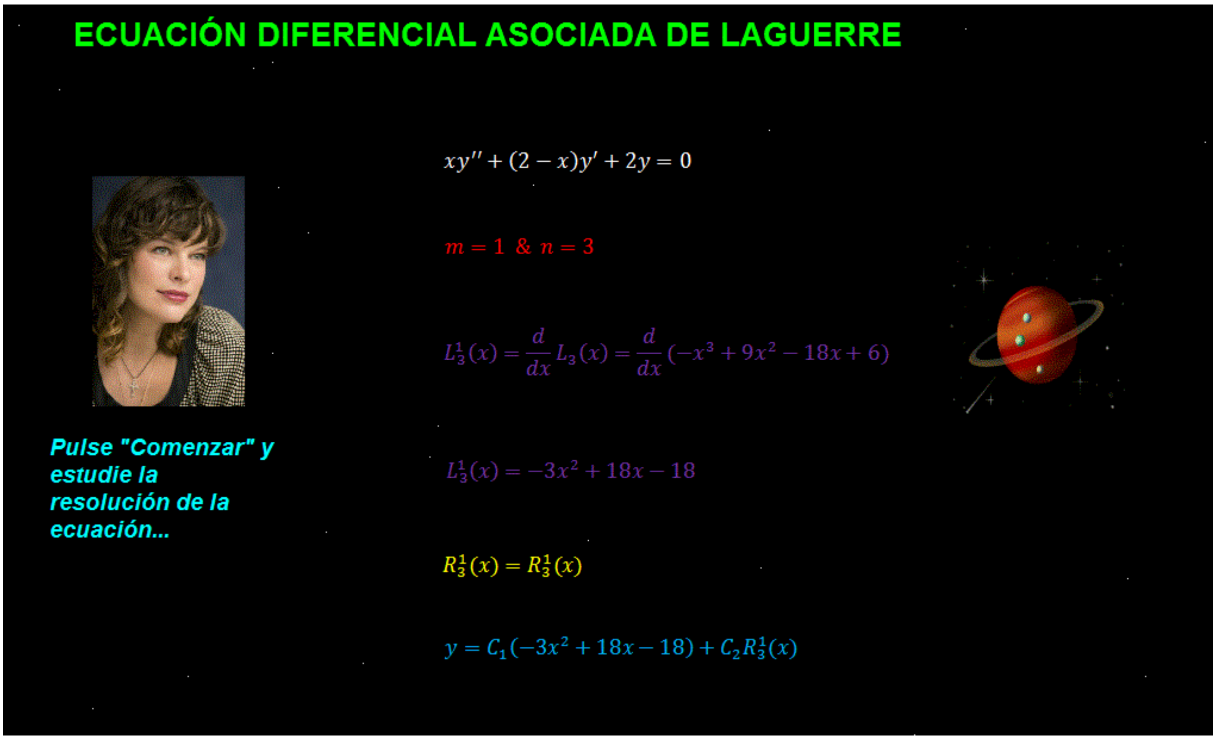
b) Ejercitativas: En estas animaciones el usuario contiene una guía para el mejor entendimiento sobre la resolución de estas ecuaciones diferenciales, ya que estas animaciones muestran ejercicios solucionados paso por paso.

FM15E01
FM15E02
FM15E03

c) Lúdicas: El conjunto de estas animaciones tiene como objetivo la retroalimentación del aprendizaje obtenido, mediante unas actividades entretenidas para el usuario.

FM15L01
FM15L02
FM15L03

6) ANIMACIÓN DE MUESTRA:



Descripción:

Esta es una animación de tipo ejercitativa, la cual sirve para despejar dudas en el usuario, ya que va describiendo la resolución de un ejercicio con todos sus pasos.

1.6 EXPRESIONES COMPLEJAS

1) LOGROS DE APRENDIZAJE:

1- Añadir el concepto de números complejos.
2- Dominio en expresar números complejos de distintas maneras.
3- Resolución en ejercicios de aplicación.

2) FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA:

Un número complejo ζ puede ser expresado en forma cartesiana o rectangular como:

$$\boxed{\zeta = a + bi} \qquad (1.6.1)$$

en donde a & b son números reales, b es el coeficiente de la parte imaginaria e $i = \sqrt{-1}$. El complejo conjugado ζ^* se obtiene reemplazando i por $-i$ dondequiera que aparezca. Con ello, la mag-nitud o módulo de un número complejo y su argumento son simplemente:

$$\boxed{\begin{array}{l} r = |\zeta| = \sqrt{\zeta \, . \, \zeta^*} = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \phi = Tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right) \end{array}} \qquad (1.6.2)$$

Con lo anterior, un número complejo puede expresarse en formas trigonométrica y exponencial mediante:

$$\boxed{\zeta = r\left(Cos\,\phi + i\,Sen\,\phi\right) = r\,e^{i\phi}} \qquad (1.6.3)$$

Todo número complejo se puede representar como la suma de una parte real, $Re(\zeta)$, y una parte imaginaria, $Im(\zeta)$, esto es:

$$\boxed{\zeta = \mathrm{Re}(\zeta) + \mathrm{Im}(\zeta)} \qquad (1.6.4)$$

en donde:

$$\mathrm{Re}(\zeta) = \frac{1}{2}(\zeta + \zeta^*) = a \qquad (a)$$

&:

$$\operatorname{Im}(\zeta) = \frac{1}{2}(\zeta - \zeta^*) = b\,i \qquad \text{(b)}$$

Para expresiones algebraicas complejas se tiene: $z = x + yi$.

3) PROBLEMA MODELO:

1.- Determine la parte imaginaria de: $(\zeta) = \dfrac{7e^{it} + 7e^{-it}}{3e^{ix}}$

Si tenemos que:

$$(\zeta) = \frac{7e^{it} + 7e^{-it}}{3e^{ix}}$$

Su conjugado es:

$$(\zeta^*) = \frac{7e^{-it} + 7e^{it}}{3e^{-ix}}$$

De donde su parte imaginaria es:

$$\frac{1}{2}(\zeta - \zeta^*) = \frac{1}{2}\left[\frac{7e^{it} + 7e^{-it}}{3e^{ix}} - \frac{7e^{-it} + 7e^{it}}{3e^{-ix}}\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{3e^{-ix}(7e^{it} + 7e^{-it}) - 3e^{ix}(7e^{-it} + 7e^{it})}{3e^{ix}.3e^{-ix}}\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{21e^{i(t-x)} + 21e^{-i(t+x)} - 21e^{-i(t-x)} - 21e^{i(t+x)}}{3e^{ix}.3e^{-ix}}\right]$$

$$\frac{21}{18}\left[\frac{e^{i(t-x)} + e^{-i(t+x)} - e^{-i(t-x)} - e^{i(t+x)}}{3e^{ix}.3e^{-ix}}\right]$$

$$\frac{21}{18}\left[\frac{2iSen(t-x) - 2iSen(t+x)}{(1 - iCosxSenx)}\right]$$

$$\frac{21}{9}\left[\frac{iSen(t-x) - iSen(t+x)}{(1 - iCosxSenx)}\right]$$

4) EVALUACIÓN DE LOGROS:

a) Complete:

1.- Escriba la magnitud o módulo de un número complejo y su argumento:

i)

ii)

2.- Escriba la parte real y la parte imaginaria de un numero complejo Z

i)

ii)

b) Resuelva, en su cuaderno de ejercicios, los siguientes problemas:

1.- Determine la parte Real de: $(\zeta)= e^{iwt} + 3e^{-iwt}$

Solución:
$\mathrm{Re}(\zeta)=4Cos(wt)$

2.- Determine la parte imaginaria de: $(\zeta)= \frac{1}{e^{iwt}} - \frac{1}{e^{-iwt}}$

Solución:
$\mathrm{Im}(\zeta)=-2iSen(wt)$

3.- Demuestre que la parte imaginaria de un número complejo ζ está dada por: $\mathrm{Im}(\zeta)=\frac{1}{2}(\zeta - \zeta^{*})$

5) LISTADO DE ANIMACIONES-DESCRIPCIÓN

a) Conceptuales: Estas animaciones abarcan todo lo que se refiere a los conceptos preliminares con respecto al campo de los complejos.

FM16C01
FM16C02

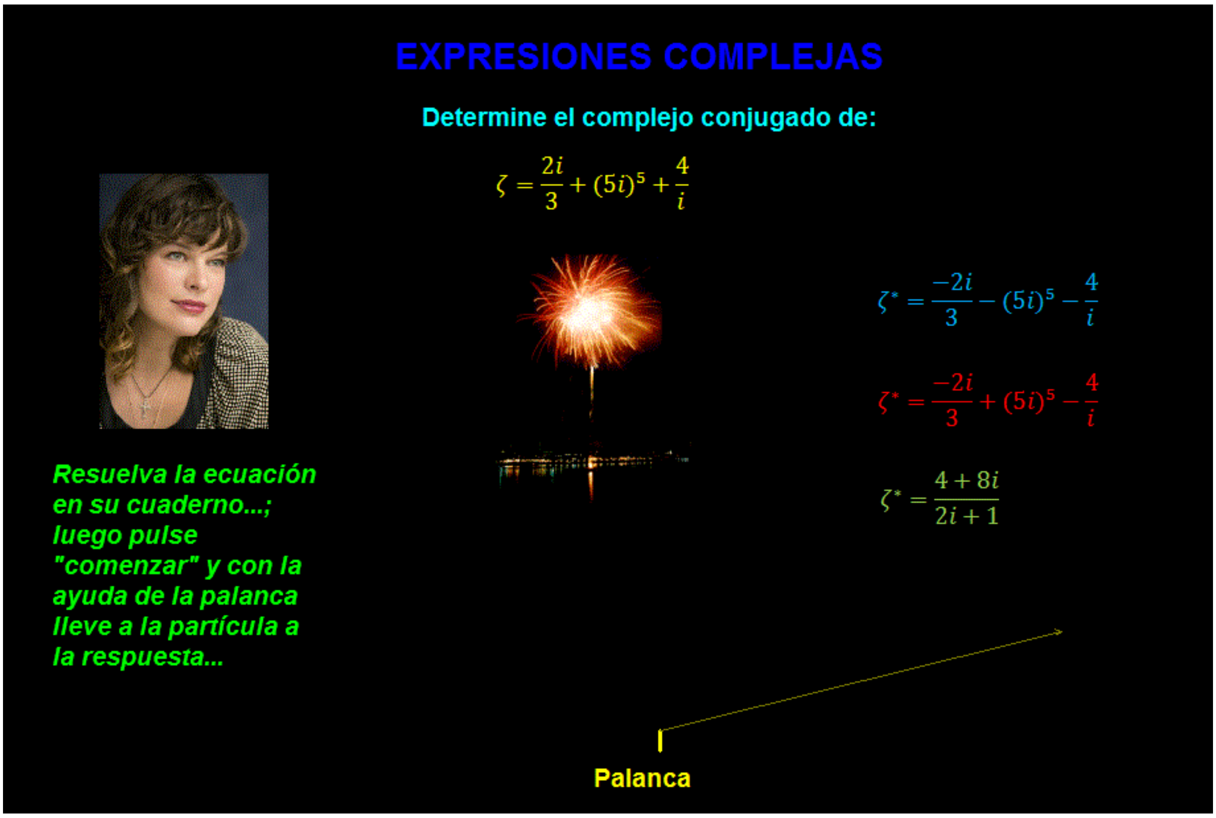
b) Ejercitativas: En estas animaciones se encuentran ejercicios solucionados de una manera fácil para la comprensión del usuario y de esa manera despejar dudas que se puedan presentar.

FM16E01
FM16E02
FM16E03

c) Lúdicas: Las animaciones aqui descritas sirven para el refuerzo y autoevaluación de lo estudiado por el usuario; en ellas el usario debe realizar las actividades usando lo aprendido además de su intelecto.

FM16L01
FM16L02
FM16L03

6) ANIMACIÓN DE MUESTRA:



Descripción:

Esta es una animación de tipo lúdica, en la cual se debe llevar a la partícula hacia la respuesta correcta, haciendo que el usuario ponga en funcionamiento su motricidad y con ayuda de lo aprendido llegue a la solución.

1.7 OPERACIONES ALGEBRAICAS CON COMPLEJOS

1) LOGROS DE APRENDIZAJE:

1- Conocer las operaciones básicas con complejos.
2- Dominar las resoluciones de operaciones con complejos.
3- Formular con autonomía y seguridad problemas que requieren del establecimiento de relaciones entre números complejos.

2) FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA:

Sean los números complejos:

$$\zeta_1 = a_1 + b_1 i = r_1 (Cos\,\phi_1 + i\,Sen\,\phi_1) = r_1 e^{i\phi_1}$$

&

$$\zeta_2 = a_2 + b_2 i = r_2 (Cos\,\phi_2 + i\,Sen\,\phi_2) = r_2 e^{i\phi_2}.$$

Se definen las operaciones algebraicas básicas en la siguiente forma:

a) SUMA-RESTA:

$$\boxed{\begin{aligned} \zeta_1 + \zeta_2 &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \\ \zeta_1 - \zeta_2 &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i \end{aligned}} \qquad (1.7.1)$$

b) MULTIPLICACIÓN:

$$\boxed{\begin{aligned} \zeta_1 . \zeta_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i = \\ &= r_1 r_2 \left[Cos(\phi_1 + \phi_2) + i\,Sen(\phi_1 + \phi_2)\right] = r_1 r_2\, e^{i(\phi_1 + \phi_2)} \end{aligned}} \qquad (1.7.2)$$

c) DIVISIÓN:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\zeta_1}{\zeta_2} &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i = \\ &= \frac{r_1}{r_2}\left[Cos(\phi_1 - \phi_2) + i\,Sen(\phi_1 - \phi_2)\right] = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \end{aligned}} \qquad (1.7.3)$$

d) POTENCIACIÓN:

$$\boxed{\zeta^n = r^n \left(Cos\, n\phi + i\, Sen\, n\phi\right) = r^n\, e^{i\, n\phi}} \qquad (1.7.4)$$

e) RADICACIÓN:

$$\boxed{\sqrt[n]{\zeta} = \sqrt[n]{r} \left(Cos\, \frac{\phi}{n} + i\, Sen\, \frac{\phi}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\, e^{i\, \phi/n}} \qquad (1.7.5)$$

f) PRODUCTO ESCALAR o REAL:

$$\boxed{\zeta_1 \cdot \zeta_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 = r_1 r_2 Cos\left(\phi_2 - \phi_1\right) = \mathrm{Re}\left(\zeta_1^* \zeta_2\right)} \qquad (1.7.6)$$

g) PRODUCTO VECTORIAL o IMAGINARIO:

$$\boxed{\zeta_1 \times \zeta_2 = \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right) i = r_1 r_2 Sen\left(\phi_2 - \phi_1\right) i = \mathrm{Im}\left(\zeta_1^* \zeta_2\right)} \qquad (1.7.7)$$

Se cumple, en consecuencia, que:

$$\boxed{\zeta_1^* \zeta_2 = \left(\zeta_1 \cdot \zeta_2\right) + \left(\zeta_1 \times \zeta_2\right) = r_1 r_2\, e^{i\,(\phi_2 - \phi_1)}} \qquad (1.7.8)$$

NOTAS:

a) Las expresiones (1.7.4) y (1.7.5) constituyen el "Teorema de De Moivre".

b) La figura 1.7.1 explicita algunos parámetros relacionados con las ecuaciones (1.7.6), (1.7.7) y (1.7.8)

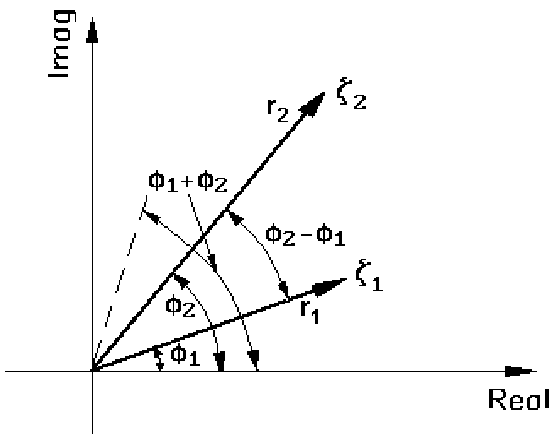


Figura 1.7.1

Si $z = x + y\,i$ es una variable compleja, las operaciones de toda índole que involucren a z definen "funciones algebraicas de variable compleja, $w = f(z)$"; por ejemplo:

$w = 12z - 5$; $w = \dfrac{32}{z - 1}$; $w = 2z^2 - 4z$; $w = \sqrt{z^2 - 16}$, etc.

3) PROBLEMA MODELO:

1.- Dados los números complejos: $\zeta_1=5+3i$, $\zeta_2=6+2i$ determine en formas cartesiana y trigonométrica: a) El cociente entre ζ_1 y ζ_2 ; b) Su producto vectorial.

a)
En forma cartesiana:

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = \frac{5.6 + 3.2}{6^2 + 2^2} + \frac{6.3 - 5.2}{6^2 + 2^2}i = \frac{36}{40} + \frac{8}{40}i = \frac{9}{10} + \frac{1}{5}i$$

En forma trigonométrica:

$$r_1 = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}\,;\; r_2 = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}\,;\; \phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = 30{,}964\,;$$

$$\phi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{2}{6}\right) = 18{,}435$$

$$\frac{\sqrt{34}}{\sqrt{40}}\left[Cos(12{,}529) + iSen(12{,}529)\right] = \frac{9}{10} + \frac{1}{5}i$$

b)
En forma cartesiana:

$$\zeta_1 \times \zeta_2 = (5.2 - 6.3)i = -8i$$

En forma trigonométrica:

$$r_1 = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}\,;\; r_2 = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}\,;\; \phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = 30{,}964\,;$$

$$\phi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{2}{6}\right) = 18{,}435$$

$$\zeta_1 \times \zeta_2 = \sqrt{34}\sqrt{40}Sen(-12{,}529)i = -8i$$

4) EVALUACIÓN DE LOGROS:

a) Complete:

1.- Escriba la ecuación que define la potenciación de un número complejo:

b) Resuelva, en su cuaderno de ejercicios, los siguientes problemas:

1.- Dados los números complejos: $\zeta_1 = 10+3i$, $\zeta_2 = 1-3i$, $\zeta_3 = 11-7i$ determine: a) $\zeta_1 - \zeta_2 + \zeta_3$; b) $\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3$

Solución:
$20-i$
$22-7i$

2.- Dados los números complejos: $\zeta_1 = -4+2i$, $\zeta_2 = -8-12i$ determine: a) ζ_1 / ζ_2; b) ζ_2 / ζ_1

Solución:
$\frac{1}{26} - \frac{4}{13}i$
$\frac{2}{5} - \frac{16}{5}i$

3.- Dados los números complejos: $\zeta_1 = -1-13i$, $\zeta_2 = 7-14i$, determine su producto escalar y su producto vectorial en forma trigonométrica

Solución:
$175i$
$105i$

5) LISTADO DE ANIMACIONES-DESCRIPCIÓN

a) Conceptuales: Estas animaciones abarcan todo lo que se refiere a las fórmulas de las operaciones algebraicas básicas.

FM17C01
FM17C02
FM17C03
FM17C04
FM17C05

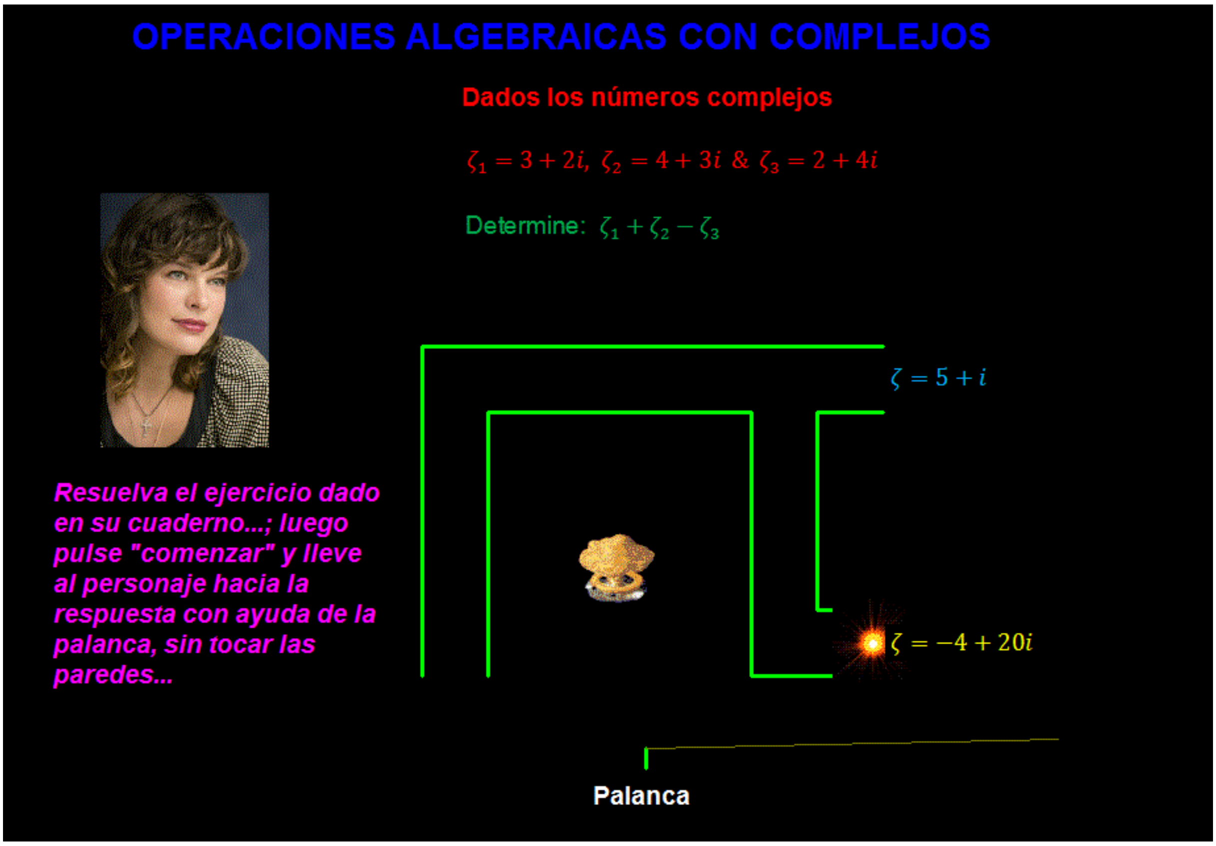
b) Ejercitativas: En este conjunto de animaciones se encuentran desarrollados ejercicios paso a paso, para la compresión total por parte del usuario.

FM17E01
FM17E02
FM17E03

c) Lúdicas: Las animaciones incluidas aqui, sirven para el refuerzo de lo aprendido de una manera entretenida, ya que el usario usando esos conocimientos tiene que alcanzar el objetivo de cada actividad.

FM17L01
FM17L02

6) ANIMACIÓN DE MUESTRA:



Descripción:

Esta es una animación de tipo lúdica, en la cual el usuario refuerza lo aprendido de una manera divertida, llevando al personaje hacia la respuesta correcta, teniendo cuidado de no chocar en las paredes del camino.

1.8 FUNCIONES TRASCENDENTES ELEMENTALES

1) LOGROS DE APRENDIZAJE:

1- Incorporar en sí las expresiones que representan estas funciones.
2- Lograr el correcto uso de estas tablas.
3- Destreza en ejercicios de aplicación.

2) FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA:

Incluimos en esta parte y a manera de formulario de consulta inmediata algunas funciones matemáticas importantes:

a) $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$

b) $e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x \left(Cos\, y + i\, Sen\, y \right)$

c) $e^{zi} = Cos\, z + i\, Sen\, z$

d) $e^{-zi} = Cos\, z - i\, Sen\, z$

e) $\ln z = \ln r + \phi i \quad \{-\pi < \phi < \pi\}$

f) $Sen\, z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}$

g) $Cos\, z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}$

h) $Tan\, z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{i\left(e^{zi} + e^{-zi}\right)}$

i) $Senh\, z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \ldots = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$

j) $Cosh\, z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$

k) $Tanh\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$

Y ahora, en forma tabulada, algunas funciones $w = f\,(x + yi)$, sus partes real e imaginaria, su módulo y su argumento:

FUNCIÓN	PARTE REAL	PARTE IMAGINARIA	MÓDULO	ARGUMENTO
$w = f(x \pm yi)$	$Re(w)$	$Im(w)$	$\lvert w \rvert$	ϕ
$Sen(x \pm yi)$	$Sen\,x\,Cosh\,y$	$\pm Cosx\,Senh\,y$	$\sqrt{Sen^2 x + Senh^2 y}$	$\pm Tan^{-1}(Ctg\,x\,Tanh\,y)$
$Cos(x \pm yi)$	$Cosx\,Cosh\,y$	$\mp Sen\,x\,Senh\,y$	$\sqrt{Cos^2 x + Senh^2 y}$	$\mp Tan^{-1}(Tan\,x\,Tanh\,y)$
$Tan(x \pm yi)$	$\frac{Sen\,2x}{Cos2x + Cosh\,2y}$	$\pm\frac{Senh\,2y}{Cos2x + Cosh\,2y}$	$\frac{\sqrt{Sen^2 2x + Senh^2 2y}}{Cos2x + Cosh\,2y}$	$\pm Tan^{-1}\left(\frac{Senh\,2y}{Sen\,2x}\right)$
$Senh(x \pm yi)$	$Senh\,x\,Cosy$	$\pm Cosh\,x\,Sen\,y$	$\sqrt{Senh^2 x + Sen^2 y}$	$\pm Tan^{-1}(Ctgh\,x\,Tan\,y)$
$Cosh(x \pm yi)$	$Cosh\,x\,Cosy$	$\pm Senh\,x\,Sen\,y$	$\sqrt{Senh^2 x + Cos^2 y}$	$\pm Tan^{-1}(Tanh\,x\,Tan\,y)$
$Tanh(x \pm yi)$	$\frac{Senh\,2x}{Cosh\,2x + Cos2y}$	$\pm\frac{Sen\,2y}{Cosh\,2x + Cos2y}$	$\frac{\sqrt{Senh^2 2x + Sen^2 2y}}{Cosh\,2x + Cos2y}$	$\pm Tan^{-1}\left(\frac{Sen\,2y}{Senh\,2x}\right)$

T a b l a 1. 8. 1

La función $z = f(t)$, con $z = x + yi$ & t un parámetro real, se representa por puntos z que, al variar t, trazan algún tipo de curva sobre el plano complejo, cuyas ecuaciones paramétricas son $x = x(t)$ & $y = y(t)$; en consecuencia, la ecuación matemática de dicha curva en forma compleja es $z = f(t)$.

3) PROBLEMA MODELO:

1.- Demuestre que $Cos\,zi = Cosh\,z$

Desarrollando el miembro de la izquierda, considerando $w = zi$ tenemos:

$$Cosh\,zi = Cosw = \frac{e^{wi} + e^{-wi}}{2} = \frac{e^{wi^2} + e^{-wi^2}}{2} = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

El cual es igual a Cosh z, con lo cual se comprueba lo pedido.

4) EVALUACIÓN DE LOGROS:

a) Complete:

1.- La serie $z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots$ sirve para aproximar la función..........................
……………………………………………………………………………………………………..

2.- La función coseno y coseno hiperbólico se definen mediante:

Cos w & *Cosh w*

b) Demostrar, en su cuaderno de ejercicios, las siguientes igualdades:

1.- $Tan\, z = \dfrac{e^{zi} - e^{-zi}}{i\left(e^{zi} + e^{-zi}\right)}$

2.- $e^{-zi} = Cos\, z - i\, Sen\, z$

5) LISTADO DE ANIMACIONES-DESCRIPCIÓN

a) Conceptuales: Estas animaciones están compuestas por tablas y formularios de las distintas funciones trascendentes.

FM18C01
FM18C02
FM18C03
FM18C04
FM18C05

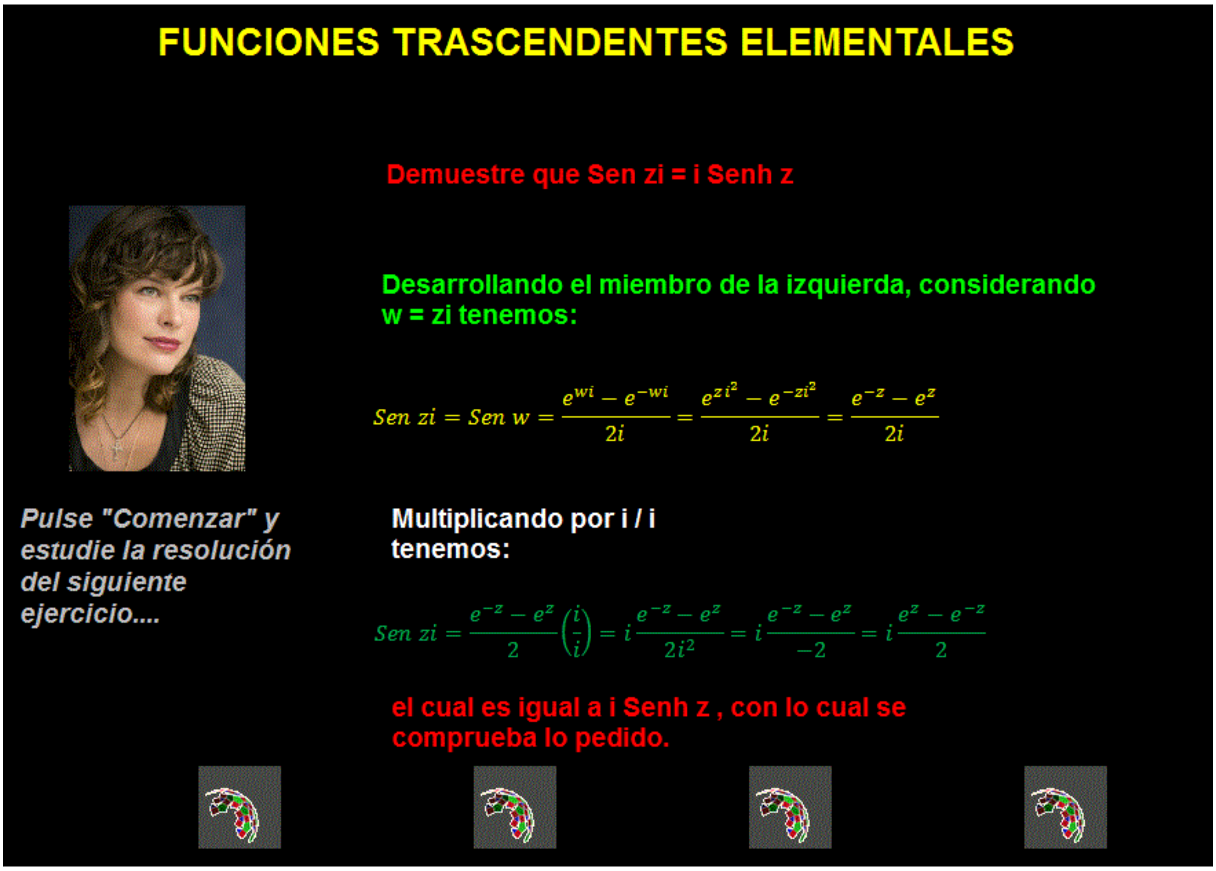
b) Ejercitativas: En estas animaciones, para el buen manejo por parte del usuario de los formularios antes descritos, se han hecho las soluciones de ejercicios y distintas demostraciones.

FM18E01
FM18E02
FM18E03

c) Lúdicas: Estas animaciones están realizadas para poner en práctica los conocimientos adquiridos por parte del usario, mediante retos psicomotrices e intelectuales.

FM18L01
FM18L02
FM18L03

6) ANIMACIÓN DE MUESTRA:



Descripción:

Es una animación de tipo ejercitativa en la cual el usuario puede verificar una igualdad, descrita paso a paso, para su mejor comprensión.

1.9 DERIVACIÓN COMPLEJA

1) LOGROS DE APRENDIZAJE:

1- Entender algunos conceptos concernientes al tema.
2- Vincular los preconceptos de la derivación en el campo real a los del campo complejo.
3- Orientar las técnicas aprendidas de derivación compleja para resolver ejercicios prácticos.

2) FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA:

El límite de una función compleja $w = f(z)$ se define y opera básicamente de manera similar a lo que se hace en el campo de los reales, esto es:

$$\boxed{L = \lim_{z \to z_0} f(z)} \qquad (1.9.1)$$

en donde z_0 es el número complejo al cual tiende z y L es el límite, el cual es también un número complejo.

Sea $w = f(z)$, definida y unívoca en $z = z_0$ y su vecindad; la función $w = f(z)$ es continua en $z = z_0$ si $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. En estas condiciones se cumplen las tres siguientes cuestiones:

1- $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ debe existir.
2- $f(z_0)$ debe existir.
3- $L = f(z_0)$.

Algunos teoremas relacionados con continuidad son:

1- Si $f(z)$ & $g(z)$ son continuas en $z = z_0$, entonces $f(z) \pm g(z)$, $f(z).g(z)$ y $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ son también continuas.

2- Si $f(z)$ es continua en una región cerrada, es también acotada en todos los puntos de dicha región.

3- Si $f(z)$ es continua en una región cerrada, entonces las partes real e imaginaria de $f(z)$ son también continuas en la región.

Se llama derivada $w' = f'(z)$ de una función compleja $w = f(z)$ a la función definida por la conocida expresión:

$$\boxed{w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}} \qquad (1.9.2)$$

y cuando existe dicha derivada en un punto z_0, la función es derivable, o regular, o monógena u holomorfa en dicho punto. Las reglas para la derivación son las mismas que las que se han utilizado en el campo real. Similarmente, la tabla de derivadas del cálculo en el campo real es válida para el caso del campo complejo.

3) PROBLEMA MODELO:

1.- Halle $\lim_{z \to 6+8i} \left(z^4 - 2z^3 + 3z^2 + 7\right)$

$$\lim_{z \to 6+8i} \left(z^4 - 2z^3 + 3z^2 + 7\right) = (6+8i)^4 - 2(6+8i)^3 + 3(6+8i)^2 + 7$$

.

Pero, $6 + 8i = 10(Cos\,0{,}927 + iSen\,0{,}927)$, luego:

$$10^4(Cos\,4.0{,}927 + iSen\,4.0{,}927) - 2.10^3(Cos\,3.0{,}927 + iSen\,3.0{,}927)$$
$$+ 3.10^2(Cos\,2.0{,}927 + iSen\,2.0{,}927) + 7$$

$$L = -8\,432 - 5\,376i + 1\,872 - 704i - 84 + 288i + 7$$

$$L = -6\,637 - 4\,960i$$

2.- Derive la función $w = Sen^3(3z + 4i)$

$$\frac{dw}{dz} = 2Sen(3z + 4i)[Cos(3z + 4i)]$$

$$\frac{dw}{dz} = 6Sen(3z+4i)[Cos(3z+4i)]$$

$$\frac{dw}{dz} = 3Sen(6z+8i)$$

4) EVALUACIÓN DE LOGROS:

a) Complete:

1.- El límite de una función compleja *w = f (z)* con respecto a uno del campo real se comporta……………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………..

2.- Escriba la expresión de la derivada de una función compleja *w = f (z)*

b) Resuelva, en su cuaderno, los siguientes ejercicios:

1.- Halle $\lim\limits_{z \to 1+i} \dfrac{(z^2-1)^2(z+1)}{z^2+2z+1}$

Solución: $-2-i$

2.- Halle $\lim\limits_{z \to 1+i} \dfrac{3z^4-10z^3-6z^2-4z}{z^3-16z}$

Solución: $\dfrac{86+31i}{1+i}$

3.- Halle la segunda derivada de $w = 5e^{z} Sec(1+z)$

Solución: $e^{z}\dfrac{5Sen(2z+2)}{2Cos^{2}(z+1)}$

4.- Halle la cuarta derivada de $w = 4z^{7} + 8Sen(2z) - Cos^{2}(z) + 3e^{2z}$

Solución: $w = 48e^{2z} + 128Sen(2z) - 16Cos^{2}(z) + 3360z^{3} + 8$

5) LISTADO DE ANIMACIONES-DESCRIPCIÓN

a) Conceptuales: Estas animaciones contienen los conceptos, reglas, teoremas y expresiones sobre la derivación en el campo de los complejos.

FM19C01
FM19C02
FM19C03

b) Ejercitativas: Las animaciones aquí propuestas contienen ejercicios resueltos, paso a paso, para que sirvan de guía al usuario y así despejar todas las incertidumbres que puedan presentarse en él, sobre el tema.

FM19E01
FM19E02

c) Lúdicas: Estas animaciones están dedicadas para la retroalimentación del usuario, ya que mediante las actividades de rellenar o unir con líneas propuestas aquí, el usario puede reforzar el aprendizaje adquirido.

FM19L01
FM19L02

6) ANIMACIÓN DE MUESTRA:

Descripción:

Es una animación de tipo lúdica, en la cual el usuario debe rellenar el enunciado con la respuesta correcta, logrando así esta animación en el usuario la retención de un teorema de continuidad en la derivación compleja, todo esto de una manera entretenida.

CONCLUSIONES

- El software Modellus es una gran herramienta dentro de las Tic’s, dado su gran potencial para el diseño de modelos matemáticos, y así facilitando la resolución y compresión de innumerables temas.

- Es útil el manejo de Modellus ya que este tiene una interfaz agradable hacia el usuario, logrando así despertar el interés del uso de este software.

- El uso de animaciones logran captar el interés en la actividad enseñanza-aprendizaje, además de desarrollar otros aspectos como lo emocional, lo social y las funciones psicomotrices, en los usuarios.

- Las animaciones brindan un aprendizaje didáctico e integral en los que las utilicen, además ser una técnica contemporánea y sugestiva.

RECOMENDACIONES

- Para el uso por parte de los estudiantes se sugiere la tutoría por parte de un docente que conozca, en buena medida, la utilización del software.

- Se aconseja que estas animaciones se las estudie de una manera secuencial, tal que sean las conceptuales las primeras en observarse, seguido de las ejercitativas y para finalizar sean las lúdicas.

- Se sugiere que los estudiantes, de manera grupal, se adentren en el uso de Modellus para modelar sus propios ejemplos matemáticos.

- Se recomienda que una vez terminada la animación, el tutor refuerce el contenido de ese tema.

BIBLIOGRAFÍA

- Física Moderna, ALBERTO SANTIAGO AVECILLAS JARA, Cuenca 2008, “Fundamentación Matemática”, pg.07.

- Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera, NAGLE, R. KENT, México 2005, pg.816.

- Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera, EDWARDS, C. HENRY Y PENNEY, DAVID E., México 2009, pg.824.

- Calculus, TOM M. APOSTOL, Volumen 1, 1967 EEUU, pg.666.

- Introducción a las ecuaciones diferenciales, JORGE ADELMO HERNÁNDEZ P. Y RODRIGO RINCÓN Z., Bogotá 2006, pg.165.

DIRECCIONES DE INTERNET

- **http://publiespe.espe.edu.ec/librosvirtuales/ecuaciones-diferenciales/ecuaciones-diferenciales.htm**

- **http://fisica.ciencias.uchile.cl/alejo/clases/mfm2.pdf**

- **http://mathworld.wolfram.com/topics/OrdinaryDifferentialEquations.html**